

Міністерство освіти і науки України  
Державний вищий навчальний заклад  
«Донбаський державний педагогічний університет»  
фізико-математичний факультет  
кафедра математики

**НАВЧАЛЬНА ПРОГРАМА НАВЧАЛЬНОЇ ДИСЦИПЛІНИ**  
**ФУНКЦІОНАЛЬНИЙ АНАЛІЗ**  
підготовки здобувачів ступеня вищої освіти магістр  
галузь 01 освіта за спеціальністю 014 середня освіта (математика)

Слов'янськ — 2016 р.

## РОЗРОБЛЕНО ТА ВНЕСЕНО КАФЕДРОЮ МАТЕМАТИКИ

---

### УКЛАДАЧ ПРОГРАМИ:

С.О. Чайченко, кандидат фізико-математичних наук, доцент

### РЕЦЕНЗЕНТИ:

1. С.М. Чуйко, доктор фізико-математичних наук, професор
2. О.В. Несмелова, кандидат фізико-математичних наук, доцент, вчений секретар Інституту прикладної математики і механіки НАН України

Рекомендовано до впровадження  
науково-методичною радою  
Державного вищого навчального закладу  
«Донбаський державний педагогічний університет»  
«17» лютого 2016 р.  
Протокол № 2

Перший проректор

Набока О.Г.

## ВСТУП

Навчальна програма вивчення дисципліни «Функціональний аналіз» складена відповідно до освітньої програми та навчального плану підготовки здобувачів ступеня вищої освіти магістра, галузь 01 освіта за спеціальністю 014 середня освіта (математика).

**Предметом** вивчення навчальної дисципліни є метричні простори та їх властивості, топологічні простори та їх властивості, лінійні нормовані та евклідові простори, простори лінійних функціоналів, властивості лінійних операторів.

**Міждисциплінарні зв'язки:** курс базується на таких дисциплінах, як алгебра, геометрія, дискретна математика, математичний аналіз та теорія функцій і є базовим для курсів додаткових розділів математичного аналізу.

Програма навчальної дисципліни містить такі змістовні модулі:

1. Метричні та топологічні простори.
2. Лінійні нормовані простори.
3. Лінійні функціонали та оператори.

### 1. Мета й завдання навчальної дисципліни

Метою вивчення навчальної дисципліни «Функціональний аналіз» є опанування класичного арсеналу абстрактних математичних методів аналізу.

Основними завданнями вивчення дисципліни «Функціональний аналіз» є навчити здобувачів вищої освіти застосовувати властивості лінійних нормованих та евклідових просторів, лінійних функціоналів та операторів до розв'язування конкретних задач як теоретичного, так і практичного характеру.

За результатами вивчення дисципліни «Функціональний аналіз» у здобувачів повинні бути сформовані такі компетентності:

*загальні:* володіння системою знань та вмінь, прийомів та методів функціонального аналізу, необхідних для розв'язання задач та формування висновків за відповідними науковими та професійними проблемами, а також при вивченні суміжних дисциплін.

*спеціальні:* оволодіння основними поняттями теорії метричних і лінійних нормованих просторів; знання принципів стискуючих відображень, основних принципів лінійного аналізу; вміння досліджувати на збіжність послідовності елементів метричних просторів, досліджувати множини цих просторів на замкненість, відкритість, компактність; вміння встановлювати неперервність, лінійність або нелінійність операторів, діючих у лінійних нормованих просторах; вміння доводити існування розв'язків окремих типів операторних рівнянь та деяких екстремальних задач у лінійних нормованих просторах.

На вивчення навчальної дисципліни відведено 180 годин / 6 кредитів ECTS.

### 2. Інформаційний обсяг навчальної дисципліни

## **Змістовий модуль 1. Метричні та топологічні простори**

### **Тема 1. Метричні простори**

Визначення і основні приклади метричних просторів. Неперервні відображення метричних просторів. Відношення ізометричності.

Граничні точки. Операція замикання. Збіжність. Щільні підмножини. Сепарабельність. Відкриті та замкнені множини.

Повнота метричного простору. Теорема про вкладені кулі. Теорема Бера про категорії. Поповнення метричного простору.

Принцип стискуючих відображень. Застосування принципу стискуючих відображень до доведення теорем існування та єдиності для диференціальних рівнянь. Застосування принципу стискуючих відображень до інтегральних рівнянь.

### **Тема 2. Топологічні простори**

Означення та приклади топологічних просторів. Відкриті та замкнені множини. Оператор замикання. Порівняння топологій. Аксиоми віддільності. Топологічні простори як узагальнення метричних.

База топологічного простору. Передбаза топологічного простору. Збіжність в топологічних просторах.

Неперервні відображення. Гомеоморфізм. Компактність в топологічних просторах. Неперервні відображення компактних просторів. Зліченна компактність. Локально компактні простори. Псевдокомпактні простори.

Метризованість топологічних просторів. Метризаційні теореми. Цілком обмежені множини. Компактність у метричному просторі. Передкомпактність. Теорема Арцела. Теорема Пеано. Рівномірна неперервність. Неперервні відображення метричних компактів.

## **Змістовий модуль 2. Функціональні простори**

### **Тема 3. Нескінченновимірні лінійні простори**

Лінійні простори. Приклади нескінченновимірних лінійних просторів. Підпростори. Фактор-простори. Лінійні функціонали. Геометричний зміст лінійного функціонала.

Опуклі множини. Опуклі тіла. Однорідно-опуклі функціонали. Функціонал Мінковського. Теорема Хана-Банаха. Слабкі топології. Слабка топологія в топологічному векторному просторі. Слабка топологія спряженого простору.

### **Тема 4. Нормовані простори**

Нормовані простори. Підпростори нормованого простору. Фактор-простори нормованого простору. Банахові простори.

Лінійні функціонали на нормованих просторах. Теорема Хана-Банаха в нормованому просторі. Спряжений простір. Сильна топологія в спряженому просторі. Другий спряжений простір.

Слабка топологія та слабка збіжність в лінійних топологічних просторах. Слабка збіжність в нормованих просторах. Слабка топологія та слабка збіжність в спряженому просторі.

### **Тема 5. Евклідові простори**

Визначення та приклади евклідових просторів. Існування ортогональних базисів. Процедура ортогоналізації. Ряд Фур'є. Нерівність Бесселя. Замкнені ортогональні системи. Рівність Парсеваля. Теореми Вейерштраса.

Теорема Ріса-Фішера. Гільбертові простори. Теорема про ізоморфізм для гільбертових просторів. Ортогональне доповнення. Пряма сума. Характеристична властивість евклідових просторів.

## **Змістовий модуль 3. Лінійні функціонали та лінійні оператори**

### **Тема 6. Лінійні функціонали та узагальнені функції**

Лінійні функціонали. Неперервність, обмеженість та норма. Приклади лінійних неперервних функціоналів.

Спряжені простори. Слабка збіжність. Простори основних та узагальнених функцій. Диференціювання узагальнених функцій.

### **Тема 7. Лінійні оператори**

Означення та приклади лінійних операторів. Норма оператора. Неперервність та обмеженість оператора. Сума та добуток лінійних операторів.

Обернені оператори. Спряжені оператори. Спряжений оператор в евклідовому просторі. Самоспряжені оператори. Спектр оператора та резольвента.

### **Тема 8. Компактні оператори**

Визначення, властивості та приклади компактних операторів. Основні властивості компактних операторів. Власні значення компактного оператора.

Компактні оператори в гільбертовому просторі. Самоспряжені компактні оператори в гільбертовому просторі.

## **3. Рекомендована література**

### **Основна**

1. Банах С. Курс функціонального аналізу / С. Банах. — К.: Рад. шк., 1948.
2. Виленкин Н. Я. Функциональный анализ / Н. Я. Виленкин и др. — М.: Наука, 1964.

3. Давидов М.О. Додаткові розділи математичного аналізу (Теорія функцій і функціональний аналіз) / М.О. Давидов. – К.: Вища школа, 1971. – 439 с.
4. Колмогоров А.М. Елементи теорії функцій і функціонального аналізу / А.М. Колмогоров, С.В. Фомін. – К.: Вища школа, 1974. – 456с.
5. Натансон И.П. Теория функций вещественной переменной / И.П. Натансон. – М.: Наука, 1974. – 480с.
6. Очан Ю.С. Сборник задач по математическому анализу: Общая теория множеств и функций: Учебное пособие / Ю.С. Очан. – М.: Просвещение, 1981. – 271с.
7. Треногин В.А. Задачи и упражнения по функциональному анализу / В.А. Треногин. – М.: Физматлит, 2002. – 240 с.
8. Треногин В.А. Функциональный анализ / В.А. Треногин. – М.: Наука. ГРФМЛ, 1980. – 496с.
9. Федак І.В. Функціональний аналіз. Навчальний посібник для студентів спеціальностей “Інформатика” та “Прикладна математика” / І.В. Федак. – Івано-Франківськ: Сімик, 2011. – 120 с.

#### Додаткова

1. Антоневи́ч А.Б. Функциональный анализ и интегральные уравнения: Учебник / А.Б. Антоневи́ч, Я.В. Радыно. – Минск: БГУ, 2006. – 430с.
2. Антоневи́ч А.Б. Функциональный анализ и интегральные уравнения: Лаб. практикум: Учеб. пособие. / Под редакцией А.Б. Антоневи́ча и Я.В. Радыно. – Минск: БГУ, 2006. – 179с.
3. Иосида К. Функциональный анализ / К. Иосида. – М.: Мир, 1967. – 624 с.
4. Кириллов А.А. Теоремы и задачи функционального анализа / А.А. Кириллов, А.Д. Гвишиани. – М.: Наука, 1979. – 384с.
5. Крейн С. Г. Функциональный анализ / С. Г. Крейн. – М.: Наука, 1964. – 424 с
6. Пим Дж. Приложение функционального анализа и теория операторов / Дж. Пим, В. Хатсон. – М.: Мир, 1983. – 431 с.
7. Рисс Ф. Лекции по функциональному анализу / Ф. Рисс, Б. Сёкефальви-Надь. – М.: Мир, 1979. – 588с.
8. Рудин У. Функциональный анализ / У. Рудин. – М.: Мир, 1975. – 443 с.
9. Соболев В.И. Лекции по дополнительным главам математического анализа / В.И. Соболев. – М.: Наука, 1968. – 288с.
10. Шилов Г.Е. Математический анализ. Специальный курс / Г.Е. Шилов. – М.: ГИФМЛ, 1962. – 436с.

12. Эдвардс К. Функциональный анализ. Теория и приложение / К. Эдвардс. – М.: Мир, 1967. – 1071 с.

Електронні ресурси: <http://ru.wikipedia.org>, <http://www.allmath.com>

**4. Форма підсумкового контролю успішності навчання:** іспит.

**5. Засоби діагностики успішності навчання:** тестові, індивідуальні, групові, творчі завдання.





