ФІЗИКО-МАТЕМАТИЧНИЙ ФАКУЛЬТЕТ · 1946 ·

Кадубовський О.А.,
Беседін Б.Б.,
Сьомкін В.С.

СЕРІЯ: ВИКЛАДАЧІ ДДПУ – УЧНЯМ, СТУДЕНТАМ, ВЧИТЕЛЯМ

ОЛІМПІАДНІ ЗАДАЧІ

РОЗВ′ЯЗАННЯ ЗАДАЧ
ІІ етапу
Всеукраїнської олімпіади
з математики – 2018

Випуск 21

навчальний посібник

умови
відповіді
розв'язання

Слов'янськ – 2019

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Державний вищий навчальний заклад
«Донбаський державний педагогічний університет»

ОЛІМПІАДНІ ЗАДАЧІ

РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ
II ЕТАПУ
ВСЕУКРАЇНСЬКОЇ УЧНІВСЬКОЇ ОЛІМПІАДИ
З МАТЕМАТИКИ – 2018
5 – 11 класи

Рекомендовано вченою радою
ДВНЗ «Донбаський державний педагогічний університет»
як навчальний посібник
для факультативних занять з математики

Слов'янськ – 2019

УДК 51 (075.3)

ББК 22.1 я 721

О-543

Розв'язання задач II етапу Всеукраїнської учнівської олімпіади з математики – 2018 : навчальний посібник / О. А. Кадубовський, Б. Б. Беседін, В. С. Сьомкін. Слов'янськ: вид. центр «Маторін», 2019. 100 с. (Викладачі ДДПУ – учням, студентам, вчителям, вип. 21).

Адресовано вчителям та викладачам математики, як посібник для проведення гурткових і факультативних занять при підготовці до учнівських математичних олімпіад. Буде корисним учням закладів загальної середньої освіти та студентам математичних спеціальностей педагогічних закладів вищої освіти.

РЕКОМЕНДОВАНО
вченою радою Державного вищого навчального закладу
«Донбаський державний педагогічний університет»,
Протокол №10 від 20.06.2019 р.

Рецензенти:

кандидат фізико-математичних наук **В.Є. ВЕЛИЧКО**,
ДВНЗ «Донбаський державний педагогічний університет»,
в.о. завідувача кафедри методики навчання математики та методики навчання інформатики

вчитель математики вищої категорії **І.Г. ВОЛОШИНА**,
Донецький обласний інститут післядипломної педагогічної освіти, методист відділу математики.

Відповідальний за випуск:

кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри математики та інформатики О.А. Кадубовський

Зміст

ВІД АВТОРІВ

«Якщо ви хочете навчитися плавати, то сміливо заходьте у воду, а якщо хочете навчитися розв'язувати задачі, то розв'язуйте їх!.»

Д. Пойа[1]

Даний посібник є 21-им випуском серії «Викладачі ДДПУ – учням, студентам, вчителям», заснованої у 2008 році. Посібник містить розв'язання задач II етапу (районного, міського) Всеукраїнської учнівської олімпіади з математики, який проводився 17 листопада 2018 року відповідно до наказу МОН України від 02.08.2018 за №849 «Про проведення Всеукраїнських учнівських олімпіад і турнірів з навчальних предметів у 2018/2019 навчальному році» та наказу Департаменту освіти і науки Донецької облдержадміністрації за №374/163-18-ОД від 24.10.2018 «Про проведення II етапу Всеукраїнських учнівських олімпіад з навчальних предметів у 2018/2019 навчальному році».

Як і в попередніх випусках для більшості задач олімпіади пропонується кілька способів розв'язання, обсяг викладок яких інколи суттєво відрізняється. Такий підхід ні в якому разі не передбачає оцінки доцільності або порівняння того чи іншого із запропонованих методів. Навпаки, оскільки кожна олімпіадна задача є, в певному розумінні, унікальною і вимагає особливого ставлення, то головна мета авторів посібника – «донести» до вчителів і учнів якомога більше корисних математичних ідей і принципів та показати їх застосування.

---

[1] Пойа Д. Математическое открытие. М., 1970. 452 с.

Нагадаємо, що принципами в математиці називають деякі положення або методи, які використовуються в доведеннях математичних тверджень та під час розв’язання різноманітних задач. Дуже часто учні зустрічаються з ними при розв'язуванні олімпіадних задач з математики. Перш за все учні, які беруть участь в олімпіадах, повинні володіти значною кількістю принципів. Нажаль шкільна програма не передбачає знайомства з більшістю із них. З основними математичними принципами можна ознайомитись у наведеній літературі, зокрема в [13][2].

У посібнику до окремих задач наводяться «доповнення», сенс яких полягає:

– у формулюванні двоїстої або схожої задачі,

– в узагальненні запропонованої задачі.

На думку авторів такі доповнення повинні активізувати і зацікавити учнів при підготовці до майбутніх олімпіад.

Автори посібника та керівництво фізико-математичного факультету ДВНЗ «Донбаський державний педагогічний університет» висловлюють щиру подяку всім вчителям м. Слов'янськ, які беруть участь в організації та проведенні учнівських олімпіад з математики й семінарів, присвячених аналізу їх результатів.

Маємо надію, що представлений посібник буде корисним керівникам математичних гуртків та їх зацікавленим учням, стане для багатьох з них поштовхом до більш змістовних міркувань і буде спонукати до систематичного ознайомлення з тим чи іншим розділом математики.

Вчіться творчому пошуку в процесі розв'язування задач!

Із найщирішими побажаннями, викладачі фізико-математичного факультету ДВНЗ «Донбаський державний педагогічний університет».

28.02.2019

[2] Сарана О.А. Математичні олімпіади: просте і складне поруч: Навч. посібн. – К.: А.С.К., 2005. – 344с.

«Рано или поздно всякая правильная математическая идея находит применение в том или ином деле»

А.Н. Крылов

«Каждый настолько превосходит других, насколько он больше других упражняется»

Я.А. Коменский

Звернення до самих юних та вже досвідчених учасників олімпіад з математики

«... Смягчается времен суровость, теряют новизну слова.
Талант – единственная новость, которая всегда нова.
Меняются репертуары, стареет жизни ералаш.
Нельзя привыкнуть только к дару, когда он так велик, как Ваш ...»[3]

Б. Пастернак

Юний друже! Для повного та бездоганного (в сенсі дотримання належного рівня математичної строгості) розв'язання задач вкрай необхідно навчитись ретельно аналізувати умову самої задачі. І якщо умовою задачі (ненавмисно або ж навпаки – навмисно) закладена «певна неоднозначність / недовизначеність», це зовсім не означає, що «задача не є коректною». Навпаки – саме такі задачі є прикладом так званих задач на дослідження, при розв'язуванні яких важливо розуміти, що розв'язати задачу на дослідження, зокрема математичну, це дати категоричну відповідь в кожному з можливих випадків (- обмежень) шляхом ретельного аналізу / дослідження повної системи всіх можливих додаткових умов-обмежень, кожна з яких:

по-перше – дозволяє повною мірою конкретизувати поставлене питання-завдання;

по-друге – не наділяє умову надлишковими даними (які можна одержати з певної частини вихідної інформації);

по-третє – не суперечить даним або наслідкам з них.

[3] Уривок із вірша «Актриса» (1957 р.), присвяченого Анастасії Платонівні Зуєвій – актрисі театру і кіно

«Среди равных умов при одинаковости прочих условий превосходит тот, кто знает геометрию»

Б. Паскаль

«Искусство решать геометрические задачи чем-то напоминает трюки иллюзионистов – иногда, даже зная решение задачи, трудно понять, как можно было до него додуматься»

И.Д. Новиков

ЧАСТИНА І.
УМОВИ ЗАДАЧ

5 клас

1. Відновити цифри у наведеному прикладі на ділення.

$$
\begin{array}{r|l}
-\,*\;*\;*\;6 & 3 \\ \cline{2-2}
1\;2 & *\,5\,* \\ \cline{1-1}
-\,1\;* & \\
\; & \\ \cline{1-1}
-\,* & \\
* & \\ \cline{1-1}
\mathbf{0} &
\end{array}
$$

2. Знайти три останні цифри добутку всіх натуральних чисел від 1 до 17.

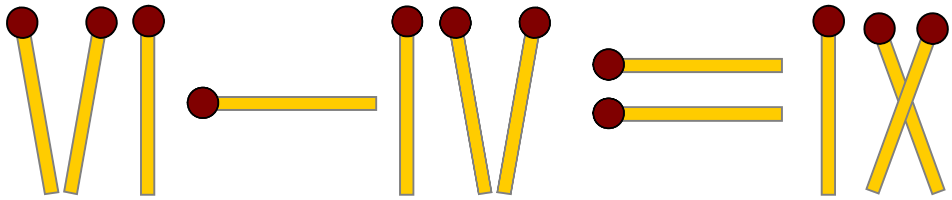
3. Батько старший за сина у 9 разів, а сума їхніх років становить 30. Через скільки років батько стане старшим за сина удвічі?

4. Софія та Марія мешкають в одному під'їзді багатоповерхового будинку. Причому Софія живе на 4-му, а Марія на 2-му поверсі. Піднімаючись (від вхідної двері під'їзду) до своєї квартири Софія нарахувала 60 сходинок. Скільки сходинок від вхідної двері під'їзду до квартири Марії, якщо:

А) немає сходинок від вхідної двері під'їзду до майданчику на 1 поверсі?

Б) є шість сходинок від вхідної двері під'їзду до майданчику на 1 поверсі?

5. За допомогою сірників (римських цифр) записана числова рівність у римській системі числення.



Перекласти один сірник так, щоб наведена числова рівність стала правильною. Знайти два можливі розв'язки задачі.

Примітка:

I – **1**; **II** – **2**; **III** – **3**; **IV** – **4**; **V** – **5**;
VI – **6**; **VII** – **7**; **VIII** – **8**; **IX** – **9**; **X** – **10**.

6 клас

1. Яку найменшу кількість рівних відрізків необхідно взяти, щоб скласти три п'ятикутники, у яких рівні сторони? Відповідь обґрунтуйте.

2. У першості з волейболу було зіграно 21 матч, при цьому кожна команда зіграла з іншою по одному разу. Скільки команд брало участь у першості?

3. Знайти суму

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+...+\frac{1}{2017\cdot 2018}+\frac{1}{2018\cdot 2019}$$

та записати відповідь у вигляді звичайного дробу.

4. У двох рибалок запитали: «Скільки риби у ваших кошиках?».

«У моєму кошику половина числа рибин, що знаходяться у кошику мого товариша, та ще 10», – відповів перший рибалка.

«А у моєму кошику стільки рибин, скільки у кошику мого товариша та ще 20», – відповів другий рибалка.

Скільки рибин у кожного з рибалок?

5. Двоє хлопчиків пливли в човні проти течії річки. Один з них випадково скинув у річку свого капелюха. Хлопчики помітили це лише через 15 хвилин і відразу повернули човна та попливли навздогін за капелюхом із тією самою власною швидкістю. Через який час вони наздоженуть капелюх?

7 клас

1. Подати у вигляді суми квадратів двох многочленів наступний вираз

$$2a^2 + 2b^2$$

2. Що швидше: проїхати весь шлях на автомобілі, чи 75% шляху літаком, швидкість якого у 10 разів більша за швидкість авто, а решту 25% шляху – на мотоциклі, швидкість якого у 4 рази менша за швидкість автомобіля? Відповідь обґрунтуйте.

3. Дано дві точки A і B, відстань між якими становить n та число $m > 0$. На прямій AB знайти усі точки X, для яких виконується рівність $XA - XB = m$.

4. На острові мешкають два племені: «аборигени» та «прибульці». «Аборигени» завжди кажуть правду, а «прибульці» завжди брешуть. Мандрівник винайняв у провідники туземця – мешканця цього острова. Подорожуючи островом вони побачили вдалечині ще одного мешканця острова. Мандрівник відіслав провідника уперед дізнатися, до якого племені належить той туземець (якого вони побачили). Провідник повернувся та сказав, що той туземець – «абориген». Ким був провідник: «прибульцем» чи «аборигеном»?

5. За яких умов рівняння $ax + b = cx + d$ не має коренів?

8 клас

1. У класі із 40 учнів 30 уміють плавати, 27 – грати в шахи і 5 не вміють ні плавати, ні грати в шахи. Скільки учнів уміють плавати і грати в шахи?

2. Знайти найменше натуральне число, сума цифр якого дорівнює 2018.

3. За $A\%$ загальної кількості товару одержали $P\%$ прибутку. З яким відсотком прибутку треба продавати решту товару, щоб загальний прибуток становив $R\%$?

4. Із вершини B паралелограма $ABCD$ опустили перпендикуляр BE на діагональ AC. Через точку A проведено пряму m, перпендикулярну до прямої AD, а через точку C – пряму n, перпендикулярну до прямої CD. Доведіть, що точка перетину прямих m і n належить прямій BE.

5. При яких значеннях параметра a рівняння $\dfrac{x-5}{x+2018} = \dfrac{a-x}{x+2018}$ не має коренів?

9 клас

1. У шухляді знаходяться 40 кульок чотирьох кольорів: 17 зелених, 12 синіх, 5 червоних та 6 білих. Яку найменшу кількість кульок необхідно витягнути, щоб серед них гарантовано було 12 кульок одного кольору?

2. У трикутнику ABC медіана AF дорівнює стороні AB. На продовженні сторони AB за точку B відмітили точку D таку, що $AB = BD$. Пряма DF перетинає сторону AC у точці E. Доведіть, що $EF = EC$.

3. Знайти всі тризначні (натуральні) числа, кожне з яких має точно три дільники.

4. На колі дано 2018 точок (які є вершинами правильного 2018-кутника). Двоє друзів по черзі проводять хорди цього кола з кінцями у зазначених точках, причому не дозволяється проводити хорду, яка перетинає хоча б одну з вже проведених хорд. Виграє той, хто останнім проводить хорду. Якої стратегії повинен дотримуватися перший з гравців (той, хто проводить першу хорду), щоб виграти.

5. Розв'язати рівняння з параметром

$$\frac{x^2}{x^2-8x+15}+\frac{2018}{x-a}=\frac{a^2}{(x-3)(x-5)}-\frac{2018}{a-x}.$$

10 клас

1. Функція $f(x)$ має вигляд $f(x)=\dfrac{ax+b}{cx+d}$, де a,b,c,d – деякі числа. Відомо, що $f(0)=1$, $f(1)=0$, $f(2)=3$. Чому дорівнює $f(3)$?

2. Доведіть, що для додатних чисел a,b,c,d справджується нерівність

$$(a+b+c+d)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}\right)\ge 16.$$

3. Дано рівнобедрений трикутник ABC (з основою BC). На промені BC від точки B відкладено відрізок BD, довжина якого більша за довжину сторони BC. Доведіть, що різниця відстаней від точки D до прямих AB і AC не залежить від положення точки D на промені, що є доповняльним до променя CB.

4. Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} x^2+xy-2y^2+8x+10y+12=0 \\ x^2+3xy+2y^2-x+y-6=0 \end{cases}$$

5. Кути опуклого многокутника утворюють арифметичну прогресію $\alpha, \frac{3\alpha}{2}, 2\alpha, \ldots$. Знайти кути такого многокутника з найбільшим можливим числом сторін.

11 клас

1. Довести нерівність

$$\frac{x}{yz} + \frac{y}{xz} + \frac{z}{xy} \geq \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z},$$

де $x > 0, y > 0, z > 0$.

2. Знайти період функції

$$y = \sin^6 x + \cos^6 x.$$

3. Випускники ліцею, які склали ЗНО з математики та фізики, розповідаючи класному керівникові про свої результати (набрані бали), зазначили наступне:

Андрій: «Я набрав 180 балів з математики та 180 балів з фізики»;

Василь: «Я набрав 170 балів з математики та 190 балів з фізики»;

Сашко: «Я набрав 170 балів з математики та 180 балів з фізики».

Потім їм стало соромно і вони зізналися, що кожен з них говорив не про свої бали, а про бали одного з двох інших. Класний керівник посміхнувся та сказав, що може визначити бали кожного з них, задавши лише одне питання одному з них щодо балів з одного зі своїх предметів, але попросив відповісти на питання правдиво.

Кому вчитель задав питання і як після цього визначив оцінки кожного з них?

4. Висота тетраедра $ABCD$, яка опущена з вершини D, проходить через точку перетину висот $\triangle ABC$. Відомо, що $DB = b$, $DC = c$, $\angle BDC = 90^\circ$. Знайти відношення площ граней ADB і ADC.

5. Скільки коренів має рівняння

$$\sqrt{x+a} = \log_{\frac{1}{3}}(x - 2a)$$

при різних значеннях параметра a?

ЧАСТИНА II.
ВІДПОВІДІ ДО ЗАДАЧ

5 клас

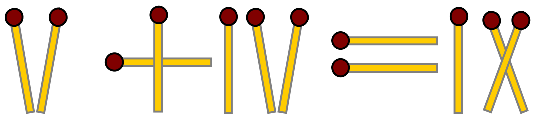
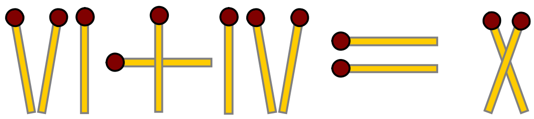
1. Відповідь: $1356 : 3 = 452$.

2. Відповідь: 000.

3. Відповідь: через 21 рік.

4. Відповідь: А) 20 сходинок; Б) 24 сходинки.

5. Відповідь:

 , 

6 клас

1. Відповідь: 12.

2. Відповідь: 7.

3. Відповідь: $\dfrac{2018}{2019}$

4. Відповідь: у І-го рибалки – 40, а у ІІ-го – 60 рибин.

5. Відповідь: через 15 хвилин.

7 клас

1. Відповідь: $(a+b)^2 + (a-b)^2$.

2. Відповідь: швидше проїхати весь шлях на автомобілі.

3. Відповідь: 1) якщо $m < n$, то єдина точка (внутрішня точка X відрізка AB, яка відстоїть від кінців A і B на відстанях $\frac{n+m}{2}$ та $\frac{n-m}{2}$ відповідно; 2) якщо $m > n$, то на прямій AB не існує жодної такої точки; 3) якщо $m = n$, то шуканині точки утворюють промінь, доповняльний до променя BA.

4. Відповідь: провідник був «аборигеном».

5. Відповідь: $\begin{cases} a - c = 0 \\ d - b \neq 0 \end{cases}$

8 клас

1. Відповідь: 22.

2. Відповідь: $x = \overline{2\underbrace{9...9}_{224}} = 2 \cdot 10^{224} + \left(1 \cdot 10^{225} - 1\right)$.

3. Відповідь: $X = \dfrac{100 \cdot R - A \cdot P}{100 - A}$.

4. **Відповідь:** – задача на доведення.

5. **Відповідь:** $a = -4041$.

9 клас

1. **Відповідь:** 34 кульки.

2. **Відповідь:** – задача на доведення.

3. **Відповідь:** $121; 169; 289; 361; 529; 841; 961$.

4. **Відповідь:** перший з гравців (той, хто проводить першу хорду), щоб виграти, повинен:

1) провести діаметр (сполучити дві діаметрально протилежні точки);
2) дзеркально повторювати хорди другого гравця.

5. **Відповідь:**

якщо $a \in \{-5;-3;0\}$, то рівняння коренів не має;

якщо $a \in R \setminus \{-5;-3;0\}$, то рівняння має один корінь $x = -a$.

10 клас

1. **Відповідь:** $f(3) = 2$.

2. **Відповідь:** – задача на доведення.

3. **Відповідь:** – задача на доведення.

4. **Відповідь:** $(-4;2)$, $(-3;3)$, $(-2;0)$.

5. **Відповідь:** $54^0, 81^0, 108^0, 135^0, 162^0$.

11 клас

1. **Відповідь:** – задача на доведення.

2. **Відповідь:** $T_0 = \dfrac{\pi}{2}$.

3. **Відповідь:** вчитель задав питання саме Сашкові; причому:

якщо Сашко скаже «170» або «190», то учитель зробить висновок: Сашко – «170, 190»; Андрій – «170, 180», Василь – «180, 180»;

якщо ж Сашко скаже «180», то учитель зробить наступний висновок: Сашко – «180, 180»; Андрій – «170, 190», Василь – «170, 180».

4. **Відповідь:** $S_{ADB} : S_{ADC} = b : c$.

5. **Відповідь:**

якщо $a \in \left[-\frac{1}{3};+\infty\right)$, то рівняння має 1 (один) корінь;

якщо $a \in \left(-\infty;\frac{1}{3}\right)$, то рівняння коренів не має.

ЧАСТИНА III.
РОЗВ’ЯЗАННЯ ЗАДАЧ

5 клас

Задача 1

Відновити цифри у наведеному прикладі на ділення.

$$\begin{array}{ccccc|l}
- & \ast & \ast & \ast & \mathbf{6} & \mathbf{3} \\ \cline{6-6}
 & \mathbf{1} & \mathbf{2} & & & \ast\,\mathbf{5}\,\ast \\ \cline{2-3}
 & - & \mathbf{1} & \ast & & \\
 & & \ast & \ast & & \\ \cline{3-4}
 & & & - & \ast & \\
 & & & & \ast & \\ \cline{5-5}
 & & & & \mathbf{0} &
\end{array}$$

Розв’язання

Заради зручності позначимо невідомі цифри діленого та дільника за допомогою літер a, b, c та d, f (відповідно) так, як показано нижче

$$\begin{array}{ccccc|l}
- & a & b & c & \mathbf{6} & \mathbf{3} \\ \cline{6-6}
 & \mathbf{1} & \mathbf{2} & & & d5f \\ \cline{2-3}
 & - & \mathbf{1} & \ast & & \\
 & & \ast & \ast & & \\ \cline{3-4}
 & & & - & \ast & \\
 & & & & \ast & \\ \cline{5-5}
 & & & & \mathbf{0} &
\end{array}$$

1) Оскільки $d \times 3 = 12$, то $d = 4$;
2) Оскільки $\overline{ab} - 12 = 1$, то $\overline{ab} = 13$, звідки $a = 1, b = 3$;
3) Оскільки $\overline{1c} - 15 = 0$, то $c = 5$;
4) Оскільки $6 - 3 \times f = 0$, то $f = 2$.

Отже, шукане ділене має вид 1356, а шуканий дільник – 452.

Відповідь: $1356 : 3 = 452$.

Задача 2

Знайти три останні цифри добутку всіх натуральних чисел від 1 до 17.

Розв'язання

$$1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8\cdot9\cdot10\cdot11\cdot12\cdot13\cdot14\cdot15\cdot16\cdot17=$$
$$=2\cdot3\cdot4\cdot\underline{5}\cdot6\cdot7\cdot8\cdot9\cdot\underline{10}\cdot11\cdot12\cdot13\cdot14\cdot\underline{15}\cdot16\cdot17=$$
$$=(2\cdot5)\cdot3\cdot(4\cdot15)\cdot6\cdot7\cdot8\cdot9\cdot(10)\cdot11\cdot12\cdot13\cdot14\cdot16\cdot17=$$
$$=3\cdot6\cdot7\cdot8\cdot9\cdot11\cdot12\cdot13\cdot14\cdot16\cdot17\cdot(2\cdot5)\cdot(4\cdot15)\cdot(10)=$$
$$=3\cdot6\cdot7\cdot8\cdot9\cdot11\cdot12\cdot13\cdot14\cdot16\cdot17\cdot10\cdot60\cdot10=$$
$$=3\cdot6\cdot7\cdot8\cdot9\cdot11\cdot12\cdot13\cdot14\cdot16\cdot17\cdot6\times1000.$$

Відповідь: 000.

ДОПОВНЕННЯ до задач 2.

! Спробуйте самостійно встановити, що: добуток всіх натуральних чисел від 1 до 27 (включно) закінчується 6-ма нулями, а добуток всіх натуральних чисел від 1 до 67 – 15-ма нулями.

? Скількома нулями закінчується добуток всіх натуральних чисел від 1 до 100 включно?

Відповідь: 24-ма.

? Скількома нулями закінчується добуток всіх натуральних чисел від 1 до 127 включно?

Відповідь: 31-им.

Інформація «на виріст» та для старшокласників

Добуток натуральних чисел від 1 до n називають **факторіалом** натурального числа n та (заради скорочення запису) позначають $n!$, тобто

$$1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot(n-1)\cdot n=n!$$

Добре відомо, що задачу 2 можна розв'язати в загальному вигляді, а саме: число $k(n)$ нулів, якими закінчується добуток всіх натуральних чисел від 1 до n включно можна знайти за допомого співвідношення

$$k(n)=\left[\frac{n}{5}\right]+\left[\frac{n}{5^2}\right]+\left[\frac{n}{5^3}\right]+\ldots \qquad \textbf{(5.1)}$$

де $[q]$ – «ціла частина числа q» – найменше ціле число, яке не перевищує числа q (наприклад: $[11]=11$; $[5{,}3]=5$; $[0{,}7]=0$; $[-0{,}7]=-1$; $[-1{,}2]=-2$)

Задача 3

Батько старший за сина у 9 разів, а сума їхніх років становить 30. Через скільки років батько стане старшим за сина удвічі?

Розв'язання

1 спосіб

1) Нехай сину x років, тоді батьку $9x$ років. Оскільки сума їхніх років становить 30, то маємо рівняння

$$10 \cdot x = 30,$$

звідки $x = 30 : 10 = 3$.

Таким чином, синові 3 роки, а батькові – $9 \cdot 3 = 27$ років.

2) Нехай батько стане старшим за сина удвічі через y років. Тоді через y років батькові буде $(27 + y)$, а синові – $(3 + y)$ років та матиме місце рівняння

$$2(3 + y) = 27 + y,$$

звідки

$$6 + 2y = 27 + y,$$

$$2y - y = 27 - 6,$$

$$y = 21.$$

Таким чином, батько стане старшим за сина удвічі через 21 рік.

Відповідь: через 21 рік.

Задача 4

Софія та Марія мешкають в одному під'їзді багатоповерхового будинку. Причому Софія живе на 4-му, а Марія на 2-му поверсі. Піднімаючись (від вхідної двері під'їзду) до своєї квартири Софія нарахувала 60 сходинок. Скільки сходинок від вхідної двері під'їзду до квартири Марії, якщо:

А) немає сходинок від вхідної двері під'їзду до майданчику на 1 поверсі?

Б) є шість сходинок від вхідної двері під'їзду до майданчику на 1 поверсі?

Розв'язання

Нехай x – число сходів (в одному сходинковому прольоті – рис. 5.1). Тоді:

від майданчика на першому поверсі до майданчика на другому поверсі $2x$ сходинок (рис. 5.2), така ж сама кількість сходинок від майданчика на другому до майданчика на третьому поверсі

та стільки ж від майданчика на третьому до майданчика на четвертому поверсі.

Тобто, від майданчика на першому поверсі до майданчика на четвертому поверсі точно $2x+2x+2x=6x$ сходинок.

Рис. 5.1

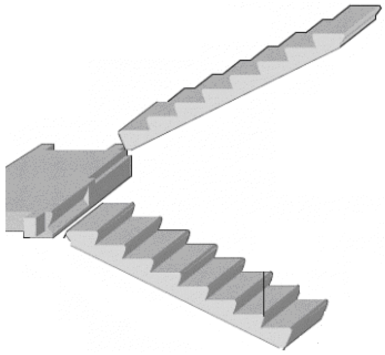


Рис. 5.2

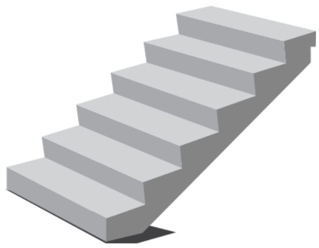


Рис. 5.3

А) Нехай (за проектом будинку) немає сходинок від вхідної двері під'їзду до майданчику на 1 поверсі.

Оскільки Софія живе на 4-му поверсі та піднімаючись (від вхідної двері під'їзду) до своєї квартири вона нарахувала 60 сходинок, то має місце рівняння

$$6x=60\text{, звідки } x=10.$$

І тому число сходинок від вхідної двері під'їзду до квартири Марії становить $2\cdot 10=20$.

Б) Нехай (за проектом будинку) є шість сходинок від вхідної двері під'їзду до майданчику на 1 поверсі (рис. 5.3).

Оскільки Софія живе на 4-му поверсі та піднімаючись (від вхідної двері під'їзду) до своєї квартири вона нарахувала 60 сходинок, то має місце рівняння

$$6x+6=60\text{, звідки } 6x=54,\ x=9.$$

І тому число сходинок від вхідної двері під'їзду до квартири Марії становить $6+2\cdot 9=24$.

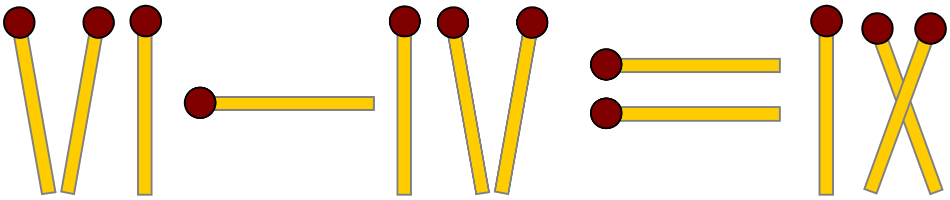
Відповідь: А) 20 сходинок; Б) 24 сходинки.

ДОПОВНЕННЯ до задач 4.

?! Софія та Марія мешкають в одному багатоповерховому будинку. На кожному поверсі в усіх під'їздах розташовано по 4 квартири. Софія мешкає на 5 поверсі у квартирі №83, а Марія – на 3 поверсі у квартирі №169. Скільки поверхів у цьому будинку?

Задача 5

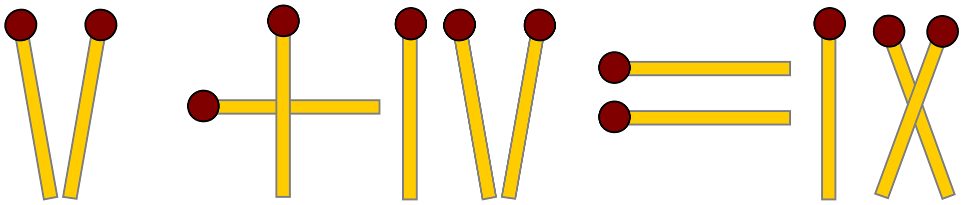
За допомогою сірників (римських цифр) записана числова рівність у римській системі числення.



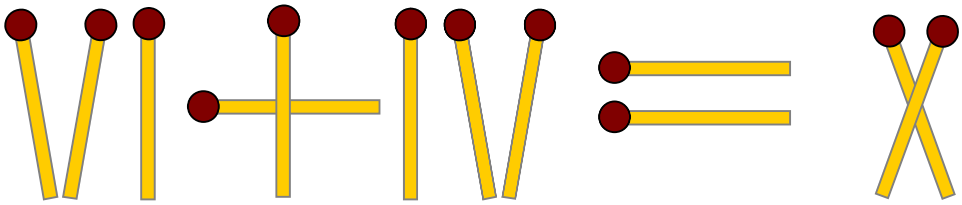
Перекласти один сірник так, щоб наведена числова рівність стала правильною. Знайти два можливі розв'язки задачі.
(Примітка: **I – 1; II – 2; III – 3; IV – 4; V – 5; VI – 6; VII – 7; VIII – 8; IX – 9; X – 10**)

Розв'язання

Перший з можливих розв'язків («5+4=9») можна подати у вигляді



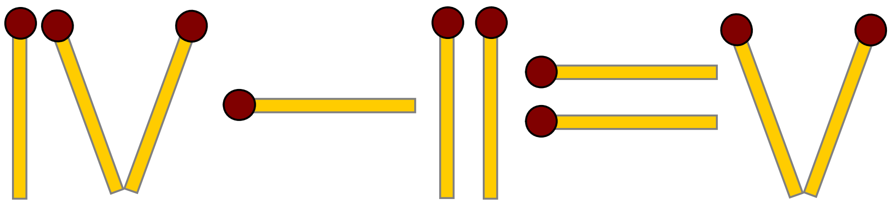
а другий можливий розв'язок («6+4=10») – у наступному вигляді



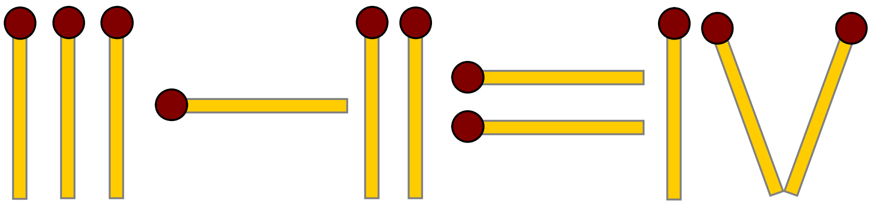
ДОПОВНЕННЯ до задач 5.

?! Перекласти один сірник так, щоб наведена числова рівність стала правильною

1)



2)



6 клас

Задача 1

Перш ніж перейти до безпосереднього розв'язання задачі маємо своїм обов'язком навести основні означення.

Ламаною *називають фігуру, яка складається з n точок* A_1, A_2, ..., A_n *(вершини ламаної), послідовно сполучених відрізками* A_1A_2, A_2A_3, ..., $A_{n-1}A_n$ *(ланками ламаної). Ламану називають* ***простою****, якщо вона не має самоперетинів. Ламану називають* ***замкненою****, якщо її кінці збігаються (співпадають).*

Многокутником *називають просту замкнену ламану, у якої жодні дві сусідні ланки не належать одній прямій.*

Многокутник називають ***опуклим****, якщо він лежить в одній півплощині відносно* <u>*кожної*</u> *з прямих, що містить його сторони – рис.6.1. (Градусна міра кожного внутрішнього кута опуклого многокутника є меншою за* 180^0 *!)*

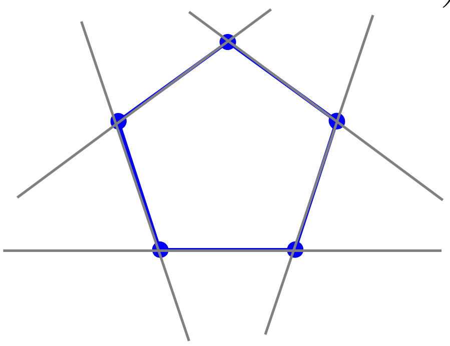


Рис. 6.1

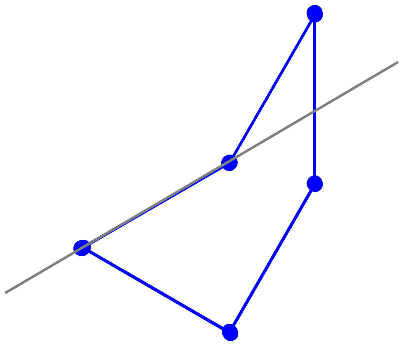


Рис. 6.2

Многокутник називають таким, що ***не є опуклим****, якщо він лежить в різних півплощинах відносно* <u>*хоча б однієї*</u> *з прямих, що містить його сторони – рис.6.2.*

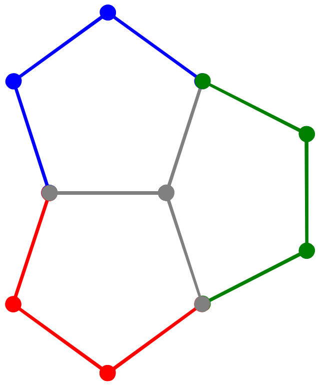


Рис. 6.3 (12)

Зауважимо, що майже всі учні розв'язали запропоновану задачу з додатковими (*хоч і найбільш поширеними та загальноприйнятими для їх вікової категорії, проте*) обмеженнями – п'ятикутники опуклі та без накладань їх внутрішніх частин.

За таких обмежень найменша кількість рівних відрізків, яку необхідно взяти, щоб скласти три п'ятикутники, дійсно, становить **12** – рис. 6.3.

Проте умова задачі зовсім не передбачала зазначених обмежень.

Розв'язання

(***для випадку опуклих 5-кутників***

без накладань їх внутрішніх частин)

Очевидно, що найбільша кількість рівних відрізків, яку необхідно взяти, щоб скласти три п'ятикутники, становить **15** (ніякі два з п'ятикутників не мають жодної спільної сторони) – рис. 6.4.

Зменшення числа відрізків для утворення трьох опуклих рівносторонніх п'ятикутників без накладань їх внутрішніх частин на 1, 2 і 3 відрізки є цілком досяжним. Приклади реалізації зазначених зменшень («існування відповідних розташувань трьох опуклих рівносторонніх п'ятикутників») зображено на рис. 6.5., 6.6. та 6.7. відповідно.

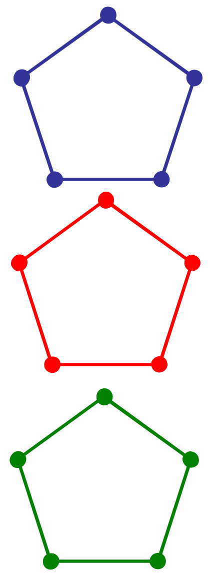


Рис. 6.4 (15)

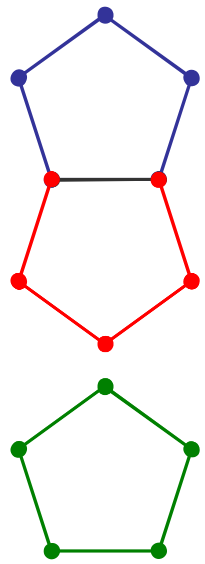


Рис. 6.5 (14)

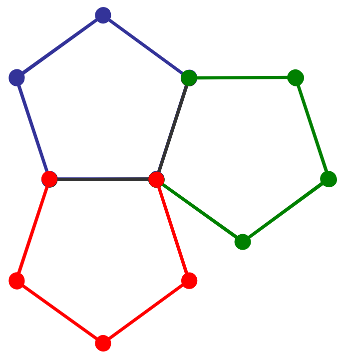


Рис. 6.6 (13)

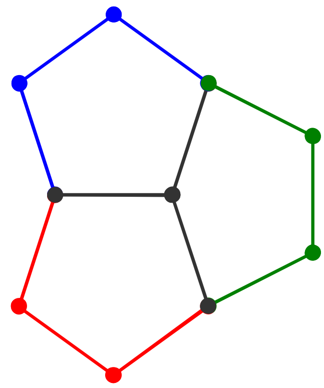


Рис. 6.7 (12)

Методом від супротивного покажемо, що **12** *– найменша кількість рівних відрізків, яку необхідно взяти, щоб скласти три опуклих рівносторонніх п'ятикутники без накладань їх внутрішніх частин.*

Якщо припустити, що для утворення трьох опуклих рівносторонніх п'ятикутників без накладань їх внутрішніх частин можна використати менше ніж 12 рівних відрізків (наприклад – 11), то з цього випливало би що принаймні два п'ятикутники повинні мати (більше ніж одну спільну сторону) щонайменше дві спільні сторони.

Припустимо що дві спільні сторони є послідовними, тоді решта сторін кожного з таких п'ятикутників повинна розташовуватися по один бік відносно прямої l, яка визначається кінцями їх спільної ламаної – рис. 6.8.

Оскільки п'ятикутники опуклі, то їх решти сторін – в одній півплощині відносно прямої l. Звідки випливає, що трикутник, який визначається спільною ламаною, є гарантовано спільною внутрішньою частиною п'ятикутників – рис. 6.8.

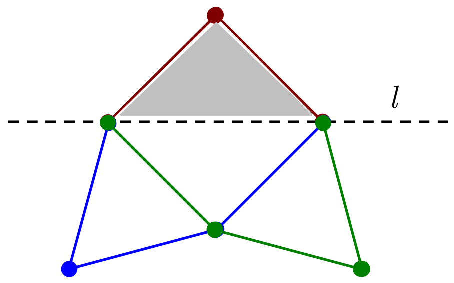


Рис. 6.8

Тепер припустимо, що дві спільні сторони двох опуклих рівносторонніх п'ятикутників не є послідовними (сусідніми / суміжними). Розглянемо пряму l, яка проходить через кінці двох спільних сторін так, що ці спільні сторони знаходяться в одній півплощині відносно l. Тоді можливими є лише 2 випадки:

1) відносно прямої l знаходяться однакові кількості їх сторін – рис. 6.9, що можливо лише за умов, коли п'ятикутники цілком співпадають;

2) відносно прямої l знаходяться різні кількості їх сторін – рис. 6.10; що можливо лише за наявності «спільного ромбу», який гарантовано є спільною внутрішньою частиною таких п'ятикутників.

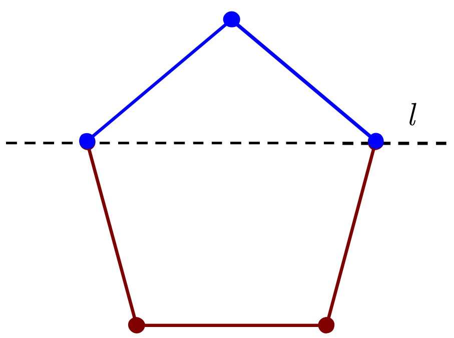


Рис. 6.9

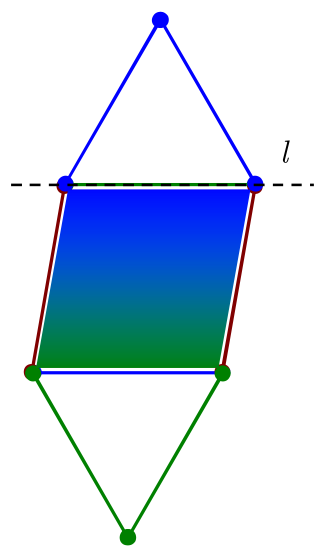


Рис. 6.10

Таким чином, найменша кількість рівних відрізків, яку необхідно взяти, щоб скласти три опуклих рівносторонніх п'ятикутники без накладань їх внутрішніх частин, становить **12**.

ДОПОВНЕННЯ до задачі 2.

Інформація «на виріст» та для старшокласників

Очевидно, що якщо у довільного п'ятикутника видалити одну будь-яку зі сторін або ж дві несуміжні його сторони, то решта сторін будуть містити всі його вершини.

Крім того, безпосередні спостереження-умовиводи щодо взаємного розташування двох п'ятикутників на площині можна викласти у вигляді наступних (очевидних) **властивостей**:

В1. Якщо 4 сторони двох п'ятикутників співпадають, то такі два п'ятикутника співпадають цілком (бо ці 4 сторони містять всі п'ять вершин, які є спільними для обох п'ятикутників).

В2. Якщо у двох п'ятикутників співпадають дві послідовні (сусідні / суміжні) сторони та третя сторона, яка лежить проти кута, утвореного першими двома, то такі два п'ятикутники також цілком співпадають (бо ці 3 спільні сторони містять всі п'ять вершин, які є спільними для обох п'ятикутників).

Наслідки

Н1. Найбільша кількість спільних сторін двох різних (не співпадаючих шляхом накладання) п'ятикутників становить 3 (три), які обов'язково є послідовними їх сторонами.

Н2. З двох не співпадаючих *рівносторонніх* п'ятикутників *з трьома спільними сторонами*, обов'язково один є опуклим, а інший не є опуклим – рис. 6.11, а найменша кількість рівних відрізків, яку необхідно взяти, щоб скласти два рівносторонніх п'ятикутники, становить **7**.

Н3. Два не співпадаючих **<u>опуклих</u>** *рівносторонніх* п'ятикутника можуть мати щонайбільше дві спільні сторони, спільною внутрішньою частиною яких обов'язково є ромб – рис. 6.8, 6.10.

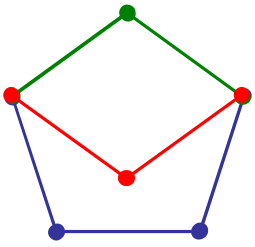


Рис. 6.11

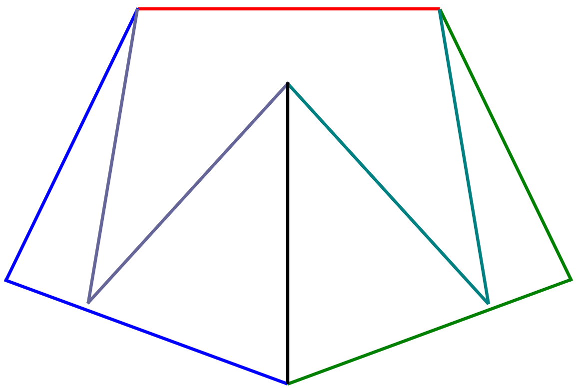


Рис. 6.12 (**10**)

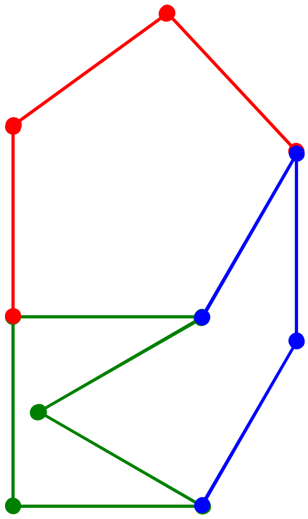


Рис. 6.13 (**11**)

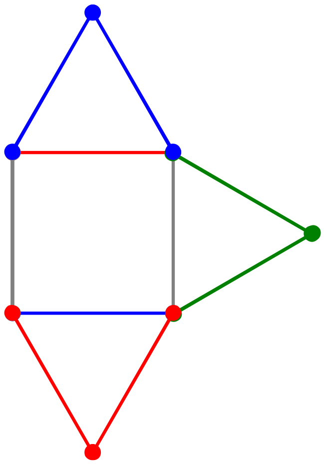


Рис. 6.14 (**10**)

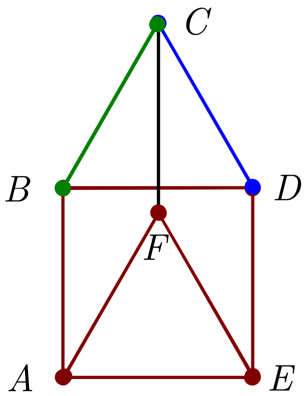


Рис. 6.15 (**9**)

1 – *CBAEF*

2 – *CDEAF*

3 – *ABDEF*

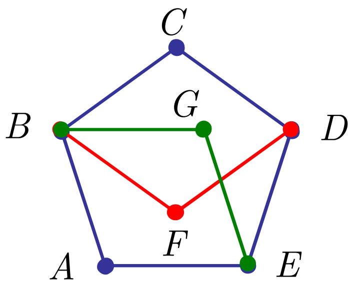


Рис. 6.16 (**9**)

1 – *ABCDE*

2 – *ABFDE*

3 – *BCDEG*

Доведіть, що найменша кількість рівних відрізків, яку необхідно взяти, щоб скласти три рівносторонніх п'ятикутники:

1) *на множині опуклих 5-кутників без накладань ста*новить 12;
2) на множині опуклих та не опуклих 5-кутників без накладань – 11;
3) на множині не опуклих 5-кутників без накладань – 10;
4) на множині опуклих 5-кутників з накладанням – 10;
5) на множині не опуклих 5-кутників з накладанням – 9;
6) на множині опуклих та не опуклих 5-кутників з накладанням – 9.

Задача 2

У першості з волейболу було зіграно 21 матч, при цьому кожна команда зіграла з іншою по одному разу. Скільки команд брало участь у першості?

Розв'язання

Нехай n – кількість команд, які брали участь у першості з волейболу. Оскільки кожна з n команд зіграла з кожною з інших (*а таких для кожної з команд точно* $(n-1)$ *команд-суперників*) команд лише по одному разу, то кожна з команд зіграла точно $(n-1)$ матч.

Оскільки всього n команд і кожна з них провела $(n-1)$ матч, то «сумарна кількість» проведених матчів становить $n\cdot(n-1)$. Однак, при зазначеному способі підрахунку загальної кількості проведених матчів, кожен матч пораховано **двічі**. Тому у першості з волейболу було проведено всього $\dfrac{n\cdot(n-1)}{2}$ (різних) матчів.

З іншого боку (за умовою) – у першості з волейболу було проведено 21 (різних) матчів. І тому має місце рівність

$n\cdot(n-1)=42$, звідки $n\cdot(n-1)=42$, або ж $(n-1)\cdot n=42$.

Оскільки n – натуральне число, яке очевидно, є більшим за 1-цю, то, з урахуванням останньої рівності, треба знайти таку пару послідовних натуральних чисел, добуток яких становить 42. Не важко перевірити, що такими числами є лише числа **6** і **7**. Звідки й випливає, що $n=7$.

Відповідь: 7.

ДОПОВНЕННЯ до задачі 2.

?! Семеро друзів вирішили обмінятися своїми фотокартками на згадку один про одного. Яка (найменша) кількість фотокарток знадобиться для здійснення їх наміру?

! Діагоналлю многокутника називають відрізок, який сполучає дві його несусідні вершини. Переконайтеся, що число (різних) діагоналей в (опуклому) 4-кутнику становить 2; 5-кутнику – 5; 6-кутнику – 9.

?! Доведіть, що число $k(n)$ різних діагоналей в (опуклому) $n-$кутнику можна знайти за формулою $k(n)=\frac{n\cdot(n-3)}{2}$.

Задача 3

Знайти суму $\quad \dfrac{1}{1\cdot 2}+\dfrac{1}{2\cdot 3}+\dfrac{1}{3\cdot 4}+...+\dfrac{1}{2017\cdot 2018}+\dfrac{1}{2018\cdot 2019}$

Розв'язання

Не важко переконатися, що для будь-якого натурального n має місце рівність

$$\frac{1}{n\cdot(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}.$$

Тому $\quad \dfrac{1}{1\cdot 2}+\dfrac{1}{2\cdot 3}+\dfrac{1}{3\cdot 4}+...+\dfrac{1}{2017\cdot 2018}+\dfrac{1}{2018\cdot 2019}=$

$$=\frac{1}{1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-...+\frac{1}{2017}-\frac{1}{2018}+\frac{1}{2018}-\frac{1}{2019}=$$

$$=\frac{1}{1}+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}-...+\frac{1}{2018}-\frac{1}{2018}-\frac{1}{2019}=$$

$$=\frac{1}{1}+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\right)-...+\left(\frac{1}{2018}-\frac{1}{2018}\right)-\frac{1}{2019}=$$

$$=1-\frac{1}{2019}=\frac{2019-1}{2019}=\frac{2018}{2019}.$$

Відповідь: $\quad \dfrac{2018}{2019}$.

ДОПОВНЕННЯ до задачі 3.

?! Знайти суму $\quad \dfrac{1}{10\cdot 11}+\dfrac{1}{11\cdot 12}+...+\dfrac{1}{98\cdot 99}+\dfrac{1}{99\cdot 100}$.

?! Знайти суму $\quad \dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{6}+\dfrac{1}{12}+\dfrac{1}{20}+...+\dfrac{1}{k(k+1)}+...+\dfrac{1}{9900}$.

?! Знайти суму

$$\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{1}{2\cdot 3\cdot 4}+\frac{1}{3\cdot 4\cdot 5}+...+\frac{1}{2017\cdot 2018\cdot 2019}+\frac{1}{2018\cdot 2019\cdot 2020}.$$

А чи знали Ви, що:

! $\quad 1+2+...+(n-1)+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$.

! $\quad 1^2+2^2+3^2+...+(n-1)^2+n^2=\dfrac{n\cdot(n+1)\cdot(2n+1)}{6}$.

! $\quad 1^3+2^3+3^3+...+(n-1)^3+n^3=\dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$

! $\quad 1^3+2^3+3^3+...+(n-1)^3+n^3=\left(1+2+3+...+(n-1)+n\right)^2$.

Задача 4

У двох рибалок запитали: «Скільки риби у ваших кошиках?». «У моєму кошику половина числа рибин, що знаходяться у кошику мого товариша, та ще 10», – відповів перший рибалка. «А у моєму кошику стільки рибин, скільки у кошику мого товариша та ще 20», – відповів другий рибалка. Скільки рибин у кожного з рибалок?

Розв'язання

1 спосіб

Нехай у кошику **другого** рибалки було x рибин.

Оскільки «у кошику першого рибалки знаходиться половина числа рибин, що знаходяться у кошику другого, та ще 10 рибин», то у кошику **першого** рибалки знаходиться $\left(\frac{x}{2}+10\right)$ рибин.

А з того, що «у кошику другого рибалки знаходиться стільки рибин, скільки у кошику першого та ще 20 рибин», маємо рівняння

$$x=\frac{x}{2}+10+20,$$

звідки $\frac{x}{2}=30$, а $x=60$.

Таким чином у кошику другого рибалки було 60, а у кошику першого – 40 рибин.

2 спосіб

Нехай у кошику першого рибалки було x рибин.

Оскільки у кошику другого рибалки знаходиться стільки рибин, скільки у кошику першого та ще 20 рибин, то у кошику другого рибалки $(x+20)$ рибин.

Оскільки у кошику першого рибалки знаходиться половина числа рибин, що знаходяться у кошику другого, та ще 10 рибин, то забравши з кошика першого рибалки 10 рибин одержимо кількість вдвічі меншу за кількість рибин у кошику другого рибалки, або, що теж саме – кількість $(x+20)$ рибин у кошику другого рибалки буде вдвічі більшою за число $(x-10)$. Тобто, має місце рівняння

$$x+20=2(x-10),$$

звідки $x+20=2x-20$, $x+40=2x$, $40=x$.

Таким чином у кошику першого рибалки було 40, а у кошику другого – 60 рибин.

3 спосіб («на виріст» та для старшокласників)

Нехай у кошику першого рибалки було x рибин, а у кошику другого рибалки – y рибин.

Оскільки у кошику першого рибалки знаходиться половина числа рибин, що знаходяться у кошику другого, та ще 10 рибин, то має місце рівняння

$$x = \frac{y}{2} + 10\text{, звідки } 2x = y + 20 \text{ або ж}$$

$$y = 2x - 20. \tag{1}$$

Оскільки у кошику другого рибалки знаходиться стільки рибин, скільки у кошику першого та ще 20 рибин, то має місце рівняння

$$y = x + 20. \tag{2}$$

З урахуванням рівнянь (1) і (2), маємо рівняння

$$2x - 20 = x + 20,$$

звідки $2x - x = 20 + 20$ або ж $x = 40$.

Оскільки $x = 40$, то з урахуванням рівняння (2), маємо, що

$$y = 40 + 20 = 60.$$

Відповідь: у І-го рибалки – 40, а у ІІ-го – 60 рибин.

Задача 5

Двоє хлопчиків пливли в човні проти течії річки. Один з них випадково скинув у річку свого капелюха. Хлопчики помітили це лише через 15 хвилин і відразу повернули човна та попливли навздогін за капелюхом із тією самою власною швидкістю. Через який час вони наздоженуть капелюх?

Розв'язання

1 спосіб[4]

Швидкість віддалення човна і капелюха – це сума швидкості човна проти течії та швидкості течії, а швидкість зближення човна і капелюха – це різниця між швидкістю човна за течією і швидкістю течії.

Віддалення і зближення відбуваються на однакову відстань і з однаковою швидкістю.

Отже, час руху від капелюха і до нього однаковий та становить 15 хвилин.

[4] Лук'янова С. Розв'язування текстових задач арифметичними способами : 5–6 кл. – К. : Вид. дім «Шкіл. світ» : Вид. Л.Галіцина, 2006. – 128 с. – (Б-ка «Шкіл. світу»). – Бібліогр.: с. 127.

2 спосіб

Нехай a – швидкість човна, а b – швидкість течії річки, які (за умовою задачі) є величинами сталими, причому $a > b$.

Тоді рухаючись 15 хв. проти течії річки човен подолав $(a-b)\cdot 15$ м., а капелюх, рухаючись 15 хв. за течією річки, – $b\cdot 15$ м. І тому на момент часу, коли човен почав наздоганяти капелюх, відстань між ними становила $(a-b)\cdot 15 + b\cdot 15 = a\cdot 15$ м.

Нехай далі x – час, через який човен, наздожене капелюх. Тоді за цей час човен подолає відстань $(a+b)x$ м., а капелюх – $b\cdot x$ м. Оскільки різниця їх відстаней становить $15a$, то одержуємо рівняння

$$(a+b)x - b\cdot x = a\cdot 15,$$

звідки $ax + bx - bx = 15a$, $ax = 15a$, $x = 15$.

Таким чином, човен наздожене капелюх через 15 хвилин.

Наочно-табличне подання деталізованих розрахунків до 2-го способу розв'язання задачі:

	Відстань S м.	*Час* t хв.	Швидкість *човна* $v_{вл}$ м./хв.	Швидкість *течії* $v_{теч}$ м./хв.	*Швидкість* (відносно берегу) v м./хв.
1) З моменту коли капелюх потрапив у річку до моменту, коли з'ясували, що капелюх у воді (позаду)					
човен проти течії	$(a-b)\cdot 15$	15	a	b	$a-b$
капелюх за течією	$b\cdot 15$	15	a	b	b
2) В момент часу, коли човен почав наздоганяти капелюх					
	$(a-b)\cdot 15 + b\cdot 15 = a\cdot 15$	– відстань між човном та капелюхом			
3) На момент часу, коли човен наздогнав капелюх					
	Нехай	x	– шуканий час наздогнання		
човен за течією	$(a+b)x$	x	a	b	$a+b$
капелюх за течією	$b\cdot x$	x	a	b	b
	$(a+b)x - b\cdot x = a\cdot 15$	$\Rightarrow x = 15$.			

Відповідь: хлопчики наздоженуть капелюх через 15 хвилин.

ДОПОВНЕННЯ до задачі 5.

?! Пароплав за течією проходить відстань між двома містами A та B за 3 доби, а повертається назад за 4 доби. Скільки діб буде пливти пліт від одного міста до іншого?

7 клас

Задача 1

Подати у вигляді суми квадратів двох многочленів наступний вираз

$$2a^2+2b^2$$

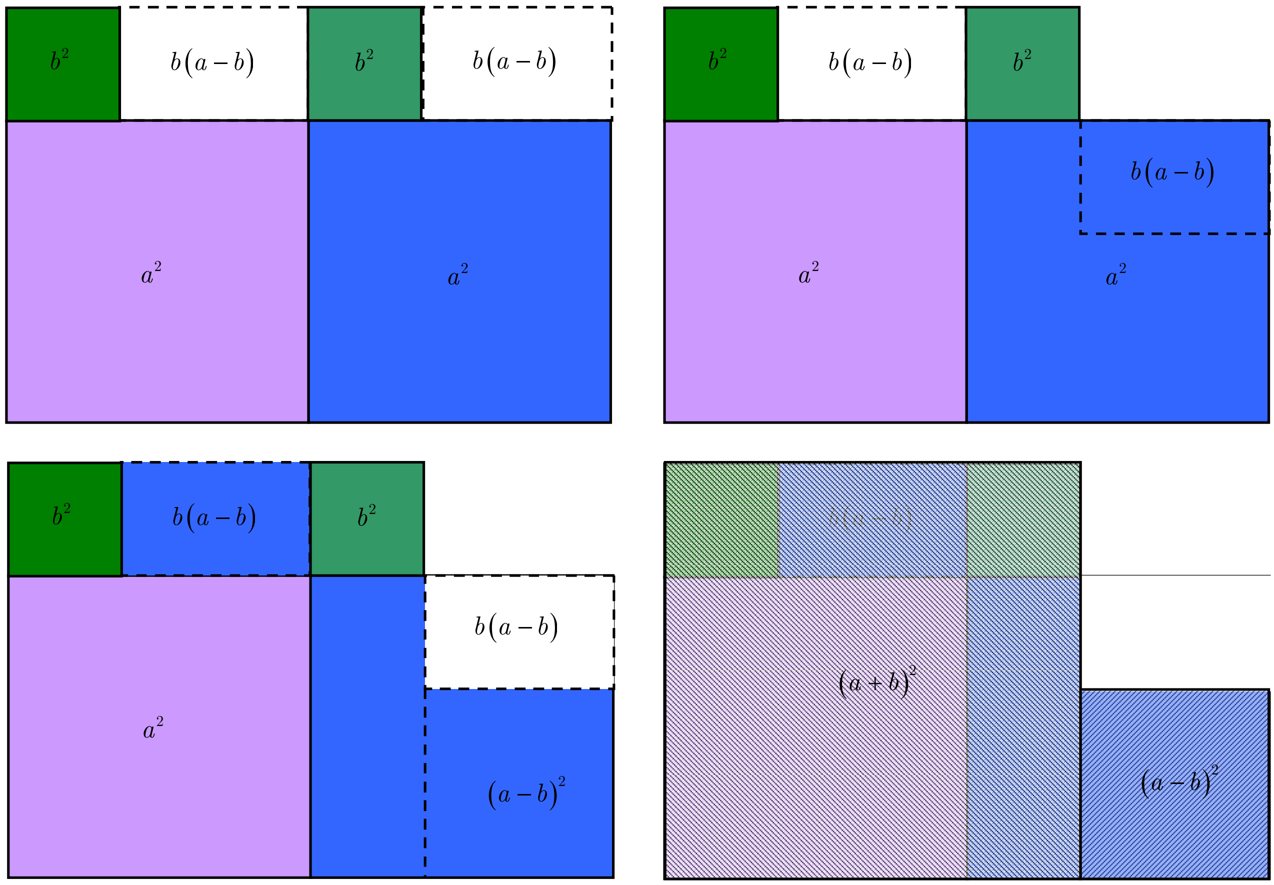
Розв'язання

1 спосіб

$2a^2+2b^2=$

$$=a^2+b^2+a^2+b^2=\left(a^2+2ab+b^2\right)+\left(a^2-2ab+b^2\right)=\left(a+b\right)^2+\left(a-b\right)^2.$$

2 спосіб – «перекладемо цеглинку»



Відповідь: $\left(a+b\right)^2+\left(a-b\right)^2$.

ДОПОВНЕННЯ до задачі 1.

?! Подати у вигляді суми квадратів двох многочленів наступний вираз

$$2a^2+2b^2+2c^2+4ab.$$

?! Подати у вигляді суми квадратів двох многочленів наступний вираз

$$2a^2+2b^2+2c^2+2d^2+4ab+4cd.$$

Задача 2

Що швидше: проїхати весь шлях на автомобілі, чи 75% шляху літаком, швидкість якого у 10 разів більша за швидкість авто, а решту 25% шляху – на мотоциклі, швидкість якого у 4 рази менша за швидкість автомобіля? Відповідь обґрунтуйте.

Розв'язання

1 спосіб

Оскільки швидкість мотоциклу у 4 рази менша за швидкість авто і мотоциклом необхідно подолати відстань у 4 рази меншу за відстань, яку повинно подолати авто, то на подолання цих відстаней мотоцикл і авто, рухаючись з відповідними швидкостями, однаковий час.

А, з урахуванням того, що певний час треба витратити на переліт літаком, маємо що швидше проїхати весь шлях на авто ніж літаком та мотоциклом долаючи зазначені відстані з відповідними швидкостями.

2 спосіб

Нехай швидкість мотоцикла становить x (км/год), тоді швидкість автомобіля $4x$ (км/год), а швидкість літака – $40x$ (км/год).

Нехай далі S – 25% всього шляху, тоді 75% всього шляху становить $3S$, а весь шлях – $4S$.

Щоб проїхати весь шлях на автомобілі, знадобиться час

$$T_1 = \frac{4S}{4x} = \frac{S}{x},$$

а щоб подолати 75% шляху літаком і решту 25% шляху – на мотоциклі, знадобиться час

$$T_2 = \frac{3S}{40x} + \frac{S}{x} = \frac{3S}{40x} + T_1,$$

звідки $T_2 > T_1$

Відповідь: швидше проїхати весь шлях на авто.

ДОПОВНЕННЯ до задачі 2.

?! Що швидше: проїхати весь шлях на автомобілі, чи $\frac{5}{6}$ шляху літаком, швидкість якого у 10 разів більша за швидкість авто, а решту шляху – на мотоциклі, швидкість якого у 4 рази менша за швидкість автомобіля?

Задача 4

На острові мешкають два племені: «аборигени» та «прибульці». «Аборигени» завжди кажуть правду, а «прибульці» завжди брешуть. Мандрівник винайняв у провідники туземця – мешканця цього острова. Подорожуючи островом вони побачили вдалечині ще одного мешканця острова. Мандрівник відіслав провідника уперед дізнатися, до якого племені належить той туземець (якого вони побачили). Провідник повернувся та сказав, що той туземець – «абориген». Ким був провідник: «прибульцем» чи «аборигеном»?

Розв'язання

Туземець, якого побачили мандрівник і його провідник, в будь-якому випадку скаже, що він є «аборигеном». Дійсно:

якщо туземець є «аборигеном», то скаже правду про те, що він є «аборигеном»;

якщо ж туземець є «прибульцем», то обов'язково збреше, сказавши, що він є «аборигеном».

Оскільки провідник повернувся та сказав, що той туземець – «абориген», то провідник правдиво передав інформацію від туземця. Таким чином, провідник мандрівника є «аборигеном».

Відповідь: провідник був «аборигеном».

ДОПОВНЕННЯ до задачі 4.

?! Ви прокинулися в одній з кімнат лабіринту, в якій є двоє дверей. Одна з них – на волю, інша – знов до лабіринту. В кімнаті знаходиться чоловік, який знає яка з дверей куди виводить. Чоловікові можна задати одне будь-яке просте питання. Відомо, що цей чоловік в один день бреше, а в іншій говорить правду (по черзі). Яке питання Вам необхідно задати тому чоловікові, щоб вийти з лабіринту?

?! Ви потрапили у лабіринт. Довго блукали й, нарешті, знемагаючи, потрапили в кімнату, з якої виводять 2-є дверей: одні на волю, інші – до неминучої загибелі. У кожних дверей сидить вартовий. Один завжди бреше, а інший завжди говорить тільки правду. Ви не знаєте, де які двері й хто є хто. Яке одне питання ви повинні задати, щоб визначити правильні двері?

Задача 3

Дано дві точки A і B, відстань між якими становить n та число $m > 0$. На прямій AB знайти усі точки X, для яких виконується рівність $XA - XB = m$.

Розв'язання

Розглянемо пряму MN, яка містить дві дані точки A і B, причому: точка A «лежить між» точками M і B, а точка B – «між» точками A і N – рис. 7.3.1.

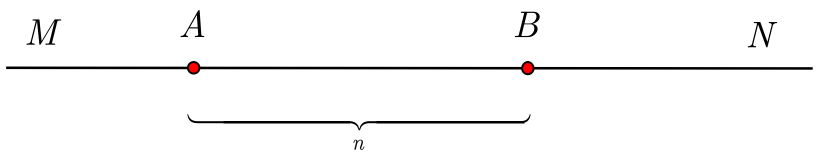


Рис. 7.3.1

Очевидно, що для додатних чисел m і n можливими є лише три випадки: $m > n$; $m = n$; $m < n$.

1) Для кожної точки X, яка належить променю AM, довжина відрізка XA буде меншою за довжину відрізка XB, тобто $XA - XB < 0$; і тому на промені AM не існує жодної точки X, яка б задовольняла умову задачі ($XA - XB = m > 0$).

2) Для кожної точки X, яка належить променю BN, різниця $XA - XB$ становить $AB = n$. І тому:

2.1) якщо $m \neq n$, то на промені BN не існує жодної точки X, яка б задовольняла умову задачі ($XA - XB = m$);

2.2) якщо ж $m = n$, то кожна точка променя BN задовольняє умову задачі – рис. 7.3.2.

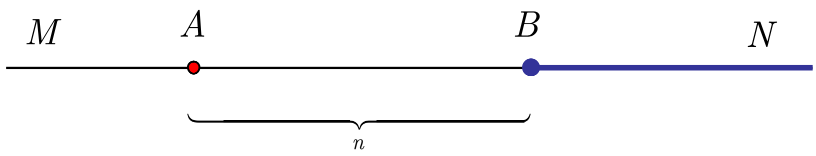


Рис. 7.3.2

3) Для кожної точки X, яка є внутрішньою точкою відрізка AB, різниця $XA - XB < n$. І тому:

3.1) якщо $m \geq n$, то $XA - XB < n \leq m$, і тому всередині відрізка AB не існує жодної точки X, яка б задовольняла умову задачі ($XA - XB = m$);

3.2) якщо $m < n$, то всередині відрізка AB існує єдина точка X, яка задовольняє умову задачі.

3.2.1) Доведемо існування та з'ясуємо положення зазначеної точки X відносно кінців відрізка AB:

нехай $AX = y$, тоді $XB = n - y$ і тому, з урахуванням рівності $XA - XB = m$, маємо рівняння $y - (n - y) = m$,

звідки $2y - n = m$, $2y - n = m$, $y = \dfrac{m+n}{2}$.

Таким чином, з урахуванням введених позначень, $AX = \dfrac{m+n}{2}$, $XB = n - \dfrac{m+n}{2} = \dfrac{n-m}{2}$ – рис. 7.3.3.

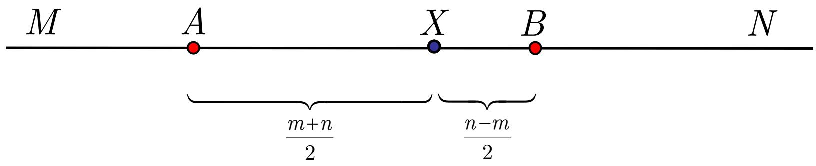


Рис. 7.3.3

3.2.2) Доведемо єдиність зазначеної точки X всередині відрізка AB.

Припустимо, що всередині відрізка AB існує точка Y, яка задовольняє умову задачі. Тоді, з урахуванням п.п. 3.2.1) має місце рівність $AY = \dfrac{m+n}{2}$. Оскільки $AX = \dfrac{m+n}{2} = AY$, то за аксіомою відкладання відрізків (в нашому випадку – на промені AB від початкової його точки A) точки X та Y співпадають. Звідки й випливає єдиність зазначеної точки X всередині відрізка AB.

Відповідь:

1) якщо $m < n$, то існує єдина така точка (внутрішня точка X відрізка AB), яка відстоїть від кінців A і B на відстанях $\dfrac{n+m}{2}$ та $\dfrac{n-m}{2}$ відповідно;

2) якщо $m > n$, то на прямій AB не існує жодної такої точки;

3) якщо $m = n$, то шукані точки утворюють промінь, доповняльний до променя BA.

ДОПОВНЕННЯ до задачі 3.

?! Дано дві (різні) точки A і B та число $m > 0$. Доведіть, що на прямій AB існує єдина точка X, для якої виконується рівність $XA^2 - XB^2 = m^2$.

Задача 5

За яких умов рівняння $ax + b = cx + d$ не має коренів? Відповідь обґрунтуйте.

Розв'язання

Очевидно, що дане рівняння $ax + b = cx + d$ можна подати у вигляді

$$x(a-c) = d-b. \qquad (7.5.1)$$

Розглянемо два можливі випадки: $(a-c) \neq 0$ та $(a-c) = 0$.

1) Нехай $(a-c) \neq 0$. Тоді рівняння (7.5.1) має єдиний корінь

$$x = \frac{d-b}{a-c}.$$

2) Нехай тепер $(a-c) = 0$. Тоді рівняння (7.5.1) набуває вид

$$x \cdot 0 = d-b. \qquad (7.5.2)$$

та можливими є лише два випадки: $d-b=0$ та $d-b \neq 0$.

2.1) Якщо $d-b=0$, то рівняння (7.5.2) набуває вид

$$x \cdot 0 = 0, \qquad (7.5.3)$$

кореням якого є будь-яке число.

2.2) Якщо ж $d-b \neq 0$, то жодне число не може бути коренем рівняння (7.5.2).

Таким чином, дане рівняння не має коренів лише у випадку, коли одночасно виконуються умови $a-c=0$ та $d-b \neq 0$.

Відповідь: $a = c$ та $d \neq b$.

ДОПОВНЕННЯ до задачі 5.

?! За яких умов рівняння $ax = b$ не має коренів? Відповідь обґрунтуйте.

?! За яких умов рівняння $\frac{a}{x} = b$ не має коренів? Відповідь обґрунтуйте.

?! За яких умов рівняння $\frac{a}{x} = \frac{x}{b}$ не має коренів? Відповідь обґрунтуйте.

?! За яких умов рівняння $\frac{ax+b}{cx+d} = f$ не має коренів? Відповідь обґрунтуйте.

8 клас

Задача 1

У класі із 40 учнів 30 уміють плавати, 27 – грати в шахи і 5 не вміють ні плавати, ні грати в шахи. Скільки учнів уміють плавати і грати в шахи?

Розв'язання

1 спосіб

Нехай x – число учнів у класі, які уміють плавати та грати у шахи. Тоді:

число учнів, які уміють лише плавати (та не уміють грати у шахи) становить $(30-x)$,

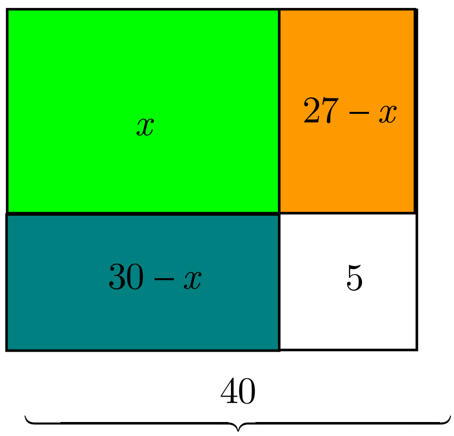
а число учнів, які уміють лише грати у шахи (та не уміють плавати) становить $(27-x)$.

Тому загальне число учнів у класі, які уміють плавати або грати у шахи, становить $(30-x)+(27-x)+x=57-x$.

З іншого боку (за умовою), у класі із 40 учнів 5 не вміють ні плавати, ні грати в шахи, тобто число учнів у класі, які уміють плавати або грати у шахи, становить 35 осіб. Таким чином маємо рівняння

$$57-x=35,$$

звідки $x=22$.



2 спосіб

Нехай x – число учнів у класі, які уміють плавати та грати у шахи. Тоді за формулою «включення-виключення» має місце рівняння

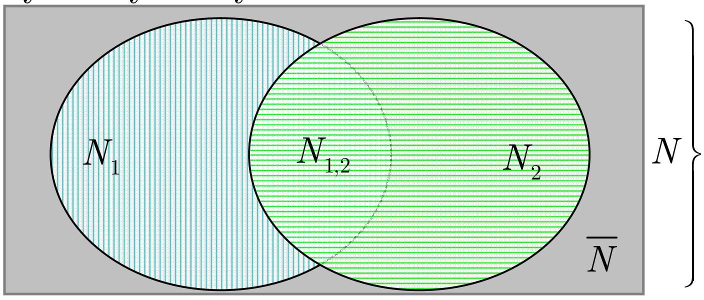
$$5=40-(30+27)+x,$$

звідки $x=30+27-(40-5)=57-35=22$.

Відповідь: 22.

ДОПОВНЕННЯ до задачі 1.

Дана задача відноситься до задач, розв'язування яких спрощується при застосуванні так званого принципу «включення і виключення». Цей принцип полягає у наступному.



Нехай N – кількість учнів певного класу, а SP_1 і SP_2 – назви <u>двох</u> спортивних секцій, що діють при школі. Нехай далі:

N_1 – кількість учнів класу, які займаються в секції SP_1 та, можливо, в секції SP_2; N_2 – кількість учнів класу, які займаються в секції SP_2 та, можливо, в секції SP_1;

$N_{1,2}$ – кількість учнів, що займаються в двох секціях SP_1 і SP_2 одночасно;

$\overline{N}$ – кількість учнів, які не займаються в жодній зі спортивних секцій. Тоді справджується рівність

$$\overline{N} = N - \left(N_1 + N_2\right) + N_{1,2}. \qquad (8.1.1)$$

Більше того, якщо позначити через K_1 (K_2) кількість учнів, які займаються <u>виключно в одній</u> секції SP_1 (SP_2), то мають місце рівності

$$\begin{cases} K_1 = N_1 - N_{1,2} \\ K_2 = N_2 - N_{1,2} \end{cases}. \qquad (8.1.2)$$

Нехай, як і раніше, N – кількість учнів певного класу, а SP_1, SP_2 і SP_3 – назви <u>трьох</u> спортивних секцій, що діють при школі. Нехай далі:

N_i – кількість учнів класу, які займаються в секції SP_i ($i = 1,2,3$) та, можливо, ще й в інших секціях;

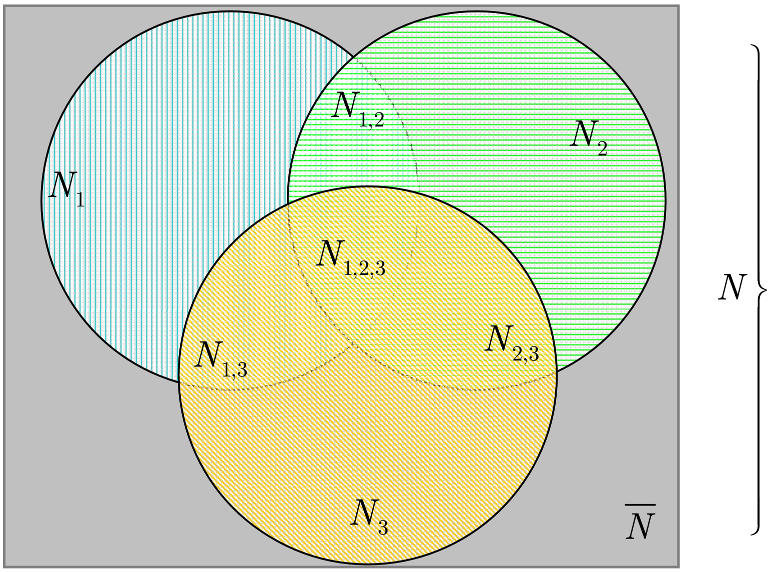
$N_{i,j}$ – кількість учнів, що займаються в двох секціях SP_i і SP_j ($i \neq j$, $i,j = 1,2,3$) одночасно, та, можливо, ще й в іншій – третій секції.

$N_{1,2,3}$ – кількість учнів, що займаються в трьох секціях SP_1, SP_2 і SP_3 одночасно,

$\overline{N}$ – кількість учнів, які не займаються в жодній зі спортивних секцій.

Тоді справджується рівність

$$\overline{N} = N - \left(N_1 + N_2 + N_3\right) + \left(N_{1,2} + N_{1,3} + N_{2,3}\right) - N_{1,2,3}. \quad (8.1.3)$$



Більше того, якщо через K_i позначити кількість учнів, які займаються <u>виключно в одній</u> секції SP_i $(i = 1, 2, 3)$, а

через $K_{i,j}$ – кількість учнів, які займаються, <u>виключно в двох</u> секціях SP_i та SP_j $(i \neq j,\ i, j = 1, 2, 3)$ одночасно, то мають місце рівності

$$\begin{cases} K_{1,2} = N_{1,2} - N_{1,2,3} \\ K_{1,3} = N_{1,3} - N_{1,2,3} \\ K_{2,3} = N_{2,3} - N_{1,2,3} \\ K_1 = N_1 - K_{1,2} - K_{1,3} - N_{1,2,3} = N_1 - \left(N_{1,2} + N_{1,3}\right) + N_{1,2,3} \\ K_2 = N_2 - K_{1,2} - K_{2,3} - N_{1,2,3} = N_2 - \left(N_{1,2} + N_{2,3}\right) + N_{1,2,3} \\ K_3 = N_3 - K_{1,3} - K_{2,3} - N_{1,2,3} = N_3 - \left(N_{1,3} + N_{2,3}\right) + N_{1,2,3} \end{cases}. \quad (8.1.4)$$

Формули (8.1.1), (8.1.3) (та їх аналоги на випадок більшої кількості «секцій») називають формулами <u>**включення-виключення**</u>, бо:

– спочатку виключаються всі елементи, які мають хоча б одну з властивостей,

– потім включаються елементи, які мають принаймні дві властивості,

– виключаються елементи які мають, принаймні три властивості і так далі.

Метод розв'язування задач за допомогою формул (8.1.1) – (8.1.4) та їх аналогів на більш загальний випадок називають <u>**методом включення і виключення**</u>.

Задача 3

За $A\%$ загальної кількості товару одержали $P\%$ прибутку. З яким відсотком прибутку треба продавати решту товару, щоб загальний прибуток становив $R\%$?

Розв'язання

1 спосіб

Нехай x – загальна кількість товару, y – собівартість одиниці товару.

Оскільки $\frac{x}{100}\cdot A$ – кількість товару, за яку одержали $P\%$ прибутку, його собівартість становить $\frac{x}{100}\cdot A\cdot y$, то прибуток з нього складає

$$\frac{\frac{x}{100}\cdot A\cdot y}{100}\cdot P=\frac{xAyP}{10000}.$$

Якщо $Q\%$ – прибуток з решти товару, тобто з $x-\frac{x}{100}\cdot A=\frac{x(100-A)}{100}$ від обсягу товару, і вартість решти становить $\frac{x(100-A)}{100}\cdot y$, то прибуток з неї складає

$$\frac{\frac{x(100-A)}{100}\cdot y}{100}\cdot Q=\frac{x(100-A)yQ}{10000}.$$

Оскільки xy – собівартість всього товару, то $\frac{xy}{100}\cdot R$ – загальний прибуток. І тому (за умовою та з урахуванням введених позначень) має місце рівність

$$\frac{xy}{100}\cdot R=\frac{xAyP}{10000}+\frac{x(100-A)yQ}{10000},$$

звідки (помноживши обидві частини на дріб $\frac{100}{xy}$) маємо

$$R=\frac{AP}{100}+\frac{(100-A)Q}{100},$$

$$100R=AP+(100-A)Q,$$

$$(100-A)Q=100R-AP,$$

$$Q=\frac{100R-AP}{100-A}.$$

2 спосіб

Нехай c – собівартість одиниці продукції, V – загальний обсяг (кількість) всієї продукції. Тоді собівартість загального обсягу продукції становить $V \cdot c$, собівартість $A\%$ від загального обсягу продукції складає $\frac{V}{100} \cdot A \cdot c$, а собівартість решти – $\frac{V}{100} \cdot (100 - A) \cdot c$.

Нехай m – вартість одиниці продукції тих (одиниць товару) з $A\%$ від загального обсягу продукції, за які одержали $P\%$ прибутку. Тоді

$$\frac{\frac{V}{100} \cdot A \cdot (m - c)}{\frac{V}{100} \cdot A \cdot c} \cdot 100 = P, \text{ звідки } \qquad \frac{m - c}{c} = \frac{P}{100}.$$

Нехай далі X – відсоток прибутку, з яким треба продавати решту товару, щоб загальний прибуток становив $R\%$, а n – вартість одиниці продукції тих (з решти одиниць товару) зі $(100 - A)\%$ від загального обсягу продукції, за які слід одержати $X\%$ прибутку. Тоді

$$\frac{\frac{V}{100} \cdot A \cdot (n - c)}{\frac{V}{100} \cdot A \cdot c} \cdot 100 = X, \text{ звідки } \qquad \frac{n - c}{c} = \frac{X}{100}.$$

Оскільки загальний прибуток (за весь обсяг продукції V) повинен становити $R\%$, то одержуємо рівняння відносно змінної X

$$R = \frac{\frac{V}{100} \cdot A \cdot (m - c) + \frac{V}{100} \cdot (100 - A) \cdot (n - c)}{V \cdot c} \cdot 100 =$$

$$= A \cdot \frac{(m - c)}{c} + (100 - A) \cdot \frac{(n - c)}{c} = A \cdot \frac{P}{100} + (100 - A) \cdot \frac{X}{100},$$

звідки

$$\frac{A \cdot P + (100 - A) \cdot X}{100} = R, \; X = \frac{100R - AP}{100 - A}.$$

Відповідь: $\frac{100R - AP}{100 - A}$.

ДОПОВНЕННЯ до задачі 3.

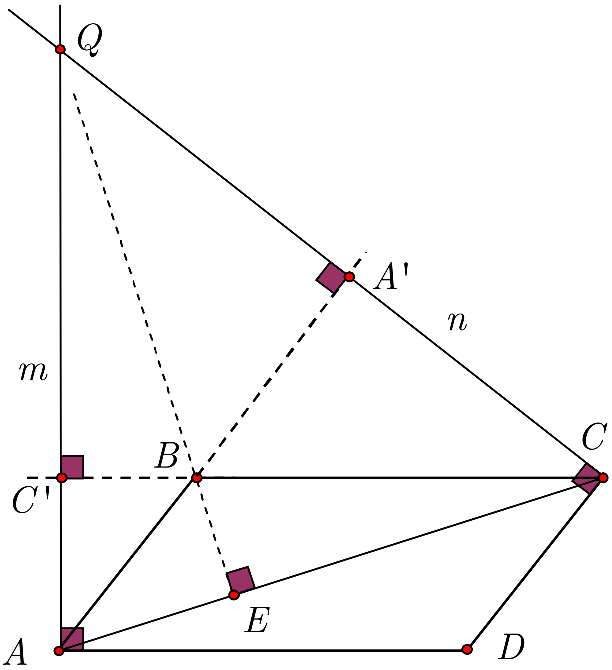
?! Родина складається з батька, матері та їх донки-студентки. Якби зарплатня батька збільшилася вдвічі, то загальні статки родини зросли б на 67%. Якби стипендія доньки зменшилася втричі, то загальні статки родини спали б на 4%. Скільки відсотків від загальних статків родини складає зарплатня матері?

Задача 4

Із вершини B паралелограма $ABCD$ опустили перпендикуляр BE на діагональ AC. Через точку A проведено пряму m, перпендикулярну до прямої AD, а через точку C – пряму n, перпендикулярну до прямої CD. Доведіть, що точка перетину прямих m і n належить прямій BE.

Розв'язання

1 спосіб



1) Оскільки $ABCD$ – паралелограм, то за визначенням $AD \parallel BC$ і $DC \parallel AB$.

2) Оскільки за умовою $m \perp AD$, $AD \parallel BC$, то за властивістю паралельних прямих $m \perp BC$.

3) Оскільки за умовою $n \perp DC$, $DC \parallel AB$, то за властивістю паралельних прямих $n \perp AB$.

Таким чином прямі m, n та BE містять висоти $\triangle ABC$ і тому (за відомою теоремою ШКГ) перетинаються в одній точці.

2 спосіб

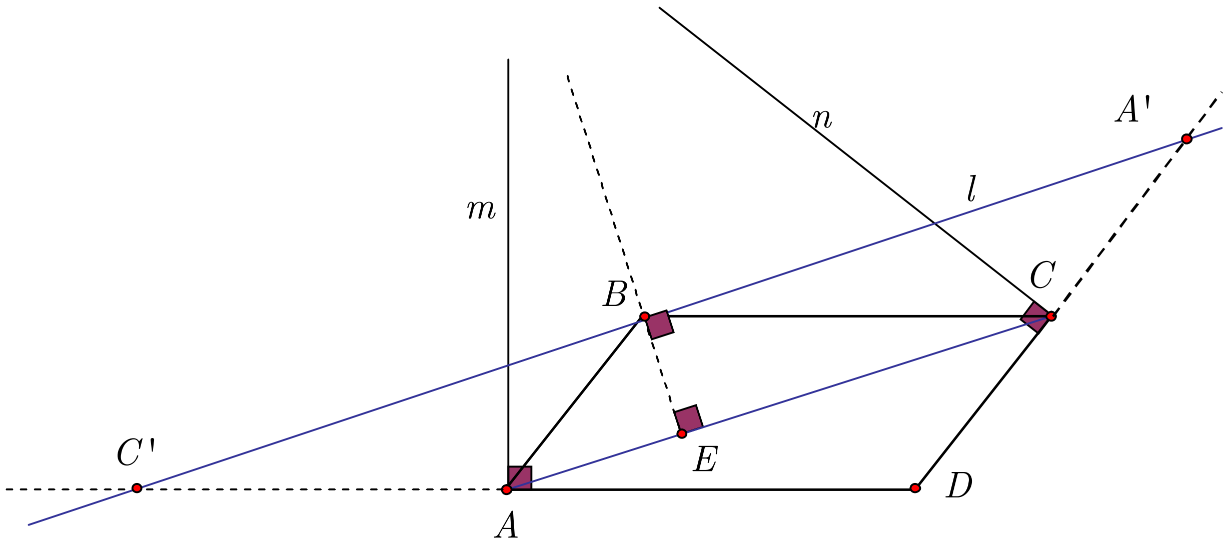
1) Нехай Q – точка перетину прямих m і n (така точка завжди існує, бо прямі m і n, будучи перпендикулярними до двох непаралельних прямих завжди перетинаються; це факт неважко показати методом від супротивного).

2) Нехай далі пряма AB перетинає пряму n у точці A', а пряма CB пряму m – у точці C'. За умовою $ABCD$ – паралелограм і тому $AD \parallel BC$ і $DC \parallel AB$. Оскільки $AD \parallel BC$ та за умовою $m \perp AD$, то за властивістю паралельних прямих $m \perp BC$, звідки $CC' \perp m$; аналогічно $AA' \perp n$. Таким чином, точка B є точкою перетину висот AA' і BB' трикутника QAC.

3) За умовою BE – перпендикуляр до AC, тобто пряма $BE \perp AC$. З іншого боку, оскільки прямі, які містять висоти трикутника, перетинаються в одній точці, то пряма $QB \perp AC$.

За відомою теоремою ШКГ існує єдина пряма, яка проходить через точку B та є перпендикулярною до прямої AD. Звідки маємо, що прямі QB і BE співпадають. З останнього й випливає, що точка перетину прямих m і n належить прямій BE.

3 спосіб



1) Проведемо через вершину B пряму l паралельно до діагоналі AC. І нехай пряма l перетинає промені DC і DA в точках A' та C' відповідно.
2) Оскільки $ABCD$ – паралелограм, то (за визначенням) $AB \parallel DA'$, $CB \parallel DC'$. За побудовою $C'A' \parallel AC$. А з того, що в кожному з чотирикутників $C'BCA$ і $ABA'C$ протилежні сторони паралельні, то (за визначенням) вони є паралелограмами.

Оскільки в паралелограмі $ABCD$ $AD = BC$ і $AB = DC$, то (за властивістю паралелограма) маємо рівності

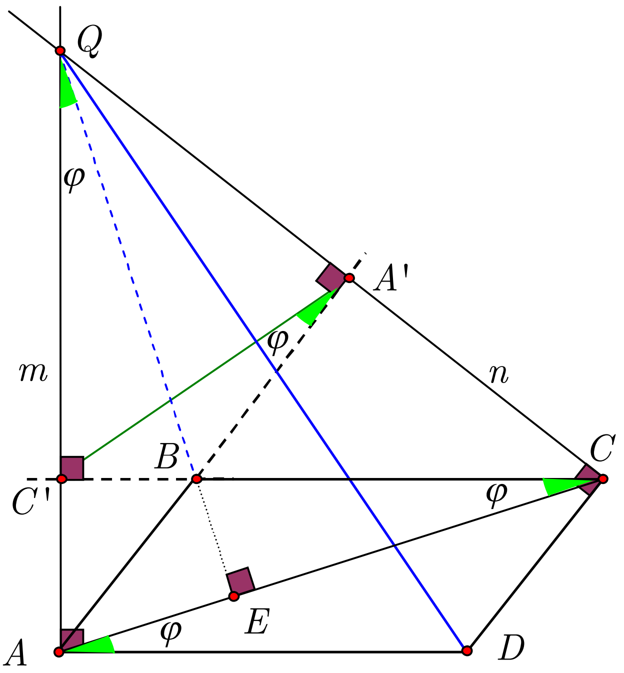
$$C'A = BC = AD,\ CA' = AB = DC,\ C'B = AC = BA'.$$

Звідки одержуємо, що точки A, B і C є серединами сторін DC', $C'A'$ і $A'D$ (відповідно) трикутника $DC'A'$.
3) За умовою $BE \perp AC$, а за побудовою $C'A' \parallel AC$. Тому за властивістю паралельних прямих $BE \perp C'A'$. Крім того, за умовою, $m \perp AD$ а $n \perp DC$.

Таким чином прямі m, n і BE містять серединні перпендикуляри до сторін DC', $A'D$ і $C'A'$ (відповідно) трикутника $DC'A'$. І тому (за відомою теоремою ШКГ) перетинаються в одній точці (яка є центром кола, описаного навколо $\triangle DC'A'$).

З останнього й випливає, що точка перетину прямих m і n належить прямій BE.

4 спосіб



1) Нехай Q – точка перетину прямих m і n. Для доведення твердження досить показати, що кут QBE є розгорнутим.

2) Нехай далі пряма AB перетинає пряму n у точці A', а пряма CB пряму m – у точці C'. Оскільки $AD \parallel BC$ та за умовою $m \perp AD$, то за властивістю паралельних прямих $m \perp BC$, звідки $CC' \perp m$; аналогічно $AA' \perp n$.

3) Позначимо $\angle CAD = \varphi$. Тоді (за властивістю паралельних та січної) $\angle ACB = \varphi$. З прямокутного $\triangle BEC$ маємо, що $\angle CBE = 90^0 - \varphi$, а за властивістю суміжних кутів – що $\angle C'BE = 90^0 + \varphi$.

4) Оскільки $\angle AC'C = \angle AA'C = 90^0$, то чотирикутник $AC'A'C$ є вписаним у коло. І тому $\angle C'A'A = \angle C'CA = \varphi$ (за властивістю вписаних у коло кутів).

5) Оскільки $\angle QC'B = \angle QA'B = 90^0$, то чотирикутник $QC'BA'$ є вписаним у коло. І тому $\angle C'QB = \angle C'A'B = \varphi$. А з прямокутного $\triangle QC'B$ маємо, що $\angle QBC' = 90^0 - \varphi$.

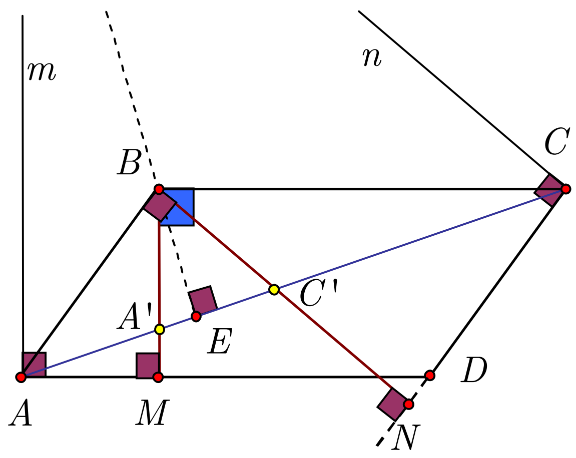
Таким чином $\angle QBE = \angle QBC' + \angle C'BE = 90^0 + \varphi + 90^0 - \varphi = 180^0$.

ДОПОВНЕННЯ до задачі 4.

?! У $\triangle ABC$ сторона AC найменша. На сторонах AB і CB позначено точки K і L відповідно так, що $KA = AC = CL$. Відрізки AL і KC перетинаються в точці M. Доведіть, що $MJ \perp AC$, де J – центр вписаного кола $\triangle ABC$.

?! Через кожну вершину паралелограма проведено пряму, перпендикулярну до діагоналі, яка не проходить через цю вершину. Доведіть, що діагоналі чотирикутника, утвореного перетинами чотирьох проведених прямих, перпендикулярні до сторін паралелограма.

Інформація «на виріст» та для старшокласників



Задача* («маловідома рівність паралелограма»)

Нехай висоти BM і BN, які опущені з вершини B тупого кута паралелограма $ABCD$, перетинають діагональ AC (з кінцями у вершинах гострих його кутів) у точках A' і C' відповідно, а BE – перпендикуляр на діагональ AC. Тоді має місце рівність

$$\frac{EA'}{EA}=\frac{EC'}{EC} \Leftrightarrow \frac{EA'}{EC'}=\frac{EA}{EC} \Leftrightarrow EA'\cdot EC = EC'\cdot EA.$$

Доведення.

Використовуючи добре відоме метричне співвідношення прямокутного трикутника («Висота прямокутного трикутника, проведена з вершини прямого кута, є середнім пропорційним проекцій катетів на гіпотенузу») маємо:

1) з прямокутного $\triangle A'BC$ – рівність $BE^2 = EA'\cdot EC$, а
2) з прямокутного $\triangle ABC'$ – рівність $BE^2 = EC'\cdot EA$,

звідки й випливає правильність доводжуваної рівності.

5 спосіб

1) Нехай висоти BM і BN, які опущені з вершини B тупого кута паралелограма $ABCD$, перетинають діагональ AC (з кінцями у вершинах гострих його кутів) у точках A' і C' відповідно, а BE – перпендикуляр на діагональ AC.

2) Розглянемо гомотетію з центром в точці E та коефіцієнтом $k=\frac{EA}{EA'}$. На підставі **Задачі*** $k=\frac{EC}{EC'}$. Тому очевидно, що при такій гомотетії образами точок A' і C' є точки A і C відповідно.

3) Оскільки при гомотетії «образом прямої є пряма, яка паралельна до свого прообразу», то образами прямих BM і BN є прямі m і n відповідно. А через те, що пряма BE проходить через центр гомотетії, то її образом пряма BE.

4) Оскільки при гомотетії образом точки перетину прямих є точка перетину образів цих прямих, то образи прямих BM, BN і BE – прямі m, n і BE (відповідно) перетинаються в одній точці.

Задача 5

При яких значеннях параметра a рівняння $\frac{x-5}{x+2018}=\frac{a-x}{x+2018}$ не має коренів?

Розв'язання

$$\frac{x-5}{x+2018}=\frac{a-x}{x+2018}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{x-5}{x+2018}-\frac{a-x}{x+2018}=0\Leftrightarrow\frac{2x-5-a}{x+2018}=0\Leftrightarrow\begin{cases}2x-5-a=0\\x+2018\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\dfrac{a+5}{2}\\x\neq -2018\end{cases}$$

Очевидно що:

якщо $\frac{a+5}{2}=-2018$, то остання система, а тому і дане рівняння не будуть мати розв'язків;

якщо $\frac{a+5}{2}\neq -2018$, то остання система, а тому і дане рівняння будуть мати єдиний розв'язок (корінь) $x=\frac{a+5}{2}$.

Не важко переконатися в тому, що $\frac{a+5}{2}=-2018\Leftrightarrow a=-4041$.

Таким чином дане рівняння не має коренів при $a=-4041$.

Відповідь: $a=-4041$.

ДОПОВНЕННЯ до задачі 5.

?! При яких значеннях параметра a рівняння не має коренів:

1) $\frac{2x-a}{x+3}=0$; 2) $\frac{x+3}{2x-a}=0$; 3) $\frac{x+3a-1}{2x-a+5}=0$; 4) $\frac{2x-a+5}{x+3a-1}=0$.

Задача 2

Знайти найменше натуральне число, сума цифр якого дорівнює 2018.

Розв'язання

Найменше натуральне число, яке задовольняє умову задачі, повинно мати у своєму записі максимальне число «дев'яток» (цифр 9) та найменшу з можливих (від 1 до 9) «одиницю найвищого розряду». Оскільки $2018=9\cdot 224+2$, то природно розглянути 225 – значне число виду $x=\overline{2\underbrace{9...9}_{224}}=2\cdot 10^{224}+9\cdot\left(1\cdot 10^{223}+1\cdot 10^{222}+...+1\cdot 10^{1}+1\right)$.

Переконаємося у тому, що число $x=\overline{2\underbrace{9...9}_{224}}$ і є шуканим.

1) Припустимо, що існує $(k+1)$ – значне число

$$y=\overline{a_0\underbrace{a_1\ldots a_k}_{k}}=a_0\cdot 10^k+a_1\cdot 10^{k-1}+a_2\cdot 10^{k-2}+a_{k-1}\cdot 10^1+a_k,$$

яке є меншим за число $x=\overline{2\underbrace{9\ldots9}_{224}}$ та сума цифр якого становить 2018.

2) Оскільки $a_i\in\{0;1;2;3;4;5;6;7;8;9\}$ для кожного $i\in\{0;\ldots;k\}$ та $a_0\neq 0$, то $\underbrace{a_0+a_1+a_2+\ldots+a_{k-1}+a_k}_{=2018}\le 9\cdot(k+1)$,

звідки $9\cdot(k+1)\ge 2018$, $k+1\ge\frac{2018}{9}$, $k+1\ge 224+\frac{2}{9}$.

Оскільки $(k+1)\in N$, то це число є щонайменше 225 – значним, тобто має у своєму записі принаймні 225 цифр.

За припущенням $y<x$, тому $k=224$ та справджується нерівність

$$x-y=(2-a_0)\cdot 10^{224}+(9-a_1)\cdot 10^{223}+\ldots+(9-a_{223})\cdot 10^1+(9-a_{224})>0. \quad (8.2.1)$$

З іншого боку, оскільки

$$2=2018-\underbrace{(9+9+\ldots+9)}_{224} \text{ та } a_0=2018-(a_1+a_2+\ldots+a_{223}+a_{224}), \text{ то}$$

$(2-a_0)=(a_1+a_2+\ldots+a_{223}+a_{224})-(9+9+\ldots+9)=(a_1-9)+\ldots+(a_{224}-9)$, а

$$x-y=\big((a_1-9)+\ldots+(a_{224}-9)\big)\cdot 10^{224}+$$

$$+(9-a_1)\cdot 10^{223}+\ldots+(9-a_{223})\cdot 10^1+(9-a_{224})=$$

$$=\underbrace{(9-a_1)}_{\ge 0}\underbrace{(10^{223}-10^{224})}_{<0}+\ldots+\underbrace{(9-a_{223})}_{\ge 0}\underbrace{(10^1-10^{224})}_{<0}+\underbrace{(9-a_{224})}_{\ge 0}\underbrace{(1-10^{224})}_{<0} \quad (8.2.2)$$

Оскільки кожен доданок в правій частині (8.2.2) є недодатною величиною, то їх сума також є недодатною величиною, тобто ліва частина рівності (8.2.2) – різниця $(x-y)\le 0$, що суперечить припущенню $y<x$ (нерівності (8.2.1)). Таким чином, наше припущення про те, що існує число y, яке є меншим за число x та задовольняє умову задачі, є неправильним. Звідки й випливає, що найменшим із шуканих чисел є саме число x.

Відповідь: $2\underbrace{9\ldots9}_{224}$.

ДОПОВНЕННЯ до задачі 2.

?! Знайти найменше натуральне число, сума цифр якого дорівнює: а) 2019; б) 2025. Відповідь обґрунтуйте.

?! Знайти найменше натуральне число, сума цифр якого дорівнює 2019 та у запису якого відсутня цифра «9». Відповідь обґрунтуйте.

9 клас

Задача 1

У шухляді знаходяться 40 кульок чотирьох кольорів: 17 зелених, 12 синіх, 5 червоних та 6 білих. Яку найменшу кількість кульок необхідно витягнути, щоб серед них гарантовано було 12 кульок одного кольору?

Розв'язання

1 спосіб

Нехай $k_{\min}$ – найменша кількість кульок, яку необхідно витягнути, щоб серед них <u>*гарантовано*</u> було 12 кульок одного кольору.

1) Розглянемо **двоїсту задачу**, а саме з'ясуємо:

яку найбільшу можливу кількість $K_{\max}$ *з* <u>*наявного*</u> *числа кульок кожного кольору можна витягнути з мішка, щоб серед них не було 12-ти кульок одного кольору.*

Тоді, очевидно, що розв'язком даної задачі буде $k_{\min} = K_{\max} + 1$.

2) За принципом Діріхле[5] серед $(4 \cdot 11 + 1) = 45$ кульок (4-ох можливих кольорів) обов'язково знайдеться 12 кульок одного кольору. Тому для сформульованої двоїстої задачі *з «необмеженою» кількістю кульок кожного з 4 кольорів* розв'язком **було би** число

$$44 = 11_{білих} + 11_{червоних} + 11_{синіх} + 11_{зелених}.$$

Проте, в нашому випадку, кульок всього лише 40, а білих і червоних кульок – 6 та 5 відповідно – <u>менше за 11</u>. Тому

$$K_{\max} = 6_{білих} + 5_{червоних} + 11_{синіх} + 11_{зелених} = 33.$$

Таким чином

$$k_{\min} = K_{\max} + 1 = 6_{білих} + 5_{червоних} + 11_{синіх} + 11_{зелених} + \boxed{1}_{з\ решти} = 34.$$

ДОПОВНЕННЯ до задачі 1.

! Нехай $a' = \min\{a; f-1\}$, $b' = \min\{b; f-1\}$, $c' = \min\{c; f-1\}$, $d' = \min\{d; f-1\}$. Доведіть, що $k_{\min} = (a' + b' + c' + d' + 1)$ – найменша кількість кульок, яку необхідно витягнути із шухляди з a зеленими, b синіми, c червоними та d білими кульками, щоб серед них гарантовано було f кульок одного кольору, де $2 \le f \le \max\{a; b; c; d\}$.

---

[5] **Принцип Діріхле** є однією з форм «методу від супротивного». Цей принцип стверджує, що: «*якщо множину з* **N** *елементів розбито на* **n** *частин, які не мають спільних елементів, причому* **N>n**, *то принаймні в одній з* **n** *частин буде більше одного елемента*».

2 спосіб

Необхідно довести, що:

А) якщо взяти 34 кульки, то серед них гарантовано знайдеться 12 кульок одного кольору;

Б) число 34 – найменше число, яке має властивість А).

Доведення.

1) Доведемо, що серед 34 кульок гарантовано знайдеться 12 кульок одного кольору.

Серед 34 кульок не більше 11 червоних і білих кульок, а тому, не менше 23 зелених та синіх кульок.

Якщо 23 кульки розбити на дві групи – зелені та сині, – то одна з груп за принципом Діріхле буде містити не менше 12 кульок (оскільки припустивши обернене, одержали би протиріччя – що їх менше ніж 23).

2) Для того щоб довести, що це число (34) є мінімальним, необхідно показати, що для меншого властивість **А)** може і не виконуватися. А для останнього досить навести принаймні один приклад (реалізації – підтвердження зазначеному).

Дійсно: якщо обрати 33 кульки, то серед них може виявитися 11 зелених, 11 синіх, 5 червоних та 6 білих кульок. Тобто, серед них не виявиться 12 кульок одного кольору.

Зауважимо, що наведений спосіб розв'язання передбачає (в певному сенсі) «знання відповіді», тобто спочатку необхідно висунути **гіпотезу** про мінімальне число кульок і лише потім провести доведення тверджень А) і Б). Тому вкрай важливим навчитись / привчитись спрямовувати свої міркування в бік висунення гіпотез. Для цього можна спробувати набрати найменш можливу кількість кульок, серед яких гарантовано не було би 12-ти одного кольору, тобто, щоб властивість А) не виконувалася.

Зрозуміло, що число кульок кожного кольору необхідно обрати *найбільш можливим*, але меншим за 12. Тоді очевидно, що матимемо набір точно з 33 кульок (що й доводить мінімальність числа 34).

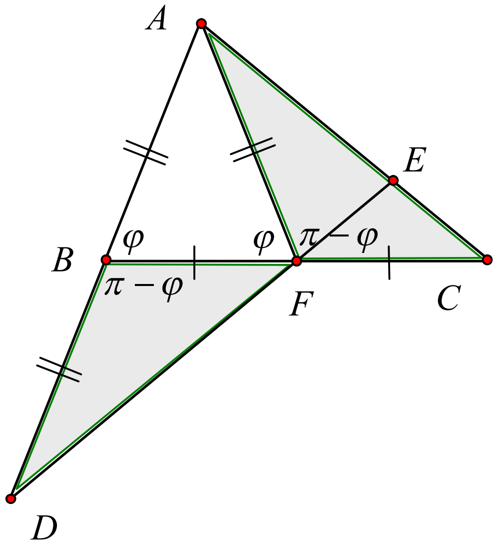
Ну і на сам кінець, якщо до такого набору (з 33 кульок) додати кульку певного кольору, то кульок саме цього кольору і стане 12.

Відповідь: 34.

Задача 2

Розв'язання

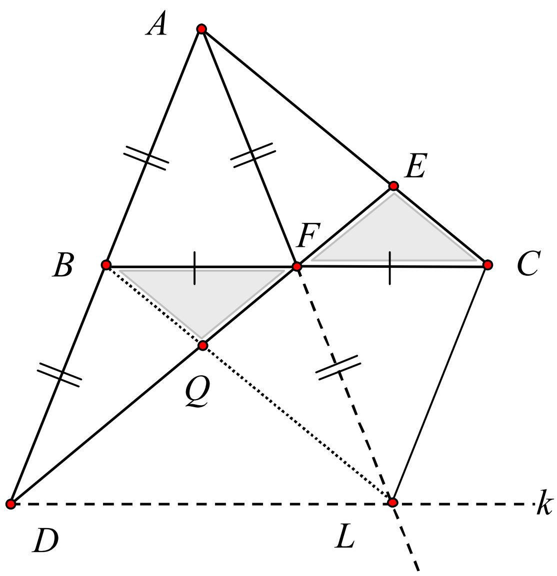
1 спосіб



1) Оскільки за умовою $AB = AF$, то (за визначенням) $\triangle BAF$ є рівнобедреним з основою BF. І тому (за властивістю рівнобедреного трикутника) $\angle ABF = \angle AFB = \varphi$.
Звідки (за властивістю суміжних кутів) $\angle DBF = \angle AFC = 180^\circ - \varphi$.

2) За умовою $DB = AB = AF$, $BF = FC$. Тому («за двома сторонами та кутом між ними») $\triangle DBF = \triangle AFC$. Звідки $\angle ACF = \angle DFB$ (як відповідні кути рівних трикутників). Крім того, $\angle EFC = \angle DFB$ (як вертикальні). Таким чином для кутів $\triangle EFC$ справджується рівність $\angle EFC = \angle ECF$. І тому за ознакою він є рівнобедреним з основою FC. Звідки й випливає, що $EF = EC$.

2 спосіб

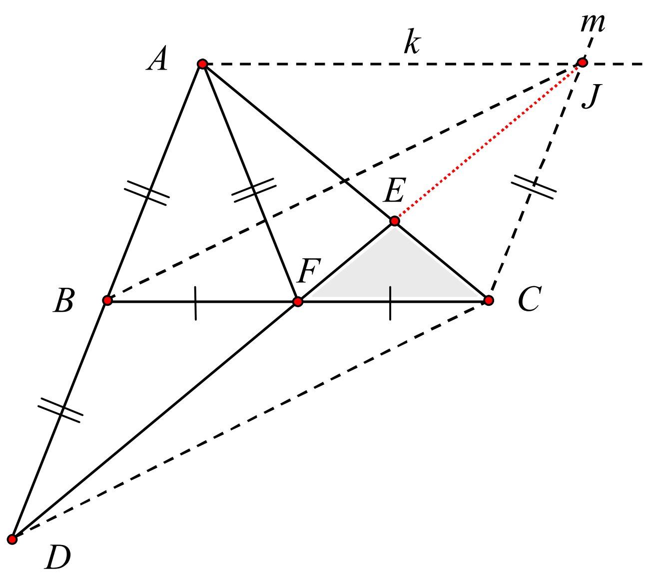


1) Через точку D проведемо пряму k паралельно до прямої BC. Нехай L – точка перетину прямих l і AF, Q – точка перетину відрізків BL і DF

2) Оскільки за побудовою $BF \parallel DL$ а за умовою $AB = BD$, то за теоремою Фалеса $AF = FL$. За умовою $AB = AF$ і тому $BD = FL$. Тому чотирикутник $ABFL$ (за визначенням) є рівнобедреною трапецією. Звідки $\triangle BQF$ є рівнобедрений з основою BF. А тому $\angle FBQ = \angle BFQ$.

3) За умовою $BF = FC$ та (за доведеним вище) $AF = FL$. Тому (за ознакою) чотирикутник $BACL$ є паралелограмом. Звідки (за визначенням) $AC \parallel BL$. І тому (за властивістю паралельних і січної) $\angle FBQ = \angle FCE$. А з того що $\angle BFQ = \angle CFE$ (як вертикальні) маємо, що в $\triangle EFC$ кути при основі FC є рівними. Звідки $FE = EC$.

3 спосіб

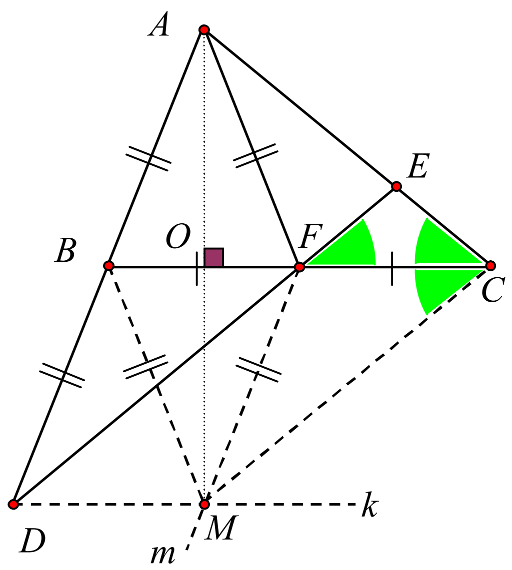


1) Через точки A і C проведемо прямі k і m паралельно до прямих BC і BA відповідно.

2) Нехай далі J – точка перетину прямих k і m. Оскільки за побудовою $BA \parallel CJ$ і $BC \parallel AJ$, то чотирикутник $ABCJ$ (за визначенням) є паралелограмом. Тому (за властивістю) $CJ = BA$.

3) Оскільки за побудовою $AJ \parallel FC$, $CJ \parallel BA$ і $BA \nparallel FA$, то $CJ \nparallel FA$ і тому $AFCJ$ (за визначенням) є трапецією. А, з урахуванням рівностей $CJ = BA$ та $FA = BA$ (за умовою), трапеція $AFCJ$ є рівнобедреною. І тому справджується рівність $FE = EC$.

4 спосіб



1) Через точки D і F проведемо прямі k і m паралельно до прямих BC і BD відповідно.

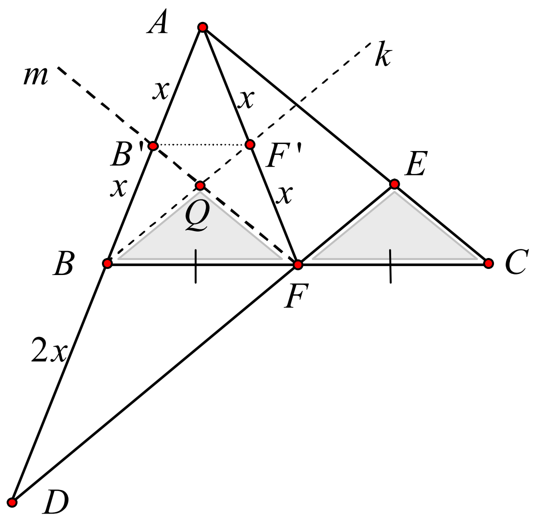
2) Нехай далі M – точка перетину прямих k і m. Оскільки за побудовою $DB \parallel MF$ і $BF \parallel DM$, то чотирикутник $DBFM$ є паралелограмом. Тому $MF = DB$ і $DM = BF$.

3) За умовою $DB = BA$. Таким чином, в чотирикутнику $BAFM$ протилежні сторони BA і MF є паралельними (за побудовою) і рівними (за доведеним). Тому (за ознакою) чотирикутник $BAFM$ є паралелограмом. А, з урахуванням рівності $BA = AF$ (за умовою), паралелограм $BAFM$ є ромбом. І тому (за властивістю) $AM \perp BF$. Крім того $AO = OM$ (де O – точка перетину діагоналей $BAFM$). Звідки маємо, що $\angle ECF = \angle MCF$.

4) Оскільки $DM = BF = FC$ та $FC \parallel DM$, то за ознакою чотирикутник $DFCM$ є паралелограмом. Звідки $DE \parallel MC$. І тому (за властивістю паралельних і січної) $\angle EFC = \angle MCF$.

Отже, в $\triangle EFC$ кути при основі FC є рівними. Звідки $FE = EC$.

5 спосіб



1) Через точки B і F проведемо прямі k і m паралельно до прямих DE і CA відповідно.

2) Нехай далі Q – точка перетину прямих k і m; F' – точка перетину прямих k і AF, B' – точка перетину прямих m і AB.

3) Оскільки $BF = FC$ (за умовою) і $m \parallel CA$ (за побудовою), то за т. Фалеса $BB' = B'A$.

4) Оскільки $AB = BD$ (за умовою) і $k \parallel DE$ (за побудовою), то за т. Фалеса $AF' = F'F$.

5) За умовою $AB = AF$. Тому, з урахуванням пунктів 3) і 4), маємо

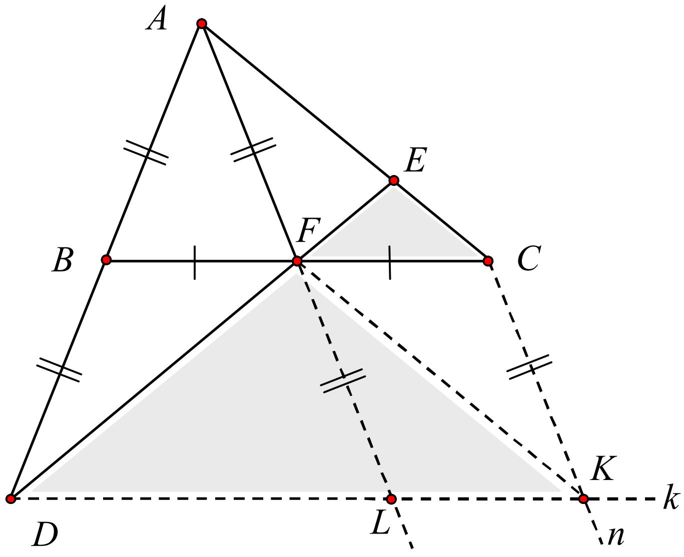
$$BB' = B'A = x = AF' = F'F.$$

Таким чином $B'F'$ – середня лінія рівнобедреного трикутника BAF (з основою BF). І тому чотирикутник $BB'F'F$ є рівнобедреною трапецією (з основами BF і $B'F'$). Звідки (за властивістю рівнобедреної трапеції) випливає, що трикутник BQF є рівнобедреним (з основою BF).

6) За побудовою $m \parallel CA$ і $k \parallel DE$. Тому (за властивістю паралельних прямих і січної) $\angle QBF = \angle EFC$ а $\angle QFB = \angle ECF$ (як «відповідні»).

Оскільки (за умовою) $BF = FC$, то («за стороною і прилеглими кутами») $\triangle BQF = \triangle FEC$. Звідки й випливає, що $FE = EC$.

6 спосіб



1) Через точки D і C проведемо прямі k та n паралельно до прямих BC і AF відповідно.

Нехай далі $K = k \cap n$, $L = AF \cap k$.

2) Оскільки (за побудовою) $FC \parallel LK$, $FL \parallel CK$, то чотирикутник $LFCK$ є паралелограмом. І тому $CK = FL$.

3) Оскільки (за побудовою) $BF \,||\, DL$ і $AB = BD$ (за умовою), то за теоремою Фалеса $AF = FL$. І тому $CK = FL = AF = AB = BD$.

4) Оскільки (за побудовою) $BC \,||\, DK$ і $CK \,||\, AF$, то $BD \nparallel CK$ і тому $DBCK$ (за визначенням) є трапецією. А, з урахуванням рівності $CK = BD$, трапеція $DBCK$ є рівнобедреною. За умовою F – середина BC і тому трикутник DFK є рівнобедреним. Звідки $\angle FDK = \angle FKD = \delta$.

5) За побудовою $BC \,||\, DK$. Тому (за властивістю паралельних і січної) $\angle CFK = \angle FKD$.

6) Оскільки (за побудовою) $CK \,||\, AF$ та (за доведеним вище) $CK = AF$, то (за ознакою паралелограма) чотирикутник $ACKF$ є паралелограмом. Звідки (за означенням) $FK \,||\, AC$. І тому (за властивістю паралельних і січної) $\angle ACF = \angle CFK$, звідки

$$\angle ACF = \angle FKD = \delta .$$

7) Оскільки (за побудовою) $BC \,||\, DK$, то (за властивістю паралельних і січної) відповідні кути є рівними, тобто

$$\angle EFC = \angle FDK = \delta .$$

Таким чином в $\triangle EFC$ кути при стороні FC є рівними. І тому (за ознакою) $\triangle EFC$ є рівнобедреним з основою FC. Звідки й випливає (за визначенням), що $FE = EC$.

ДОПОВНЕННЯ до задачі 2.

?! У трикутнику ABC медіана AF дорівнює стороні AB. На продовженні сторони AB за точку A відмітили точку D таку, що $DA = AB$. Пряма DF перетинає сторону AC у точці E. Доведіть, що $BE = EC$.

?! На стороні AB трикутника ABC відмічено точку K. Відрізок CK перетинає медіану AM трикутника ABC в точці P, причому $AK = AP$. Знайти відношення $BK : PM$.

?! В трикутнику ABC точка K є серединою медіани BM, а промінь AK перетинає сторону BC у точці L. Знайти відношення $BL : LC$.

Перш ніж перейти до розв'язання **задачі 3** <u>*нагадаємо*</u>, що:

простими числами називають такі натуральні числа, які мають лише два дільники – число 1 та самого себе (*причому число 1 не є простим числом, оскільки має лише 1 дільник, а число 2 – найменше та єдине серед усіх простих чисел, яке є парним*);

складеними – такі натуральні числа, які мають більше ніж два дільники;

найменший простий дільник складеного числа a не перевищує $\sqrt{a}$;

під ***канонічним розкладом*** натурального числа a розуміють представлення (подання) числа a у вигляді добутку степенів з натуральними показниками та різними простими основами.

Також добре відомо, що якщо $a = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_n^{\alpha_n}$ – канонічний розклад числа a, то:

1) натуральними дільниками числа a можуть бути лише числа виду
$$d = p_1^{\beta_1} \cdot p_2^{\beta_2} \cdot \ldots \cdot p_n^{\beta_n}, \qquad (9.3.1)$$
де $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ – невід'ємні цілі числа, що задовольняють умову $0 \le \beta_i \le \alpha_i$ для кожного $i \in \{1; 2; \ldots; n\}$;

2) кількість $\sigma(a)$ усіх дільників числа a можна знайти за формулою
$$\sigma(a) = (1+\alpha_1) \cdot (1+\alpha_2) \cdot \ldots \cdot (1+\alpha_n). \qquad (9.3.2)$$

Задача 3

Знайти всі тризначні (натуральні) числа, кожне з яких має точно три дільники.

Розв'язання

Оскільки шукані тризначні числа мають точно три дільники, то вони є складеними.

Спочатку переконаємося у тому, що в канонічному розкладі (9.3.1) шуканих чисел не може бути дві або ж більше різні прості основи.

Дійсно, ***якщо припустити обернене***, а саме: що у канонічному розкладі (9.3.1) шуканого числа a є принаймні дві різні прості основи p_1 і p_2, то з цього матимемо що їх (натуральні) показники повинні бути щонайменше «одиницями», тобто $\alpha_1 \ge 1$ та $\alpha_2 \ge 1$. Але ж тоді, з урахуванням формули (9.3.2), кількість дільників такого числа становить $\sigma(a) = (1+\alpha_1) \cdot (1+\alpha_2) \cdot \ldots \cdot (1+\alpha_n) \ge 2 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot (1+\alpha_n) \ge 4$, що суперечить умову задачі, оскільки шукані числа повинні мати точно по три дільники.

Таким чином канонічний розклад кожного із шуканих чисел має вид

$$a = p_1^{\alpha_1}, \qquad (9.3.3)$$

і, з урахуванням формули (9.3.2), кількість дільників кожного з таких чисел становить $\sigma(a) = (1+\alpha_1)$.

Очевидно, що $\sigma(a) = (1+\alpha_1) = 3 \Leftrightarrow \alpha_1 = 2$. І тому шукані тризначні числа можуть бути лише квадратами (другими степенями) простих чисел.

Добре відомими є перші з простих чисел, які наведено нижче в порядку зростання:

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, ...

Оскільки:

$7^2 = 49$ – не є тризначним числом,

$11^2 = 121$, $13^2 = 169$, $17^2 = 289$, $19^2 = 361$, $23^2 = 529$, $29^2 = 841$, $31^2 = 961$, та $37^2 = 1369$ – не є тризначним числом,

то шуканими тризначними числами, кожне з яких має точно три дільники, є виключно наступні числа

$11^2 = 121$, $13^2 = 169$, $17^2 = 289$, $19^2 = 361$, $23^2 = 529$, $29^2 = 841$, $31^2 = 961$.

Відповідь: $121; 169; 289; 361; 529; 841; 961$.

ДОПОВНЕННЯ до задачі 3.

?! Знайти всі чотиризначні (натуральні) числа, кожне з яких має точно п'ять дільників.

?! Знайти всі п'ятизначні (натуральні) числа, кожне з яких має точно п'ять дільників.

?! Знайти всі непарні тризначні (натуральні) числа, кожне з яких має точно чотири дільники.

?! Знайти всі двозначні (натуральні) числа, кожне з яких має точно шість дільників.

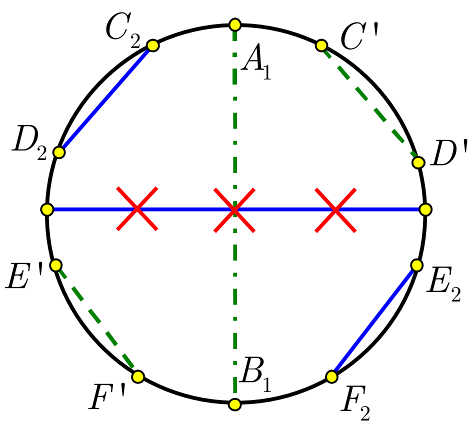
?! Знайти всі непарні тризначні (натуральні) числа, кожне з яких має точно шість дільників.

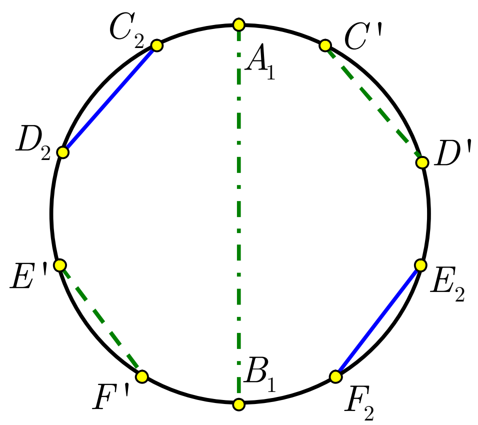
Задача 4

На колі дано 2018 точок (які є вершинами правильного 2018-кутника). Двоє друзів по черзі проводять хорди цього кола з кінцями у зазначених точках, причому не дозволяється проводити хорду, яка перетинає хоча б одну з вже проведених хорд. Виграє той, хто останнім проводить хорду. Якої стратегії повинен дотримуватися перший з гравців, щоб виграти.

Розв'язання

Першим своїм ходом той («перший»), хто починає гру, повинен сполучити хордою такі дві точки A_1 і B_1 на колі, щоб по різні боки від неї була однакова кількість точок. Оскільки на колі парна кількість точок, то цього завжди можна досягти (*в нашому випадку точки на колі є вершинами правильного 2018-кутника і тому в якості зазначеної хорди можна обрати довільний діаметр з кінцями в цих точках*).





Оскільки умовами гри не дозволяється проводити хорду, яка перетинає хоча б одну з вже проведених хорд, то «перший» з гравців <u>**завжди може провести хорду**</u> (симетричну до хорди, проведеної «другим» гравцем) тобто, завжди зробити наступний хід після «другого» гравця. Останнє й забезпечує «першому» з гравців гарантовану перемогу.

Відповідь: перший з гравців (той, хто проводить першу хорду), щоб виграти, повинен:

1) провести діаметр (сполучити дві діаметрально протилежні точки);
2) дзеркально повторювати хорди другого гравця.

ДОПОВНЕННЯ до задачі 4.

?! Є три купи каміння. Число каменів в усіх купах однакове. Двоє гравців беруть по черзі будь-яке число каменів з будь-якої купи, але лише з однієї. Виграє той, хто бере останні камені. Як повинен грати той, хто починає першим, щоб у будь-якому випадку виграти?

Задача 5

Розв’язати рівняння з параметром

$$\frac{x^2}{x^2-8x+15}+\frac{2018}{x-a}=\frac{a^2}{(x-3)(x-5)}-\frac{2018}{a-x}.$$

Розв’язання

$$\frac{x^2}{x^2-8x+15}+\frac{2018}{x-a}=\frac{a^2}{(x-3)(x-5)}-\frac{2018}{a-x}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{x^2}{x^2-8x+15}+\frac{2018}{x-a}=\frac{a^2}{(x-3)(x-5)}+\frac{2018}{x-a}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{x^2}{x^2-8x+15}=\dfrac{a^2}{(x-3)(x-5)}\\ x\neq a\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{x^2}{(x-3)(x-5)}=\dfrac{a^2}{(x-3)(x-5)}\\ x\neq a\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{x^2-a^2}{(x-3)(x-5)}=0\\ x\neq a\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\begin{cases}x^2-a^2=0\\ (x-3)(x-5)\neq 0\end{cases}\\ x\neq a\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^2=a^2\\ x-3\neq 0\\ x-5\neq 0\\ x\neq a\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}x=+a\\ x=-a\end{array}\right.\\ x\neq 3\\ x\neq 5\\ x\neq a\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-a\\ x\neq 3\\ x\neq 5\\ x\neq a\end{cases}$$

Не важко перевірити, що:

1) $-a=3\Leftrightarrow a=-3$;
2) $-a=5\Leftrightarrow a=-5$;
3) $-a=a\Leftrightarrow a=0$.

Тому, якщо $a\notin\{-5;-3;0\}$, то остання система, а разом з нею і дане рівняння мають єдиний розв’язок $x=-a$.

Якщо ж $a\in\{-5;-3;0\}$, то остання система, а разом з нею і дане рівняння не мають розв’язків.

Відповідь:

якщо $a\in\{-5;-3;0\}$, то рівняння коренів не має;

якщо $a\in R\setminus\{-5;-3;0\}$, то рівняння має один корінь $x=-a$.

10 клас

Задача 1

Функція $f(x)$ має вигляд $f(x)=\dfrac{ax+b}{cx+d}$, де a,b,c,d – деякі числа. Відомо, що $f(0)=1$, $f(1)=0$, $f(2)=3$. Чому дорівнює $f(3)$?

Розв'язання

1 спосіб

1) Оскільки $f(0)=1$, то має місце рівність

$f(0)=\dfrac{a\cdot 0+b}{c\cdot 0+d}=\dfrac{b}{d}=1$, звідки $d=b$.

2) Оскільки $f(1)=0$, то має місце рівність

$f(1)=\dfrac{a\cdot 1+b}{c\cdot 1+d}=0$, звідки $\begin{cases} a+b=0 \\ c+d\neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=-b \\ c\neq -d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=-b \\ c\neq -b \end{cases}$.

3) Оскільки $f(2)=3$, то має місце рівність

$f(2)=\dfrac{a\cdot 2+b}{c\cdot 2+d}=3$, звідки $\dfrac{2a+b-6c-3d}{2c+d}=0 \Rightarrow \begin{cases} 2a+b-6c-3d=0 \\ 2c+d\neq 0 \end{cases}$,

або ж $\Rightarrow \begin{cases} -2b+b-6c-3b=0 \\ 2c+b\neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6c=-4b \\ c\neq -\dfrac{b}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c=-\dfrac{2}{3}b \\ c\neq -\dfrac{b}{2} \end{cases}$.

4) Оскільки

$$\begin{cases} a=-b \\ d=b \\ c=-\dfrac{2}{3}b \\ c\neq -b \\ c\neq -\dfrac{b}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=-b \\ d=b \\ c=-\dfrac{2}{3}b \\ b\neq 0 \end{cases}, \qquad (10.0)$$

то дана функція $f(x)$ набуває виду

$$f(x)=\frac{-bx+b}{-\frac{2}{3}bx+b}=\frac{-x+1}{-\frac{2}{3}x+1}=\frac{3x-3}{2x-3}.$$

І тому шукане значення $f(3)=\dfrac{3\cdot 3-3}{2\cdot 3-3}=\dfrac{9-3}{6-3}=\dfrac{6}{3}=2$.

А чи звернули Ви увагу на те, що для будь-якого $x \neq \frac{3}{2}$

$$f\left(f\left(x\right)\right) = f\left(\frac{3x-3}{2x-3}\right) = \frac{3\frac{3x-3}{2x-3}-3}{2\frac{3x-3}{2x-3}-3} = \frac{3\left(3x-3\right)-3\left(2x-3\right)}{2\left(3x-3\right)-3\left(2x-3\right)} = \frac{3x}{3} = x.$$

2 спосіб

1) Розглянемо складну функцію $f\left(f\left(x\right)\right)$, де $f\left(x\right) = \frac{ax+b}{cx+d}$:

$$f\left(f\left(x\right)\right) = f\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right) = \frac{a\frac{ax+b}{cx+d}+b}{c\frac{ax+b}{cx+d}+d} = \frac{a\left(ax+b\right)+b\left(cx+d\right)}{c\left(ax+b\right)+d\left(cx+d\right)} =$$

$$= \frac{x\left(a^2+bc\right)+ab+bd}{x\left(ac+cd\right)+bc+d^2} = \frac{x\left(a^2+bc\right)+b\left(a+d\right)}{x\left(a+d\right)c+d^2+bc}. \qquad (10.1)$$

2) Оскільки за умовою $f\left(0\right)=1$, $f\left(1\right)=0$, то $f\left(f\left(0\right)\right)=0$. Тому $f\left(f\left(0\right)\right) = f\left(1\right) = \frac{b\left(a+d\right)}{d^2+bc} = 0$, звідки $b=0$ або $a+d=0$.

А через те, що (за умовою) $f\left(0\right) = \frac{a\cdot 0+b}{c\cdot 0+d} = \frac{b}{d} = 1$ маємо, що $b=d\neq 0$. Тому саме $a+d=0$, що є можливим лише за умов, коли

$$d=-a. \qquad (10.2)$$

3) Отже, з урахуванням (10.1) та (10.2), $f\left(f\left(x\right)\right)$ набуває вид

$$f\left(f\left(x\right)\right) = \frac{x\left(a^2+bc\right)}{d^2+bc} = \frac{x\left(a^2+bc\right)}{a^2+bc}. \qquad (10.3)$$

4) Оскільки за умовою $f\left(1\right)=0$, $f\left(0\right)=1$, то $f\left(f\left(1\right)\right)=1$. Тому, з урахуванням (10.2) і (10.3), маємо $\frac{\left(a^2+bc\right)}{d^2+bc}=1$, звідки $a^2+bc=d^2+bc\neq 0$.

5) Оскільки для даної функції $f\left(x\right)=\frac{ax+b}{cx+d}$ $x\neq -\frac{d}{c}$ та, з урахуванням (10.0) $c=-\frac{2}{3}d$, то при всіх дійсних $x\neq\frac{3}{2}$ функція $f\left(f\left(x\right)\right)$ набуває вид

$$f\left(f\left(x\right)\right) = \frac{x\left(a^2+bc\right)}{d^2+bc} \equiv x. \qquad (10.4)$$

Таким чином, з урахуванням (10.4), шукане значення $f\left(3\right)=f\left(f\left(2\right)\right)=2$.

Відповідь: $f\left(3\right)=2$.

Задача 2

Доведіть, що для додатних чисел a,b,c,d справджується нерівність

$$\left(a+b+c+d\right)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}\right)\ge 16.$$

Розв'язання

1 спосіб

1) За нерівністю Коші для додатних чисел a,b,c,d справджуються нерівності $a+b\ge 2\sqrt{ab}$, $c+d\ge 2\sqrt{cd}$, звідки, також за нерівністю Коші для додатних чисел $2\sqrt{ab}$ і $2\sqrt{cd}$ справджується нерівність $2\sqrt{ab}+2\sqrt{cd}\ge 4\sqrt{\sqrt{ab}\cdot\sqrt{cd}}=4\sqrt[4]{abcd}$. Тобто для додатних чисел a,b,c,d має місце нерівність

$$\left(a+b+c+d\right)\ge 4\sqrt[4]{abcd} \qquad (10.2.1)$$

2) Аналогічно для додатних чисел $\frac{1}{a},\frac{1}{b},\frac{1}{c},\frac{1}{d}$ справджуються нерівності $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\ge\frac{2}{\sqrt{ab}}$, $\frac{1}{c}+\frac{1}{d}\ge\frac{2}{\sqrt{cd}}$, $\frac{2}{\sqrt{ab}}+\frac{2}{\sqrt{cd}}\ge\frac{4}{\sqrt{\sqrt{ab}\cdot\sqrt{cd}}}=\frac{4}{\sqrt[4]{abcd}}$. Звідки

$$\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}\right)\ge\frac{4}{\sqrt[4]{abcd}} \qquad (10.2.2)$$

І тому, з урахуванням нерівностей (10.2.1), (10.2.2) та властивості числових нерівностей, маємо справедливість доводжуваної нерівності

$$\left(a+b+c+d\right)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}\right)\ge 4\sqrt[4]{abcd}\cdot\frac{4}{\sqrt[4]{abcd}}=16.$$

2 спосіб

1) Подамо ліву частину нерівності у наступному вигляді

$$\left(a+b+c+d\right)\left(\tfrac{1}{a}+\tfrac{1}{b}+\tfrac{1}{c}+\tfrac{1}{d}\right)=$$
$$=4+\left(\tfrac{a}{b}+\tfrac{b}{a}\right)+\left(\tfrac{a}{c}+\tfrac{c}{a}\right)+\left(\tfrac{a}{d}+\tfrac{d}{a}\right)+\left(\tfrac{b}{c}+\tfrac{c}{b}\right)+\left(\tfrac{b}{d}+\tfrac{d}{b}\right)+\left(\tfrac{c}{d}+\tfrac{d}{c}\right).$$

2) Добре відомо, що для довільних додатних m і n справджується нерівність $\frac{m}{n}+\frac{n}{m}\ge 2$. Ну, дійсно:

$$\tfrac{m}{n}+\tfrac{n}{m}\ge 2\Leftrightarrow m^2+n^2\ge 2mn\Leftrightarrow m^2-2mn+n^2\ge 0\Leftrightarrow\left(m-n\right)^2\ge 0.$$

Таким чином, з урахуванням зазначеної нерівності, для додатних a,b,c,d мають місце нерівності

$$\left(\tfrac{a}{b}+\tfrac{b}{a}\right)\ge 2;\ \left(\tfrac{a}{c}+\tfrac{c}{a}\right)\ge 2;\ \left(\tfrac{a}{d}+\tfrac{d}{a}\right)\ge 2;\ \left(\tfrac{b}{c}+\tfrac{c}{b}\right)\ge 2;\ \left(\tfrac{b}{d}+\tfrac{d}{b}\right)\ge 2;\ \left(\tfrac{c}{d}+\tfrac{d}{c}\right)\ge 2.$$

І тому за властивістю числових нерівностей справджується нерівність

$$4+\left(\tfrac{a}{b}+\tfrac{b}{a}\right)+\left(\tfrac{a}{c}+\tfrac{c}{a}\right)+\left(\tfrac{a}{d}+\tfrac{d}{a}\right)+\left(\tfrac{b}{c}+\tfrac{c}{b}\right)+\left(\tfrac{b}{d}+\tfrac{d}{b}\right)+\left(\tfrac{c}{d}+\tfrac{d}{c}\right)\ge$$
$$\ge 4+2+2+2+2+2+2=16.$$

З останнього й випливає правильність доводжуваної нерівності.

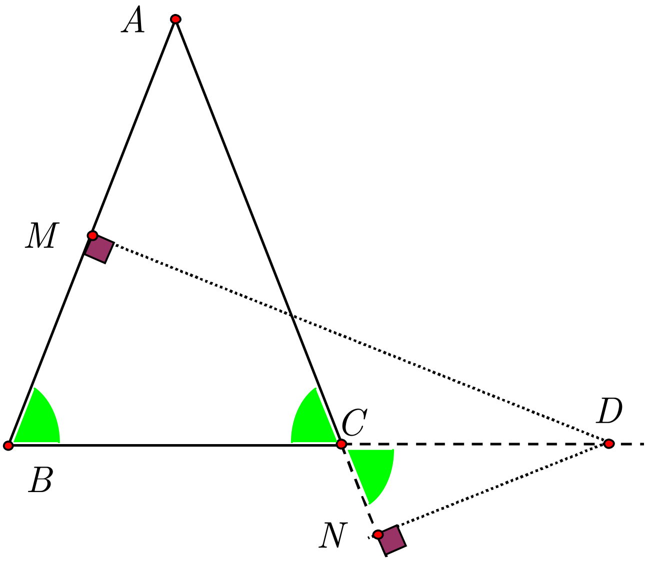
Задача 3

Розв'язання

Оскільки $\triangle ABC$ – рівнобедрений з основою BC, то $\angle B = \angle C = \varphi$. Заради зручності позначимо через DM – перпендикуляр до прямої AB, а через DN – перпендикуляр до прямої AC.

Зауважимо, що для фіксованого $\triangle ABC$ міри його елементів а також вирази, які їх містять (та, можливо, інші константи), є сталими величинами.

1 спосіб



1) Оскільки $\angle BCA = \angle DCN = \varphi$ як вертикальні, то з прямокутних трикутників BMD і CND маємо, що

$$\sin\varphi = \frac{DM}{DB} = \frac{DN}{DC},$$

звідки

$$DM - DN = $$
$$= DB \cdot \sin\varphi - DC \cdot \sin\varphi =$$
$$= \sin\varphi \left(DB - DC\right) = \sin\varphi \cdot BC.$$

2) Оскільки для фіксованого $\triangle ABC$ величини $\sin\varphi$ і BC є сталими величинами, то і величина $\sin\varphi \cdot BC = DM - DN$ є сталою величиною.

2 спосіб – «метод площ»

1) Не важко переконатися у тому, що

$$S_{\triangle ABC} = S_{\triangle ABD} - S_{\triangle ACD} \qquad (10.3.1)$$

2) Очевидно також, що

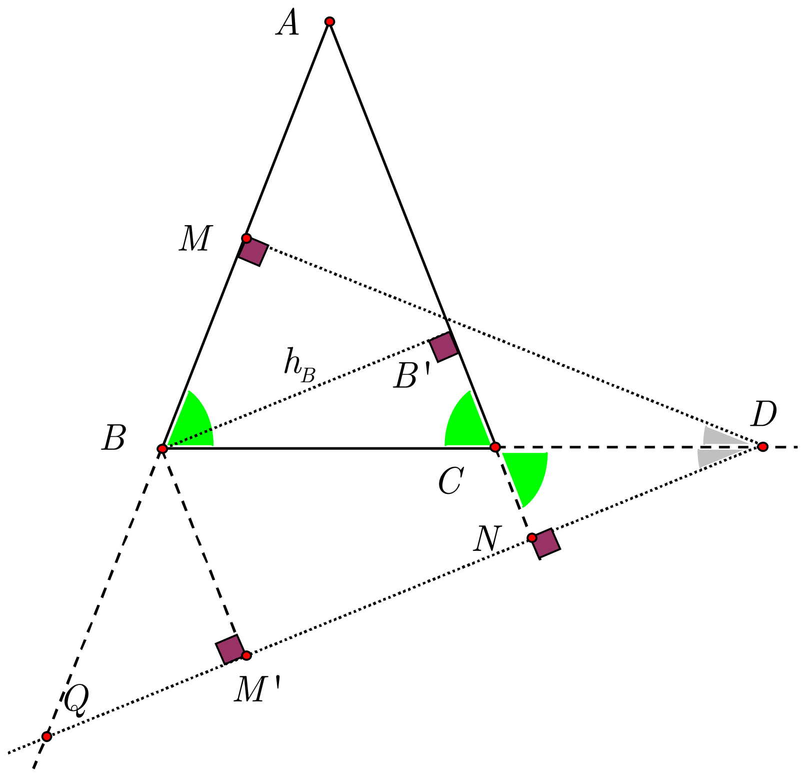
$$S_{\triangle ABD} = \frac{1}{2} AB \cdot DM, \qquad S_{\triangle ABD} = \frac{1}{2} AC \cdot DN \qquad (10.3.2)$$

Оскільки за умовою $AB = AC$, то (10.3.1), з урахуванням рівностей (10.3.2), можна подати у вигляді

$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot DM - \frac{1}{2} AC \cdot DN = \frac{1}{2} AB \cdot \left(DM - DN\right)$, звідки $DM - DN = \frac{2 \cdot S_{\triangle ABC}}{AB}$.

3) Оскільки для фіксованого $\triangle ABC$ величини $S_{\triangle ABC}$ і AC є сталими величинами, то і величина $\frac{2 \cdot S_{\triangle ABC}}{AB} = DM - DN$ є сталою величиною.

3 спосіб



1) Нехай промінь DN перетинає промінь AB у точці Q; BM' – перпендикуляр до прямої DQ, а BB' – висота $\triangle ABC$.

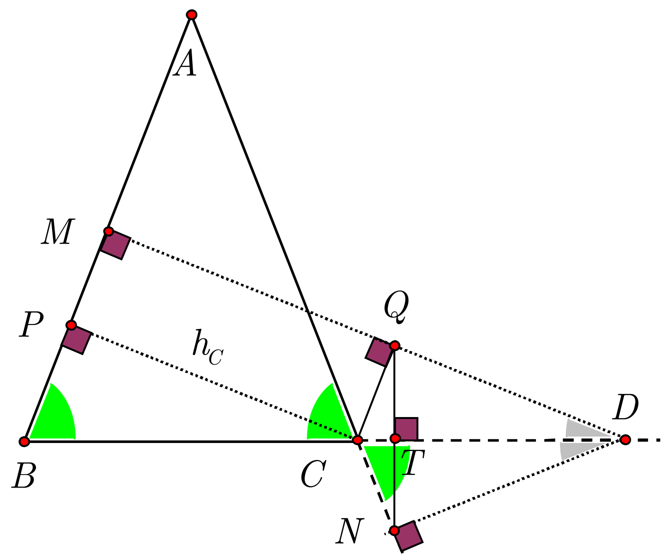
2) Оскільки $\angle BCA = \angle DCN = \varphi$ (як вертикальні кути), то з прямокутних трикутників BMD і CND маємо, що $\angle BDM = \angle NDC$. Але ж тоді $\triangle BDM = \triangle M'DB$ (за спільною гіпотенузою та гострим кутом).

Звідки $DM = DM'$ і тому $DM - DN = DM' - DN = M'N$.

3) Оскільки чотирикутник $BB'NM'$ є прямокутником, то $M'N = BB'$.

Таким чином $DM - DN = BB' = h_B = const$.

4 спосіб



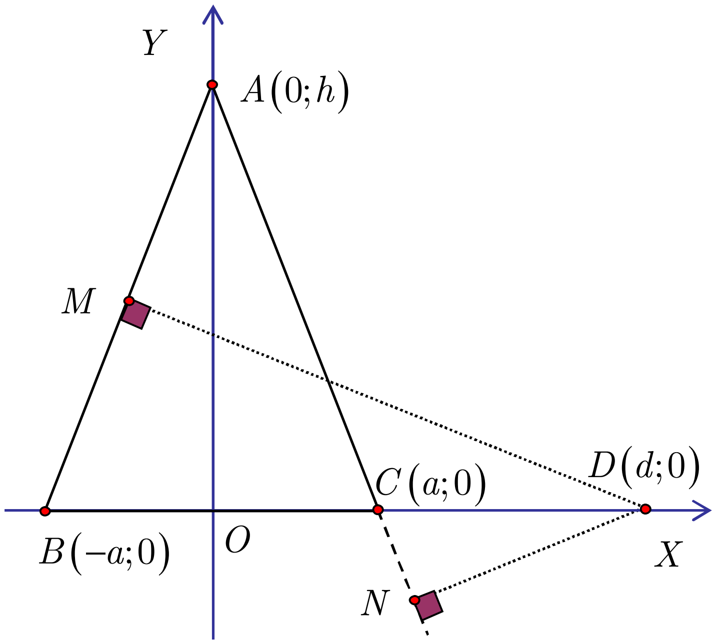
1) Нехай CQ – перпендикуляр до прямої DM, промінь NQ перетинає промінь CD у точці T; а CP – висота $\triangle ABC$.

2) Оскільки $\angle BCA = \angle DCN = \varphi$ (як вертикальні кути), то з прямокутних трикутників BMD і CND маємо, що $\angle BDM = \angle NDC$. Але ж тоді $\triangle CQD = \triangle CND$ (за спільною гіпотенузою та гострим кутом). Звідки $DN = DQ$ і тому $DM - DN = DM - DQ = QM$.

3) Оскільки чотирикутник $PMQC$ є прямокутником, то $QM = CP$.

Таким чином $DM - DN = CP = h_C = const$.

5 спосіб



1) Зафіксуємо в площині трикутника прямокутну систему координат так, щоб основа BC $\triangle ABC$ належала осі абсцис, а вершина A – додатній півпрямій осі ординат. Оскільки в $\triangle ABC$ $AB = AC$, то верши B і C є симетричними відносно початку координат O. Заради визначеності будемо вважати, що саме вершина C належить додатній півпрямій осі абсцис.

Оскільки для фіксованого $\triangle ABC$ довжини лінійних елементів є сталими додатними числами, то без втрати загальності будемо вважати, що $BC = 2a = const$, $AO = h = const$. Тому відносно зафіксованої системи координат вершини $\triangle ABC$ набувають координат: $A(0;h)$, $C(a;0)$, $B(-a;0)$. Оскільки т. D обирається на промені, доповняльному до променя CB, то т. D має координати $D(d;0)$, причому $d > a$.

2) Рівняння прямих AB і AC знайдемо як рівняння прямої, що проходить через дві точки, задані своїми координатами:

$$AB: \quad \frac{x+a}{0+a} = \frac{y-0}{h-0} \Rightarrow y = +\frac{h}{a}(x+a) \Rightarrow hx - ay + ha = 0;$$

$$AC: \quad \frac{x-a}{0-a} = \frac{y-0}{h-0} \Rightarrow y = -\frac{h}{a}(x-a) \Rightarrow hx + ay - ha = 0.$$

3) За добре відомою формулою знайдемо відстані $\rho(D;AB)$ і $\rho(D;AC)$ від точки D до прямих AB та AC відповідно:

$$\rho(D;AB) = \frac{|h \cdot d - a \cdot 0 + ha|}{\sqrt{h^2 + a^2}} = \frac{|h(d+a)|}{\sqrt{h^2 + a^2}} = \frac{h(d+a)}{\sqrt{h^2 + a^2}};$$

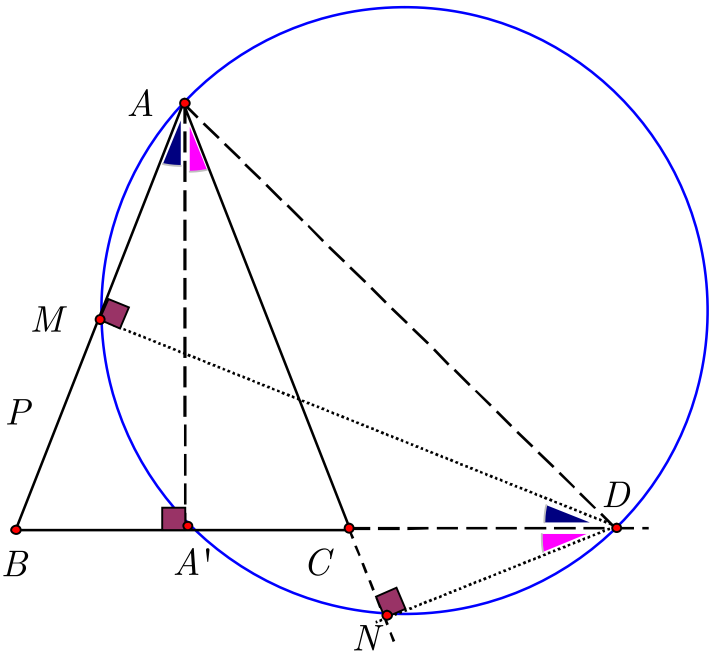
$$\rho(D;AC) = \frac{|h \cdot d + a \cdot 0 - ha|}{\sqrt{h^2 + a^2}} = \frac{|h(d-a)|}{\sqrt{h^2 + a^2}} = \frac{h(d-a)}{\sqrt{h^2 + a^2}}.$$

4) Оскільки

$$\rho(D;AB) - \rho(D;AC) = \frac{h(d+a)}{\sqrt{h^2 + a^2}} - \frac{h(d-a)}{\sqrt{h^2 + a^2}} = \frac{2ha}{\sqrt{h^2 + a^2}} = const,$$

то з останнього й випливає правильність доводжуваного твердження.

6 спосіб

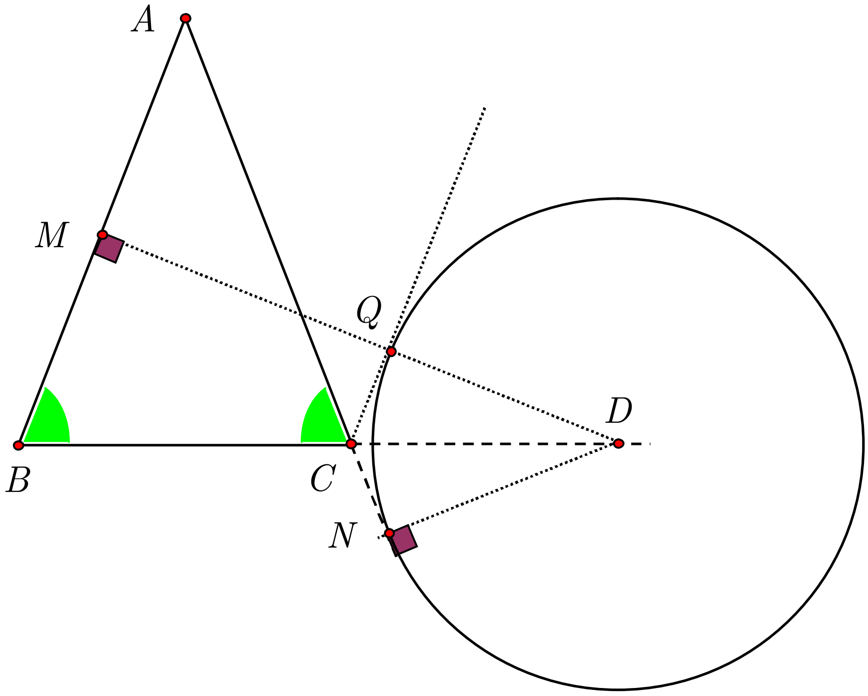


1) Нехай AA' – висота $\triangle ABC$, тоді AA' є бісектрисою $\angle A$, звідки $\angle BAA' = \angle CAA' = \psi$.

2) Оскільки $\angle AMD = \angle AA'D = = \angle AND = 90^0$, то точки A, M, A', N, D належать одному колу з діаметром AD. Тому за властивістю кутів, вписаних у коло, маємо рівність наступних пар кутів: $\angle MAA' = \angle MDA' = \psi$, $\angle A'AN = \angle A'DN = \psi$.

3) З прямокутних трикутників BMD і CND маємо, що $\cos\psi = \dfrac{DM}{DB} = \dfrac{DN}{DC}$, звідки $DM - DN = DB \cdot \cos\psi - DC \cdot \cos\psi = = \cos\psi\left(DB - DC\right) = \cos\psi \cdot BC = BC \cdot \sin\angle B = const$.

ДОПОВНЕННЯ до задачі 3.



Чи звернули Ви увагу на те, що?: для будь-якого положення точки D на промені BC (за точку C) пряма CQ (де Q – точка, що є симетричною до точки D відносно прямої DB) є дотичною до кола з центром у точці D і радіусом DN

Задача 4

Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} x^2 + xy - 2y^2 + 8x + 10y + 12 = 0 \\ x^2 + 3xy + 2y^2 - x + y - 6 = 0 \end{cases}$$

Розв'язання

1 спосіб

1) Розв'яжемо перше рівняння системи, як квадратне рівняння відносно змінної x:

$$x^2 + xy - 2y^2 + 8x + 10y + 12 = 0 \Leftrightarrow x^2 + x\left(y + 8\right) - 2y^2 + 10y + 12 = 0.$$

Дискримінант останнього рівняння становить

$$D = \left(y + 8\right)^2 - 4 \cdot \left(-2y^2 + 10y + 12\right) =$$

$= y^2 + 16y + 64 + 8y^2 - 40y - 48 = 9y^2 - 24y + 16 = \left(3y - 4\right)^2$, звідки

$$\sqrt{D} = \sqrt{\left(3y - 4\right)^2} = \left|3y - 4\right|.$$

Оскільки $x = \dfrac{-\left(y + 8\right) \pm \left(3y - 4\right)}{2}$,

то: або $x = \dfrac{-y - 8 - 3y + 4}{2} = -2y - 2$, або ж $x = \dfrac{-y - 8 + 3y - 4}{2} = y - 6$.

2) Якщо $x = -2y - 2$, то друге рівняння системи набуває вид

$$\left(-2y - 2\right)^2 + \left(-2y - 2\right)\left(3y - 1\right) + 2y^2 + y - 6 = 0,$$

звідки $4y^2 + 8y + 4 - 6y^2 - 6y + 2y + 2 + 2y^2 + y - 6 = 0$,

$5y = 0$,

$y = 0$.

При $y = 0$ маємо $x = -2$, звідки $\left(-2; 0\right)$ – розв'язок системи.

3) Якщо ж $x = y - 6$, то друге рівняння системи набуває вид

$$\left(y - 6\right)^2 + \left(y - 6\right)\left(3y - 1\right) + 2y^2 + y - 6 = 0,$$

звідки $y^2 - 12y + 36 + 3y^2 - 18y - y + 6 + 2y^2 + y - 6 = 0$,

$6y^2 - 30y + 36 = 0$,

$y^2 - 5y + 6 = 0$,

$y_1 = 2$ $y_2 = 3$.

при $y = 2$ маємо $x = -4$, звідки $\left(-4; 2\right)$ – розв'язок системи.

при $y = 3$ маємо $x = -3$, звідки $\left(-3; 3\right)$ – розв'язок системи.

2 спосіб

1) Розкладемо на множники ліву частину 1-го рівняння даної системи:

$$x^2+xy-2y^2+8x+10y+12=$$
$$=x^2+xy-2y^2+8x+10y+12=x^2-xy+2xy-2y^2+8x+10y+12=$$
$$=x^2-xy+6x+2xy-2y^2+12y+2x-2y+12=$$
$$=x(x-y+6)+2y(x-y+6)+2(x-y+6)=(x-y+6)(x+2y+2).$$

2) Розкладемо на множники ліву частину 2-го рівняння даної системи:

$$x^2+3xy+2y^2-x+y-6=$$
$$=x^2+xy+2x+2xy+2y^2-3x+y-6=$$
$$=x^2+xy+2x+2xy+2y^2+4y-3x-3y-6=$$
$$=x(x+y+2)+2y(x+y+2)-3(x+y+2)=(x+y+2)(x+2y-3)$$

Таким чином дана система рівносильна наступній

$$\begin{cases}x^2+xy-2y^2+8x+10y+12=0\\x^2+3xy+2y^2-x+y-6=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(x-y+6)(x+2y+2)=0\\(x+y+2)(x+2y-3)=0\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}x=y-6\\x=-2y-2\end{array}\right.\\\left[\begin{array}{l}x=-y-2\\x=-2y+3\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=y-6\\x=-y-2\end{cases}\\\begin{cases}x=y-6\\x=-2y+3\end{cases}\\\begin{cases}x=-2y-2\\x=-y-2\end{cases}\\\begin{cases}x=-2y-2\\x=-2y+3\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=y-6\\y-6=-y-2\end{cases}\\\begin{cases}x=y-6\\y-6=-2y+3\end{cases}\\\begin{cases}x=-2y-2\\-2y-2=-y-2\end{cases}\\\begin{cases}x=-2y-2\\-2y-2=-2y+3\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=y-6\\2y=4\end{cases}\\\begin{cases}x=y-6\\3y=9\end{cases}\\\begin{cases}x=-2y-2\\y=0\end{cases}\\\begin{cases}x=-2y-2\\-2=3\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=y-6\\y=2\end{cases}\\\begin{cases}x=y-6\\y=3\end{cases}\\\begin{cases}x=-2y-2\\y=0\end{cases}\\\varnothing\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=-4\\y=2\end{cases}\\\begin{cases}x=-3\\y=3\end{cases}\\\begin{cases}x=-2\\y=0\end{cases}\end{array}\right.$$

3 спосіб

Переконаємося у тому, що «на прямій $x=0$» немає розв'язків даної системи, або ж іншими словами – що серед розв'язків даної системи немає розв'язків виду $(0;y_0)$. При $x=0$ дана система набуває вид

$$\begin{cases}-2y^2+10y+12=0\\2y^2+y-6=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}y^2-5y-6=0\\2y^2+y-6=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}(y-6)(y+1)=0\\2(y+2)\left(y-\dfrac{3}{2}\right)=0\end{cases}\Rightarrow y\in\varnothing.$$

2) За умови $x\neq 0$ розв'язки системи будемо шукати у вигляді $y=kx$.

$$\begin{cases}x^2+xkx-2(kx)^2+8x+10kx=-12\\x^2+3xkx+2(kx)^2-x+kx-6=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-2x^2k^2+k\left(x^2+10x\right)+x^2+8x=-12\\2x^2k^2+k\left(3x^2+x\right)+x^2-x-6=0.\end{cases}$$

3) Оскільки $x\neq 0$, то кожне з рівнянь останньої системи можна розв'язати як квадратне рівняння відносно змінної k:

3.1) $-2x^2k^2+k\left(x^2+10x\right)+x^2+8x+12=0$

$$D_1=\left(x^2+10x\right)^2+8x^2\left(x^2+8x+12\right)=x^2(x+10)^2+8x^2\left(x^2+8x+12\right)=$$

$$=x^2\left(x^2+20x+100+8x^2+64x+96\right)=x^2\left(9x^2+84x+196\right)=x^2(3x+14)^2,$$

звідки

$$k_{1,1}=\frac{-x-10-3x-14}{-4x}=\frac{x+6}{x},\ k_{1,2}=\frac{-x-10+3x+14}{-4x}=\frac{x+2}{-2x}.$$

3.2) $2x^2k^2+k\left(3x^2+x\right)+x^2-x-6=0$

$$D_2=\left(3x^2+x\right)^2-8x^2\left(x^2-x-6\right)=x^2(3x+1)^2-8x^2\left(x^2-x-6\right)=$$

$$=x^2\left(9x^2+6x+1-8x^2+8x+48\right)=x^2\left(x^2+14x+49\right)=x^2(x+7)^2,\text{ звідки}$$

$$k_{2,1}=\frac{-3x-1-x-7}{4x}=\frac{-x-2}{x},\ k_{2,2}=\frac{-3x-1+x+7}{4x}=\frac{-x+3}{2x}.$$

$$\begin{cases}\left[\begin{array}{l}k=\dfrac{x+6}{x}\\k=\dfrac{x+2}{-2x}\end{array}\right.\\\left[\begin{array}{l}k=\dfrac{-x-2}{x}\\k=\dfrac{-x+3}{2x}\end{array}\right.\end{cases}\Rightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}k=\frac{x+6}{x}\\k=\frac{-x-2}{x}\end{cases}\\\begin{cases}k=\frac{x+6}{x}\\k=\frac{-x+3}{2x}\end{cases}\\\begin{cases}k=\frac{x+2}{-2x}\\k=\frac{-x-2}{x}\end{cases}\\\begin{cases}k=\frac{x+2}{-2x}\\k=\frac{-x+3}{2x}\end{cases}\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}k=\frac{x+6}{x}\\\frac{x+6}{x}=\frac{-x-2}{x}\end{cases}\\\begin{cases}k=\frac{x+6}{x}\\\frac{x+6}{x}=\frac{-x+3}{2x}\end{cases}\\\begin{cases}k=\frac{x+2}{-2x}\\\frac{x+2}{-2x}=\frac{-x-2}{x}\end{cases}\\\begin{cases}k=\frac{x+2}{-2x}\\\frac{x+2}{-2x}=\frac{-x+3}{2x}\end{cases}\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}k=\frac{x+6}{x}\\x=-4\end{cases}\\\begin{cases}k=\frac{x+6}{x}\\x=-3\end{cases}\\\begin{cases}k=\frac{x+2}{-2x}\\x=-2\end{cases}\\\begin{cases}k=\frac{x+2}{-2x}\\\varnothing\end{cases}\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}k=-\frac{1}{2}\\x=-4\end{cases}\\\begin{cases}k=-1\\x=-3\end{cases}\\\begin{cases}k=0\\x=-2\end{cases}\end{array}\right.$$

Оскільки $y=kx$, то

при $k=-\frac{1}{2}$: $x=-4$, $y=-\frac{1}{2}\cdot(-4)=2$;

при $k=-1$: $x=-3$, $y=-1\cdot(-3)=3$;

при $k=0$: $x=-2$, $y=0\cdot(-2)=0$.

Відповідь: $(-4;2),(-3;3),(-2;0)$.

Задача 5

Кути опуклого многокутника утворюють арифметичну прогресію $\alpha, \frac{3\alpha}{2}, 2\alpha, \ldots$. Знайти кути такого многокутника з найбільшим можливим числом сторін.

Розв'язання

1) Розглянемо арифметичну прогресію, для якої $a_1 = \alpha$, а $d = \frac{\alpha}{2}$.

Тоді за формулами для обчислення суми членів арифметичної прогресії та суми кутів опуклого n – кутника має місце рівність

$$\left(2\alpha + (n-1) \cdot \tfrac{\alpha}{2}\right) \cdot \tfrac{n}{2} = 180(n-2),$$

звідки

$$\alpha = \frac{4 \cdot 180(n-2)}{n(n+3)}.$$

Тому

$$a_n = \alpha + (n-1) \cdot \tfrac{\alpha}{2} = \tfrac{\alpha}{2}(n+1) = \frac{2 \cdot 180(n-2)(n+1)}{n(n+3)}.$$

2) Оскільки кожен кут опуклого многокутника менший за 180^0, то повинна справджуватися нерівність

$$a_n = \frac{2 \cdot 180(n-2)(n+1)}{n(n+3)} < 180 \text{, звідки } \frac{2(n-2)(n+1)}{n(n+3)} < 1,$$

або ж

$$n^2 - 5n - 4 < 0 \Leftrightarrow n(n-5) < 4.$$

Найбільше натуральне n, що є розв'язком останньої нерівності, становить 5.

3) При $n = 5$ маємо, що $\alpha = \frac{4 \cdot 180^0 \cdot (5-2)}{5(5+3)} = 54^0$. Звідки $d = \frac{\alpha}{2} = 27^0$.

І тому градусні міри шуканих кутів становлять

$$\begin{array}{lllll} 54^0, & & & & \\ 54^0 & + & 27^0 & = & 81^0, \\ 81^0 & + & 27^0 & = & 108^0, \\ 108^0 & + & 27^0 & = & 135^0, \\ 135^0 & + & 27^0 & = & 162^0. \end{array}$$

Відповідь: $54^0, 81^0, 108^0, 135^0, 162^0$.

11 клас

Задача 1

Розв'язання

1 спосіб

Оскільки $x>0, y>0, z>0$, то $xyz>0$. І тому

$$\frac{x}{yz}+\frac{y}{xz}+\frac{z}{xy}\ge\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\Leftrightarrow\frac{x}{yz}+\frac{y}{xz}+\frac{z}{xy}-\frac{1}{x}-\frac{1}{y}-\frac{1}{z}\ge 0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{x^2+y^2+z^2-yz-xz-xy}{xyz}\ge 0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{2x^2+2y^2+2z^2-2yz-2xz-2xy}{xyz}\ge 0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{(x-y)^2+(x-z)^2+(y-z)^2}{xyz}\ge 0.$$

2 спосіб

Оскільки $x>0, y>0, z>0$, то $xyz>0$. І тому

$$\frac{x}{yz}+\frac{y}{xz}+\frac{z}{xy}\ge\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2+y^2+z^2\ge yz+xz+xy\Leftrightarrow 2x^2+2y^2+2z^2\ge 2yz+2xz+2xy\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x+y)^2+(x+z)^2+(y+z)^2\ge 0.$$

3 спосіб

Очевидно, що

$$\frac{x}{yz}+\frac{y}{xz}+\frac{z}{xy}\ge\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\Leftrightarrow\frac{2x}{yz}+\frac{2y}{xz}+\frac{2z}{xy}\ge\frac{2}{x}+\frac{2}{y}+\frac{2}{z}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left(\frac{x}{yz}+\frac{y}{xz}\right)+\left(\frac{x}{yz}+\frac{z}{xy}\right)+\left(\frac{z}{xy}+\frac{y}{xz}\right)\ge\frac{2}{x}+\frac{2}{y}+\frac{2}{z}.$$

Оскільки $x>0, y>0, z>0$, то за нерівністю Коші маємо:

$$\frac{x}{yz}+\frac{y}{xz}\ge 2\sqrt{\frac{x}{yz}\cdot\frac{y}{xz}}=2\sqrt{\frac{1}{z^2}}=\frac{2}{z};\quad\frac{x}{yz}+\frac{z}{xy}\ge 2\sqrt{\frac{x}{yz}\cdot\frac{z}{xy}}=2\sqrt{\frac{1}{y^2}}=\frac{2}{y};$$

$$\frac{x}{yz}+\frac{z}{xy}\ge 2\sqrt{\frac{x}{yz}\cdot\frac{z}{xy}}=2\sqrt{\frac{1}{y^2}}=\frac{2}{y}.$$

Звідки випливає справедливість нерівності

$$\left(\frac{x}{yz}+\frac{y}{xz}\right)+\left(\frac{x}{yz}+\frac{z}{xy}\right)+\left(\frac{z}{xy}+\frac{y}{xz}\right)\ge\frac{2}{x}+\frac{2}{y}+\frac{2}{z}$$

а разом з нею і справедливість доводжуваної нерівності.

Задача 2

Знайти період функції $y = \sin^6 x + \cos^6 x$.

Розв'язання

Добре відомим є

Твердження*. Якщо T – основний період (найменший додатний період) періодичної функції $y = f(x)$, то основним періодом функції $g(x) = a + b \cdot f(k \cdot x + c)$, де $a, b, k, c \in R$ і $b \cdot k \neq 0$, є число $T_0 = \dfrac{T}{|k|}$.

1 спосіб

$$\sin^6 x + \cos^6 x =$$
$$= \left(\sin^2 x\right)^3 + \left(\cos^2 x\right)^3 = \left(\sin^2 x + \cos^2 x\right)\left(\sin^4 x - \sin^2 x \cdot \cos^2 x + \cos^4 x\right) =$$
$$= 1 \cdot \left(\sin^4 x - \sin^2 x \cdot \cos^2 x + \cos^4 x\right) =$$
$$= \left(\sin^4 x + 2\sin^2 x \cdot \cos^2 x + \cos^4 x\right) - 3\sin^2 x \cdot \cos^2 x =$$
$$= \left(\sin^2 x + \cos^2 x\right)^2 - 3\sin^2 x \cdot \cos^2 x = 1 - 3\sin^2 x \cdot \cos^2 x =$$
$$= 1 - 3\left(\sin x \cdot \cos x\right)^2 = 1 - \frac{3}{4}\left(2\sin x \cdot \cos x\right)^2 =$$
$$= 1 - \frac{3}{4}\sin^2 2x = 1 - \frac{3}{4} \cdot \left(\frac{1 - \cos 4x}{2}\right) = \frac{5}{8} + \frac{3}{8}\cos 4x.$$

Оскільки основним періодом функції $y = \cos x$ є число 2π, то, з урахуванням **Твердження***, (основним) періодом функції $y = \sin^6 x + \cos^6 x \equiv \dfrac{5}{8} + \dfrac{3}{8}\cos 4x$ є число $T_0 = \dfrac{2\pi}{4} = \dfrac{\pi}{2}$.

2 спосіб

$$\sin^6 x + \cos^6 x =$$
$$= \left(\sin^2 x\right)^3 + \left(\cos^2 x\right)^3 = \left(\sin^2 x + \cos^2 x\right)\left(\sin^4 x - \sin^2 x \cdot \cos^2 x + \cos^4 x\right) =$$
$$= 1 \cdot \left(\left(\frac{1 - \cos 2x}{2}\right)^2 - \left(\frac{1 - \cos 2x}{2}\right) \cdot \left(\frac{1 + \cos 2x}{2}\right) + \left(\frac{1 - \cos 2x}{2}\right)^2\right) =$$
$$= \frac{1 - 2\cos 2x + \cos^2 2x}{4} - \frac{1 - \cos^2 2x}{4} + \frac{1 + 2\cos 2x + \cos^2 2x}{4} =$$
$$= \frac{1 + 3\cos^2 2x}{4} = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} \cdot \frac{1 + \cos 4x}{2} = \frac{5}{8} + \frac{3}{8}\cos 4x.$$

Звідки (основним) періодом функції $y = \sin^6 x + \cos^6 x \equiv \dfrac{5}{8} + \dfrac{3}{8}\cos 4x$ є число $T_0 = \dfrac{2\pi}{4} = \dfrac{\pi}{2}$.

3 спосіб

$\sin^6 x + \cos^6 x =$

$$= \left(\sin^2 x\right)^3 + \left(\cos^2 x\right)^3 = \left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^3 + \left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^3 =$$

$$= \frac{1}{8}\left(1-\cos 2x\right)^3 + \frac{1}{8}\left(1+\cos 2x\right)^3 =$$

$$= \frac{1}{8}\left(1^3 - 3\cos 2x + 3\cos^2 2x - \cos^3 2x + 1^3 + 3\cos 2x + 3\cos^2 2x + \cos^3 2x\right) =$$

$$= \frac{1}{8}\left(2 + 6\cos^2 2x\right) = \frac{1}{8}\left(2 + 6\cdot\frac{1+\cos 4x}{2}\right) = \frac{1}{8}\left(5 + 3\cos 4x\right).$$

Звідки й випливає, що (основним) періодом даної функції є число $\frac{\pi}{2}$.

4 спосіб

$\sin^6 x + \cos^6 x =$

$$= \sin^6 x + \left(1-\sin^2 x\right)^3 = \sin^6 x + 1 - 3\sin^2 x + 3\sin^4 x - \sin^6 x =$$

$$= 1 - 3\sin^2 x + 3\sin^4 x = 1 - 3\sin^2 x\left(1-\sin^2 x\right) =$$

$$= 1 - 3\sin^2 x\cos^2 x = 1 - \frac{3}{4}\left(2\sin x\cdot\cos x\right)^2 =$$

$$= 1 - \frac{3}{4}\sin^2 2x = 1 - \frac{3}{4}\cdot\left(\frac{1-\cos 4x}{2}\right) = \frac{5}{8} + \frac{3}{8}\cos 4x.$$

Відповідь: $T_0 = \frac{\pi}{2}$.

А чи знали Ви, що?

якщо функція $y = f(x)$ є періодичною з додатним періодом T_0 та (в кожній точці) має похідну $f'(x)$, то функція $y = f'(x)$ також є періодичною з основним періодом T_0.

5 спосіб

$y = \sin^6 x + \cos^6 x = f(x);$

$y' = 6\sin^5 x\cos x - 6\cos^5 x\sin x = 6\sin x\cos x\left(\sin^4 x - \cos^4 x\right) =$

$$= 3\sin 2x\left(\sin^2 x - \cos^2 x\right)\left(\sin^2 x + \cos^2 x\right) =$$

$$= 3\sin 2x\left(\sin^2 x - \cos^2 x\right) = -3\sin 2x\cos 2x = -\frac{3}{2}\sin 4x = f'(x);$$

Оскільки $y = \sin^6 x + \cos^6 x = f(x)$ є періодичною та має похідну $f'(x) = -\frac{3}{2}\sin 4x$ в кожній точці x, а період функції $f'(x) = -\frac{3}{2}\sin 4x$ становить $T_0 = \frac{\pi}{2}$, то періодом функції $f(x)$ також є число $T_0 = \frac{\pi}{2}$.

Задача 3

Зауваження 1. Питання вчителя не передбачало конкретного предмета, тобто відповідь учня передбачала лише (одне) число балів, які він одержав за певний (без вказівки за який саме) предмет.

Розв'язання

1 спосіб

Результати досліджень щодо опитування учителем кожного з учнів (з урахуванням їх можливих відповідей) та можливості зробити на їх підставі висновок вчителю представлені у вигляді таблиці нижче

випускник, якого учитель питає	попередня ***~~неправдива~~*** відповідь випускника	варіант <u>**правдивої**</u> відповіді: *«з одного зі своїх предметів я одержав бал …»*	Висновок учителя		
			Андрій	**Василь**	**Сашко**
Андрій	~~*180, 180*~~	170	170, 180 *або* 170, 190	180, 180 170, 180	170, 190 180, 180
		180	170, 180	170, 190	180, 180
		190	170, 190	170, 180	180, 180
Василь	~~*170, 190*~~	170	170, 190	170, 180	180, 180
		180	170, 190 170, 180	170, 180 *або* 180, 180	180, 180 170, 190
		190 – не може бути правдивою відповіддю	–	–	–
Сашко	~~*170, 180*~~	170	<u>170, 180</u>	<u>180, 180</u>	<u>170, 190</u>
		180	170, 190	170, 180	180, 180
		190	<u>170, 180</u>	<u>180, 180</u>	<u>170, 190</u>

На підставі одержаних результатів приходимо до умовиводу, що вчитель повинен задати питання саме Сашкові, бо лише при кожній з відповідей Сашка вчитель може зробити категоричний і правильний висновок щодо одержання учнями балів з предметів ЗНО.

2 спосіб

З урахуванням умови задачі, для кожного з учнів є лише два можливі варіанти результатів ЗНО. Зокрема й для Андрія. Тобто для Андрія є лише два можливі випадки:

1) Андрій одержав 170 та 180 балів (з предметів ЗНО);
2) Андрій одержав 170 та 190 балів (з предметів ЗНО).

У **1)-му** випадку результати Василя можуть бути лише «180, 180», бо «170, 180» – результати Андрія, а «170, 190» – є неправдивим (за умовою) результатом для Василя; звідки «170, 190» – результати Сашка.

У **2)-му** випадку результати Сашка можуть бути лише «180, 180», бо «170, 190» – результати Андрія, а «170, 180» – є неправдивим (за умовою) результатом для Сашка; звідки «170, 180» – результати Василя.

можливі варіанти	*перший*	*другий*
Андрій	**170**, 180	**170**, 190
Василь	180, **180**	170, **180**
Сашко	*170, 190*	*180, 180*

Таким чином **дана задача має лише два розв'язки**. Причому: якщо вчитель звернеться до Андрія і Андрій відповість правдиво «**170**»,

або

якщо вчитель звернеться до Василя і Василь відповість правдиво «**180**»,

то

вчитель не зможе однозначно визначити бали кожного з учнів.
Тому («мудрий») вчитель повинен задати питання саме Сашкові.

Відповідь: вчитель задав питання саме Сашкові; причому:

якщо Сашко скаже «170» або «190», то учитель зробить висновок: Сашко – «170, 190»; Андрій – «170, 180», Василь – «180, 180»;

якщо ж Сашко скаже «180», то учитель зробить наступний висновок: Сашко – «180, 180»; Андрій – «170, 190», Василь – «170, 180».

Зауваження 2. Порівняйте задачу 3 та запропоновану нижче **задачу 3***. Вони є різними за фабулою, проте еквівалентними за змістом. Тобто, задачу 3 можна було би сформулювати в термінах «кульок і коробок з табличками» (із задачі 3*), замінивши «170» на кульку 1-го кольору, «180» – на кульку 2-го кольору, «190» – на кульку 3-го кольору, а «надписи на коробках» – на попередні заяви випускників.

Задача 3*. У трьох однакових коробках лежить по дві кульки: в одній – 2 чорні, в іншій – дві білі, а в третій – біла та чорна. На кожній коробці є табличка: на одній зображено дві білі кульки, на іншій – дві чорні, на третій – біла та чорна. Відомо, що вміст кожної коробки не відповідає надпису на табличці. В який спосіб слід вийняти лише одну кульку з однієї коробки, щоб з'ясувати, які кульки лежать у якій коробці та переставити таблички на коробках у відповідністю із їх вмістом?

ДОПОВНЕННЯ до задачі 3.

?! У трьох шухлядах лежить по одні кульці: біла, чорна та зелена. На першій шухляді надпис – «білий», на другій – «чорна», а на третій – «білий або зелений». Відомо, що жоден надпис не відповідає дійсності. Де лежать (в яких саме шухлядах) відповідно чорна, біла та зелена кульки?

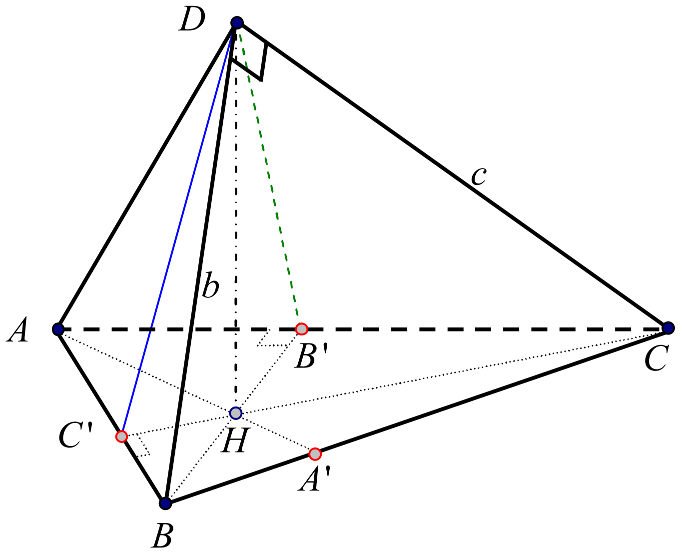
Задача 4

Висота тетраедра $ABCD$, яка опущена з вершини D, проходить через точку перетину висот $\triangle ABC$. Відомо, що $DB=b$, $DC=c$, $\angle BDC=90^\circ$. Знайти відношення площ граней ADB і ADC.

Розв'язання

Нехай H – точка перетину висот AA', BB' та CC' $\triangle ABC$. Тоді (за умовою) DH – перпендикуляр, опущений з вершини D на площину ABC.

1 спосіб



1) Оскільки $CC' \perp AB$, то $CH \perp AB$ і тому за теоремою «про три перпендикуляри» $CD \perp AB$. Пряма CD є перпендикулярною до (непаралельних) прямих BD і BA площини γ, яка містить грань DAB. Тому за ознакою перпендикулярності прямої і площини $CD \perp \gamma$, звідки (за визначенням прямої перпендикулярної до площини) $CD \perp DA$. Звідки $\angle CDA = 90^0$.

2) Оскільки $BB' \perp AC$, то $BH \perp AC$ і тому за теоремою «про три перпендикуляри» $BD \perp AC$. Пряма BD є перпендикулярною до (непаралельних) прямих CD і CA площини β, яка містить грань DAC. Тому за ознакою перпендикулярності прямої і площини $BD \perp \beta$, звідки (за визначенням прямої перпендикулярної до площини) $BD \perp DA$. Звідки $\angle BDA = 90^0$.

3) Оскільки $\angle BDA = 90^0$, то $S_{ADB} = \dfrac{1}{2} AD \cdot DB = \dfrac{1}{2} AD \cdot b$.

4) Оскільки $\angle CDA = 90^0$, то $S_{ADC} = \dfrac{1}{2} AD \cdot DC = \dfrac{1}{2} AD \cdot c$.

Таким чином

$$\frac{S_{ADB}}{S_{ADC}} = \frac{\frac{1}{2} AD \cdot b}{\frac{1}{2} AD \cdot c} = \frac{b}{c}.$$

2 спосіб

1) Оскільки $CC' \perp AB$, то за теоремою «про три перпендикуляри» $DC' \perp AB$ та $CD \perp AB$. Пряма CD є перпендикулярною до (непаралельних) прямих BD і BA площини (DAB). Отже за ознакою перпендикулярності прямої і площини $CD \perp (DAB)$. Тому (за означенням прямої перпендикулярної до площини) $CD \perp DC'$, звідки $\angle CDC' = 90^0$. І тому (за властивістю прямокутного трикутника) маємо

$$DC' \cdot c = CC' \cdot DH. \qquad (11.4.1)$$

2) Оскільки $BB' \perp AC$, то за теоремою «про три перпендикуляри» $DB' \perp AC$ та $BD \perp AC$. Пряма BD є перпендикулярною до (непаралельних) прямих CD і CA площини (DAC). Отже за ознакою перпендикулярності прямої і площини $BD \perp (DAC)$. Тому (за означенням прямої перпендикулярної до площини) $BD \perp DB'$, звідки $\angle BDB' = 90^0$. І тому (за властивістю прямокутного трикутника) маємо

$$DB' \cdot b = BB' \cdot DH. \qquad (11.4.2)$$

3) З урахуванням рівностей (11.4.1) та (11.4.2) маємо

$$\frac{DC'}{DB'} = \frac{CC'}{BB'} \cdot \frac{b}{c} \qquad (11.4.3)$$

4) Оскільки довжини сторін трикутника обернено пропорційні довжинам відповідних його висот, то з $\triangle ABC$ маємо рівність

$$\frac{AB}{AC} = \frac{BB'}{CC'}. \qquad (11.4.4)$$

5) З урахуванням відношень (11.4.3) та (11.4.4) одержуємо

$$\frac{S_{ADB}}{S_{ADC}} = \frac{\frac{1}{2}AB \cdot DC'}{\frac{1}{2}AC \cdot DB'} = \frac{AB}{AC} \cdot \frac{DC'}{DB'} = \frac{BB'}{CC'} \cdot \frac{DC'}{DB'} = \frac{\cancel{BB'}}{\cancel{CC'}} \cdot \frac{\cancel{CC'}}{\cancel{BB'}} \cdot \frac{b}{c} = \frac{b}{c}.$$

Відповідь: $S_{ADB} : S_{ADC} = b : c$.

ДОПОВНЕННЯ до задачі 4.

?! Нехай основа висоти тетраедра (трикутної піраміди) співпадає з ортоцентром (точкою перетину висот) основи. Тоді основа кожної з висот тетраедра співпадає з ортоцентром відповідної грані.

?! У тетраедра $ABCD$ всі двогранні кути є гострими, а протилежні ребра попарно рівними. Знайдіть суму косинусів усіх двогранних кутів тетраедра.

Задача 5

Скільки коренів має рівняння $\sqrt{x+a} = \log_{\frac{1}{3}}(x-2a)$ при різних значеннях параметра a?

Розв'язання

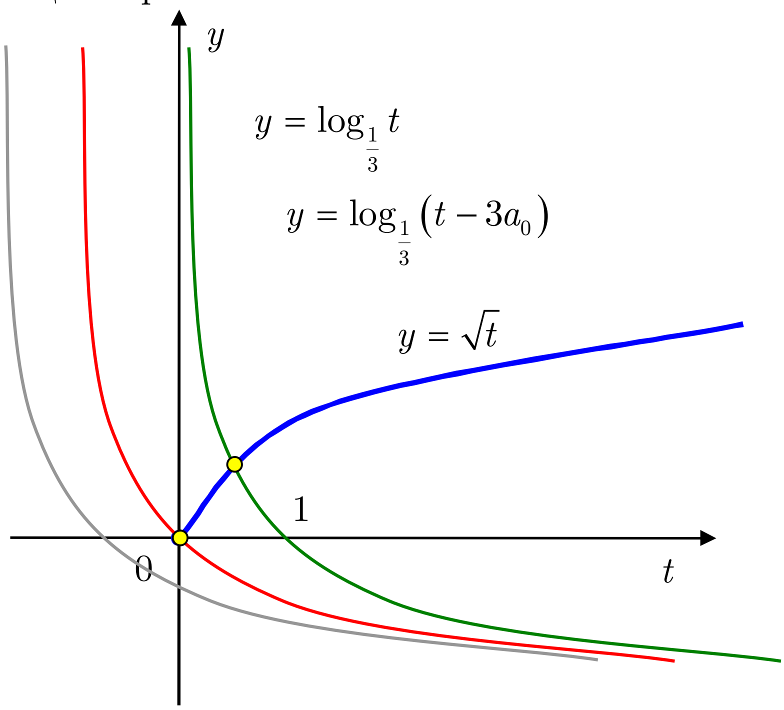
1 спосіб

1) Введемо заміну $x + a = t$. Тоді $x - 2a = x + a - 3a = t - 3a$, а дане рівняння (набуває вид) є рівносильним до рівняння

$$\sqrt{t} = \log_{\frac{1}{3}}(t-3a), \tag{11.5.1}$$

і тому задача про з'ясування кількості коренів даного рівняння при різних значеннях параметра a є еквівалентною до задачі про з'ясування кількості коренів рівняння (11.5.1) при різних значеннях параметра a.

2) Розв'яжемо рівняння (11.5.1) у графічний спосіб, побудувавши графіки функції $y = \sqrt{t}$ та логарифмічної функції $y = \log_{\frac{1}{3}}(t-3a)$ (при $a > 0$, $a = 0$, $a = -\frac{1}{3}$, $a < -\frac{1}{3}$) відносно однієї системи координат tOy на площині при $t \geq 0$.



Точка $(0;0)$ належить графіку функції $y = \log_{\frac{1}{3}}(t-3a_0)$ тоді і лише тоді, коли $0 = \log_{\frac{1}{3}}(0-3a_0) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \log_{\frac{1}{3}} 1 = \log_{\frac{1}{3}}(-3a_0) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 1 = -3a_0 \Leftrightarrow a_0 = -\dfrac{1}{3}$.

При $a < -\frac{1}{3}$ графік функції $y = \log_{\frac{1}{3}}(t-3a)$ на проміжку $t \in [0;+\infty)$ не має спільних точок з графіком функції $y = \sqrt{t}$, а при довільному $a \geq -\frac{1}{3}$ графік функції $y = \log_{\frac{1}{3}}(t-3a)$ завжди має лише одну спільну точку з графіком функції $y = \sqrt{t}$. Таким чином:

якщо $a \in \left[-\frac{1}{3};+\infty\right)$, то дане рівняння має 1 (один) корінь;

якщо ж $a \in \left(-\infty;\frac{1}{3}\right)$, то дане рівняння коренів не має.

2 спосіб

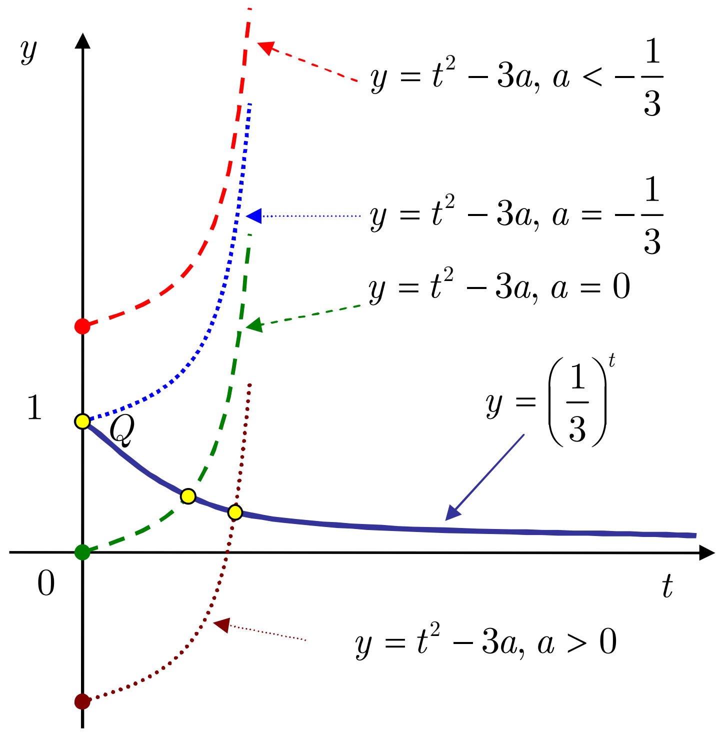
1) Введемо заміну $\sqrt{x+a}=t$, $t\geq 0$. Тоді $x-2a=x+a-3a=t^2-3a$ а дане рівняння (набуває вид) є рівносильним до наступної системи

$$\begin{cases} t=\log_{\frac{1}{3}}\left(t^2-3a\right) \\ t\geq 0 \end{cases} \qquad (11.5.2)$$

Оскільки (за визначенням логарифма) $t=\log_{\frac{1}{3}}\left(t^2-3a\right)\Leftrightarrow t^2-3a=\left(\frac{1}{3}\right)^t$, то систему (11.5.2) можна подати у (рівносильному) вигляді

$$\begin{cases} t^2-3a=\left(\frac{1}{3}\right)^t \\ t\geq 0 \end{cases} \qquad (11.5.3)$$

2) Розв'яжемо перше рівняння останньої системи графічним способом, побудувавши графік показникової функції $y=\left(\frac{1}{3}\right)^t=f(t)$ та квадратичної функції $y=t^2-3a=g(t)$ (при $a>0$, $a=0$, $a=-\frac{1}{3}$, $a<-\frac{1}{3}$) (відносно однієї системи координат tOy на площині) при $t\geq 0$.



Не важко переконатися в тому, що точка $Q(0;1)$ належить графіку функції $y=f(t)$ при довільному a та графіку функції $y=g(t)$ лише при $a=-\frac{1}{3}$.

При $a<-\frac{1}{3}$ «права гілка» параболи $y=t^2-3a$ на проміжку $t\in[0;+\infty)$ не має спільних точок з графіком функції $y=g(t)$,

а при довільному $a\geq-\frac{1}{3}$ «права гілка» параболи $y=t^2-3a$ завжди має лише одну спільну точку з графіком функції $y=g(t)$.

Відповідь: якщо $a\in\left[-\frac{1}{3};+\infty\right)$, то рівняння має 1 (один) корінь;
якщо $a\in\left(-\infty;\frac{1}{3}\right)$, то рівняння коренів не має.

ДОДАТКИ

Додаток А.
Умови завдань III (обласного) етапу Всеукраїнської учнівської олімпіади з математики 2018 / 2019 н.р. (Донецька область)

(середній рівень)[6]

7 клас

0. Пара цілих чисел (x, y) задовольняє рівності $(x-1)^2 + y^2 = 0$. Яке значення може приймати число y:

а) 0; б) 10; в) 100; г) 2019?

(В роботі треба написати лише пункт вірної відповіді без пояснень).

1. Чи існує пара правильних нескоротних дробів, різниця яких дорівнює їх добутку і знаменник одного з яких дорівнює 2019? Якщо існує, то знайдіть принаймні дві пари таких дробів.
2. З точки O проти руху годинникової стрілки проведені n променів OA_1, OA_2, ..., OA_n, при цьому $\angle A_1OA_n < 180^0$. Для якого найменшого n могло таке статися, що серед кутів $\angle A_iOA_j$ $1 \le i < j \le n$ буде пара кутів величиною 60^0, пара кутів величиною 45^0 та пара кутів величиною 30^0. Відповідь обґрунтуйте.
3. Знайдіть середнє арифметичне усіх п'ятицифрових чисел, що мають такі властивості:
   - число має вигляд $\overline{ab0cd}$, тобто третя цифра дорівнює нулю;
   - усі цифри різні;
   - число $\overline{ab0cd}$, а також число $\overline{dc0ba}$ діляться націло на 7.

   Відповідь обґрунтуйте.
4. У виразі $\pm 1 \pm 2 \pm 3 \pm \ldots \pm 2018$ Андрій обирає один із знаків перед кожним числом. Скільки різних додатних значень може при цьому вийти як результат обчислення значення з обраними знаками? Відповідь обґрунтуйте.

---
[6] Інститут модернізації змісту освіти, Київський національний університет імені Тараса Шевченка

8 клас

0. Пара цілих чисел (x,y) задовольняє рівності $(x-1)^4+y^4=0$. Яке значення може приймати число y:

а) 0; б) 100; в) 1000; г) 2019?

(В роботі треба написати лише пункт вірної відповіді без пояснень).

1. Розглянемо на декартовій площині сукупність прямих $y=(k+n)x+(k-n)$, де k,n – довільні цілі числа. Чи існує точка з цілими координатами, через яку не пройде жодна з таких прямих?

2. На дошці записане число 2019. Катя та Микола по черзі (розпочинає Катя) роблять такі ходи: вони вибирають будь-який дільник d записаного на дошці числа N і записують на дошці замість числа N число $N-(2d-1)$, якщо воно є натуральним. Програє той, хто напише на дошці число 1. Хто може перемогти в цій грі, якщо кожний прагне перемогти?

3. У гострокутному трикутнику ABC відомо, що $2AC=AB$ та $\angle A=2\angle B$. У цьому трикутнику провели бісектрису AL, і позначили точку M – середину сторони AB. Виявилося, що $CL=ML$. Доведіть, що $\angle B=30^0$.

4. Знайдіть натуральне число n, для якого справджується рівність:

$$n^2=2\cdot\left(20^4+19^4+39^4\right).$$

5. У виразі $\pm1\pm2\pm3\pm\ldots\pm2018$ Андрій обирає один із знаків перед кожним числом. Скільки різних додатних значень може при цьому вийти як результат обчислення значення з обраними знаками?

9 клас

0. Чому дорівнює в градусах величина найменшого кута прямокутного трикутника, якщо один з його кутів дорівнює 60^0:

а) 30^0; б) 90^0; в) 180^0; г) 2019^0?

(В роботі треба написати лише пункт вірної відповіді без пояснень).

1. Розглянемо на декартовій площині сукупність парабол $y=kx^2+(k-n)x+(k+n)$, де k,n – довільні цілі числа. Чи існує точка з цілими координатами, через яку не пройде жодна з таких парабол?

2. В прямокутному трикутнику ABC довжини катетів задовольняють умові: $BC = \sqrt{2}AC$. Доведіть, що медіани AN та CM взаємно перпендикулярні.

3. На довгій паперовій смужці без пробілів записані три числа 2^{100}, 3^{100} та 5^{100}, так що утворилося багатоцифрове число N. Арсеній стверджує, що може змінити останню цифру числа N так, що утвориться степінь числа 13. Чи правий він?

4. Для додатних чисел x, y, z доведіть нерівність:

$$\frac{x^8+1}{x^4} + \frac{y^8+1}{y^4} + \frac{z^8+1}{z^4} \geq 2 \cdot \left(\frac{x}{z} + \frac{z}{y} + \frac{y}{x}\right).$$

5. У виразі $\pm 1 \pm 2 \pm 2^2 \pm 2^3 \pm \ldots \pm 2^{2019}$ Андрій обирає один із знаків перед кожним числом. Скільки різних додатних значень може при цьому вийти як результат обчислення значення з обраними знаками?

10 клас

0. Чому дорівнює в градусах величина найменшого кута паралелограма, якщо один з його кутів дорівнює 150^0:

а) 30^0; б) 180^0; в) 360^0; г) 2019^0?

(В роботі треба написати лише пункт вірної відповіді без пояснень).

1. Розв'яжіть рівняння

$$\frac{\sqrt{x}+2}{\cos 2x + 3} = \frac{\sqrt{x}+1}{\cos 2x + 1}.$$

2. На дошці записане число 2019. Катя та Микола по черзі (розпочинає Катя) роблять такі ходи: вони вибирають будь-який дільник d записаного на дошці числа N, і записують на дошці замість числа N число $N-(4d-1)$, якщо воно натуральне. Програє той, хто не зможе зробити хід за правилами. Хто може перемогти в цій грі, якщо кожний прагне перемогти?

3. Назвемо прямокутний трикутник ABC ***особливим***, якщо довжини його сторін AB, BC та CA цілі числа, та на кожній з цих сторін є деяка точка X (відмінна від вершин $\triangle ABC$), для якої довжини відрізків AX, BX та CX – цілі числа. Знайдіть принаймні один особливий трикутник.

4. Нехай m та n – натуральні числа, причому жодне з них не кратне 6. Прямокутник $m \times n$ виклали квадратами 2×2 та 3×3. Доведіть, що цей прямокутник можна викласти квадратами принаймні одного з видів 2×2 або 3×3.

5. Для додатних чисел x, y, z, t доведіть нерівність:

$$\frac{x^8+1}{x^4}+\frac{y^8+1}{y^4}+\frac{z^8+1}{z^4}+\frac{t^8+1}{t^4} \geq 2\cdot\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{t}+\frac{t}{x}\right).$$

11 клас

0. Скільки усього вершин у правильної 2018-кутній піраміді:

а) 2019; б) 19; в) 10; г) 2?

(В роботі треба написати лише пункт вірної відповіді без пояснень).

1. Знайдіть усі розв'язки рівняння

$$\frac{2\cos 2x}{6-3\cos 3x}=\frac{\cos 2x+1}{\cos 3x+2},$$

якщо $-\pi \leq x \leq \pi$.

2. У гострокутному трикутнику ABC, у якому $AB < AC$, точка M – середина сторони BC, K – середина ламаної BAC. Доведіть, що $\sqrt{2}KM > AB$.

3. Розглянемо таблицю $m \times n$, $m, n \geq 2$ (m рядків, що занумеровані числами $1, 2, \ldots, m$ та n стовпчиків, що занумеровані числами $1, 2, \ldots, n$, яка заповнена натуральними числами). Нехай b_i – НСК (найменше спільне кратне) усіх чисел, що стоять в $i-$му рядку, $1 \leq i \leq m$, і визначимо число B – НСД (найбільший спільний дільник) чисел $(b_1, b_2, \ldots, b_m)$. Також нехай c_j є НСД усіх чисел, що стоять в $j-$му стовпчику, $1 \leq j \leq n$, та визначимо число C – НСК чисел $(c_1, c_2, \ldots, c_n)$. Чи можна стверджувати, що обов'язково або B ділиться націло на C, або навпаки, C ділиться націло на B?

4. Знайдіть усі додатні чисел x, y, z, що задовольняють систему нерівностей:

$$\begin{cases}(x+1)(y+1) \leq (z+1)^2 \\ \left(\frac{1}{x}+1\right)\left(\frac{1}{y}+1\right) \leq \left(\frac{1}{z}+1\right)^2.\end{cases}$$

5. Полігоном назвемо зв'язну по стороні фігуру, що складається з квадратиків 1×1. Відомо, що прямокутник, відмінний від квадрату, можна розрізати на 8 попарно різних полігонів. Полігони вважаються однаковими, якщо їх можна сумістити шляхом зсувів та перевертань. Яку найменшу площу може мати цей прямокутник?

Додаток Б.
Умови завдань IV (заключного) етапу Всеукраїнської учнівської олімпіади з математики 2018 / 2019 н.р.

8 клас

1. По колу розставлені декілька натуральних чисел. Відомо, що добуток будь-яких двох сусідніх з них є точним квадратом натурального числа. Доведіть, що добуток будь-яких двох з розставлених чисел також є точним квадратом натурального числа.

(Ніколаєв Арсеній)

2. Богдан для деякого прямокутника Q провів 2017 вертикальних та 2018 горизонтальних прямих, якими розрізав прямокутник Q на 2018×2019 менших не обов'язково однакових прямокутників. Андрій каже, що йому треба знати периметри 2019 менших прямокутників, на які він вкаже, щоб дізнатися периметр усього прямокутника Q. А Олеся сказала, що їй треба знати периметри 4036 менших прямокутників, на які вона вкаже, щоб дізнатися периметр усього прямокутника Q. Хто з дітей правий?

(Рубльов Богдан)

3. В компанії людей немає трьох попарно знайомих між собою, а серед будь-яких п'яти знайдуться троє, які мають спільного знайомого. Доведіть, що людей можна розбити на дві групи попарно незнайомих людей.

(Богданський Віктор)

4. Для довільного натурального $n \geq 3$ знайдіть такі цілі числа $a_1 < a_2 < \ldots < a_n$, для яких справджується рівність:

$$\frac{a_1}{a_1}+\frac{a_1}{a_2}+\frac{a_1}{a_3}+\ldots+\frac{a_1}{a_n}=\frac{a_2}{a_1}+\frac{a_2}{a_2}+\frac{a_2}{a_3}+\ldots+\frac{a_2}{a_n}?$$

(Рубльов Богдан)

5. Відомо, що ненульові дійсні числа x, y, z задовольняють умову $xy+yz+zx=0$. Чому може дорівнювати значення виразу $\frac{1}{x^2+2yz}+\frac{1}{y^2+2zx}+\frac{1}{z^2+2xy}$?

6. У кожного з гравців – Андрія та Олесі – є набір з 2019 карток, на яких записані числа 1, 2, ..., 2019 (кожне число рівно один раз у кожного з гравців). Гра відбувається за такими правилами. На початку гри на столі лежить деяка картка з числом $k \in \{1, 2, ..., 2019\}$. Після цього гравці по черзі (розпочинає Андрій) міняють одну із своїх карток на ту, що лежить на даний момент на столі. При цьому Андрій може міняти картку на столі на ту свою, на якій записане число більше, ніж число, що записане на картці на столі, а Олеся – на свою картку з меншим записаним числом ніж на картці на столі. Той, хто не може зробити хід, вважається тим, хто програв. Хто переможе в цій грі, якщо кожний прагне до перемоги?

(Рубльов Богдан)

7. Дано трикутник ABC. На сторонах AB, BC та AC вибрали точки C_1, A_1 та B_1 відповідно. Нехай K – проекція B_1 на пряму A_1C_1. На променях B_1A та B_1C вибрали точки M та N відповідно так, що $\angle B_1A_1C_1 = 2\angle KNB_1$ та $\angle B_1C_1A_1 = 2\angle KMB_1$. Доведіть, що довжина відрізку MN не більша за периметр трикутника $\Delta A_1B_1C_1$.

(Тригуб Антон)

8. Задані натуральні числа a, b, c. Доведіть, що існує таке ціле невід'ємне число k, для якого $НСД(a^k + bc,\ b^k + ca,\ c^k + ab) > 1$.

(Ніколаєв Арсеній)

9 клас

1. Задане натуральне число $n > 1$. По колу розставлені 2019 натуральних чисел. Відомо, що добуток будь-яких двох сусідніх з них є точним n-м степенем деякого натурального числа. Чи обов'язково й добуток будь-яких двох (не обов'язково сусідніх) з цих чисел також є точним n-м степенем натурального числа?

(Ніколаєв А., Рубльов Б.)

2. Нехай точка M – середина гіпотенузи AB прямокутного трикутника ABC. Серединний перпендикуляр до гіпотенузи AB перетинає катет BC у точці K. Перпендикуляр, що проведений до прямої CM із точки K, перетинає продовження відрізку AC за точку A в точці P. Прямі CM і BP перетинаються в точці T. Доведіть, що $AC = TB$.

(Хілько Данило)

3. В компанії людей немає трьох попарно знайомих між собою, а серед будь-яких п'яти знайдуться троє, які мають спільного знайомого. Доведіть, що людей можна розбити на дві групи попарно незнайомих людей.

(Богданський Віктор)

4. На дошці записаний многочлен x^2+1. Кожного дня Катя витирає записаний на дошці многочлен $F(x)$ та записує замість нього один з двох многочленів: $F^2(x)+1$ або $F(x^2+1)$. Доведіть, що через рік вільний член многочлена, що записаний на дошці, буде більше, ніж $2^{2^{222}}$.

(Ніколаєв Арсеній)

5. На дошці записані натуральні числа $a<b$. На кожному кроці два записані на дошці числа витирають, а замість них записують їх суму та модуль різниці. В деякий момент на дошці з'явилося записаним число 2019. При якому найменшому можливому b це можливо?

(Рубльов Богдан)

6. Доведіть, що для довільних дійсних x, y, z справджується нерівність:

$$x^2(3y^2+3z^2-2yz)\geq yz(2xy+2xz-yz).$$

Для яких трійок може досягатися рівність?

(Юрашев Владислав)

7. Задані натуральні числа a, b, c. Доведіть, що існує таке ціле невід'ємне число k, для якого $НСД(a^k+bc,\ b^k+ca,\ c^k+ab)>1$.

(Ніколаєв Арсеній)

8. Гострокутний трикутник ABC вписано в коло w з центром у точці O. Продовження його висот, що проведені з вершин A та C, вдруге перетинають w в точках A_0 та C_0 відповідно. Пряма A_0C_0 перетинає сторони AB та BC у точках A_1 та C_1 відповідно. Точки A_2 та C_2 на стороні AC такі, що $A_2O \parallel BC$, а $C_2O \parallel AB$. Нехай H – ортоцентр ΔABC, T – точка перетину A_1A_2 і C_1C_2. Доведіть, що $HT \parallel AC$.

(Тригуб Антон)

10 клас

1. З натуральних чисел $2, 3, 4, ..., 2019$ якимось чином утворюють 1009 правильних дробів, далі серед цих дробів вибирають найбільший. Яке найменше значення може мати цей найбільший дріб при усіх можливих побудовах таких дробів?

(Рубльов Богдан)

2. Андрій та Олеся по черзі вирізають по лініях сітки з прямокутника 4000×2019. квадрати якихось розмірів. Після ходу кожного обов'язково має залишитися *зв'язна* фігура. Програє той, хто не може зробити хід. Хто виграє за правильної гри обох гравців, якщо розпочинає Олеся?

Фігура називається зв'язною, якщо з будь-якої її клітини можна дістатися будь-якої іншої, ходячи через сторони інших клітинок фігури.

(Рубльов Богдан)

3. В гострокутному трикутнику ABC вписане коло з центром у точці I дотикається до сторін AB та BC у точках C_1 та A_1 відповідно. Нехай M – середина AC, N – середина дуги ABC описаного кола трикутника ABC, P – проекція точки M на A_1C_1. Доведіть, що точки I, P та N лежать на одній прямій.

(Тригуб Антон)

4. Задані різні натуральні числа a та b, більші від 1.

а) Доведіть, що для нескінченної кількості натуральних n число $s_n = a^n + b^{n+1}$ є складеним

б) Доведіть, що існує нескінченно багато простих p таких, що s_n ділиться на p при деякому натуральному n.

(Голованов Олександр)

5. Знайдіть усі натуральні числа a та b, для яких число $2^{a!}+2^{b!}$ є кубом натурального числа.

Нагадаємо, що для натурального числа n значення $n!=1\cdot 2\cdot 3\cdot ...\cdot n$.

(Ніколаєв Арсеній)

6. Дано паралелограм $ABCD$. Коло, що проходить через вершини A та D вдруге перетинає прямі AB, BD, AC та CD у точках B_1, B_2, C_1 та C_2 відповідно. Прямі B_1B_2 та C_1C_2 перетинаються в точці K. Доведіть, що точка K рівновіддалена від прямих AB та CD.

(Тригуб Антон)

7. У країні уряд вирішив встановити транспортне сполучення між містами залізницею або авіасполученням таким чином, щоб з кожного міста можна було безпосередньо дістатися не більше як до чотирьох інших міст. Доведіть, що уряд завжди може вибрати тип сполучення відповідних пар міст таким чином, щоб не існувало трьох міст, кожні два з яких з'єднані одним видом транспорту.

(Ніколаєв Арсеній)

8. Для додатних чисел x, y, z, що задовольняють рівності $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=3$, доведіть, що справджується нерівність:

$$(x-1)(y-1)(z-1) \le \tfrac{1}{4}(xyz-1).$$

(Митрофанов Вадим)

11 клас

1. Чи існують цілі числа $a<b<c<d$, для яких справджується рівність:

$$\frac{a}{a}+\frac{a}{b}+\frac{a}{c}+\frac{a}{d}=\frac{b}{a}+\frac{b}{b}+\frac{b}{c}+\frac{b}{d}?$$

(Рубльов Богдан)

2. На початку гри ігрове поле – це прямокутник $2\times 2n$. Олеся та Андрій по черзі (розпочинає Олеся) роблять такі ходи – кожний з них від поточного ігрового поля відрізають квадрат розміру 1×1 або 2×2 за умови, що їх можна вирізати з ігрового поля на цей момент і після його відрізання ігрове поле залишиться зв'язним по стороні, тобто з будь-кого поля на будь-яке інше можна дістатися ходами шахової тури. Виграє той, хто відріже останній квадратик ігрового поля. Хто переможе в цій грі, за умови що усі хочуть виграти?

(Рубльов Богдан)

3. Задані різні натуральні числа a та b, більші від 1.

а) Доведіть, що для нескінченної кількості натуральних n число $s_n = a^n + b^{n+1}$ є складеним

б) Доведіть, що існує нескінченно багато простих p таких, що s_n ділиться на p при деякому натуральному n.

(Голованов Олександр)

4. На колі з діаметром AD взято точки B і C так, що $AB = AC$. На відрізку BC обрано точку P довільним чином, а точки M і N на відрізках AB і AC відповідно так, що чотирикутник $PMAN$ є паралелограмом. Нехай PL – бісектриса трикутника MPN. Пряма PD перетинає MN у точці Q. Доведіть, що точки B, Q, L та C лежать на одному колі.

(Плотніков Михайло, Хілько Данило)

5. Знайдіть усі натуральні числа a, b та c, для яких число $2^{a!} + 2^{b!} + 2^{c!}$ є кубом натурального числа.

(Ніколаєв Арсеній)

6. На колі розставлені 2019 точок A_1, A_2, ..., A_{2019}, що утворюють правильний 2019-кутник $A_1A_2...A_{2019}$. Олеся та Андрій по черзі роблять ходи, першою ходить Олеся. За певними правилами Олеся своїм ходом утворює тупокутний трикутник, а Андрій – гострокутний. Правила утворення трикутників такі. На початку *відміченими* вважаються вершини A_1 та A_2. На першому своєму кроці Олеся відмічає невідмічену вершину A_i так, щоб утворився тупокутний $\Delta A_1A_2A_i$, і вершина A_i стає відміченою. Нехай надалі своїм черговим ходом Олеся (Андрій) відмітили не відмічену раніше вершину A_j утворили тупокутний (гострокутний) $\Delta A_kA_lA_j$. Тоді наступним ходом Андрій (Олеся) може відмітити таку не відмічену вершину A_m, для якої утворюється гострокутний (тупокутний) $\Delta A_nA_jA_m$, де $n = k$ або $n = l$. Програє той, хто не зможе за правилами зробити черговий хід, тобто відмітити вершину, щоб утворився належний трикутник. Хто переможе за правильної гри обох учасників?

(Рубльов Богдан)

7. Знайдіть всі функції $f:(0,+\infty)\to(0,+\infty)$ для яких для довільних додатних чисел x, y справджується рівність:

$$f(f(x)+y) = f(f(x)) + 2yf(x) - f(y) + 2y^2 + 1.$$

(Воронович Ігор)

8. Є група з $2n$ людей, серед яких є пари знайомих. Відомо, що кожна людина серед цієї групи має рівно $k \geq 1$ знайомих (якщо «А» знайомий з «Б», то й навпаки, «Б» знайомий з «А»). Для яких k цю групу завжди можна розбити на дві підгрупи по n людей таким чином, щоб у обох підгрупах кожна людина мала принаймні одного знайомого?

(Рубльов Богдан)

Додаток В.
Умови завдань II етапу Всеукраїнського конкурсу-захисту науково-дослідницьких робіт учнів-членів МАН України з математики (Донецька область)

2015 / 2016 н.р.

9 клас

I рівень

1. Спростити вираз $\left(\frac{4}{2\sqrt{x}+3x}-\frac{9\sqrt{x}}{2+3\sqrt{x}}\right)\cdot\frac{\sqrt{x}}{3\sqrt{x}-2}$.

2. Знайти координати вектора $\vec{b}$, який колінеарний вектору $\vec{a}=\{-1;2\}$, якщо його довжина $\left|\vec{b}\right|=\sqrt{10}$.

3. Відомо, що x_1 і x_2 – корені рівняння $2x^2-3x-7=0$. Не розв'язуючи цього рівняння, знайдіть значення виразу $x_1^2+x_2^2$.

II рівень

4. Коло вписане в прямокутний трикутник ABC дотикається до гіпотенузи AB у точці P. Знайдіть радіус вписаного кола, якщо $AC=9$ см, $AP:PB=2:3$.

5. З міста в село, відстань між якими 450 км, виїхали одночасно два автомобілі. Швидкість одного з них була на 10 км/год більша, ніж швидкість іншого, і тому він прибув у село на 30 хв. швидше. Знайдіть швидкість кожного автомобіля.

III рівень

6. Відрізки AK і BM – бісектриси трикутника ABC. Знайдіть кут BAC, якщо промінь KM – бісектриса кута AKC.

7. При яких значеннях параметра a корені рівняння $x^2-(a+1)x+a+4=0$ є від'ємними числами?

10 клас

I рівень

1. Знайдіть площу трикутника ABC, якщо $A(5;3;-2)$, $B(4;-1;2)$, $C(1;3;-2)$.

2. Знайдіть корені рівняння $\sqrt{x+3}+\sqrt{x-2}=\sqrt{4x+1}$.

3. При будь-якому n суму n перших членів деякої арифметичної прогресії можна обчислити за формулою $S_n=n^2+3n$. Знайдіть різницю цієї прогресії.

II рівень

4. Довести, що число $\sqrt{23-8\sqrt{7}}+\sqrt{23+8\sqrt{7}}$ – ціле.

5. На катеті AC прямокутного трикутника ABC як на діаметрі побудоване коло, яке перетинає гіпотенузу AB у точці E. Через точку E проведена дотична до цього кола, яка перетинає катет BC у точці D. Доведіть, що трикутник BDE рівнобедрений.

III рівень

6. Довести нерівність

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{2016}>6.$$

7. Визначте кількість коренів рівняння

$$\left(\cos x-\tfrac{1}{2}\right)\left(\sin x-a\right)=0$$

на проміжку $\left(0;2\pi\right]$ залежно від значень параметра a.

11 клас

I рівень

1. Розв'язати нерівність

$$3^{2x-1}-3^{x-1}>0.$$

2. Розв'яжіть систему рівнянь

$$\begin{cases}\cos x\cdot\cos y=0,75\\ \operatorname{ctg}x\cdot\operatorname{ctg}y=3.\end{cases}$$

3. Діагональ правильної чотирикутної призми дорівнює 15 см, а діагональ бічної грані – 12 см. Знайдіть площу бічної поверхні призми.

II рівень

4. Розв'язати нерівність

$$\log_{\frac{1}{2}}x\cdot\log_2 x+\log_{\frac{1}{2}}x+2\le 0.$$

5. Запишіть рівняння дотичної до графіка функції $y=x^2-x+3$, яка паралельна прямій $x+y+3=0$.

III рівень

6. Порівняйте числа π^e і e^π.

7. У циліндрі, паралельно його осі проведено площину, що перетинає нижню основу циліндра по хорді, яку видно з центра цієї основи під кутом α. Діагональ утвореного перерізу нахилена до площини основи під кутом β. Знайдіть площу бічної поверхні циліндра, якщо площа його основи дорівнює S.

2016 / 2017 н.р.
9 клас

I рівень

1. Розв'язати рівняння
$$|3x-2y|+|y-2016|=0.$$

2. Досвідченому дресирувальнику цирку для того, щоб помити слона, потрібно 40 хв, а його син – справляється за 2 год. Скільки часу потрібно, щоб вони разом помили трьох слонів?

3. За допомогою шаблону кута 19^0. Побудувати кут 1^0.

II рівень

4. Довести, що число p^3+2p ділиться на 3 при довільному натуральному p.

5. Ціну товару спочатку знизили на 20%, а потім нову ціну ще раз знизили на 15%. На скільки відсотків було знижено початкову ціну товару?

III рівень

6. При яких значеннях параметра а рівняння $x^4-(a+2)x^2+a^2-9=0$ має три корені?

7. На площині дано шість точок загального положення (жодні три з них не лежать на одній прямій). Кожні дві точки сполучено відрізком або червоного, або синього кольору. Довести, що знайдеться трикутник з вершинами в даних точках, всі сторони якого мають один колір.

10 клас

I рівень

1. Обчисліть значення виразу
$$\frac{1}{4\cdot 6}+\frac{1}{6\cdot 8}+\frac{1}{8\cdot 10}+...+\frac{1}{18\cdot 20}.$$

2. Знайдіть найбільше значення функції $y=|x-1|-|x+1|$, якщо це значення існує. Якщо найбільшого значення функції не існує, то запишіть у відповідь значення $y(5)$.

3. Периметр рівнобічної трапеції дорівнює 100 см, а різниця основ – 14 см. Знайти радіус вписаного кола.

II рівень

4. Катя їсть пиріжок з малиновим варенням. Після кожного відкушування маса пиріжка зменшується на 20%. Після другого відкушування вона склала 160 г. Якою маса пиріжка була спочатку? Чи зможе Катя при таких умовах доїсти пиріжок?

5. Дано правильний тетраедр $SABCD$ з ребром a. Знайдіть скалярний добуток векторів $\overrightarrow{AS}$ і $\overrightarrow{AH}$, де H – основа висоти тетраедра, проведеної з вершини S.

III рівень

6. Сторона BC трикутника ABC продовжена за точку C до точки X так, що $BC = CX$. Сторона CA продовжена за точку A до точки Y так, що $CA = AY$. Сторона AB продовжена за точку B до точки Z так, що $AB = BZ$. У скільки разів площа трикутника XYZ більше ніж площа трикутника ABC?

7. Синус і косинус деякого кута виявилися різними коренями квадратного тричлена $25x^2 + bx - 12$. Знайти b.

11 клас

I рівень

1. Обчислити: $\left(81^{\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\log_9 4} + 25^{\log_{125} 8}\right) \cdot 49^{\log_7 2}$.

2. Прибуток підприємства визначається формулою $P(n) = 10n - n^2 + 11 + \sin n$, де n – кількість місяців з початку діяльності. Якого місяця прибуток стане максимальним?

3. Знайти найменше значення функції $y = \dfrac{(1 - 3\cos 4x)^4}{16}$.

II рівень

4. Площі кругів, побудованих на сторонах трикутника, відносяться як 25:144:169. Знайти відношення радіусів описаного та вписаного кіл такого трикутника.

5. Знайти найбільше ціле значення x, при якому похідна функції $f(x) = 2x(1-x)^5$ не менше нуля.

III рівень

6. Розв’язати рівняння $x + \sqrt{a + \sqrt{x}} = a$.

7. У конус, радіус основи якого дорівнює 6 см та висота 12 см, вписано циліндр найбільшого об’єму (основа циліндра лежить на основі конуса). Знайти радіус основи та висоту циліндра.

2017 / 2018 н.р.

9 клас

I рівень

1. В прямокутному трикутнику бісектриса гострого кута ділить протилежну сторону на два відрізка 4 і 5 см. Знайти площу трикутника.
2. Знайти кількість дільників числа $a = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^2$, які діляться на 3. Знайти суму таких дільників.
3. Визначити кількість розв'язків рівняння $\left|x^2 - 2|x| - 3\right| - a = 0$ в залежності від параметра a.

II рівень

4. Дмитро прочитав книгу за три дні. В перший день він прочитав 30% і ще 4 сторінки, в другий день – 60% остачі і ще 14 сторінок, в третій день – 85% нової остачі та останні 9 сторінок. Скільки сторінок в книзі?
5. У трикутнику ABC проведена бісектриса AK. Центр кола, вписаного в трикутник AKC, збігається з центром кола, описаного навколо трикутника ABC. Визначити кути трикутника ABC.

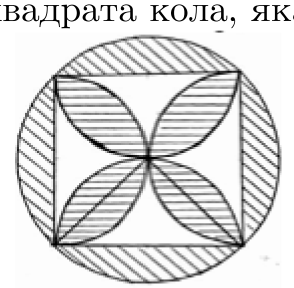
III рівень

6. Розв'язати в натуральних числах рівняння $xy^2 + 3y^2 - x = 108$.
7. Двоє по черзі ламають шоколадку 5×8. За хід можна розламати будь-який шматок по прямій лінії між дольками. Програє той, хто не може зробити хід. Питання «хто виграє при правильній грі?».

10 клас

I рівень

1. Квадрат вписаний в коло. На сторонах квадрата, як на діаметрах побудовані півкола. Чотири попарних перетинань цих кіл утворюють фігуру «квітка». Довести, що загальна площа «квітки» дорівнює площі частини описаного навколо квадрата кола, яка лежить поза квадратом.



2. Спростити й обчислити значення виразу $\dfrac{\sqrt{x} - 16}{\sqrt[4]{x} - 4}\sqrt{6,25 + x - 5\sqrt{x}}$, якщо $x = \frac{81}{16}$.
3. Знайти усі x, для яких справджуються обидві нерівності

$$\sin 2x \geq \frac{1}{\sqrt{2}} \qquad \text{і} \qquad \cos x \geq -\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

II рівень

4. Обчисліть площу фігури, обмеженої графіком рівняння $3|x|+4|y-1|=24$.

5. $f(x)$ і $g(x)$ – квадратні тричлени, старші коефіцієнти яких дорівнюють 1. Відомо, що $f(1)+f(7)+f(49)=g(1)+g(7)+g(49)$. При яких значеннях x виконується рівність $f(x)=g(x)$?

III рівень

6. Скільки коренів має рівняння $x^5-5x^4+5x^3=a$ у залежності від значення параметра a?

7. На дошці записано 10 одиниць і 10 двійок. За хід дозволяється стерти дві будь-які цифри, а, якщо вони однакові, написати двійку, а якщо різні – одиницю. Якщо остання цифра, що залишилася на дошці одиниця, виграв перший гравець, якщо двійка – то другий. Чому у цій грі завжди перемагає гравець, який не розпочинає гру?

11 клас

I рівень

1. Знайти найменшу можливу відстань MN, якщо точка M знаходиться на колі, рівняння якого має вигляд $x^2+8x+y^2-16y+71=0$, а точка N знаходиться на осі абсцис.

2. Розв'язати рівняння $1+\cos\frac{8\pi x}{3}=\cos\frac{4\pi x}{3}$. У відповідь запишіть найменший додатній корінь цього рівняння.

3. Сторони трикутника утворюють арифметичну прогресію. Один з кутів трикутника дорівнює 120^0, а менша сторона дорівнює 21 см. Обчисліть (у см) більшу сторону трикутника.

II рівень

4. Знайти найменше значення виразу $\frac{y}{x}$, якщо відомо, що $x^2-10x+y^2-2y+1=0$.

5. Фокусник збирається вгадати задумане двоцифрове число. Для цього він просить сказати йому остачі x,y,z від ділення задуманого числа на 3, 5 та 7 відповідно. Обчисливши суму $70x+21y+15z$, фокусник називає задумане число. Поясніть, як йому це вдається?

III рівень

6. При яких значеннях а функція $f(x)=(a-12)x^3+3(a-12)x^2+6x+7$ монотонно зростає для всіх дійсних x? Відповідь обґрунтувати.

7. Довести нерівність $a^{2012}+b^{2012}<c^{2012}$ за умови, що $b+a=c$, $a>0$, $b>0$.

2018 / 2019 н.р.

9 клас

I рівень[7]

1. Обчислити без таблиць $\sin 34^0 \cdot \cos 56^0 + \sin^2 56^0$.

2. В прямокутному трикутнику медіани, які проведені до катетів, дорівнюють $\sqrt{52}$ см та $\sqrt{73}$ см. Знайти периметр трикутника.

3. Розв’язати рівняння $\sqrt{x^2} = x + 8$.

II рівень[8]

4. У трапеції кути при одній з основ дорівнюють 40^0 і 50^0, а довжина відрізка, що сполучає середини основ, 2см. Знайдіть основи трапеції, якщо її середня лінія дорівнює 5 см.

5. I-му робітнику для виконання завдання потрібно на 4 години менше, ніж II-му. I-ий робітник пропрацював 2 год, а потім його замінив II-ий. Після того як II-ий робітник пропрацював 3 год, виявилося, що виконано половину завдання. За скільки годин може виконати це завдання кожний робітник, працюючи самостійно?

III рівень[9]

6. Знайти найбільше тризначне число, яке можна записати у вигляді суми тринадцяти послідовних натуральних чисел. Відповідь обґрунтуйте.

7. Знайти значення параметра a, при якому система $\begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ y - |x| = a \end{cases}$ має один розв'язок.

10 клас

I рівень

1. Знайти найменше додатне просте число p, для якого $p^2 + 3p + 11$ – також просте число.

2. Два відрізки завдовжки $2\sqrt{11}$ см і 8 см упираються кінцями у дві паралельні площини. Проекція першого відрізка завдовжки $2\sqrt{11}$ см на площину дорівнює 4 см. Знайдіть проекцію другого відрізка.

3. Сторони прямокутного трикутника утворюють арифметичну прогресію. Обчислити його площу, якщо більший катет дорівнює 4 см.

II рівень

4. Довести, що $\sqrt{7\sqrt{3} - 12} - \sqrt{4\sqrt{3} - 6} + \sqrt{13\sqrt{3} - 12} = 2\sqrt[4]{3}$.

5. Чи може x бути кутом трикутника, якщо він задовольняє рівність $\cos\frac{x}{2} = \cos\frac{x}{3}$.

---

[7] Завдання 1 – 3 оцінювалися в 3 бали кожне

[8] Завдання 4 – 5 оцінювалися в 5 балів кожне

[9] Завдання 6 – 7 оцінювалися в 7 балів кожне

III рівень

6. Нехай C – прямий кут трикутника ABC, висота CH і бісектриса BD якого перетинаються в точці N. Знайти відношення $BN:DN$, якщо $AB = 5$ см, $AC = 3$ см.

7. У магазині купили цвяхи, шурупи і болти в упаковках по 1 кг, всього 24 упаковки, на суму 3400 грн. Ціна упаковки цвяхів – 120 грн., шурупів – 170 грн., болтів – 210 грн. Скільки упаковок цвяхів, шурупів і болтів було куплено?

11 клас

I рівень

1. Знайти рівняння дотичної до графіка функції $y = x^4 - 5x^3 + 4x^2 + 3x$ при $x = 1$.

2. Чи правда, що $\log_2 5 < \dfrac{7}{3}$? Відповідь обґрунтувати.

3. Чи можна квадрат зі стороною 10 см повністю накрити кругом радіуса 7 см?

II рівень

4. Розв’язати систему рівнянь $\begin{cases} x^2 + 2y = 7 \\ y^2 + 4z = -7 \\ z^2 + 6x = -14. \end{cases}$

5. Основа піраміди – паралелограм, сторони якого 16 см і 22 см. Відстань від вершини піраміди до центра основи 4 см. Знаючи, що довжини бічних ребер виражаються непарними послідовними числами, знайдіть довжини бічних ребер піраміди.

III рівень

6. Розв’яжіть нерівність $\left(9^x - 4 \cdot 3^{x+1} + 27\right) \cdot \log_9 (x - a) < 0$.

7. Розв’яжіть рівняння $x^{2017} - x^{2018} = \left\{ \dfrac{2019 + x}{1 + \{x\}} \right\}$

(тут $[a]$ – ціла частина числа a, тобто найменше ціле число, яке не перевищує a; $\{a\} = a - [a]$ – дробова частина числа a).

РЕКОМЕНДОВАНА ЛІТЕРАТУРА

Математичні олімпіади і турніри в Україні

1. Басанько А.М. За лаштунками підручника з математики : [збірник розвиваючих задач для учнів 5 – 7 класів] / А.М. Басанько, А.О. Романенко. – Тернопіль : Підручники і посібники, 2004. – 213 с.
2. Вороний О.М. Готуємось до олімпіади з математики [книга 1]. – Бібліотека журналу «Математика в школах України» – Х. : Основа, 2008. – Вип. 5(65). – 128 с.
3. Вороний О.М. Готуємось до олімпіади з математики [книга 2]. – Бібліотека журналу «Математика в школах України» – Х. : Основа, 2008. – Вип. 6(66). – 141 с.
4. Готуємось до олімпіади з математики / упорядн. А.Б. Веліховська, О.В. Гримайло. // Бібліотека журналу «Математика в школах України» – Х. : Основа, 2007. –Вип. 2 (50) – 160 с.
5. Змагання юних математиків України. 2003 рік / В.М. Лейфура. – Х. : Основа, 2004. – 80 с.
6. Київські математичні олімпіади 1984-1993 рр. : [збірник задач] / В.А. Вишенський, М. В. Карташов. – К. : Либідь, 1993. – 144 с.
7. Київські міські математичні олімпіади 2003–2011 рр. (за ред. Б. В. Рубльова). – Харків: Гімназія, 2011. – 192 с.
8. Коваль Т. В. 400 задач з математичних олімпіад. 8-11 класи / Т. В. Коваль. – Тернопіль : Мандрівець, 2004. – 80 с.
9. Лось В.М. Математика : навчаємо міркувати. Розв'язування нестандартних задач / В.М. Лось, В.П. Тихієнко. – К. : Кондор, 2005 – 312 с.
10. Математичні олімпіади школярів України. 1991-2000 / В.М. Лейфура, І.М. Мітельман. – К. : Техніка, 2003. – 541 с.
11. Математичні олімпіади школярів України: 1991–2000 рр. / В.М. Лейфура, І.М. Мітельман, В.М. Радченко, В.А. Ясінський. – Київ: Техніка, 2003. — 541 с.
12. Математичні олімпіади школярів України: 2001–2006 рр. / В.М. Лейфура, І.М. Мітельман, В.М. Радченко, В.А. Ясінський. – Львів: Каменяр, 2008. — 348 с.
13. Математичні олімпіадні змагання школярів : 2006–2007 рр. / А.В. Анікушин, А.Р. Арман та ін. – К.: Літера, 2008 – 224 с.

14. Математичні олімпіадні змагання школярів України: 2007–2008 та 2008–2009 рр. (за ред. Б. В. Рубльова). – Л.: Каменяр, 2010. – 549 с.
15. Математичні олімпіадні змагання школярів України: 2009–2010 (за ред. Б. В. Рубльова). – Харків: Гімназія, 2011. – 320 с.
16. Математичні олімпіадні змагання школярів України: 2010–2011 (за ред. Б. В. Рубльова). – Харків: Гімназія, 2013. – 368 с.
17. Математичні олімпіадні змагання школярів України: 2011–2012 (за ред. Б. В. Рубльова). – Харків: Гімназія, 2013. – 416 с.
18. Математичні олімпіадні змагання школярів України: 2012–2013 (за ред. Б. В. Рубльова). – Харків: Гімназія, 2014. – 401 с.
19. Математичні олімпіадні змагання школярів України: 2013–2014 (за ред. Б. В. Рубльова). – Харків: Гімназія, 2015. – 465 с.
20. Математичні олімпіадні змагання школярів України: 2014–2015 (за ред. Б. В. Рубльова). – Харків: Гімназія, 2016. – 464 с.
21. Математичні олімпіадні змагання школярів України: 2015–2016 (за ред. Б. В. Рубльова). – Харків: Гімназія, 2017. – 464 с.
22. Математичні олімпіадні змагання школярів України: 2016–2017 (за ред. Б. В. Рубльова). – Харків: Гімназія, 2018. – 464 с.
23. Сарана О.А. Математичні олімпіади: просте і складне поруч : [навчальний посібник] – К. : А.С.К., 2005. – 344 с.
24. Сборник задач киевских математических олимпиад / В.А. Вышенский, Н.В. Карташев, В.И. Михайловский, М.И. Ядренко. – К. : Вища школа, 1984. – 240 с.
25. Українські математичні олімпіади : [довідник] / В.А. Вишенський, О.Г. Ганюшкін та ін. – К.: Вища школа, 1993. – 415 с.
26. Федак І.В. Готуємося до олімпіади з математики : [посібник для ЗНЗ]. – Чернівці, 2003. – 360 с.
27. Федак І.В. Олімпіади з математики: 1987–2016 роки. Завдання, відповіді. – Х. : Видавнича група «Основа», 2016. – 239 с.
28. Ясінський В.А. Олімпіадні задачі [випуск 1: навчальний посібник]. – Тернопіль: Навчальна книга – Богдан, 2004. – 40 с.
29. Ясінський В.А. Задачі математичних олімпіад та методи їх розв'язання. – Тернопіль: Навчальна книга – Богдан, 2005. – 208 с.
30. Ясінський В.А. Практикум з розв'язування задач математичних олімпіад. Бібліотека журналу «Математика в школах України» – Х. : Основа, 2006. – 128 с.

II і III тури Всеукраїнської учнівської олімпіади з математики в Донецькій області

1. Сборник материалов математических олимпиад: 906 самых интересных задач и примеров с решениями / [Р. И. Довбыш, Л. Л. Потемкина, Н. Л. Трегуб и др.] – Донецк: ООО ПКФ «БАО», **2005**. – 336 с.
2. ОЛІМПІАДНІ ЗАДАЧІ: розв'язання задач II етапу Всеукраїнської олімпіади з математики – 2007 / Б.Б. Беседін, Г.М. Бірюкова, Г.О. Ганзера, В.М. Кадубовська, О.А. Кадубовський, Л.Г. Плесканьова, В.С. Сьомкін, Н.І. Труш, О.В. Чуйко // Навчальний посібник. – Слов'янськ, **2008**. – 40 с.
3. ОЛІМПІАДНІ ЗАДАЧІ: розв'язання задач II етапу Всеукраїнської олімпіади з математики – 2008 / Б.Б. Беседін, О.А. Кадубовський, Л.Г. Плесканьова, В.С. Сьомкін, Н.І. Труш, О.В. Чуйко // Випуск 2, СЕРІЯ: Викладачі СДПУ – учням, студентам, вчителям: Навчальний посібник. – Слов'янськ, **2009**. – 44 с.
4. ОЛІМПІАДНІ ЗАДАЧІ: розв'язання задач II етапу Всеукраїнської олімпіади з математики – 2009 / О.А. Кадубовський, Б.Б. Беседін, Г.О. Ганзера, В.С. Сьомкін, Н.І. Труш, О.В. Чуйко // Випуск 5, СЕРІЯ: Викладачі СДПУ – учням, студентам, вчителям: Навчальний посібник. – Слов'янськ, **2010**. – 44 с.
5. ОЛІМПІАДНІ ЗАДАЧІ: розв'язання задач II етапу Всеукраїнської олімпіади з математики – 2010 / Б.Б. Беседін, О.А. Кадубовський, В.М. Кадубовська, В.С. Сьомкін, Н.І. Труш, О.В. Чуйко // Випуск 8, СЕРІЯ: Викладачі СДПУ – учням, студентам, вчителям: Навчальний посібник. – Слов'янськ, **2011**. – 80 с.
6. ОЛІМПІАДНІ ЗАДАЧІ: розв'язання задач II етапу Всеукраїнської олімпіади з математики – 2011 / Б.Б. Беседін, О.А. Кадубовський, В.М. Кадубовська, В.С. Сьомкін, Н.І. Труш, О.В. Чуйко, М.М. Рубан // Випуск 10, СЕРІЯ: Викладачі СДПУ – учням, студентам, вчителям: Навчальний посібник. – Слов'янськ, **2012**. – 84 с.
7. ОЛІМПІАДНІ ЗАДАЧІ: Розв'язання задач II етапу Всеукраїнської олімпіади з математики – 2012 / Б.Б. Беседін, О.А. Кадубовський, М.М. Рубан, В.С. Сьомкін, Н.І. Труш, О.В. Чуйко // Випуск 11, СЕРІЯ: Викладачі ДДП – учням, студентам, вчителям: Навчальний посібник. – Слов'янськ, **2013**. – 64 с.

8. ОЛІМПІАДНІ ЗАДАЧІ: розв'язання задач II етапу Всеукраїнської олімпіади з математики – 2013 / Б.Б. Беседін, О.А. Кадубовський, В.С. Сьомкін, Н.І. Труш, О.В. Чуйко. – Слов'янськ : видавничий центр «Маторін», **2014**. – 60 с. – (Викладачі ДДПУ – учням, студентам, вчителям, вип. 12).
9. ОЛІМПІАДНІ ЗАДАЧІ: розв'язання задач II етапу Всеукраїнської олімпіади з математики – 2014 / О.А. Кадубовський, Б.Б. Беседін, В.С. Сьомкін, Н.І. Труш, О.В. Чуйко. – Слов'янськ : видавничий центр «Маторін», **2015**. – 64 с. – (Викладачі ДДПУ – учням, студентам, вчителям, вип. 13).
10. ОЛІМПІАДНІ ЗАДАЧІ: розв'язання задач II етапу Всеукраїнської олімпіади з математики – 2015 / О.А. Кадубовський, Б.Б. Беседін, О.В. Чуйко, С.І. Воробйова. – Слов'янськ : видавничий центр «Маторін», **2016**. – 100 с. – (Викладачі ДДПУ – учням, студентам, вчителям, вип. 14).
11. ОЛІМПІАДНІ ЗАДАЧІ: розв'язання задач II етапу Всеукраїнської олімпіади з математики – 2016 / О.А. Кадубовський, Б.Б. Беседін, О.В. Чуйко. – Слов'янськ : видавничий центр «Маторін», **2017**. – 100 с. – (Викладачі ДДПУ – учням, студентам, вчителям, вип. 15).

Серія «Шкільні математичні гуртки»

1. Кноп К.А. Взвешивания и алгоритмы: от головоломок к задачам. – М.: МЦНМО, 2011. – 104 с.
2. Блинков А.Д., Блинков Ю.А. Геометрические задачи на построение. – 2-е изд., стереот. – М.: МЦНМО, 2012. – 152 с.
3. Мерзон Г.А., Ященко И.В. Длина, площадь, объём. – М.: МЦНМО, 2012. – 48 с.
4. Блинков А.Д. Классические средние в арифметике и в геометрии. – 2-е изд., стереотип. – М.: МЦНМО, 2013. – 168 с.
5. Заславский А.А, Френкин Б.Р., Шаповалов А.В. Задачи о турнирах. – М.: МЦНМО, 2013. – 104 с.
6. Медников Л.Э. Чётность. – М.: МЦНМО, 2013. – 60 с.
7. Сгибнев А.И. Делимость и простые числа. – 2-е изд., стереотип. – М.: МЦНМО, 2013. – 112 с.
8. Шаповалов А. В. Как построить пример? – М.: МЦНМО, 2013. – 80 с.
9. Гуровиц В.М., Ховрина В.В. Графы. – 4-е изд., стереотип. – М.: МЦНМО, 2014. – 32 с.

10. Раскина И.В, Шноль Д.Э. Логические задачи. – М.: МЦНМО, 2014. – 120 с.
11. Чулков П.В. Арифметические задачи. – изд. 4-е, стер. – М.: МЦНМО, 2014. – 64 с.
12. Блинков А.Д, Гуровиц В.М. Непрерывность. – М.: МЦНМО, 2015. – 160 с.
13. Шаповалов А.В. Математические конструкции: от хижин к дворцам. – М.: МЦНМО, 2015. – 176 с.
14. Блинков А.Д. Геометрия в негеометрических задачах. Электронное издание. – М.: МЦНМО, 2016. – 155 с.
15. Раскина И.В. Логика для всех: от пиратов до мудрецов. – М.: МЦНМО, 2016. – 208 с.
16. Блинков Ю.А., Горская Е.С. Вписанные углы – М.: МЦНМО, 2017. – 168 с.
17. Кноп К.А. Азы теории чисел. – М.: МЦНМО, 2017. – 80 с.
18. Блинков А.Д. Последовательности. – М.: МЦНМО, 2018. –160 с.
19. Сгибнев А.И. Геометрия на подвижных чертежах. – М.: МЦНМО, 2019. –184 с.

20. Лук'янова С. Розв'язування текстових задач арифметичними способами : 5–6 кл. – К. : Вид. дім «Шкіл. світ» : Вид. Л. Галіцина, 2006. – 128 с. – (Б-ка «Шкіл. світу»). – Бібліогр.: с. 127.
21. Методические рекомендации по решению задач повышенной трудности в курсе математики IV-V классов : для физико-математических специальностей педагогических институтов / [сост. : Б. А. Викол, Л. В. Викол., Н. И. Труш]. – Славянск : СГПИ, 1987. – 50 с.
22. Методические рекомендации по решению задач повышенной трудности в курсе математики VI-VIII классов (арифметика и алгебра) : для физико-математических специальностей педагогических институтов / [сост. : Б. А. Викол, Л. В. Викол., Н. И. Труш]. – Славянск : СГПИ, 1987. – 68 с.
23. Методические рекомендации по решению задач повышенной трудности в курсе математики VI-VIII классов (геометрия) : для физико-математических специальностей педагогических институтов / [сост. : Б. А. Викол, Е. В. Величко, Л. В. Викол., Н. И. Труш]. – Славянск : СГПИ, 1987. – 50 с.

Internet ресурси

1. Київські олімпіади з математики.

   [Електронний ресурс]. – Режим доступу:
   http://matholymp.org.ua/

2. Фізико-математичний журнал «Квант» (завдання різних математичних олімпіад за 1971-2002рр).

   [Електронний ресурс]. – Режим доступу:
   http://kvant.mirror1.mccme.ru/

3. Сайт міжнародних олімпіад з математики

   [Електронний ресурс]. – Режим доступу:
   http://www.imo-official.org/

4. Олимпиады для школьников.

   [Електронний ресурс]. – Режим доступу:
   http://olimpiada.ru/

5. Российская страница международного математического конкурса «Кенгуру».

   [Електронний ресурс]. – Режим доступу:
   http://mathkang.ru/

6. Українська сторінка міжнародного конкурсу «Кенгуру».

   [Електронний ресурс]. – Режим доступу:
   http://www.kangaroo.com.ua/index.php

7. Турнир городов Международная математическая олимпиада для школьников.

   [Електронний ресурс]. – Режим доступу:
   http://www.turgor.ru/

8. Сайт Московского Центра Непрерывного Математического Образования.

   [Електронний ресурс]. – Режим доступу:
   http://www.mccme.ru/

9. Задачная база олимпиадных задач (декілька тисяч олімпіадних задач російських і міжнародних математичних змагань).

   [Електронний ресурс]. – Режим доступу:
   http://zaba.ru/
   http://problems.ru/

Підписано до друку 20.06.2019 р.
Формат 60×84 1/16. Ум. др. арк. 6,25.
Тираж 100 прим. Зам. № 1448.
Підприємець Маторін Б.І.

84116, м. Слов'янськ, вул. Г. Батюка, 19.
Тел./факс +38 06262 3-20-99. Email:
matorinb@ukr.net

Свідоцтво про внесення суб'єкта видавничої справи до Державного реєстру видавців, виготівників і розповсюджувачів видавничої продукції ДК №3141, видане Державним комітетом телебачення та радіомовлення України від 24.03.2008 р.