

МАТЕРИАЛЫ РАСШИРЕННОГО
СЕМИНАРА ИПММ НАН
УКРАИНЫ И КАФЕДРЫ
МАТЕМАТИКИ ДДПУ
К 65 – ЛЕТИЮ
ЧЛЕНА-КОРРЕСПОНДЕНТА
НАН УКРАИНЫ А.А. БОЙЧУКА

Славянск

20 октября 2016 г.

Материалы расширенного семинара Института прикладной математики и механики НАН Украины и кафедры математики Донбасского государственного педагогического университета (к 65-летию члена-корреспондента НАН Украины А.А. Бойчука). — Славянск. — 2016. — 112 с.

Сборник содержит материалы расширенного семинара Института прикладной математики и механики НАН Украины и кафедры математики Донбасского государственного педагогического университета, посвященного 65-летию члена-корреспондента НАН Украины А.А. Бойчука, в частности, биографические данные, список наиболее значимых публикаций, а также информацию о вкладе А.А. Бойчука в развитие математической школы Славянского государственного педагогического университета. В сборник также включены доклады, прочитанные на семинаре, посвященные перспективам развития исследований А.А. Бойчука, в частности, посвященные развитию техники, предложенной А.А. Бойчуком, для построения обобщенного оператора Грина дифференциально-алгебраической краевой задачи с использованием матричной формы записи неизвестной, а также — построению решений линейных матричных краевых задач в случае параметрического резонанса, разрешимость которых обеспечивается соответствующим выбором собственной функции краевой задачи.

Редактор — директор Института прикладной математики и механики НАН Украины член-корреспондент НАН Украины доктор физико-математических наук, профессор В.Я. Гутлянский.

Содержание

1 А.А. Бойчук и Донбасский государственный педагогический университет	5
2 Ученики А.А. Бойчука в Донбасском государственном педагогическом университете	10
3 Династия А.А. Бойчука	11
4 Диссертации, защищенные под руководством учеников А.А. Бойчука	13
5 Основные публикации А.А. Бойчука	14
6 С.М. Чуйко О решении матричных уравнений	33
6.1 Постановка задачи	34
6.2 Основной результат	35
6.3 Регуляризация линейных матричных уравнений	40
7 С.М. Чуйко Матричная дифференциально-алгебраическая краевая задача	48
7.1 Постановка задачи	48
7.2 Случай разрешимости системы (16) относительно производной	51
7.3 Случай неразрешимости системы (16) относительно производной	61
7.4 О регуляризации матричной дифференциальной алгебраической краевой задачи	71
8 С.М. Чуйко, А.С. Чуйко, Д.В. Сысоев Мат-	

ричные краевые задачи	85
8.1 Постановка задачи	86
8.2 Условия разрешимости	90
8.3 Периодическая задача для уравнения типа Матье	99
9 Совместные заседания семинара ИПММ НА- НУ и кафедры математики	109
10 Программа семинара, посвященного юбилею А.А. Бойчука	110

1 А.А. Бойчук и Донбасский государственный педагогический университет

30 июня 2015 года исполнилось 65 лет со дня рождения украинского математика, члена-корреспондента Национальной Академии наук Украины, заведующего лабораторией Института математики НАН Украины, руководителя признанной в мире школы теории нетеровых краевых задач, доктора физико-математических наук, профессора Александра Андреевича Бойчука.

Александр Андреевич Бойчук родился 30 июня 1950 в г. Кировограде в семье Андрея Прокофьевича Бойчука и Анны Ефимовны Бойчук. В 1967 Александр Андреевич закончил с серебряной медалью Кировоградскую среднюю школу № 11 и поступил в Киевский государственный университет им. Т. Шевченко на механико-математический факультет. По окончании университета два года работал младшим научным сотрудником в Институте электросварки им. Е.О. Патона АН УССР. С 1974 р. учился в аспирантуре Института математики НАН УССР, которую успешно закончил, защитив в 1978 кандидатскую диссертацию. С 1978 по 1993 гг. Александр Андреевич Бойчук работал в Институте геофизики им. С.И. Субботина НАН Украины на должностях старшего научного сотрудника и заведующего лабораторией. В 1990 – 1991 гг. проходил стажировку в Институте математики НАН Украины, защитив в 1992 докторскую диссертацию на тему "Конструктивные методы анализа нетеровых краевых задач ". С 1994 работает в Институте математики НАН Украины в отделе дифференциальных уравнений и теории колебаний. В 1997 г. ему было при-

своено звание профессора. В 2009 г. Александр Андреевич Бойчук возглавил созданную в составе отдела «Дифференциальные уравнения и теория колебаний» Института математики НАН Украины совместно со Славянским государственным педагогическим университетом межведомственную лабораторию «Краевые задачи теории дифференциальных уравнений». А.А. Бойчук — известный специалист в теории краевых задач с нормально-разрешимым (фредгольмовым, нётеровым, n -разрешимым, d -разрешимым) оператором в линейной части. Впервые определил условия разрешимости широкого класса нелинейных краевых задач для систем обыкновенных дифференциальных, интегрально-дифференциальных, дифференциально-алгебраических и разностных уравнений, уравнений с запаздывающим аргументом, уравнений с импульсным воздействием, уравнений на "time-scale", сингулярно возмущенных уравнений как в конечномерных, так и в бесконечномерных пространствах. Александр Андреевич Бойчук существенно расширил классификацию критических (резонансных) случаев этих задач; им получен ряд оригинальных результатов для задач с условиями на бесконечности, а именно, найдены критерии существования ограниченных на всей оси решений линейных и нелинейных систем обыкновенных дифференциальных и разностных уравнений и предложены алгоритмы построения решений.

Александр Андреевич Бойчук является автором более 130 научных работ и трех монографий. В 2004 г. в Нидерландах и США издана совместная с его учителем и коллегой академиком А.М. Самойленко монография "Generalized inverse

operators and Fredholm boundary value problems".

В 2004 г. в Славянске в соавторстве с С.М. Чуйко был издан курс лекций по теории краевых задач, основанный на серии спецкурсов, прочитанных авторами на механико-математическом факультете Киевского национального университета им. Тараса Шевченко и физико-математическом факультете Славянского государственного педагогического университета. В 2013 году данный курс лекций в значительно расширенном варианте был переведен на словацкий язык: Boičuk A., Čuiko S., Ružičková M. Lineárne okrajové úlohy. — Žilina: EDIS-vydavatel'stvo ŽU.

Научные результаты А.А. Бойчука хорошо известны специалистам и докладывались им на представительных международных конференциях в Австрии, Бельгии, Болгарии, Великобритании, Венгрии, Германии, Греции, Испании, Латвии, Польши, Румынии, Словакии, Чехии и большинстве стран СНГ. На многих конференциях и симпозиумах он был членом организационных комитетов и приглашенным лектором.

Александр Андреевич Бойчук впервые побывал в Славянске в 1998 году. А.А. Бойчук неоднократно возглавлял ГЭК на физико-математическом факультете Славянского государственного педагогического университета. В 2008 – 2010 гг. был членом редколлегии Вестника Славянского государственного педагогического университета. Серия математика. В 2003 г. работал профессором кафедры экономико-математических дисциплин Славянского государственного педагогического университета.

12 – 14 июня 2013 г. А.А. Бойчук возглавлял програм-

ный комитет Международной научной конференции "Краевые задачи, теория функций и их применение" посвященной 75-летию академика А.М. Самойленко, проведенной в Донбасском государственном педагогическом университете.

21 – 24 мая 2014 г. А.А. Бойчук — заместитель председателя програмного комитета Международной научной конференции "Краевые задачи, теория функций и их применение", посвященной 60 – летию В.И. Рукасова, проведенной в Донбасском государственном педагогическом университете.

В течение последних двадцати лет А.А. Бойчук является профессором кафедры интегральных и дифференциальных уравнений Киевского национального университета им. Тараса Шевченко, в 2002 – 2010 гг. — профессором исследователем кафедры математического анализа и прикладной математики Университета г. Жилина (Словакия). Под его научным руководством подготовлено 15 кандидатских, две Ph. D. и одна докторская диссертация. Долгое время работает в специализированном совете по защите докторских диссертаций при Киевском национальном университете им. Тараса Шевченко. А.А. Бойчук — заместитель главного редактора журнала «Нелинейные колебания», который переводится на английский язык в издательстве "Springer".

В 2012 г. А.А. Бойчук был избран членом-корреспондентом Национальной Академии наук Украины. Выдвижение Александра Андреевича было поддержано Славянским государственным педагогическим университетом, а также Киевским национальным университетом им. Тараса Шевченко.

В 2008 г. работы А.А. Бойчука были отмечены Государ-

ственной премией Украины в области науки и техники. В 2013 г. работы А.А. Бойчука были отмечены премией НАН Украины им. Ю.А. Митропольского.

*A.M. Самойленко, В.Я. Гутлянский,
Д.Я. Хусаинов, С.М. Чуйко, С.О. Чайченко,
О.А. Новиков, Е.В. Чуйко, А.А. Кадубовский
А.С. Чуйко, О.В. Старкова, О.Г. Ровенская*

2 Ученники А.А. Бойчука в Донбасском государственном педагогическом университете

Под научным руководством члена-корреспондента Национальной Академии наук Украины Александра Андреевича Бойчука подготовлены диссертации на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук выпускниками Славянского государственного педагогического университета:

1992 — Журавлева Валерия Филипповица "Нетеровы краевые задачи для дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом";

1993 — Чуйко Сергея Михайловича "Автономные краевые задачи в критических случаях";

1996 — Чуйко Елены Викторовны "Краевые задачи с вырожденным импульсным воздействием в критических случаях".

В 2009 г. Чуйко С.М. защитил диссертацию на соискание ученой степени доктора физико-математических наук "Нетеровы краевые задачи для импульсных дифференциальных уравнений" (научный консультант — академик НАН Украины А.М. Самойленко).

В 2013 г. Журавлев В.Ф. защитил диссертацию на соискание ученой степени доктора физико-математических наук "Обобщенно обратные операторы и нормально разрешимые краевые задачи в банаховых пространствах" (научный консультант — член-корреспондент НАН Украины А.А. Бойчук).

3 Династия А.А. Бойчука

Александр Андреевич Бойчук родился 30 июня 1950 в г. Кировограде в семье Андрея Прокофьевича Бойчука и Анны Ефимовны Бойчук. Отец Александра Андреевича — украинский литератор и педагог, профессор, кандидат филологических наук, проректор, заведующий кафедрой украинской литературы в Кировоградском пединституте (1959 — 1970 годы). Автор книги «Украинская сатира второй половины XIX века» (1972).

Александр Андреевич Бойчук в 1967 г. закончил с серебряной медалью Кировоградскую среднюю школу № 11 и поступил в Киевский государственный университет им. Тараса Шевченко на механико-математический факультет. С 1974 р. учился в аспирантуре Института математики НАН УССР, которую успешно закончил, защитив в 1978 кандидатскую диссертацию. С 1978 по 1993 гг. Александр Андреевич Бойчук работал в Институте геофизики им. С.И. Субботина НАН Украины на должностях старшего научного сотрудника и заведующего лабораторией. В 1990 — 1991 гг. проходил стажировку в Институте математики НАН Украины, защитив в 1992 докторскую диссертацию. С 1994 работает в Институте математики НАН Украины в отделе дифференциальных уравнений и теории колебаний, в настоящее время в должности заведующего лаборатории "Краевые задачи теории дифференциальных уравнений". В 1997 г. ему было присвоено звание профессора.

Жена Александра Андреевича — Ольга Ивановна Бойчук — кандидат технических наук, работает в Институте электросварки им. Е.О. Патона НАН Украины.

Старший сын Александра Андреевича — Андрей Александрович Бойчук — кандидат физико-математических наук, ученик академика НАН Украины А.М. Самойленко. Закончил механико-математический факультет Киевского национального университета им. Тараса Шевченко, а также аспирантуру Института математики НАН Украины, работает в Институте электросварки им. Е.О. Патона НАН Украины.

Младший сын Александра Андреевича, Игорь Александрович Бойчук, до 13.10.2015 г. работал в Институте электросварки им. Е.О. Патона НАН Украины. Закончил механико-математический факультет Киевского национального университета им. Тараса Шевченко, а также аспирантуру в Славянском государственном педагогическом университете. В 2010 г. защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук "Нелинейные нетеровы краевые задачи в критических случаях"(научный руководитель — доктор физико-математических наук С.М. Чуйко).

Игорь Александрович Бойчук трагически погиб 12.10.2015 г. в Киеве.

C.M. Чуйко, E.B. Чуйко

4 Диссертации, защищенные под руководством учеников А.А. Бойчука

В 2009 г. Ольга Геннадьевна Ровенская защитила диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук "Приближение периодических функций высокой гладкости линейными средними рядов Фурье" (научный руководитель — доктор физико-математических наук С.М. Чуйко).

В 2010 г. Ольга Владимировна Старкова (Несмелова) защитила диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук "Недоопределенные нетеровы краевые задачи в критических случаях" (научный руководитель — доктор физико-математических наук С.М. Чуйко)

В 2010 г. Игорь Александрович Бойчук защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук "Нелинейные нетеровы краевые задачи в критических случаях" (научный руководитель — доктор физико-математических наук С.М. Чуйко).

В 2013 г. Ольга Евгеньевна Пирус (Любимая) защитила диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук "Метод Ньютона-Канторовича в теории автономных краевых задач" (научный руководитель — доктор физико-математических наук С.М. Чуйко).

5 Основные публикации А.А. Бойчука

1. Лыкова О.Б., Бойчук А.А. Метод малого параметра в задаче построения функций Ляпунова для систем линейных дифференциальных уравнений // Теория устойчивости и ее приложения. — Новосибирск: Наука, 1979. — С. 60 — 66.
2. Бойчук А.А. О дихотомии периодических систем в критических случаях // Приближенные методы исследования нелинейных колебаний. — Киев, 1983. — С.24—28.
3. Бойчук А.А. Построение периодических решений нелинейных систем в критических случаях // Асимптотическое интегрирование дифференциальных уравнений. — Киев, 1985. — С. 24 — 30.
4. Бойчук А.А. Построение решения краевых задач для нелинейных систем в критических случаях // Некоторые вопросы теории асимптотических методов нелинейной механики. — Киев, 1986. — С. 39 — 43.
5. Лыкова О.Б., Бойчук А.А. Периодические решения и дихотомия слабовозмущенных линейных систем // Успехи мат. наук. — 1987. — № 4. — С. 135
6. Бойчук А.А. Условия возникновения дихотомии линейных периодических систем // Метод функций Ляпунова в анализе динамики систем. — Новосибирск, 1987. — С. 251 — 256.
7. Lykova O.B. Boichuk A.A. Construction of periodic solutions of nonlinear systems in critical cases // Ukrainian

- Mathematical Journal. — 1988. — **40**, № 1. — pp. 51 — 58.
8. Бойчук А.А. Итерационные методы построения решений двухточечных краевых задач для нелинейных систем // Докл. АН УССР. Серия А. — 1988. — № 3. — С. 6 — 9.
 9. Лыкова О.Б., Бойчук А.А. Построение периодических решений нелинейных систем в критических случаях // Укр.мат.журн. — 1988. — **40**, № 1. — С. 62 — 69.
 10. Бойчук А.А. Інтераційні методи побудови розв'язків двоточкових краївих задач для нелінійних систем // Доповіді АН УРСР. Сер А, Фіз.-мат. і техн. науки. — 1988. — №3. — С. 6 — 8.
 11. Бойчук А.А. Функция Грина линейной однородной краевой задачи // Докл. АН УССР. Сер. А. — 1988. — № 7. — С. 2 — 6.
 12. Бойчук А.А. Краевые задачи для слабовоизмущенных линейных и нелинейных систем в критических случаях. Препр. АНУССР. Ин-т математики — Киев, 1988. — 44 с.
 13. Бойчук А.А. Построение решений двухточечных краевых задач для слабовоизмущенных нелинейных систем в критических случаях // Укр. мат. журнал. — 1989. — **41**, № 10 — С. 1416 — 1420.
 14. Boichuk A.A. Construction of solutions of two-point boundary problems for weakly perturbed nonlinear systems in critical cases // Ukrainian Mathematical Journal. — 1989. — **41**, № 10. — pp. 1219 — 1223.

15. Бойчук А.А. Конструктивные методы анализа краевых задач. — Киев. Наук. думка. 1990. — 96 с.
16. Бойчук А.А., Журавлев В.Ф., Чуйко С.М. Периодические решения нелинейных автономных систем в критических случаях // Укр. мат. журнал. — 1990. — **42**, № 9. — С. 1180 — 1187.
17. Boichuk A.A., Zhuravlev V.F., Chuiko S.M. Periodic Solutions of Nonlinear Autonomous Systems in Critical Cases // Ukrainian Math. Journ. **42**, 1990. № 9 pp. 1049 – 1054.
18. Бойчук А.А., Журавлев В.Ф. Построение решений краевых задач для дифференциальных систем с запаздыванием в критических случаях // Докл. АН УССР. Сер. А. — 1990. — № 6. — С. 3 — 6.
19. Бойчук А.А., Журавлев В.Ф. Построение решений линейных нетеровых операторных уравнений в гильбертовых пространствах // Докл. АН УССР. Сер. А. — 1990. — № 8. — С. 3 — 6.
20. Бойчук А.А., Чуйко С.М. Автономные краевые задачи в критических случаях - К.: Ин-т геофизики, 1991. — 50 с. . — (Препринт / АН УССР, Ин-т геофизики; 91-I).
21. Бойчук А.А., Перестюк Н.А., Самойленко А.М. Периодические решения импульсных дифференциальных систем в критических случаях // Дифференциальные уравнения. — 1991. — **27**, № 9. С. 1516 — 1521.
22. Бойчук А.А., Чуйко С.М. Периодические решения нелинейных автономных систем с запаздыванием в критиче-

- ских случаях // Доклады АН Украины — 1991. — № 9. — С. 9 — 13.
23. Бойчук А.А., Журавлев В.Ф. Обобщенный обратный оператор к нетерову в банаховом пространстве // Докл. АН УССР. Сер. А. — 1991. — № 1. — С. 5 — 8.
24. Бойчук А.А., Журавлев В.Ф. Построение решений линейных нетеровых операторных уравнений в банаховых пространствах // Укр. мат. журн. — 1991. — **43**, № 10. — С. 1343 — 1350.
25. Boichuk A.A., Perestyuk N.A., Samoilenko A.M. Periodic solutions of impulse differential systems in critical cases // Differents. Uravn.. — 1991. — **27**, no. 9. — pp. 1516 — 1521.
26. Бойчук А.А., Чуйко С.М. Автономные краевые задачи в критических случаях — К.: Ин-т геофизики, 1991. — 50 с. — (Препринт / АН УССР, Ин-т геофизики; 91-I).
27. Boichuk A.A., Zhuravlev V.F. Construction of the solutions of linear operator equations in banach spaces // Ukrainian Mathematical Journal. — 1991. — **43**, № 10. — pp. 1247 — 1254.
28. Boichuk A., Chuiko S. Autonomous Weakly Nonlinear Boundary Value Problems in Critical Cases // Differential Equations. — 1992. — № 10, pp. 1353 — 1358.
29. Бойчук А.А., Чуйко С.М. Автономные краевые задачи в критических случаях — II. — К.: Ин-т геофизики, 1992. — 52 с. — (Препринт / АН УССР, Ин-т геофизики; 92-I).

30. Бойчук А.А., Чуйко С.М. Автономные слаболинейные краевые задачи // Дифференциальные уравнения. — 1992. — **28**, № 10. — С. 1668 — 1674.
31. Samoilenko A.M., Boichuk A.A. Linear noetherian boundary value problems for differential systems with an impulse action // Ukrainian Mathematical Journal. — 1992. — **44**, № 4. — pp. 564 — 568.
32. Бойчук А.А., Чуйко С.М. Оператор Грина критической квазипериодической краевой задачи // Доклады АН Украины. — 1993. — № 5. — С. 9 — 12.
33. Бойчук А.А., Хращевська Р.Ф. Слабонелинейные краевые задачи для дифференциальных систем с импульсным воздействием // Укр. мат. журн. — 1993. — **45**, №2. — С. 221 — 225.
34. Boichuk A.A., Khrashchanskaya R.F. Weakly nonlinear boundary value problems for differential systems with impulsive effect // Ukr. Mat. Zh. — 1993. — **45**, № 2. — pp. 221 — 225.
35. Бойчук А.А., Журавлев В.Ф., Самойленко А.М. Линейные нетеровы краевые задачи для импульсных систем с запаздыванием // Дифференциальные уравнения. — 1994. — **30**, 10. — С. 1677 — 1682.
36. Бойчук А.А., Хрищенюк В.А. Существование и поведение решений начально-краевых задач для нелинейного гиперболического уравнения третьего порядка. — К., 1994. — 19 с. ; (Препр./НАН Украины; Институт математики; № 94.24).

37. Бойчук А.А., Журавлев В.Ф., Самойленко А.М. Обобщенно-обратные операторы и нетеровы краевые задачи. — К.: Ин-т математики НАН Украины, 1995. — 318 с.
38. Boichuk A.A., Chuiko E.V., Chuiko S.M. Periodic solutions of autonomous systems with pulse influence in critical cases, Ukr. Math. Zh. 1995.- **47**, № 11. P. 1688 – 1695.
39. Бойчук А.А., Чуйко Е.В., Чуйко С.М. Периодические решения автономной системы с импульсным воздействием в критических случаях // Укр. мат. журнал. — 1995. — **47**, № 11. — С. 1478 – 1483.
40. Самойленко А.М., Бойчук О.А., Кривошея С.А. Крайові задачі для систем лінійних інтегро-диференціальних рівнянь типу Фредгольма з вырожденим ядром // Укр. мат. журн. — 1996. — **48**, № 11. – С. 1576 – 1579.
41. Samoilenko A.M., Boichuk A.A., Krivosheya S.A. Boundary value problems for systems of integro-differential equations with Degenerate Kernel // Ukrainian Mathematical Journal. — 1996. — **48**. — № 11. — pp. 1785 – 1789.
42. Бойчук А.А., Чуйко Е.В., Чуйко С.М. Обобщенный оператор Грина краевой задачи с вырожденным импульсным воздействием // Укр. мат. журнал. — 1996. — **48**, № 5. — С. 588 – 594.
43. Bojchuk A.A., Chuiko E.V., Chuiko S.M. Generalized Green operator of a boundary-value problem with degenerate pulse influence, Ukr. Math. Jh. 1996. **48**, №. 5. P. 652-660.

44. Bojchuk A., Chuiko S. Generalized Green operator for a linear quaziperiodic problem // Differential Equations. **32**. № 4, 1996, pp. 451 – 458.
45. Бойчук А.А., Чуйко С.М. Обобщенный оператор Грина линейной квазипериодической задачи // Дифференциальные уравнения. — 1996. — **32**, № 4. — С. 450 – 457.
46. Samoilenko A.M., Boichuk A.A., Zhuravlev V.F. Weakly nonlienear boundary-value problems for operator equations with influence // Ukrainian Mathematical Journal. — 1997. — **49**, № 2. — pp. 302.
47. Boichuk A.A. Boundary-value problems for systems of difference equations // Ukrainian Mathematical Journal. — 1997. — **49**. — № 6. — pp. 930 – 934.
48. Boichuk A.A., Krivosheya S.A. Criterion of the solvability of matrix equations of the Lyapunov type // Ukrainian Mathematical Journal. — 1998. — **50**, № 8. — pp. 1162 – 1169.
49. Boichuk A.A. Nonlinear boundary-value problems for systems of ordinary differential equations // Ukrainian Mathematical Journal. — 1998. — **50**. — № 2 pp. 186 – 195.
50. Бойчук А.А., Ковачев В. Периодические решения импульсных систем с малым запаздыванием в критическом случае второго порядка // Нелінійні коливання. — 1998. — **1**, № 1. — С. 6 – 19.
51. Бойчук А.А. Решения слабо нелинейных дифференциальных уравнений, ограниченные на всей оси // Нелінійні коливання. — 1999. — **2**, № 1. — С. 3 – 10.

52. Boichuk A.A. Solutions of weakly nonlinear differential equations bounded on the whole line // Nonlinear Oscillations. —1999. — **2**, no. 1. — pp. 3 — 10.
53. Boichuk A.A., Kovachev V. Weakly nonlinear boundary value problems for impulsive systems with small concentrated delays of the argument // Nonlinear Oscillations. — 2000. — **3**, № 1. — C. 13 — 30.
54. Бойчук А.А., Чуйко Е.В., Чуйко С.М. Слаболинейные краевые задачи с импульсным воздействием типа "interface conditions"// Нелінійні коливання. — 2000. — **3**, № 3. С. 291 — 296.
55. Boichuk A.A. A Condition for the Existence of a Unique Green-Samoilenko Function for the Problem of Invariant Torus // Ukrainian Mathematical Journal. — 2001. — **53**, no 4. — pp. 637 — 641(5).
56. Boichuk A.A., Krivosheya S.A. A Critical Periodic Boundary Value Problem for a Matrix Riccati Equation. // Differential Equation. — 2001. — **37**, № 4. — pp. 464—471.
57. Samoilenko A.M., Boichuk A.A., Karandzhulov, L.I. Noetherian boundary value problems with singular perturbation // Differ. Uravn. — 2001. — **37**, no. 9. — pp. 1186–1193.
58. Самойленко А.М., Бойчук А.А., Бойчук Ан.А. Ограниченные на всей оси решения линейных слабовозмущенных систем // Укр. мат. журн. — 2002. — **54**, N 11. — С. 1517-1530.

59. Samoilenko A.M., Boichuk A.A., Boichuk An.A. Solutions, bounded on the whole axis, of linear weakly perturbed systems // Ukrainian Mathematical Journal. — 2002. — **54**, no. 11. — pp. 1517 — 1530.
60. Бойчук А.А. Множество решений линейной слабовозмущенной системы // Нелінійні коливання. — 2003. — **6**, № 3. С. 309 — 318.
61. Бойчук А.А. Ограниченные на \mathbb{R} решения слабонелинейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений // Нелінійні коливання. — 2003. — **6**, № 4. С. 439 — 447.
62. Boichuk A.A. Grammatikopoulos M.K. Perturbed Fredholm boundary value problems for delay differential systems // Abstract and Applied Analysis. — 2003. — **15**. — pp. 843 — 864.
63. Бойчук А.А., Чуйко С.М. Лекции по теории линейных краевых задач. Учеб. пособие для вузов. — Славянск, 2004 —65 с.
64. Бойчук А.А., Чуйко С.М., Чуйко А.С. Неавтономные периодические краевые задачи в особом критическом случае // Нелінійні коливання. — 2004. — **7**, № 1. — С. 53 — 66.
65. Boichuk A.A., Samoilenko A.M. Generalized inverse operators and Fredholm boundary-value problems. — Utrecht; Boston: VSP, 2004. — XIV. 317 p.
66. Boichuk A.A., Chuiko S.M., Chuiko A.S. Nonautonomous Periodic Boundary-Value Problems in a Special Critical

- Case // Nonlinear Oscillations. — 2004. — **7**, no 1. — pp. 52 — 64.
67. Бойчук А.А., Покутный А.А. Ограниченные решения линейных дифференциальных уравнений в банаховом пространстве// Нелінійні коливання. — 2006. — **9**, № 1. — С. 3 — 14.
68. Boichuk A.A., Pokutnyi A.A. Bounded solutions of linear differential equations in a banach space // Nonlinear Oscillations. — 2006. — **9**. — № 1. — pp. 1 — 12.
69. Boichuk A.A Pokutnyi A.A. Bounded solutions of linear perturbed differential equations in a Banach space // Tatra Mountains Mathematical Publications. — 2007. — **39**. — pp. 1 — 12.
70. Бойчук А.А., Чуйко С.М. Обобщенный оператор Грина импульсной краевой задачи с переключениями // Нелінійні коливання. — 2007. — **10**, № 1. — С. 51 — 65.
71. Boichuk A.A., Chuiko S.M. Generalized green operator for an impulsive boundary-value problem with switchings // Nonlinear Oscillations (N.Y.) **10**. № 1, 2007, pp. 46 — 61.
72. Бойчук А.А., Шегда Л.М. Вырожденные нетеровы краевые задачи // Нелінійні коливання. — 2007. — **10**, № 3. — С. 303 — 312.
73. Boichuk A.A. A criterion for the existence of the unique invariant torus of a linear extension of dynamical systems // Ukrainian Mathematical Journal. — 2007. — **59**, № 1. — pp. 3 — 13.

74. Бойчук А.А. Критерий существования единственного инвариантного тора линейного расширения динамических систем // Укр. мат. журн. — 2007. — **59**, N 1. — С. 3 – 13.
75. Boichuk A.A., Shegda L.M. Degenerate Fredholm boundary value problems // Nonlinear Oscillations. — 2007. — **10**. — № 3. — pp. 306 – 314.
76. Boichuk A.A. A criterion for the existence of the unique invariant torus of a linear extension of dynamical systems // Ukrainian Mathematical Journal. — 2007. — **59**. — № 1. — pp. 1 – 11.
77. Samoilenko A.M., Berezans'kyi Yu.M., Koshlyakov V.M., Korolyuk V.S., Lukovs'kyi I.O., Perestyuk M.O., Boichuk A.A., Lykova O.B., Lymarchenko O.S., Samoilenko V.H. On the 90th birthday of Yurii Oleksiovych Mytropol's'kyi // Nonlinear Oscillations. — 2007. — **10**. — № 1. — pp. 1 – 3.
78. Бойчук А.А., Самойленко А.М., Березанский Ю.М., Кошляков В.Н., Королюк В.С., Луковский И.А., Перестюк Н.А., Лыкова О.Б., Лимарченко О.С. Самойленко В.Г. К 90 – летию со дня рождения Юрия Алексеевича Митропольского // Нелінійні коливання. — 2007. — **10**, № 1. — С. 4 – 6.
79. Boichuk A.A., Korostil I.A., Feckan M. Bifurcation Conditions for a Solution of an Abstract Wave Equation // Differential Equations. — 2007. — **43**, № 4. — pp. 495 – 502.
80. Бойчук А.А., Чуйко С.М. Бифуркация решений импульсной краевой задачи // Нелінійні коливання. —

2008. — **11**, № 1. — С. 21 — 31.
81. Бойчук А.А., Лучка А.Ю., Пелюх Г.П., Прикарпатский Я.А., Ронто А.Н. Ткаченко В.И. К 70-летнему юбилею Анатолия Михайловича Самойленко // Нелінійні коливання. — 2008. — **11**, № 1. — С. 4 — 6.
82. Boichuk A.A., Gaishun I.V., Il'in V.A., Izobov N.A., Mishchenko E.F., Mitropol'skii Yu.A., Perestyuk N.A., Rozov N.Kh. Anatolii Mikhailovich Samoilenko: A Tribute in Honor of His Seventieth Birthday // Differential Equations. — 2008. — **44**, no. 2. — P. 150—160.
83. Бойчук А.А., Покутный А. А. Ограниченные решения слабонелинейных дифференциальных уравнений в банаховом пространстве// Нелінійні коливання. — 2008. — **11**, № 1. — С. 151 — 159.
84. Бойчук А.А., Чуйко С.М. Метод ускоренной сходимости для построения решений нетеровой краевой задачи // Укр. мат. журн. — 2008. — **60**, N 12. — С. 1587 — 1601.
85. Boichuk A.A., Chuiko S.M. Bifurcations of solutions of an impulsive boundary value problem // Nonlinear Oscillations/ — 2008. — **11**. — №1, pp. 21 — 31.
86. Boichuk A.A., Chuiko S.M. Method of accelerated convergence for the construction of solution a Noetherian boundary value problem // Ukr. Math. Zh. — 2008. — **60**. — №12, pp. 1863 — 1877.
87. Boichuk A.A., Pokutnyi A.A. Bounded solutions of weakly nonlinear differential equations in a Banach space //

- Nonlinear Oscillations. — 2008, **11**. — № 2, pp. 158 — 167.
88. Boichuk A.A., Luchka A.Yu., Pelyukh H.P., Prykarpats'kyi Ya.A., A.M. Ronto, Tkachenko V.I. Anatolii Mykhailovych Samoilenko (on his 70-th birthday) // Nonlinear Oscillations. — 2008. — **11**. — № 1. — pp. 1 — 3.
89. Бойчук А.А., Панасенко Е.В. Краевые задачи для дифференциальных уравнений в банаховом пространстве // Нелінійні коливання. — 2009. — **12**, № 1. — С. 16 — 19.
90. Бойчук А.А., Шегда Л.М. Условия бифуркации решений вырожденных краевых задач // Нелінійні коливання. — 2009. — **12**, № 2. — С. 147 — 154.
91. Бойчук А.А., Шегда Л.М. Бифуркация решений вырожденных нётеровых краевых задач: Препринт; Ин-т математики НАН Украины. — К.: 2009. — 21 с.
92. Бойчук О.А., Шегда Л.М. Вироджені нелінійні країові задачі // Укр. мат. журн. — 2009. — **61**, № 9. — С. 1174 — 1188.
93. Boichuk A.A., Shehda L.M. Degenerate nonlinear boundary-value problems // Ukrainian Mathematical Journal. — 2009. — **61**. — № 9. — pp. 1387 — 1403.
94. Boichuk A.A., Panasenko E.V. Boundary-value problems for differential equations in a Banach space // Nonlinear Oscillations. — 2009. — **12**. — № 1. — pp. 15 — 18.
95. Boichuk A.A., Shehda L.M. Conditions for bifurcation of solutions of degenerate boundary-value problems // Nonlinear Oscillations. 2009. — **12**. — № 2. — pp. 149 — 156.

96. Бойчук А.А., Панасенко Е.В. Слабовозмущённые краевые задачи для дифференциальных уравнений в банаховом пространстве // Нелінійні коливання. — 2010. — **13**, № 3. — С. 291 — 304.
97. Бойчук А.А., Панасенко Е.В. Слабо нелинейные краевые задачи для дифференциальных уравнений в критическом случае в банаховом пространстве // Нелінійні коливання. — 2010. — **13**, № 4. — С. 483 — 496.
98. Boichuk A., Diblik J., Khusainov D., Ruzickova M. Boundary value problems for delay differential systems // Adv. Difference Equ. — 2010. — 20 p.
99. Boichuk A.A., Diblik J., Khusainov D., Ruzickova M. Fredholm's boundary-value problems for differential systems with a single delay // Nonlinear Analysis. — 2010. — **72**, no. 5. — pp. 2251 — 2258.
100. Boichuk A., Langerova M., Skorikova J. Solutions of linear impulsive differential systems bounded on the entire real axis // Advances in Difference Equations. — 2010. — p 10
101. Бойчук А.А., Шегда Л.М. Бифуркация решений вырожденных нетеровых краевых задач // Дифференциальные уравнения. — 2011. — **47**, № 4. — С. 459 — 467.
102. Boichuk A.A., Shegda L.M. Bifurcation of solutions of singular Fredholm boundary value problems // Differential Equations. — 2011. — **47**. — № 4. — pp. 453 — 461.
103. Boichuk A.A., Panasenko E.V. Weakly perturbed boundary-value problems for differential equations in a

- Banach space // Nonlinear Oscillations. — 2011. **13**. — № 3.
— pp. pp 311 — 324.
104. Biletskyi B.A., Boichuk A.A., Pokutnyi A.A. Periodic problems of difference equations and Ergodic theory // Abstr. Appl. Anal. — 2011. — 12 p.
105. Boichuk A.A., Panasenko E.V. Weakly nonlinear boundary-value problems for differential equations in a Banach space in the critical case // Nonlinear Oscillations. — 2011. **13**. — № 4. — pp. 515 — 529.
106. Boichuk A., Diblik J., Khusainov D., Ruzickova M. Boundary-value problems for weakly nonlinear delay differential systems // Abstr. Appl. Anal. — 2011. — 19 p.
107. Boichuk A., Langerova M., Skorikova J. J.Existence conditions for bounded solutions of weakly perturbed linear impulsive systems // Abstract and Applied Analysis. — 2011. — **2011**. — 13 p.
108. Boichuk A.A., Pokutnyi A.A. Dichotomy and boundary value problems on the whole line // Proceedings, 5th Chaotic Modeling and Simulation International Conference, 12 – 15 June 2012, Athens Greece. — pp. 81 — 89.
109. Boičuk A., Čuiko S., Ružičková M. Lineárne okrajové úlohy. — Žilina: EDIS-vydavatel'stvo ŽU, 2013. — 177 p.
110. Boichuk A.A., Longerova M., Ruzickova M., Voituschenko E. Systems of singular differential equations with pulse action // Advances Differential Equations. — 2013.

111. Boichuk A.A., Pokutnyi A.A., Chistyakov V.F. Application of perturbation theory to the solvability analysis of differential algebraic equations // Computational Mathematics and Mathematical Physics. — 2013. — **53**. — № 6. — pp. 777 — 788.
112. Berezans'kyi Yu.M., Boichuk A.A., Horbachuk M.L., Drozd Yu.A., Korolyuk V.S., Lukovs'kyi I.O., Makarov V.L., Nikitin A.H., Perestyuk M.O., Portenko M.I., Samoilenko Yu.S., Trokhymchuk Yu.Yu., Sharko V.V., Sharkovs'kyi O.M. Anatolii Mykhailovich Samoilenko (on his 75th birthday) // Ukrainian Mathematical Journal. — 2013, **65**. — № 1, pp. 1 — 4.
113. Boichuk A.A., Zhuravlev V.F., Pokutnyi A.A. Normally solvable operator equations in a Banach space // Ukrainian Mathematical Journal. — 2013. — **65**, pp. 179 — 192.
114. Boichuk A.A., Pokutnyi A.A., Chistyakov V.F. Application of perturbation theory to the solvability analysis of differential algebraic equations // Computational Mathematics and Mathematical Physics. — 2013. — **53**. — № 6, pp. 777 — 788.
115. Boichuk A.A., Pokutnyi A.A. Application of the Ergodic Theory to the Investigation of Boundary-Value Problems with Periodic Operator Coefficients // Ukrainian Mathematical Journal. — 2013. — **65**. pp. 366 — 376.
116. Бойчук О.А., Головацька І.А. Слабконелінійні системи інтегро-диференціальних рівнянь// Нелінійні коливання. — 2013. — **16**. — С. 314 — 321.

117. Бойчук О.А., Головацька І.А. Крайові задачі для систем інтегро-диференціальних рівнянь // Нелінійні коливання. — 2013. — **16**. — С. 460 — 474.
118. Boichuk A.A., Pokutnyi A.A. Dichotomy and boundary value problems on the whole line // Chaotic Modeling and Simulation (CMSIM). — 2013. — pp. 247 — 255.
119. Бойчук А.А., Покутний А.А., Чистяков В.Ф. О применении теории возмущений к исследованию разрешимости дифференциально-алгебраических уравнений // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 2013. — **53**, № 6. — pp. 958 — 969.
120. Бойчук А.А., Покутный А.А. Приложение эргодической теории к исследованию краевой задачи с периодическим операторным коэффициентом // Украинский математический журнал. — 2013. — **65**, № 3. — pp. 329 — 338.
121. Бойчук А.А., Журавлев В.Ф., Покутный А.А. Нормально разрешимые операторные уравнения в банаховом пространстве // Украинский математический журнал. — 2013. — **65**, № 2. — pp. 163 — 174.
122. Samoilenko A.M., Boichuk A.A., Zhuravlev V.F. Linear boundary value problems for normally solvable operator equations in a Banach space // Differential Equations. — 2014. — **50**, № 3, pp. 312 — 322.
123. Boichuk A.A., Holovats'ka I.A. Boundary-value problems for systems of integrodifferential equations // Journal of Mathematical Sciences. — 2014. — **203**. — № 3, pp. 306 — 321.

124. Boichuk A.A., Holovats'ka I.A. Weakly nonlinear systems of integrodifferential equations // Journal of Mathematical Sciences. — 2014. — **201**. — № 3, pp. 288 — 295. Translated from Nelineyni Kolyvannya. — 2013. — **16**. — pp. 314–321.
125. Boichuk A.A., Pokutnyi A.A. Solutions of the Schrodinger equation in a Hilbert space // Boundary Value Problems. — 2014. — 2014:4.
126. Agarwal R.P., Bohner M., Boichuk A., Strakh O. Fredholm boundary value problems for perturbed systems of dynamic equations on time scales // Math. Methods in the Applied Sciences. — 2014. — **38**, № 4. — pp. 4178 — 4186.
127. Boichuk A.A., Medved M., Zhuravlev V.F. Fredholm boundary-value problems for linear delay systems defined by pairwise permutable matrices // Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equations. — 2015. — № 23. — pp. 1 — 9.
128. Boichuk A.A., Strakh O.P. Linear Fredholm boundary-value problems for dynamical systems on a time scale Journal of Mathematical Sciences. — 2015. — **208**. — № 5, pp. 487 — 497.
129. Boichuk A.A., Strakh O.P. Fredholm boundary-value problems for systems of linear integrodynamical equations with degenerate kernel on a time scale // Journal of Mathematical Sciences. — 2015. — **205**. — № 6, pp. 749–756.
130. Бойчук А.А., Журавлев В.Ф. Дихотомия на полуосях и ограниченные на всей оси решения линейных систем с

запаздыванием // Нелінійні коливання. — 2015. — **18**, № 4. — С. 431 — 445.

131. Boichuk A.A., Pokutnyi A.A. Perturbation theory of operator equations in the Frechet and Hilbert spaces // Ukrainian Mathematical Journal. – 2016. – **67**. – № 6, pp. 1327 — 1335. (Ukrainian Original: Ukrainian Mathematical Journal, Vol. 67, No. 9, September, 2015).

6 С.М. Чуйко О решении матричных уравнений

Ключевым в исследованиях А.А. Бойчука является использование условий разрешимости, а также схемы нахождения решений систем линейных алгебраических уравнений с использованием проекторов и псевдообратных (по Муру-Пенроузу) матриц. В статье А.А. Бойчука и С.А. Кривошеи [6] изучены матричные уравнения Ляпунова [1].

Матричные уравнения Ляпунова, а также их обобщения — матричные уравнения Сильвестра [1, 2, 3, 4, 6] широко используются в теории устойчивости движения [3, с. 245], а также при решении дифференциальных уравнений Риккати и Бернулли [7]. В статье [7] предложены условия разрешимости, а также схема построения частного решения уравнения Ляпунова на основе псевдообращения [9] оператора L , соответствующего однородной части уравнения Ляпунова.

Используя технику псевдообратных (по Муру-Пенроузу) матриц и проекторов, в данной статье предложены оригинальные условия разрешимости, а также схема нахождения семейства линейно независимых решений неоднородного обобщенного матричного уравнения и, в частности, уравнения Сильвестра, в общем случае, когда линейный матричный оператор L , соответствующий однородной части обобщенного матричного уравнения не имеет обратного. Найдено выражение для семейства линейно независимых решений неоднородного обобщенного матричного уравнения и, в частности, уравнений Сильвестра и Ляпунова [3, 8, 10].

6.1 Постановка задачи

Исследуем задачу о построении решений линейного матричного уравнения

$$\mathcal{L}X = \mathcal{A}. \quad (1)$$

Здесь $\mathcal{L} : \mathbb{R}^{\alpha \times \beta} \rightarrow \mathbb{R}^{\gamma \times \delta}$ — линейный ограниченный матричный функционал, $X \in \mathbb{R}^{\alpha \times \beta}$ — неизвестная матрица, $\mathcal{A} \in \mathbb{R}^{\gamma \times \delta}$ — заданная матрица. Обозначим

$$\{\Theta_j\}_{j=1}^{\alpha \cdot \beta} \in \mathbb{R}^{\alpha \times \beta}$$

естественный базис [11] пространства $\mathbb{R}^{\alpha \times \beta}$. Общее решение уравнения (1) ищем в виде суммы

$$X = \sum_{j=1}^{\alpha \cdot \beta} \Theta_j c_j, \quad c_j \in \mathbb{R}^1.$$

Последнее выражение приводит уравнение (1) к виду

$$\sum_{j=1}^{\alpha \cdot \beta} \mathcal{L}\Theta_j c_j = \mathcal{A}.$$

Определим оператор $\mathcal{M}[A] : \mathbb{R}^{m \times n} \rightarrow \mathbb{R}^{m \cdot n}$, как оператор, который ставит в соответствие матрице $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ вектор-столбец $\mathcal{B} := \mathcal{M}[A] \in \mathbb{R}^{m \cdot n}$, составленный из n столбцов матрицы A , а также обратный оператор [8]

$$\mathcal{M}^{-1}[\mathcal{B}] : \mathbb{R}^{m \cdot n} \rightarrow \mathbb{R}^{m \times n},$$

который ставит в соответствие вектору $\mathcal{B} \in \mathbb{R}^{m \cdot n}$ матрицу $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Заметим, что оператор $\mathcal{M}[A]$, как и обратный оператор $\mathcal{M}^{-1}[\mathcal{B}]$, могут быть представлены в явном виде. Определим матрицы

$$\Upsilon_1 := (1) \in \mathbb{R}^{1 \times 1}, \quad \Upsilon_2 := (1 \ 0 \ 0 \ 1)^* \in \mathbb{R}^{4 \times 1},$$

$$\Upsilon_3 := (1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1)^* \in \mathbb{R}^{9 \times 1}, \dots .$$

Вектор Υ_m состоит из $m - 1$ цепочки вида

$$(1 \ 0 \ 0 \ \dots \ 0)^* \in \mathbb{R}^{(m-1) \times 1}$$

и заканчивается единицей:

$$\Upsilon_m := (1 \ 0 \ 0 \ \dots \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ \dots \ 0 \ \dots \ 1 \ 0 \ 0 \ \dots \ 0 \ 1)^* \in \mathbb{R}^{m^2 \times 1}.$$

В новых обозначениях оператор $\mathcal{M}[A]$ представим в явном виде:

$$\mathcal{M}[A] = (I_n \otimes A) \cdot \Upsilon_n \in \mathbb{R}^{m \cdot n}.$$

Определим также матрицы [8]

$$[E_n^m]_j := [E_1^m]_j \otimes I_n \in \mathbb{R}^{n \times m \cdot n}, \quad [E_1^m]_j := \{\delta_{ij}\}_{i=1}^m \in \mathbb{R}^{1 \times m};$$

здесь δ_{ij} — символ Кронеккера [11]. Таким образом, обратный оператор $\mathcal{M}^{-1}[\mathcal{B}]$ представим в явном виде:

$$\mathcal{M}^{-1}[\mathcal{B}] = \sum_{k=1}^n [E_m^n]_k \cdot \mathcal{B} \cdot [E_1^n]_k.$$

6.2 Основной результат

Система (1) равносильна следующему уравнению

$$\mathcal{Q} c = \mathcal{M}[\mathcal{A}] \tag{2}$$

относительно вектора $c \in \mathbb{R}^{\alpha \cdot \beta}$; здесь

$$\mathcal{Q} := \sum_{j=1}^{\alpha \cdot \beta} \left\{ [E_1^{\alpha \beta}]_j \otimes \mathcal{M}[\mathcal{L}\Theta_j] \right\}.$$

При условии

$$P_{\mathcal{Q}^*} \mathcal{M}[\mathcal{A}] = 0. \tag{3}$$

и только при нем уравнение (2) разрешимо

$$c = \mathcal{Q}^+ \mathcal{M}[\mathcal{A}] + P_{\mathcal{Q}_r} c_r, \quad c_r \in \mathbb{R}^r,$$

при этом уравнение (1) имеет r -параметрическое семейство решений

$$X = \Phi[\mathcal{A}] + \Psi[c_r], \quad (4)$$

где

$$\Phi[\mathcal{A}] := \mathcal{M}^{-1}\{\mathcal{Q}^+ \mathcal{M}[B]\}, \quad \Psi[c_r] := \mathcal{M}^{-1}[P_{\mathcal{Q}_r} c_r].$$

Здесь \mathcal{Q}^+ — псевдообратная (по Муру-Пенроузу) матрица,

$$P_{\mathcal{Q}} : \mathbb{R}^{\beta \cdot \gamma \times \beta \cdot \gamma} \rightarrow \mathbb{N}(\mathcal{Q}), \quad P_{\mathcal{Q}^*} : \mathbb{R}^{\alpha \cdot \delta \times \alpha \cdot \delta} \rightarrow \mathbb{N}(\mathcal{Q}^*)$$

— ортопроекторы матриц \mathcal{Q} и \mathcal{Q}^* . Матрица $P_{\mathcal{Q}_r}$ составлена из r линейно независимых столбцов матрицы-ортопроектора $P_{\mathcal{Q}}$. Условия существования и вид общего решения матричного уравнения (1) определяет следующая теорема.

Теорема 6.1 *Матричное уравнение (1) разрешимо тогда и только тогда, когда выполнено условие (3). При условии (3) и только при нем, уравнение (1) имеет r -параметрическое семейство решений (4).*

При условии $P_{\mathcal{Q}^*} \neq 0$ будем говорить, что для матричного уравнения (1) имеет место критический случай, при этом уравнение (1) разрешимо лишь для тех неоднородностей \mathcal{A} , для которых выполнено условие (3).

Пример 6.1 *Матричное уравнение общего вида*

$$\mathcal{L}X = \mathcal{A} \quad (5)$$

разрешимо при

$$\mathcal{L}X := \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^2 S_i X R_j + \int_0^1 \int_0^1 U(t, s) X V(t, s) \, dt \, ds;$$

здесь

$$S_1 := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad S_2 := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad S_3 := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$R_1 := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad R_2 := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$U(t, s) := \begin{pmatrix} t & 0 \\ t & s \\ 0 & s \end{pmatrix}, \quad V(t, s) := \begin{pmatrix} s & s & 0 & 0 \\ 0 & s & t & 0 \\ 0 & 0 & t & t \end{pmatrix},$$

$$\mathcal{A} := \begin{pmatrix} 84\,905\,350 & 3\,018\,490 & 14\,616\,420 & -5\,670\,300 \\ 42\,288\,650 & 1\,673\,270 & 8\,255\,910 & -3\,126\,750 \\ -42\,616\,700 & -1\,345\,220 & -6\,360\,510 & 2\,543\,550 \end{pmatrix}.$$

Естественный базис пространства $\mathbb{R}^{2 \times 3}$ составляют матрицы

$$\Theta_1 := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Theta_2 := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \dots,$$

$$\Theta_6 := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ключевая при исследовании уравнения (5) матрица

$$\mathcal{Q} = \frac{1}{12} \begin{pmatrix} 15 & 0 & 0 & 0 & 12 & 0 \\ 15 & 16 & 0 & 0 & 12 & 12 \\ 0 & 16 & 0 & 0 & 0 & 12 \\ 15 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 15 & 16 & 3 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 16 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 3 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 12 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 12 & 12 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 12 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

определяет матрицу-ортопроектор $P_{\mathcal{Q}^*} \neq 0$, при этом для уравнения (5) имеет место критический случай. Поскольку выполнено условие (3), поскольку, поставленная задача разрешима. Единственное ($P_{\mathcal{Q}} = 0$) решение уравнения (5) представимо в виде

$$X = \Phi[\mathcal{A}] = \begin{pmatrix} 8\ 500\ 808 & -30\ 430\ 080 & 74\ 279\ 340 \\ -3\ 976\ 935 & 11\ 872\ 080 & -37\ 314\ 120 \end{pmatrix}.$$

При условии $P_{\mathcal{Q}^*} = 0$ будем говорить, что для матричного уравнения (1) имеет место некритический случай, при этом уравнение (1) разрешимо для любой неоднородности \mathcal{A} .

Следствие 6.1 *Матричное уравнение (1) в некритическом случае ($P_{\mathcal{Q}^*} = 0$) разрешимо для любой неоднородности $\mathcal{A} \in \mathbb{R}^{\alpha \times \delta}$. В этом случае уравнение (1) имеет r -параметрическое семейство решений (4).*

Пример 6.2 Матричное уравнение общего вида

$$\mathcal{L}X = \mathcal{A} \quad (6)$$

разрешимо при

$$\mathcal{L} := \int_0^{2\pi} U(t) X V(t) dt, \quad V(t) := \begin{pmatrix} \sin t & \cos t & 0 & 0 \\ 0 & \sin t & \cos t & 0 \\ 0 & 0 & \sin t & \cos t \end{pmatrix};$$

здесь

$$U(t) := \frac{1}{\pi} \begin{pmatrix} \sin t & \cos t \end{pmatrix}, \quad \mathcal{A} := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ключевая при исследовании уравнения (6) матрица

$$\mathcal{Q} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

определяет ортопроекторы $P_{\mathcal{Q}^*} = 0$ и

$$P_{\mathcal{Q}} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Поскольку $P_{\mathcal{Q}^*} = 0$, постольку для уравнения (6) имеет место некритический случай, следовательно, поставленная задача разрешима. Общее решение (3) уравнения (6) определяют матрицы

$$\Phi[\mathcal{A}] = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Psi[c_r] = \begin{pmatrix} 0 & -c_1 & -c_2 \\ c_1 & c_2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Доказанная теорема и следствие обобщают соответствующие условия разрешимости, а также схему построения решения уравнений Ляпунова [7, 10] и Сильвестра [8] на случай линейного матричного уравнения (1) общего вида и могут быть использованы в теории устойчивости движения [3, 4, 5], при решении дифференциальных уравнений Риккати и Бернулли [7, 13], а также при решении линейных краевых задач для матричных дифференциальных уравнений [12, 14, 15, 16]. Полученные результаты аналогично [17] могут быть перенесены на обобщенные уравнения типа Сильвестра, содержащие неизвестные матрицы различных размерностей.

6.3 Регуляризация линейных матричных уравнений

Поставим следующую задачу: можно ли в критическом случае малыми возмущениями привести матричное уравнение (1) общего вида к некритическому случаю? Таким образом поставленная задача относится к задачам о регуляризации [9, 22, 32]. Как известно [18], любая $(m \times n)$ —матрица Q в определенном базисе может быть представлена в виде

$$Q = \Phi \cdot J \cdot \Psi, \quad \text{rank } Q := \rho; \quad (7)$$

здесь $\Phi \in \mathbb{R}^{m \times m}$ и $\Psi \in \mathbb{R}^{n \times n}$ — невырожденные матрицы,

$$J := \begin{pmatrix} I_\rho & O \\ O & O \end{pmatrix}.$$

Разложением (7) можно воспользоваться при решении задачи о регуляризации матричного уравнения (1). Система (1) равносильна уравнению (2). Возмущение матрицы Q будем

искать в виде

$$Q := \mathcal{Q} + \varepsilon R \in \mathbb{R}^{\gamma\delta \times \alpha\beta}, \quad 0 < \varepsilon \ll 1.$$

По определению алгебраическая система (1) представляет некритический случай при условии $P_{Q^*} = 0$. Очевидно, это условие равносильно уравнению

$$[\mathcal{Q} + \varepsilon R] \cdot [\mathcal{Q} + \varepsilon R]^+ = I_{\gamma\delta} \quad (8)$$

относительно $(\gamma\delta \times \alpha\beta)$ -матрицы R . Заметим, что уравнение (8) разрешимо лишь для $\gamma\delta = \alpha\beta$, либо $\gamma\delta < \alpha\beta$. Действительно, предположим уравнение (8) переопределенным: $\gamma\delta > \alpha\beta$, при этом

$$\begin{aligned} \operatorname{rank} (\mathcal{Q} + \varepsilon R)(\mathcal{Q} + \varepsilon R)^+ &\leq \operatorname{rank} (\mathcal{Q} + \varepsilon R) = \\ &= \operatorname{rank} (\mathcal{Q} + \varepsilon R)^+ \leq \alpha\beta < \gamma\delta, \end{aligned}$$

что противоречит равенству рангов левой и правой части уравнения (8). При условии $\gamma\delta \leq \alpha\beta$ уравнение (8) имеет по меньшей мере одно семейство решений

$$\mathcal{R} := \Phi \cdot \Pi_J \cdot \Psi \in \mathbb{R}^{\gamma\delta \times \alpha\beta}, \quad \Pi_J := \begin{pmatrix} O & O \\ O & C \end{pmatrix}, \quad \operatorname{rank} C := \gamma\delta - \rho.$$

Таким образом, поставленная задача о регуляризации алгебраической системы (2), равносильная уравнению (2) с $(\gamma\delta \times \alpha\beta)$ -матрицей \mathcal{Q} разрешима при условии $\gamma\delta \leq \alpha\beta$ в виде

$$Q := \mathcal{Q} + \varepsilon \mathcal{R}, \quad \mathcal{R} := \Phi \cdot \Pi_J \cdot \Psi.$$

Действительно, в силу невырожденности матриц $\Phi \in \mathbb{R}^{\gamma\delta \times \gamma\delta}$ и $\Psi \in \mathbb{R}^{\alpha\beta \times \alpha\beta}$ имеет место равенство [11, 4.48]

$$\operatorname{rank} Q = \operatorname{rank} (J + \varepsilon \Pi_J) = m,$$

при этом $P_Q^* = 0$, следовательно система (2) с матрицей Q разрешима для любых правых частей. Таким образом, найдено решение задачи о регуляризации алгебраической системы (2), при этом задача о регуляризации алгебраической системы (1) может быть поставлена для линейного матричного уравнения

$$LX = \mathcal{A}. \quad (9)$$

Здесь

$$LX := \mathcal{L}X + \varepsilon \mathcal{U}X\mathcal{V};$$

здесь $\mathcal{U} \in \mathbb{R}^{\gamma \times \alpha}$ — фиксированная постоянная матрица и $\mathcal{V} \in \mathbb{R}^{\beta \times \delta}$ — неизвестная постоянная матрица. Обозначим

$$\{\Xi_j\}_{j=1}^{\beta \cdot \delta} \in \mathbb{R}^{\beta \times \delta}$$

естественный базис [11] пространства $\mathbb{R}^{\beta \times \delta}$. Неизвестную матрицу \mathcal{V} ищем в виде суммы

$$\mathcal{V} = \sum_{j=1}^{\beta \cdot \delta} \Xi_j \xi_j, \quad \xi_j \in \mathbb{R}^1.$$

Для нахождения констант ξ_j , $j = 1, 2, \dots, \beta \cdot \delta$ используем уравнение

$$\left\{ \mathcal{M}[\mathcal{U}\Theta_i \sum_{j=1}^{\beta \cdot \delta} \Xi_j \xi_j] \right\}_{i=1}^{\alpha \cdot \beta} = \mathcal{R}.$$

Обозначим матрицы $\mathfrak{Q}(\Xi_i) \in \mathbb{R}^{\gamma \delta \times \alpha \beta}$:

$$\mathfrak{Q}(\Xi_i) := \left\{ \mathcal{M}[\mathcal{U}\Theta_1 \Xi_i], \dots, \mathcal{M}[\mathcal{U}\Theta_{\alpha \beta} \Xi_i] \right\}, \quad i = 1, 2, \dots, \alpha \beta.$$

Вектор $\xi \in \mathbb{R}^{\beta \cdot \delta}$ определяет уравнение

$$\Omega \cdot \xi = \mathcal{M}[\mathcal{R}], \quad (10)$$

разрешимое тогда и только тогда, когда

$$P_{\Omega^*} \mathcal{M}[\mathcal{R}] = 0; \quad (11)$$

здесь

$$\Omega := \left\{ \mathcal{M}[\mathfrak{Q}(\Xi_i)] \right\}_{i=1}^{\beta \cdot \gamma}$$

— постоянная $(\alpha \beta \gamma \delta \times \beta \gamma)$ -матрица, P_{Ω^*} — ортопроектор:

$$P_{\Omega^*} : \mathbb{R}^{\alpha \beta \gamma \delta \times \alpha \beta \gamma \delta} \rightarrow \mathbb{N}(\Omega^*).$$

При условии (11) уравнение (10) имеет по меньшей мере одно решение

$$\xi = \Omega^+ \cdot \mathcal{M}[\mathcal{R}],$$

определяющее неизвестную матрицу

$$\mathcal{V} = \mathcal{M}^{-1} \left[\Omega^+ \cdot \mathcal{M}[\mathcal{R}] \right].$$

Таким образом, доказано следующее утверждение.

Лемма 6.1 *Матричное уравнение (1) в критическом случае ($P_{\Omega^*} \neq 0$) не разрешимо для произвольной неоднородности $\mathcal{A} \in \mathbb{R}^{\alpha \times \delta}$. При условии (11) и $\gamma \delta \leq \alpha \beta$ для фиксированной матрицы $\mathcal{U} \in \mathbb{R}^{\gamma \times \alpha}$ и произвольного $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$, $\varepsilon \ll 1$ возмущение функционала \mathcal{L} :*

$$LX := \mathcal{L}X + \varepsilon \mathcal{U}X\mathcal{V}$$

приводит к матричному уравнению (9), разрешимому для любых правых частей. Здесь

$$\mathcal{V} = \mathcal{M}^{-1} \left[\Omega^+ \cdot \mathcal{M}[\mathcal{R}] \right].$$

В этом случае уравнение (9) имеет $r := \beta - \alpha$ — параметрическое семейство решений

$$X(\varepsilon) = \Phi[\mathcal{A}](\varepsilon) + \Psi[c_r], \quad (12)$$

$\varepsilon \partial e$

$$\Phi[\mathcal{A}](\varepsilon) := \mathcal{M}^{-1}\{Q^+ \mathcal{M}[B]\}, \quad \Psi[c_r] := \mathcal{M}^{-1}[P_{Q_r} c_r].$$

Здесь Q^+ — псевдообратная (по Мурю-Пенроузу) матрица,

$$P_Q : \mathbb{R}^{\beta \cdot \gamma \times \beta \cdot \gamma} \rightarrow \mathbb{N}(Q), \quad P_{Q^*} : \mathbb{R}^{\alpha \cdot \delta \times \alpha \cdot \delta} \rightarrow \mathbb{N}(Q^*)$$

— ортопроекторы матриц

$$Q := \mathcal{Q} + \varepsilon \mathcal{R}, \quad \mathcal{R} := \Phi \cdot \Pi_J \cdot \Psi$$

и Q^* . Матрица P_{Q_r} составлена из r линейно независимых столбцов матрицы-ортопроектора P_Q .

Лемма 6.1 является обобщением соответствующих результатов [19] на случай матричных уравнений.

Пример 6.3 *Матричное уравнение общего вида*

$$\mathcal{L}X = \mathcal{A} \tag{13}$$

не разрешимо для произвольной неоднородности $\mathcal{A} \in \mathbb{R}^{1 \times 4}$, здесь

$$\mathcal{L} := \int_0^{2\pi} U(t) X V(t) dt, \quad U(t) := \frac{1}{\pi} \begin{pmatrix} \sin t & \cos t \end{pmatrix},$$

$$V(t) := \begin{pmatrix} \sin t & \cos t & \sin t & \cos t \\ \sin t & \cos t & \sin t & \cos t \\ \sin t & \cos t & \sin t & \cos t \end{pmatrix}.$$

Естественный базис пространства $\mathbb{R}^{3 \times 4}$ составляют матрицы

$$\Theta_1 := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Theta_2 := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \dots,$$

$$\Theta_{12} := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ключевая при исследовании уравнения (13) матрица

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

определяет ортопроектор $P_Q \neq 0$, при этом для уравнения (13) имеет место критический случай, следовательно уравнение (13) не разрешимо для произвольной неоднородности $\mathcal{A} \in \mathbb{R}^{1 \times 4}$. Матрица Q может быть представлена в виде

$$Q = \Phi \cdot J \cdot \Psi, \quad \text{rank } Q = 2;$$

здесь

$$\Phi = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Psi = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$J := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Положим $\mathcal{U} := \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}$. Неизвестный сомножитель \mathcal{V} определяет матрица

$$\Omega := \left(\begin{array}{cccccccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right).$$

Положим

$$Q := \mathcal{Q} + \varepsilon \mathcal{R}, \quad \mathcal{R} := \Phi \cdot \Pi_J \cdot \Psi,$$

где

$$\Pi_J := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

При этом условие (11) выполнено. Таким образом, находим матрицу

$$\mathcal{V} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

которая приводит к матричному уравнению (9), разрешимому для любых правых частей; здесь

$$LX := \mathcal{L}X + \varepsilon \mathcal{U}X\mathcal{V},$$

для которого

$$Q := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ \varepsilon & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 + \varepsilon & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

— матрица полного ранга для произвольного

$$\varepsilon \in (0, \varepsilon_0], \quad \varepsilon \ll 1.$$

Положим

$$\mathcal{A} := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}^1;$$

при этом решение возмущенного матричного уравнения (9) имеет вид

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2c_1 - c_2 & - + 2c_2 & -c_1 - c_2 \end{pmatrix}.$$

7 С.М. Чуйко Матричная дифференциально-алгебраическая краевая задача

Ключевым в исследованиях А.А. Бойчука является использование обобщенных операторов Грина различных краевых задач для систем обыкновенных дифференциальных, функционально-дифференциальных, дифференциально-алгебраических уравнений а также операторных уравнений в абстрактных пространствах. При построении конструкций обобщенных операторов Грина существенным является векторная форма записи неизвестной.

Целью данного исследования является развитие метода, предложенного А.А. Бойчуком, для построения конструкции обобщенного оператора Грина дифференциально-алгебраической краевой задачи с использованием матричной формы записи неизвестной. При решении поставленной задачи использованы оригинальные условия разрешимости, а также конструкция общего решения матричного алгебраического уравнения общего вида, приведенные выше. Получены достаточные условия приводимости матричного дифференциально-алгебраического уравнения к традиционному дифференциально-алгебраическому уравнению с неизвестной в виде вектор-столбца.

7.1 Постановка задачи

Исследуем задачу о построении решений [2, 7, 13, 14, 15, 16]

$$Z(t) \in \mathbb{C}_{\alpha \times \beta}^1[a; b]$$

матричного дифференциально-алгебраического уравнения

$$\mathcal{D}Z(t) = \mathcal{A}Z(t) + F(t), \quad (14)$$

подчиненных краевому условию

$$\mathcal{L}Z(\cdot) = \mathfrak{A}, \quad \mathfrak{A} \in \mathbb{R}^{\mu \times \nu}. \quad (15)$$

Здесь

$$\mathcal{D}Z(t) := \sum_{i=1}^p S_i(t) Z'(t) R_i(t)$$

и

$$\mathcal{A}Z(t) := \sum_{i=1}^q \Phi_i(t) Z(t) \Psi_i(t),$$

— линейные матричные операторы,

$$S_i(t), \Phi_i(t) \in \mathbb{C}_{\gamma \times \alpha}[a; b], \quad R_i(t), \Psi_i(t) \in \mathbb{C}_{\beta \times \delta}[a; b]$$

и $F(t)$ — непрерывные матрицы; $\mathcal{L}Z(\cdot)$ — линейный ограниченный матричный функционал:

$$\mathcal{L}Z(\cdot) : \mathbb{C}_{\alpha \times \beta}^1[a; b] \rightarrow \mathbb{R}^{\mu \times \nu}.$$

Вообще говоря, предполагаем

$$\alpha \neq \beta \neq \gamma \neq \delta \neq \mu \neq \nu.$$

Здесь $\mathbb{R}^{m \times n}$ — пространство действительных $(m \times n)$ — матриц с нормой

$$\|A\|_{\mathbb{R}^{m \times n}} := \max_{1 \leq i \leq m} \sum_{k=1}^n |a_{ik}|, \quad A := \{a_{ij}\} \in \mathbb{R}^{m \times n},$$

согласованной с "кубической" нормой в пространстве \mathbb{R}^n ; в свою очередь, \mathbb{R}^n — пространство действительных векторов с "кубической" нормой [9, 22, 23]

$$\|a\|_{\mathbb{R}^n} := \max_{1 \leq i \leq n} |a_i|, \quad a \in \mathbb{R}^n,$$

а также $\mathbb{C}_{m \times n}[a, b]$ линейное нормированное пространство действительных $(m \times n)$ – матриц $A(t)$, непрерывных на отрезке $[a, b]$ с нормой

$$\|A(t)\|_{\mathbb{C}_{m \times n}} := \max_{[a; b]} \|A(t)\|_{\mathbb{R}^{m \times n}}, \quad A(t) \in \mathbb{C}_{m \times n}[a, b],$$

а также пространство $\mathbb{C}_{m \times n}^1[a, b]$ линейное нормированное пространство действительных $(m \times n)$ – матриц $A(t)$, непрерывно дифференцируемых на отрезке $[a, b]$ с нормой

$$\|A(t)\|_{\mathbb{C}_{m \times n}^1} := \max_{[a; b]} \sum_{k=0}^1 \|A^{(k)}(t)\|_{\mathbb{R}^{m \times n}}, \quad A(t) \in \mathbb{C}_{m \times n}^1[a, b].$$

Нижний индекс при обозначении пространства непрерывных скалярных функций $\mathbb{C}_1[a; b]$ условимся опускать: $\mathbb{C}[a; b]$. Матричная дифференциально-алгебраическая краевая задача (14), (15) обобщает традиционные постановки задач, как для матричных дифференциальных уравнений [2, 7, 13], так и для дифференциально-алгебраических уравнений [24, 25, 26, 27, 28, 30, 29, 31]. Обозначим

$$\Xi^{(j)} \in \mathbb{R}^{\alpha \times \beta}, \quad j = 1, 2, \dots, \alpha \cdot \beta$$

— естественный базис [11] пространства $\mathbb{R}^{\alpha \times \beta}$, при этом задача о нахождении решений уравнения (14) приводит к задаче о нахождении вектора $y(t) \in \mathbb{C}_{\alpha \beta}^1[a; b]$, компоненты которого $y_j(t) \in \mathbb{C}^1[a; b]$ определяют разложение матрицы

$$Z(t) = \sum_{j=1}^{\alpha \beta} \Xi^{(j)} y_j(t), \quad y_j(t) \in \mathbb{C}^1[a; b], \quad j = 1, 2, \dots, \alpha \cdot \beta$$

по векторам $\Xi^{(j)} \in \mathbb{R}^{\alpha \times \beta}$ базиса пространства $\mathbb{R}^{\alpha \times \beta}$. В общем случае линейный матричный оператор $\mathcal{D}Z(t)$ представим в

виде

$$\mathcal{D}Z(t) := \sum_{k=1}^{\alpha\beta} \sum_{i=1}^p S_i(t) \Xi^{(k)} R_i(t) y'_k(t),$$

при этом

$$\mathcal{M}[\mathcal{D}Z(t)] = Q(t) \cdot y'(t), \quad Q(t) := [Q_k(t)]_{k=1}^{\alpha\beta} \in \mathbb{R}^{\gamma\delta \times \alpha\beta},$$

где

$$Q_k(t) = \mathcal{M} \left[\sum_{i=1}^p S_i(t) \Xi^{(k)} R_i(t) \right], \quad k = 1, 2, \dots, \alpha \cdot \beta.$$

Аналогично

$$\mathcal{M}[AZ(t)] = \Omega(t) \cdot y(t), \quad \Omega(t) := [\Omega_k(t)]_{k=1}^{\alpha\beta} \in \mathbb{R}^{\gamma\delta \times \alpha\beta},$$

где

$$\Omega_j(t) = \mathcal{M} \left[\sum_{i=1}^q \Phi_i(t) \Xi^{(k)} \Psi_i(t) \right], \quad k = 1, 2, \dots, \alpha \cdot \beta.$$

Таким образом, задача о построении решений матрично-дифференциально-алгебраического уравнения (14) приведена к задаче о нахождении решений $y(t) \in \mathbb{C}_{\alpha\beta}^1[a; b]$ традиционного дифференциально-алгебраического уравнения [24, 25, 26, 27, 28, 30]

$$Q(t) \cdot y'(t) = \Omega(t) \cdot y(t) + \mathcal{F}(t), \quad \mathcal{F}(t) := \mathcal{M}[F(t)]. \quad (16)$$

7.2 Случай разрешимости системы (16) относительно производной

При условии [28, 30]

$$P_{Q^*(t)} \Omega(t) = 0, \quad P_{Q^*(t)} \mathcal{F}(t) = 0,$$

$$\begin{aligned} Q^+(t)\Omega(t) &\in \mathbb{C}_{\alpha\beta \times \alpha\beta}^1[a; b], \\ Q^+(t), P_{Q_\rho}(t)\varphi(t)\mathcal{F}(t) &\in \mathbb{C}_{\alpha\beta \times 1}^1[a; b] \end{aligned} \quad (17)$$

система (16) разрешима относительно производной:

$$\frac{dy}{dt} = Q^+(t)\Omega(t)y + \mathfrak{F}(t, \varphi(t)).$$

Здесь

$$\mathfrak{F}(t, \varphi(t)) := Q^+(t)\mathcal{F}(t) + P_{Q_\rho}(t)\varphi(t),$$

$P_{Q^*(t)}$ — $(\gamma\delta \times \gamma\delta)$ — матрица-ортопроектор:

$$P_{Q^*(t)} : \mathbb{R}^{\gamma\delta} \rightarrow \mathbb{N}(Q^*(t));$$

$(\gamma\delta \times \rho)$ — матрица $P_{Q_\rho}(t)$ составлена из ρ линейно-независимых столбцов $(\alpha\beta \times \alpha\beta)$ — матрицы-ортопроектора $P_Q(t) : \mathbb{R}^{\alpha\beta} \rightarrow \mathbb{N}(Q(t))$, при этом предполагаем, что вектор $\varphi(t) \in \mathbb{R}^\rho$ удовлетворяет условию (17). Обозначим $X(t)$ нормальную фундаментальную матрицу

$$\frac{dX(t)}{dt} = Q^+(t)\Omega(t)X(t), \quad X(a) = I_{\alpha\beta}$$

полученной традиционной

$$Q^+(t)\Omega(t) \in \mathbb{R}^{\beta\gamma \times \beta\gamma} \in \mathbb{C}_{\alpha\beta \times \alpha\beta}^1[a; b]$$

системы обыкновенных дифференциальных уравнений. При условии (17) система (16) имеет решение вида

$$y(t, c) = X(t)c + K[\mathfrak{F}(s, \varphi(s))](t),$$

которое определяет решение обобщенного матричного дифференциально алгебраического уравнения (14)

$$Z(t, c) = W(t, c) + \mathcal{K}[\mathfrak{F}(s, \varphi(s))](t), \quad W(t, c) := \mathcal{M}^{-1}[X(t)c],$$

где

$$K[f(s)](t) := X(t) \int_a^t X^{-1}(s) f(s) ds, \quad c \in \mathbb{R}^{\alpha \times \beta}$$

и

$$\mathcal{K}[\mathfrak{F}(s)](t) := \mathcal{M}^{-1}\{K[\mathfrak{F}(s, \varphi(s))](t)\}$$

— обобщенный оператор Грина матричной задачи Коши $Z(a) = 0$ для дифференциально-алгебраической системы (14), $W(t, c)$ — общее решение задачи Коши $Z(a) = \mathcal{M}^{-1}(c)$ для однородной части уравнения (14). Таким образом, доказано следующее достаточное условие разрешимости задачи Коши для дифференциально-алгебраической системы (14).

Лемма 7.1 *При условии (17) матричная задача Коши $Z(a) = \mathfrak{A}$ для дифференциально-алгебраической системы (14) однозначно разрешима для любого начального значения $\mathfrak{A} \in \mathbb{R}^{\alpha \times \beta}$. При условии (17) решение задачи Коши $Z(a) = \mathfrak{A}$ для дифференциально-алгебраической системы (14)*

$$Z(t, c) = W(t, c) + \mathcal{K}[\mathfrak{F}(s, \varphi(s))](t), \quad W(t, c) := \mathcal{M}^{-1}[X(t)c]$$

определяет обобщенный оператор Грина задачи Коши $Z(a) = 0$ дифференциально-алгебраической системы (14)

$$\mathcal{K}[\mathfrak{F}(s, \varphi(s))](t) := \mathcal{M}^{-1}\{K[\mathfrak{F}(s, \varphi(s))](t)\}, \quad c := \mathcal{M}(\mathfrak{A})$$

и решение $W(t, c)$ задачи Коши $Z(a) = \mathfrak{A}$ для однородной части уравнения (14).

Заметим, что для решения системы (16) может быть использована также центральная каноническая форма [24, 25, 26, 27].

Обозначим $\Theta^{(j)}$, $j = 1, 2, \dots, \alpha\beta$ — естественный базис [11] пространства $\mathbb{R}^{\alpha\beta}$. Подставляя решение обобщенного матричного дифференциально алгебраического уравнения (14) в краевое условие (15), приходим к задаче о нахождении решений

$$c = \sum_{j=1}^{\alpha\beta} \Theta^{(j)} \xi_j \in \mathbb{R}^{\alpha\beta}, \quad \xi_j \in \mathbb{R}^1, \quad j = 1, 2, \dots, \alpha \cdot \beta$$

матричного уравнения типа Сильвестра [8, 17]

$$\mathcal{L}W(\cdot, c) + \mathcal{LK}[\mathfrak{F}(s, \varphi(s))](\cdot) = \mathfrak{A} \in \mathbb{R}^{\mu \times \nu}. \quad (18)$$

В критическом случае ($P_{Q^*} \neq 0$) при условии (17) и

$$P_{Q_d^*} \mathcal{M}\{\mathfrak{A} - \mathcal{LK}[\mathfrak{F}(s, \varphi(s))](\cdot)\} = 0 \quad (19)$$

решение матричного уравнения (18) определяет вектор [8]

$$c = Q^+ \mathcal{M}\{\mathfrak{A} - \mathcal{LK}[\mathfrak{F}(s, \varphi(s))](\cdot)\} + P_{Q_r} c_r, \quad c_r \in \mathbb{R}^r.$$

Здесь P_{Q^*} — $(\mu \cdot \nu \times \mu \cdot \nu)$ — матрица-ортопроектор

$$P_{Q^*} : \mathbb{R}^{\mu \cdot \nu} \rightarrow \mathbb{N}(Q^*),$$

где

$$Q := [Q_i]_{i=1}^{\alpha\beta} \in \mathbb{R}^{\mu \cdot \nu \times \alpha \cdot \beta}, \quad Q_i := \mathcal{M}\left\{\mathcal{LM}^{-1}[X(\cdot)\Theta^{(i)}]\right\};$$

матрица P_{Q_r} составлена из r линейно-независимых столбцов $(\alpha \cdot \beta \times \alpha \cdot \beta)$ — матрицы-ортопроектора $P_Q : \mathbb{R}^{\alpha \cdot \beta} \rightarrow \mathbb{N}(Q)$. Матрица $P_{Q_d^*}$ составлена из d линейно независимых строк матрицы-ортопроектора P_{Q^*} . Таким образом, в критическом случае, при условии (17) и (19), решение матричного

дифференциально алгебраического уравнения (14), удовлетворяющее краевому условию (15)

$$\begin{aligned} Z(t, c_r) &= W(t, c_r) + G[\mathfrak{F}(s, \varphi(s)); \mathfrak{A}](t), \\ W(t, c_r) &:= \mathcal{M}^{-1}[X(t)P_{Q_r}c_r], \quad c_r \in \mathbb{R}^r \end{aligned}$$

определяет обобщенный оператор Грина

$$\begin{aligned} G[\mathfrak{F}(s, \varphi(s)); \mathfrak{A}](t) &= \mathcal{M}^{-1} \left\{ X(t)\mathcal{Q}^+ \mathcal{M}\{\mathfrak{A} - \right. \\ &\quad \left. - \mathcal{L}\mathcal{K}[\mathfrak{F}(s, \varphi(s))](\cdot)\} \right\} + \mathcal{K}[\mathfrak{F}(s, \varphi(s))](t) \end{aligned}$$

матричной дифференциально-алгебраической краевой задачи (14), (15). Таким образом, доказано следующее достаточное условие разрешимости матричной задачи (14), (15).

Теорема 7.1 В критическом случае ($P_{Q^*} \neq 0$) при условии (17) и (19), решение обобщенного матричного дифференциально алгебраического уравнения (14), удовлетворяющее краевому условию (15)

$$\begin{aligned} Z(t, c_r) &= W(t, c_r) + G[\mathfrak{F}(s, \varphi(s)); \mathfrak{A}](t), \\ W(t, c_r) &:= \mathcal{M}^{-1}[X(t)P_{Q_r}c_r], \quad c_r \in \mathbb{R}^r \end{aligned}$$

определяет обобщенный оператор Грина

$$\begin{aligned} G[\mathfrak{F}(s, \varphi(s)); \mathfrak{A}](t) &= \mathcal{M}^{-1} \left\{ X(t)\mathcal{Q}^+ \mathcal{M}\{\mathfrak{A} - \right. \\ &\quad \left. - \mathcal{L}\mathcal{K}[\mathfrak{F}(s, \varphi(s))](\cdot)\} \right\} + \mathcal{K}[\mathfrak{F}(s, \varphi(s))](t) \end{aligned}$$

матричной дифференциально-алгебраической краевой задачи (14), (15), где

$$\mathcal{K}[\mathfrak{F}(s, \varphi(s))](t) := \mathcal{M}^{-1}\{K[\mathfrak{F}(s, \varphi(s))](t)\}$$

обобщенный оператор Грина матричной задачи Коши $Z(a) = 0$ дифференциально-алгебраической системы (14).

В частном случае, при построении решений матричной дифференциально-алгебраической системы

$$A(t) \otimes Z'(t) = \mathcal{A}Z(t) + F(t) \quad (20)$$

линейный матричный оператор

$$\mathcal{D}Z(t) := A(t) \otimes Z'(t) = \sum_{i=1}^{p_\ell} \sum_{j=1}^{p_r} a_{ij}(t) S_i Z'(t) R_j$$

представим в виде

$$\mathcal{D}Z(t) = \sum_{k=1}^{\alpha\beta} \sum_{i=1}^{p_\ell} \sum_{j=1}^{p_r} A(t) \otimes \Xi^{(k)} y'_k(t),$$

при этом

$$\mathcal{M}[\mathcal{D}Z(t)] = Q(t) \cdot y'(t), \quad Q(t) := \left\{ \mathcal{M}[A(t) \otimes \Xi^{(k)}] \right\}_{k=1}^{\alpha\beta}.$$

Заметим, что второе слагаемое, составляющее обобщенный оператор Грина матричной задачи Коши $Z(a) = 0$ для дифференциально-алгебраической системы (14)

$$\begin{aligned} \mathcal{K}[\mathfrak{F}(s, \varphi(s))](t) &:= \mathcal{M}^{-1}\{K[Q^+(s)\mathcal{F}(s)](t)\} + \\ &+ \mathcal{M}^{-1}\{K[P_{Q_\rho}(s)\varphi(s)](t)\} \end{aligned}$$

при условии (17) зависит от произвольной функции $\varphi(t)$. В критическом случае ($P_{Q^*} \neq 0$) при условии (17) и (19) обобщенный оператор Грина $G[\mathfrak{F}(s, \varphi(s)); \mathfrak{A}](t)$ матричной дифференциально-алгебраической краевой задачи (14), (15) также зависит от функции $\varphi(t)$.

В некритическом случае ($P_{Q^*} = 0$) при условии (17) требование (19), очевидно, превращается в тождество.

Пример 7.1 Требованиям теоремы 7.1 удовлетворяет матричная дифференциально-алгебраическая краевая задача

$$A(t) \otimes Z'(t) = \mathcal{A}Z(t) + F(t), \quad \mathcal{L}Z(\cdot) = 0, \quad (21)$$

где

$$A(t) := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Phi_1 := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Psi_1 := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$F(t) := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{L}Z(\cdot) := \int_0^{2\pi} \mathcal{S}(t)Z(t)\mathcal{T}(t)dt,$$

$$\mathcal{S}(t) := \begin{pmatrix} 0 & t & 0 \\ t & 0 & t \\ 0 & t & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{T}(t) := \begin{pmatrix} \sin t & 0 \\ 0 & \sin t \end{pmatrix}.$$

Обозначим

$$\Xi_1 := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Xi_2 := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \dots,$$

$$\Xi_6 := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

естественный базис пространства $\mathbb{R}^{3 \times 2}$. Поскольку

$$P_{Q^*(t)}\Omega(t) = 0, \quad P_{Q^*(t)}\mathcal{F}(t) = 0,$$

постольку условие (17) выполнено; здесь

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Omega = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Произведение

$$Q^+(t)\Omega(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

определяет матрицу

$$X(t) = \begin{pmatrix} 1 & t & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ t & \frac{t^2}{2} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

и общее решение

$$W(t, c) = \begin{pmatrix} c_1 + c_2 t & c_4 \\ c_2 & c_5 \\ c_1 t + c_3 + c_2 \frac{t^2}{2} & c_6 \end{pmatrix}$$

задачи Коши

$$Z(a) = \mathcal{M}^{-1}(c) := \begin{pmatrix} c_1 & c_4 \\ c_2 & c_5 \\ c_3 & c_6 \end{pmatrix}, \quad c := \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_6 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^6$$

однородной части уравнения (21). Традиционный оператор Грина задачи Коши

$$K[f(s)](t) := X(t) \int_a^t X^{-1}(s)f(s)ds$$

определяет обобщенный оператор Грина задачи Коши для системы (21)

$$\mathcal{K}[\mathfrak{F}(s, \varphi(s))](t) = \frac{t}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ t+2 & 0 \end{pmatrix};$$

здесь

$$Q^+(t)\mathcal{F}(t) = (1 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0)^*.$$

Обратим внимание, что $P_Q = 0$, поэтому оператор Грина задачи Коши не зависит от произвольной функции $\varphi(t)$. Поскольку

$$P_{Q^*} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \neq 0,$$

постольку матричная дифференциально-алгебраическая краевая задача (21) представляет критический случай. Общее решение

$$W(t, c_r) = \begin{pmatrix} c_1 & -c_2(1 + 2\pi + 2\pi^2) \\ 0 & 0 \\ c_1(-1 - 2\pi + t) & c_2(1 + 2\pi + 2\pi^2) \end{pmatrix}$$

однородной части матричной дифференциально-алгебраической краевой задачи (21) определяет матрица P_Q . Поскольку условие (19) выполнено, решение

$$Z(t, c_r) = W(t, c_r) + G[\mathfrak{F}(s, \varphi(s)); \mathfrak{A}](t), \quad c_r \in \mathbb{R}^2$$

матричной дифференциально-алгебраической краевой задачи (21) определяет обобщенный оператор Грина

$$G[\mathfrak{F}(s, \varphi(s)); \mathfrak{A}](t).$$

Здесь

$$\begin{aligned} \mathcal{M}G[\mathfrak{F}(s, \varphi(s)); \mathfrak{A}](t) &= \frac{1}{2 + 4\pi + 4\pi^2} \times \\ &\times \left(\begin{array}{c} 3 - 4\pi^3 + 2t + 2\pi^2(-5 + 2t) + \pi(2 + 4t) \\ 0 \\ \psi(t) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right), \\ \psi(t) &:= 3 + 5t - 4\pi^3 t + t^2 + 2\pi^2 (-1 - 3t + t^2) + 2\pi (-2 + 3t + t^2). \end{aligned}$$

7.3 Случай неразрешимости системы (16) относительно производной

При условии $P_{Q^*(t)}\Omega(t) \neq 0$, либо $P_{Q^*(t)}\mathcal{F}(t) \neq 0$ система (16) не разрешима относительно производной, при этом система (16) может иметь решения вида

$$Z(t) = \mathcal{P}_\ell Y(t) \mathcal{P}_r, \quad \mathcal{P}_\ell \in \mathbb{R}^{\beta \times \beta}, \quad \mathcal{P}_r \in \mathbb{R}^{\gamma \times \gamma},$$

где \mathcal{P}_ℓ , \mathcal{P}_r — неизвестные постоянные матрицы, являющиеся интегрирующими множителями. В этом случае линейный матричный оператор $\mathcal{D}Z(t)$ принимает вид

$$\mathcal{D}Z(t) = \sum_{i=1}^p S_i(t) \mathcal{P}_\ell Y'(t) \mathcal{P}_r R_i(t) =$$

$$= \sum_{k=1}^{\beta\gamma} \sum_{i=1}^p S_i(t) \mathcal{P}_\ell \Xi^{(k)} \mathcal{P}_r R_i(t) y'_k(t),$$

при этом

$$\mathcal{M}[\mathcal{D}Z(t)] = Q_1(t) \cdot y'(t), \quad Q_1(t) := [Q_1^{(i)}(t)]_{i=1}^{\alpha \cdot \beta} \in \mathbb{R}^{\gamma \delta \times \alpha \cdot \beta},$$

где

$$Q_1^{(k)}(t) = \mathcal{M} \left[\sum_{i=1}^p S_i(t) \mathcal{P}_\ell \Xi^{(k)} \mathcal{P}_r R_i(t) \right], \quad k = 1, 2, \dots, \alpha \cdot \beta.$$

Аналогично

$$\mathcal{M}[\mathcal{A}Z(t)] = \Omega_1(t) \cdot y(t), \quad \Omega_1(t) := [\Omega_1^{(j)}(t)]_{j=1}^{\alpha \cdot \beta} \in \mathbb{R}^{\gamma \delta \times \alpha \cdot \beta},$$

где

$$\Omega_1^{(k)}(t) = \mathcal{M} \left[\sum_{i=1}^q \Phi_i(t) \mathcal{P}_\ell \Xi^{(k)} \mathcal{P}_r \Psi_i(t) \right], \quad k = 1, 2, \dots, \alpha \cdot \beta.$$

Таким образом, задача о построении решений матрично-дифференциально-алгебраического уравнения (14) приведена к задаче о нахождении решений традиционного дифференциально-алгебраического уравнения [24, 26, 27]

$$Q_1(t) \cdot y'(t) = \Omega_1(t) \cdot y(t) + \mathcal{F}(t), \quad \mathcal{F}(t) := \mathcal{M}[F(t)]. \quad (22)$$

При условии [28, 30]

$$P_{Q_1^*} \Omega_1(t) = 0, \quad P_{Q_1^*(t)} \mathcal{F}(t) = 0, \quad Q_1^+ \Omega_1(t) \in \mathbb{C}_{\alpha\beta \times \alpha\beta}^1[a; b], \quad (23)$$

в случае

$$Q_1^+(t) \mathcal{F}(t), \quad P_{Q_\varrho}(t) \psi(t) \in \mathbb{C}_{\alpha\beta \times 1}^1[a; b] \quad (24)$$

система (22) разрешима относительно производной

$$\frac{dy}{dt} = Q_1^+(t)\Omega_1(t)y + \mathfrak{F}_1(t, \psi(t)),$$

$$\mathfrak{F}_1(t, \psi(t)) := Q_1^+(t)\mathcal{F}(t) + P_{Q_\varrho}(t)\psi(t).$$

Здесь $P_{Q_\varrho}(t)$ — $(\gamma\delta \times \rho)$ -матрица, составленная из ϱ линейно-независимых столбцов $(\gamma\delta \times \gamma\delta)$ -матрицы-ортопроектора $P_{Q_1}(t) : \mathbb{R}^{\gamma\delta} \rightarrow \mathbb{N}(Q_1(t))$, при этом предполагаем, что вектор $\psi(t) \in \mathbb{R}^\varrho$ удовлетворяет условию (24). Условие (23) представляет собой, вообще говоря, нелинейное уравнение относительно постоянных матриц \mathcal{P}_ℓ , \mathcal{P}_r , определяющих матрицы

$$Q_1(t) = Q_1(\mathcal{P}_\ell, \mathcal{P}_r, t), \quad \Omega_1(t) = \Omega_1(\mathcal{P}_\ell, \mathcal{P}_r, t).$$

Предположим, что система уравнений (23) имеет действительные решения $\mathcal{P}_\ell \in \mathbb{R}^{\beta \times \beta}$, $\mathcal{P}_r \in \mathbb{R}^{\gamma \times \gamma}$, для которых выполнено условие (24). Обозначим $\mathfrak{X}(t)$ нормальную фундаментальную матрицу [9]

$$\frac{d\mathfrak{X}(t)}{dt} = Q_1^+(t)\Omega_1(t)\mathfrak{X}(t), \quad \mathfrak{X}(a) = I_{\alpha\beta}$$

полученной традиционной

$$Q_1^+(t)\Omega_1(t) \in \mathbb{C}_{\alpha\beta \times \alpha\beta}^1[a; b]$$

системы обыкновенных дифференциальных уравнений. При условии (24) система (22) имеет решение вида

$$y(t, c) = \mathfrak{X}(t)c + K[\mathfrak{F}_1(s, \psi(s))](t),$$

которое определяет решение обобщенного матричного дифференциально алгебраического уравнения (14)

$$Z(t, c) = \mathfrak{W}(t, c) + \mathcal{K}[\mathfrak{F}_1(s, \psi(s))](t),$$

$$\mathfrak{W}(t, c) := \mathcal{P}_\ell \mathcal{M}^{-1} [\mathfrak{X}(t)c] \mathcal{P}_r, \quad c \in \mathbb{R}^{\alpha \cdot \beta},$$

где

$$\mathcal{K}[F(s)](t) := \mathcal{P}_\ell \mathcal{M}^{-1} \{ K[\mathfrak{F}_1(s, \psi(s))] \}(t) \mathcal{P}_r$$

— обобщенный оператор Грина матричной задачи Коши $Z(a) = 0$ для дифференциально-алгебраической системы (14). Подставляя решение обобщенного матричного дифференциально алгебраического уравнения (14) в краевое условие (15), приходим к задаче о нахождении решений

$$c = \sum_{j=1}^{\alpha \cdot \beta} \Theta^{(j)} \xi_j \in \mathbb{R}^{\alpha \cdot \beta}, \quad \xi_j \in \mathbb{R}^1, \quad j = 1, 2, \dots, \alpha \cdot \beta$$

матричного уравнения типа Сильвестра [8]

$$\mathcal{L}\mathfrak{W}(\cdot, c) + \mathcal{L}\mathcal{K}[\mathfrak{F}_1(s, \psi(s))](\cdot) = \mathfrak{A} \in \mathbb{R}^{\mu \times \nu}. \quad (25)$$

В критическом случае ($P_{\mathfrak{Q}^*} \neq 0$) при условии (23) и

$$P_{\mathfrak{Q}_d^*} \mathcal{M} \{ \mathfrak{A} - \mathcal{L}\mathcal{K}[\mathfrak{F}_1(s, \psi(s))](\cdot) \} = 0 \quad (26)$$

решение уравнения (25) определяет вектор [8, 10]

$$c = \mathfrak{Q}^+ \mathcal{M} \{ \mathfrak{A} - \mathcal{L}\mathcal{K}[\mathfrak{F}_1(s, \psi(s))](\cdot) \} + P_{\mathfrak{Q}_r} c_r, \quad c_r \in \mathbb{R}^r.$$

Здесь $P_{\mathfrak{Q}^*}$ — $(\mu \cdot \nu \times \mu \cdot \nu)$ — матрица-ортопроектор

$$P_{\mathfrak{Q}^*} : \mathbb{R}^{\mu \cdot \nu} \rightarrow \mathbb{N}(\mathfrak{Q}^*), \quad \mathfrak{Q} := [\mathfrak{Q}_i]_{i=1}^{\alpha \cdot \beta} \in \mathbb{R}^{\mu \cdot \nu \times \alpha \cdot \beta},$$

где

$$\mathfrak{Q}_i := \mathcal{M} \left\{ \mathcal{L}\mathcal{P}_\ell \mathcal{M}^{-1} [\mathfrak{X}(\cdot) \Theta_i] \mathcal{P}_r \right\}, \quad i = 1, 2, \dots, \alpha \cdot \beta.$$

Обозначим $(\alpha \cdot \beta \times \alpha \cdot \beta)$ — матрицу-ортопроектор

$$P_{\mathfrak{Q}} : \mathbb{R}^{\alpha \cdot \beta} \rightarrow \mathbb{N}(\mathfrak{Q}).$$

В критическом случае, при условии (23) и (26), решение матричной дифференциально-алгебраической краевой задачи (14), (15) представимо в виде

$$Z(t, c_r) = \mathfrak{W}(t, c_r) + \mathfrak{G}[\mathfrak{F}_1(s, \psi(s)); \mathfrak{A}](t), \quad c_r \in \mathbb{R}^r,$$

где

$$\begin{aligned} \mathfrak{W}(t, c_r) &:= \mathcal{P}_\ell \mathcal{M}^{-1} [\mathfrak{X}(t) P_{\mathfrak{Q}_r} c_r] \mathcal{P}_r, \quad \mathfrak{G}[\mathfrak{F}_1(s, \psi(s)); \mathfrak{A}](t) := \\ &= \mathcal{K}[\mathfrak{F}_1(s, \psi(s))] (t) + \mathcal{P}_\ell \mathcal{M}^{-1} \left\{ X(t) \mathcal{Q}^+ \mathcal{M} \{ \mathfrak{A} - \right. \\ &\quad \left. - \mathcal{L} \mathcal{K}[\mathfrak{F}_1(s, \psi(s))] (\cdot) \} \right\} \mathcal{P}_r. \end{aligned}$$

Таким образом, доказано следующее достаточное условие разрешимости матричной дифференциально алгебраической краевой задачи (14), (15).

Теорема 7.2 В критическом случае ($P_{\mathfrak{Q}^*} \neq 0$) при условии (26), а также $P_{Q^*(t)} \Omega(t) \neq 0$, либо $P_{Q^*(t)} \mathcal{F}(t) \neq 0$, для любых действительных решений $\mathcal{P}_\ell \in \mathbb{R}^{\beta \times \beta}$, $\mathcal{P}_r \in \mathbb{R}^{\gamma \times \gamma}$ уравнения (23), для которых выполнено условие (24), решение матричного дифференциально алгебраического уравнения (14), удовлетворяющее краевому условию (15)

$$Z(t, c_r) = \mathfrak{W}(t, c_r) + \mathfrak{G}[\mathfrak{F}_1(s, \psi(s)); \mathfrak{A}](t)$$

определяет обобщенный оператор Грина

$$\begin{aligned} \mathfrak{G}[\mathfrak{F}_1(s, \psi(s)); \mathfrak{A}](t) &:= \mathcal{K}[\mathfrak{F}_1(s, \psi(s))] (t) + \\ &+ \mathcal{P}_\ell \mathcal{M}^{-1} \left\{ X(t) \mathcal{Q}^+ \mathcal{M} \{ \mathfrak{A} - \mathcal{L} \mathcal{K}[\mathfrak{F}_1(s, \psi(s))] (\cdot) \} \right\} \mathcal{P}_r \end{aligned}$$

матричной дифференциально-алгебраической краевой задачи (14), (15), где

$$\mathcal{K}[\mathfrak{F}_1(s, \psi(s))](t) := \mathcal{P}_\ell \mathcal{M}^{-1} \{ K[\mathfrak{F}_1(s, \psi(s))] (t) \} \mathcal{P}_r$$

обобщенный оператор Грина матричной задачи Коши $Z(a) = 0$ дифференциально-алгебраической системы (14),

$$\mathfrak{W}(t, c_r) := \mathcal{P}_\ell \mathcal{M}^{-1} [\mathfrak{X}(t) P_{\mathfrak{Q}_r} c_r] \mathcal{P}_r, \quad c_r \in \mathbb{R}^r$$

- решение однородной части матричной дифференциально-
- алгебраической краевой задачи (14), (15).

Утверждения теорем 7.1 и 7.2 обобщают соответствующие утверждения [12] на случай обобщенной матричной дифференциально-алгебраической краевой задачи (14), (15).

Пример 7.2 Требованиям теоремы 7.2 удовлетворяет задача о построении 2π -периодических решений матричной дифференциально-алгебраической системы

$$\mathcal{D}Z(t) = \mathcal{A}Z(t) + F(t), \quad (27)$$

где

$$S_1 := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad S_2 := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad R_1 := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$R_2 := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Phi_1 := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Phi_2 := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$F(t) := \begin{pmatrix} 0 & \sin t & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos t & 0 \end{pmatrix}, \quad \Psi_1 := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Psi_2 := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Поскольку

$$P_{Q^*(t)} \Omega(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^* \neq 0,$$

постольку условие (17) не выполнено, следовательно система (27) не разрешима относительно производной, при этом система (27) может иметь решения вида

$$Z(t) = \mathcal{P}_\ell Y(t) \mathcal{P}_r, \quad \mathcal{P}_\ell \in \mathbb{R}^{3 \times 3}, \quad \mathcal{P}_r \in \mathbb{R}^{2 \times 2},$$

где \mathcal{P}_ℓ , \mathcal{P}_r — неизвестные постоянные матрицы, являющиеся интегрирующими множителями. Здесь

$$\mathcal{Q} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Omega := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Система уравнений (23) имеет действительное решение

$$\mathcal{P}_\ell := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{P}_r := I_2,$$

для которого выполнено условие (24). Произведение

$$Q_1^+(t)\Omega_1(t) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

определяет матрицу

$$\mathfrak{X}(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2(-1 + e^{t/2}) & 0 & 0 & e^{t/2} & 0 \\ 2(-1 + e^{t/2}) & 0 & 0 & -1 + e^{t/2} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

и общее решение

$$\mathfrak{W}(t, c) = \begin{pmatrix} c_1 & c_4 e^{t/2} + 2c_1 (-1 + e^{t/2}) \\ c_2 & c_5 + 2c_1 (-1 + e^{t/2}) + c_4 (-1 + e^{t/2}) \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

задачи Коши $Z(a) = \mathfrak{A}$ для однородной части дифференциально-алгебраической системы (27). Поскольку $P_{\mathfrak{Q}^*} \neq 0$, поскольку в задаче о построении 2π -периодических решений матричной дифференциально-алгебраической системы (27)

имеет место критический случай; здесь

$$\mathfrak{Q} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2(1 - e^\pi) & 0 & 0 & 1 - e^\pi & 0 & 0 \\ 2(1 - e^\pi) & 0 & 0 & 1 - e^\pi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$P_{\mathfrak{Q}^*} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Общее решение

$$\mathfrak{W}(t, c_r) = \begin{pmatrix} c_1 & -2c_1 \\ c_2 & c_4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad c_r := \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$$

однородной части 2π -периодической матричной задачи для дифференциально-алгебраической системы (27) определяют матрицы

$$P_{\mathfrak{Q}} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}, \quad P_{\mathfrak{Q}_r} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

Решение \mathcal{P}_ℓ , \mathcal{P}_r системы уравнений (23) определяет матрицы

$$P_{Q_1}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad P_{Q_\varrho}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix};$$

таким образом, вектор

$$\mathfrak{F}_1(t, \psi(t)) := Q_1^+(t)\mathcal{F}(t) + P_{Q_\varrho}(t)\psi(t)$$

зависит от произвольной функции $\psi(t) \in \mathbb{R}^\varrho$; здесь

$$Q_1^+(t)\mathcal{F}(t) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \sin t & \cos t & 0 \end{pmatrix}$$

и

$$P_{Q_\varrho}(t)\psi(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \psi_1(t) & \psi_2(t) \end{pmatrix}, \quad \psi(t) := \begin{pmatrix} \psi_1(t) \\ \psi_2(t) \end{pmatrix}, \quad \varrho = 2.$$

Положим

$$\psi(t) = \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix}.$$

Традиционный оператор Грина задачи Коши

$$K[f(s)](t) := X(t) \int_0^t X^{-1}(s)f(s)ds$$

определяет обобщенный оператор Грина задачи Коши для системы (27)

$$\mathcal{K}[\mathfrak{F}_1(s, \psi(s))](t) := \mathcal{P}_\ell \mathcal{M}^{-1} \{ K[\mathfrak{F}_1(s, \psi(s))] \}(t) \mathcal{P}_r.$$

Поскольку условие (26) выполнено, решение 2π -периодической матричной задачи для дифференциально-алгебраической системы (27)

$$Z(t, c_r) = \mathfrak{W}(t, c_r) + \mathfrak{G}[F(s); \mathfrak{A}](t)$$

определяет обобщенный оператор Грина

$$\mathfrak{G}[\mathfrak{F}_1(s, \psi(s)); \mathfrak{A}](t) = \frac{1}{100} \begin{pmatrix} -16 & 4(8 - 10 \cos t - 5 \sin t) \\ 0 & 10(-1 + \cos t + 3 \sin t) \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Заметим, что для представления решений дифференциально-алгебраической системы (16), а также построения решений матричной дифференциально-алгебраической краевой задачи (14), (15), также применима центральная каноническая форма [24, 25, 29, 31].

7.4 О регуляризации матричной дифференциально алгебраической краевой задачи

Предположим, что для матричной дифференциально-алгебраической задачи (14), (15) имеет место критический случай ($P_{Q^*} \neq 0$) и выполнены условия (17). Поставим следующую задачу: можно ли в этом случае малыми возмущениями

$$\check{\mathcal{L}}Z(\cdot, \varepsilon) := \mathcal{L}Z(\cdot, \varepsilon) + \varepsilon \mathcal{U}Z(a, \varepsilon)\mathcal{V}, \quad \mathcal{U} \in \mathbb{R}^{\mu \times \alpha}, \quad \mathcal{V} \in \mathbb{R}^{\beta \times \nu}$$

краевого условия (15):

$$\check{\mathcal{L}}Z(\cdot, \varepsilon) = \mathfrak{A}, \quad \mathfrak{A} \in \mathbb{R}^{\mu \times \nu}, \quad 0 < \varepsilon \ll 1. \quad (28)$$

привести матричную дифференциально-алгебраическую задачу (14), (28) к некритическому случаю? Здесь $\check{\mathcal{L}}Z(\cdot, \varepsilon)$ —

линейный ограниченный матричный функционал:

$$\check{\mathcal{L}}Z(\cdot, \varepsilon) : \mathbb{C}_{\alpha \times \beta}^1[a; b] \rightarrow \mathbb{R}^{\mu \times \nu},$$

непрерывный по малому параметру ε при $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$. Таким образом поставленная задача относится к задачам о регуляризации [9, 22, 32]. Как известно [18], любая $(m \times n)$ -матрица Q в определенном базисе может быть представлена в виде

$$Q = M \cdot J \cdot N, \quad \text{rank } Q := \rho; \quad (29)$$

здесь $M \in \mathbb{R}^{m \times m}$ и $N \in \mathbb{R}^{n \times n}$ — невырожденные матрицы,

$$J := \begin{pmatrix} I_\rho & O \\ O & O \end{pmatrix}.$$

Разложением (29) можно воспользоваться при решении задачи о регуляризации матричной дифференциально-алгебраической задачи (14), (15). Возмущение матрицы \mathcal{Q} будем искать в виде

$$\mathfrak{Q}(\varepsilon) := \mathcal{Q} + \varepsilon \mathcal{R} \in \mathbb{R}^{\mu \cdot \nu \times \alpha \cdot \beta}, \quad 0 < \varepsilon \ll 1.$$

По определению матричная дифференциально-алгебраическая задача (14), (28) представляет некритический случай при условии $P_{\mathfrak{Q}^*} = 0$. Очевидно, это условие равносильно уравнению

$$[\mathcal{Q} + \varepsilon \mathcal{R}] \cdot [\mathcal{Q} + \varepsilon \mathcal{R}]^+ = I_{\mu\nu} \quad (30)$$

относительно $(\mu\nu \times \mu\nu)$ -матрицы \mathcal{R} . Заметим, что уравнение (30) разрешимо лишь для $\mu\nu \leq \alpha\beta$. Действительно, предположим уравнение (8) переопределенным: $\mu\nu > \alpha\beta$, при этом

$$\text{rank } (\mathcal{Q} + \varepsilon \mathcal{R})(\mathcal{Q} + \varepsilon \mathcal{R})^+ \leq \text{rank } (\mathcal{Q} + \varepsilon \mathcal{R}) =$$

$$= \operatorname{rank} (\mathcal{Q} + \varepsilon \mathcal{R})^+ \leq \mu\nu < \gamma\delta,$$

что противоречит равенству рангов левой и правой части уравнения (30). При условии $\mu\nu \leq \alpha\beta$ уравнение (8) имеет по меньшей мере одно семейство решений

$$\mathcal{R} := M \cdot \Pi_J \cdot N \in \mathbb{R}^{\gamma\delta \times \alpha\beta},$$

где $\Pi_J \in \mathbb{R}^{\gamma\delta \times \alpha\beta}$ — матрица полного ранга. Таким образом, поставленная задача о регуляризации матричной дифференциально-алгебраической задачи (14), (15), равносильна задаче о регуляризации матричного уравнения типа Сильвестра (18) и приводит к уравнению (2) с матрицей $\mathcal{Q}(\varepsilon)$, разрешимой при условии $\mu\nu \leq \alpha\beta$ в виде

$$\mathfrak{Q}(\varepsilon) := \mathcal{Q} + \varepsilon \mathcal{R}, \quad \mathcal{R} := M \cdot \Pi_J \cdot N \in \mathbb{R}^{\mu\nu \times \alpha\beta}.$$

Действительно, в силу невырожденности матриц M и N имеет место равенство [11, 4.48]

$$\operatorname{rank} \mathfrak{Q}(\varepsilon) = \operatorname{rank} (J + \varepsilon \Pi_J) = \mu\nu,$$

при этом $P_{\mathfrak{Q}^*}(\varepsilon) = 0$, следовательно система (2) с матрицей $\mathfrak{Q}(\varepsilon)$ разрешима для любых правых частей. Положим для определенности, что $\mathcal{V} \in \mathbb{R}^{\beta \times \nu}$ — фиксированная постоянная матрица и $\mathcal{U} \in \mathbb{R}^{\mu \times \alpha}$ — неизвестная постоянная матрица. Заметим, что

$$\mathcal{U}Z(a, \varepsilon)\mathcal{V} = \mathcal{U}W(a, c)\mathcal{V} = \mathcal{U}\mathcal{M}^{-1}(c)\mathcal{V}, \quad c \in \mathbb{R}^{\alpha\beta};$$

здесь

$$c = \sum_{j=1}^{\alpha\beta} \Theta^{(j)} \xi_j \in \mathbb{R}^{\alpha\beta}, \quad \xi_j \in \mathbb{R}^1, \quad j = 1, 2, \dots, \alpha \cdot \beta,$$

где, напомним, $\Theta^{(j)}$, $j = 1, 2, \dots, \alpha\beta$ — естественный базис пространства $\mathbb{R}^{\alpha\beta}$. При этом

$$\begin{aligned} \mathcal{U}Z(a, \varepsilon)\mathcal{V} &= \mathcal{U}\mathcal{M}^{-1} \left[\sum_{j=1}^{\alpha\beta} \Theta^{(j)} \xi_j \right] \mathcal{V} = \\ &= \sum_{j=1}^{\alpha\beta} \mathcal{U}\mathcal{M}^{-1}(\Theta^{(j)}) \mathcal{V} \xi_j = \sum_{j=1}^{\alpha\beta} \mathcal{U}\Xi^{(j)} \mathcal{V} \xi_j. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\mathcal{M}[\mathcal{U}Z(a, \varepsilon)\mathcal{V}] = \left\{ \mathcal{M}[\mathcal{U}\Xi^{(1)}\mathcal{V}], \dots, \mathcal{M}[\mathcal{U}\Xi^{(\alpha\beta)}\mathcal{V}] \right\} \xi,$$

следовательно

$$\left\{ \mathcal{M}[\mathcal{U}\Xi^{(1)}\mathcal{V}], \dots, \mathcal{M}[\mathcal{U}\Xi^{(\alpha\beta)}\mathcal{V}] \right\} = M\Pi_J N. \quad (31)$$

Неизвестную матрицу $\mathcal{U} \in \mathbb{R}^{\mu \times \alpha}$ будем искать в виде

$$\mathcal{U} = \sum_{j=1}^{\alpha\cdot\mu} \Lambda_j \zeta_j \in \mathbb{R}^{\mu \times \alpha}, \quad \zeta_j \in \mathbb{R}^1, \quad j = 1, 2, \dots, \alpha \cdot \mu,$$

где $\Lambda^{(j)}$, $j = 1, 2, \dots, \alpha \cdot \mu$ — естественный базис пространства $\mathbb{R}^{\mu \times \alpha}$; обозначим $(\mu\nu \times \alpha\mu)$ — матрицы

$$\Pi_i := \left\{ \mathcal{M}[\Lambda_1 \Xi^{(i)} \mathcal{V}], \dots, \mathcal{M}[\Lambda_{\alpha\mu} \Xi^{(i)} \mathcal{V}] \right\}, \quad i = 1, 2, \dots, \alpha\beta.$$

Уравнение (31) приводит к системе

$$\mathfrak{D} \cdot \zeta = \mathcal{M}(M\Pi_J N), \quad (32)$$

разрешимой относительно вектора $\zeta \in \mathbb{R}^{\alpha\mu}$ тогда и только тогда, когда

$$P_{\mathfrak{D}^*} \mathcal{M}(M\Pi_J N) = 0. \quad (33)$$

Здесь

$$\mathfrak{D} := \begin{pmatrix} \Pi_1 \mathcal{M} \Lambda_1 & \Pi_1 \mathcal{M} \Lambda_2 & \dots & \Pi_1 \mathcal{M} \Lambda_{\alpha\mu} \\ \Pi_2 \mathcal{M} \Lambda_1 & \Pi_2 \mathcal{M} \Lambda_2 & \dots & \Pi_2 \mathcal{M} \Lambda_{\alpha\mu} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Pi_{\alpha\beta} \mathcal{M} \Lambda_1 & \Pi_{\alpha\beta} \mathcal{M} \Lambda_2 & \dots & \Pi_{\alpha\beta} \mathcal{M} \Lambda_{\alpha\mu} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{\alpha \cdot \beta \cdot \mu \cdot \nu \times \alpha \cdot \mu},$$

кроме того, $P_{\mathfrak{D}^*}$ — матрица-ортопроектор:

$$P_{\mathfrak{D}^*} : \mathbb{R}^{\alpha \cdot \beta \cdot \mu \cdot \nu} \rightarrow \mathbb{N}(\mathfrak{D}^*).$$

При условии (33) и только при нем система (32) определяет по меньшей мере один вектор $\zeta \in \mathbb{R}^{\alpha\mu}$:

$$\zeta = \mathfrak{D}^+ \cdot \mathcal{M}(M\Pi_J N),$$

который определяет матрицу

$$\mathcal{U} := \mathcal{M}^{-1} [\mathfrak{D}^+ \mathcal{M}(M\Pi_J N)],$$

гарантирующий разрешимость задачи о регуляризации матричной дифференциально-алгебраической задачи (14), (15). Возмущение матрицы \mathcal{Q} :

$$\mathfrak{Q}(\varepsilon) := \mathcal{Q} + \varepsilon \mathcal{R} \in \mathbb{R}^{\mu \cdot \nu \times \alpha \cdot \beta}$$

при условии

$$\mathfrak{Q}^+(\varepsilon) \mathcal{M}\{\mathfrak{A} - \check{\mathcal{L}}\mathcal{K}[\mathfrak{F}(s, \varphi(s))](\cdot)\} \in \mathbb{C}_{\alpha\beta \times \mu\nu}[0, \varepsilon_0]$$

определяет решение

$$Z(t, \varepsilon) : Z(\cdot, \varepsilon) \in \mathbb{C}_{\alpha \times \beta}^1[a; b], \quad Z(t, \cdot) \in \mathbb{C}_{\alpha \times \beta}[0, \varepsilon_0]$$

матричной дифференциально-алгебраической задачи (14), (28) вида

$$Z(t, \varepsilon) = W(t, \varepsilon, c_r) + G[\mathfrak{F}(s, \varphi(s)); \mathfrak{A}](t), \quad c_r \in \mathbb{R}^r, \quad (34)$$

где

$$W(t, \varepsilon, c_r) := \mathcal{M}^{-1} [X(t) P_{\mathfrak{Q}_r}(\varepsilon) c_r]$$

общее решение однородной части регуляризованной матричной дифференциально-алгебраической задачи (14), (28) и

$$\begin{aligned} G[\mathfrak{F}(s, \varphi(s)); \mathfrak{A}](t) &:= \mathcal{K}[\mathfrak{F}(s, \varphi(s))](t) + \\ &+ \mathcal{M}^{-1} \left\{ X(t) \mathfrak{Q}^+(\varepsilon) \mathcal{M} \{ \mathfrak{A} - \check{\mathcal{L}} \mathcal{K}[\mathfrak{F}(s, \varphi(s))](\cdot) \} \right\} \end{aligned}$$

— обобщенный оператор Грина задачи о регуляризации матричной дифференциально-алгебраической задачи (14), (15). Матрица $P_{\mathfrak{Q}_r}(\varepsilon)$ составлена из r линейно независимых столбцов ортопроектора $P_{\mathfrak{Q}}(\varepsilon)$. Таким образом, доказано следующее достаточное условие регуляризации матричной дифференциально-алгебраической задачи (14), (15).

Теорема 7.3 В критическом случае ($P_{\mathfrak{Q}^*} \neq 0$) при условиях (17), (32) и

$$\mu\nu \leq \alpha\beta, \quad \mathfrak{Q}^+(\varepsilon) \mathcal{M} \{ \mathfrak{A} - \check{\mathcal{L}} \mathcal{K}[\mathfrak{F}(s, \varphi(s))](\cdot) \} \in \mathbb{C}_{\alpha\beta \times \mu\nu}[0, \varepsilon_0]$$

задача о нахождении решения $Z(t) \in \mathbb{C}_{\alpha \times \beta}^1[a; b]$ матричного дифференциально алгебраического уравнения (14), удовлетворяющего краевому условию (15) малым возмущением

$$\check{\mathcal{L}}Z(\cdot, \varepsilon) := \mathcal{L}Z(\cdot, \varepsilon) + \varepsilon \mathcal{M}^{-1} [\mathfrak{D}^+ \mathcal{M}(M \Pi_J N)] Z(a, \varepsilon) \mathcal{V}$$

краевого условия (15) приводится к задаче о нахождении решения

$$Z(t, \varepsilon) : Z(\cdot, \varepsilon) \in \mathbb{C}_{\alpha \times \beta}^1[a; b], \quad Z(t, \cdot) \in \mathbb{C}_{\alpha \times \beta}[0, \varepsilon_0]$$

матричной дифференциально-алгебраической задачи (14), (28) в некритическом ($P_{\mathfrak{Q}^*}(\varepsilon) = 0$) случае вида (34).

Пример 7.3 Требованиям теоремы 7.3 удовлетворяет матричная дифференциально-алгебраическая краевая задача

$$A(t) \otimes Z'(t) = \mathcal{A}Z(t) + F(t), \quad \mathcal{L}Z(\cdot) = 0, \quad (35)$$

где

$$A(t) := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{L}Z(\cdot) := \int_0^{2\pi} \mathcal{S}(t)Z(t)\mathcal{T}(t)dt,$$

$$\Phi_1 := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{S}(t) := \begin{pmatrix} 0 & t & 0 \\ t & 0 & t \\ 0 & t & 0 \end{pmatrix},$$

$$\Psi_1 := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{T}(t) := \begin{pmatrix} \sin t & 0 \\ 0 & \sin t \end{pmatrix}.$$

Выше в примере 7.1 было показано, что для матричной дифференциально-алгебраической задачи (35) имеет место критический случай

$$P_{\mathcal{Q}^*} \neq 0, \quad \mathcal{Q} = \begin{pmatrix} 0 & -2\pi & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2\pi & 0 & -2\pi & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2\pi & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2\pi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2\pi & 0 & -2\pi \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2\pi & 0 \end{pmatrix},$$

при этом выполнено условие (17) разрешимости системы (16) относительно производной. Матрица \mathcal{Q} в определенном

базисе может быть представлена в виде (29), где

$$J := \begin{pmatrix} I_4 & O \\ O & O \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{6 \times 6},$$

а также

$$M = \begin{pmatrix} 0 & -2\pi & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2\pi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2\pi & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2\pi & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2\pi & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2\pi & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

и

$$N = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Положим для определенности $\mathcal{V} = I_2$ и

$$\Pi_J := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -2\pi & 0 & 0 & -2\pi & 0 & 2\pi \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2\pi & 0 \end{pmatrix},$$

при этом условия (32) и $6 = \mu\nu \leq \alpha\beta = 6$ выполнены.

Возмущение матрицы \mathcal{Q} :

$$\mathfrak{Q}(\varepsilon) := \mathcal{Q} + \varepsilon \mathcal{R}, \quad \mathcal{R} := M \cdot \Pi_J \cdot N$$

определяет сомножитель

$$\mathcal{U} = -2\pi \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

при этом

$$\mathfrak{Q}(\varepsilon) = \begin{pmatrix} 0 & -2\pi & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2\pi & 0 & -2\pi & 0 & 0 & 0 \\ -2\pi\varepsilon & -2\pi & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2\pi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2\pi & 0 & -2\pi \\ 0 & 0 & 0 & -2\pi\varepsilon & -2\pi & 0 \end{pmatrix}$$

— квадратная невырожденная матрица

$$\det \mathfrak{Q}(\varepsilon) = 64\pi^6\varepsilon^2,$$

удовлетворяющая условию

$$\mathfrak{Q}^+(\varepsilon)\mathcal{M}\{\mathfrak{A} - \check{\mathcal{L}}\mathcal{K}[\mathfrak{F}(s, \varphi(s))](\cdot)\} \in \mathbb{C}_{6 \times 6}[0, \varepsilon_0].$$

Положим для определенности $\mathcal{A} := 0$,

$$F(t) := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

при этом, малое возмущение краевого условия (35)

$$\check{\mathcal{L}}Z(\cdot, \varepsilon) := \mathcal{L}Z(\cdot, \varepsilon) + \varepsilon \mathcal{U}Z(0, \varepsilon)\mathcal{V}$$

приводит матричную дифференциально-алгебраическую задачу (35) к некритическому ($P_{Q^*} = 0$) случаю, причем регуляризованная задача (35) однозначно ($P_Q = 0$) разрешима для любых неоднородностей, в частности, для неоднородностей \mathfrak{A} и $F(t)$, использованных в примере 7.1. Решение регуляризованной матричной дифференциально-алгебраической краевой задачи (35)

$$Z(t) = G[\mathfrak{F}(s, \varphi(s)); \mathfrak{A}](t)$$

определяет обобщенный оператор Грина

$$G[\mathfrak{F}(s, \varphi(s)); \mathfrak{A}](t) = \begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & 0 \\ 3 - 4\pi - 2\pi^2 + t + \frac{t^2}{2} & 0 \end{pmatrix}.$$

Предположим далее, что для матричной дифференциально-алгебраической задачи (14), (15) имеет место критический случай ($P_{Q^*} \neq 0$) и выполнены условия (17). Поставим следующую задачу: можно ли в этом случае малыми возмущениями

$$\check{\mathcal{A}}Z(t, \varepsilon) := \mathcal{A}Z(t, \varepsilon) + \varepsilon \mathcal{U}Z(t, \varepsilon)\mathcal{V}, \quad \mathcal{U} \in \mathbb{R}^{\gamma \times \alpha}, \quad \mathcal{V} \in \mathbb{R}^{\beta \times \delta}$$

матричного оператора $\mathcal{A}Z(t)$ привести матричную дифференциально алгебраическую задачу (14), (15) к некритическому случаю?

Положим для определенности, что \mathcal{V} — фиксированная постоянная матрица и $\mathcal{U}(\omega)$ — постоянная матрица, зависящая от неизвестного вектора ω . Возмущение матричного оператора $\mathcal{A}Z(t)$ приводит к задаче о построении решений

$$Z(t, \varepsilon) : Z(\cdot, \varepsilon) \in \mathbb{C}_{\alpha \times \beta}^1[a; b], \quad Z(t, \cdot) \in \mathbb{C}_{\alpha \times \beta}[0, \varepsilon_0]$$

матричного дифференциально-алгебраического уравнения

$$\mathcal{D}Z(t, \varepsilon) = \check{\mathcal{A}}Z(t, \varepsilon) + F(t), \quad (36)$$

подчиненных краевому условию (15). Возмущение матричного оператора $\mathcal{A}Z(t)$ приводит возмущению матрицы \mathcal{Q} вида

$$\mathfrak{Q}(\omega, \varepsilon) \in \mathbb{R}^{\mu \cdot \nu \times \alpha \cdot \beta}, \quad 0 < \varepsilon \ll 1.$$

По определению, дифференциально-алгебраическая задача (28), (36) при условии

$$P_{\mathfrak{Q}^*}(\omega, \varepsilon) = 0 \quad (37)$$

представляет некритический случай. Требование (37) предполагает, вообще говоря, нелинейное уравнение относительно неизвестного вектора ω ; при наличии действительных корней этого уравнения малое возмущение матричного оператора $\mathcal{A}Z(t)$ определяет матрица $\mathcal{U}(\omega)$.

Пример 7.4 Матричная краевая задача

$$Z'(t) = \mathcal{A}Z(t), \quad \mathcal{L}Z(\cdot) := Z(0) - Z(2\pi) = 0, \quad (38)$$

не разрешима в классе $Z(t) \in \mathbb{C}_{2 \times 3}^1[0; 2\pi]$ для произвольной неоднородности $F(t) \in \mathbb{C}_{2 \times 3}[0; 2\pi]$; в то же время, в классе функций

$$Z(t, \varepsilon) : Z(\cdot, \varepsilon) \in \mathbb{C}_{2 \times 3}[0; 2\pi], \quad Z(t, \cdot) \in \mathbb{C}_{2 \times 3}[0, \varepsilon_0]$$

малое возмущение

$$\check{\mathcal{A}}Z(t, \varepsilon) := \mathcal{A}Z(t, \varepsilon) + \varepsilon \mathcal{U}Z(t, \varepsilon)\mathcal{V}, \quad \mathcal{U} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}, \quad \mathcal{V} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

матричного оператора $\mathcal{A}Z(t) := AZ(t) + Z(t)B$ определяет краевую задачу

$$Z'(t, \varepsilon) = \check{\mathcal{A}}Z(t, \varepsilon) + F(t), \quad \mathcal{L}Z(\cdot, \varepsilon) = 0, \quad (39)$$

разрешимую для произвольной неоднородности $F(t)$. Здесь

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B := \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & -2 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

кроме того

$$\mathcal{L}Z(\cdot, \varepsilon) := Z(0, \varepsilon) - Z(2\pi, \varepsilon).$$

Действительно, матричная краевая задача (38) удовлетворяет условиям леммы 7.1, где

$$W(t, c) := U(t) \cdot \Theta \cdot V(t), \quad \Theta \in \mathbb{R}^{2 \times 3},$$

и $U(t)$ и $V(t)$ — нормальные фундаментальные матрицы:

$$U(t) = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix}, \quad V(t) = \begin{pmatrix} \cos 2t & 0 & -\sin 2t \\ \cos 2t - e^t & e^t & -\sin 2t \\ \sin 2t & 0 & \cos 2t \end{pmatrix}.$$

Для матричной задачи (38) имеет место критический случай:

$$P_{Q^*} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \neq 0,$$

в то же время, малое возмущение

$$\check{\mathcal{A}}Z(t, \varepsilon) := \mathcal{A}Z(t, \varepsilon) + \varepsilon \mathcal{U}Z(t, \varepsilon)\mathcal{V}$$

матричного оператора $\mathcal{A}Z(t) := AZ(t) + Z(t)B$ вида

$$\mathcal{U}(\omega) := \omega I_2, \quad \mathcal{V} := I_3$$

определяет краевую задачу (39), однозначно разрешимую для произвольной неоднородности $F(t)$ и $\varepsilon, \omega \neq 0$. Действительно, матрица

$$\mathfrak{Q}(\omega, \varepsilon) = \begin{pmatrix} \psi(\varepsilon) & 0 & e^{2\pi\varepsilon}\sigma & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \psi(\varepsilon) & 0 & e^{2\pi\varepsilon}\sigma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 - e^{2\pi(1+\varepsilon)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \psi(\varepsilon) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \psi(\varepsilon) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \psi(\varepsilon) \end{pmatrix}$$

определяет ортопроектор $P_{\mathfrak{Q}^*}(\omega, \varepsilon) = 0$; здесь

$$\psi(\varepsilon) := 1 - e^{2\pi\varepsilon}, \quad \sigma := 1 - e^{2\pi}, \quad \omega := 1.$$

При этом $\mathfrak{Q}(\varepsilon)$ — квадратная невырожденная матрица:

$$\det \mathfrak{Q}(\varepsilon) = (-1 + e^{2\pi\varepsilon})^4 \left(-1 + e^{2\pi(1+\varepsilon)}\right)^2.$$

Положим для определенности

$$F(t) := \begin{pmatrix} \cos 5t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathfrak{A} := 0.$$

Решение регуляризованной матричной краевой задачи (39) определяет обобщенный оператор Грина

$$Z(t, \varepsilon) = G[F(s); \mathfrak{A}](t, \varepsilon)$$

Здесь

$$\mathcal{M}G[F(s); \mathfrak{A}](t, \varepsilon) = \frac{1}{(4 + \varepsilon^2)(16 + \varepsilon^2)(36 + \varepsilon^2)(64 + \varepsilon^2)} \times$$

$$\times \begin{pmatrix} -\varepsilon (13120 + 2184\varepsilon^2 + 90\varepsilon^4 + \varepsilon^6) \cos 5t + \\ + 5 (7680 + 1648\varepsilon^2 + 80\varepsilon^4 + \varepsilon^6) \sin 5t \\ - (-10752 + 304\varepsilon^2 + 32\varepsilon^4 + \varepsilon^6) \cos 5t + \\ + 10\varepsilon (736 + 44\varepsilon^2 + \varepsilon^4) \sin 5t \\ 0 \\ 0 \\ -2 (-8448 - 536\varepsilon^2 + 38\varepsilon^4 + \varepsilon^6) \cos 5t + \\ + 20\varepsilon (496 + 56\varepsilon^2 + \varepsilon^4) \sin 5t \\ -4\varepsilon (-1616 - 40\varepsilon^2 + \varepsilon^4) \cos 5t + \\ + 60 (-128 + 20\varepsilon^2 + \varepsilon^4) \sin 5t \end{pmatrix}.$$

Доказанная теорема 7.3 обобщает соответствующие условия регуляризации линейных нетеровых краевых задач [21] на случай матричной дифференциально-алгебраической задачи (14), (15) и могут быть использованы в теории устойчивости движения [3, 4, 5], при решении дифференциальных уравнений Риккати и Бернулли [7, 13], а также при решении линейных краевых задач для матричных дифференциальных уравнений [12, 14, 15, 16].

8 С.М. Чуйко, А.С. Чуйко, Д.В. Сысоев Матричные задачи с параметрическим возмущением

Традиционно изучение периодических и нетеровых краевых задач в критических случаях было связано с предположением, что дифференциальное уравнение, а также краевое условие, известны и фиксированы [9, 33]. Как правило, изучение периодических задач в случае параметрического резонанса ограничивалось исследованием вопросов устойчивости [34, 35, 36]. В то же время, при изучении периодических краевых задач в случае параметрического резонанса в связи с многочисленными приложениями в электронике [34], теории плазмы [37], нелинейной оптике, механике [38] и станкостроении [39], наряду с нахождением решений требуется вычисление собственной функции соответствующего дифференциального уравнения. Целью данной статьи является построение решений линейных матричных краевых задач в случае параметрического резонанса, разрешимость которых обеспечена соответствующим выбором собственной функции краевой задачи. Используемая классификация линейных матричных краевых задач в случае параметрического резонанса в зависимости от простоты или кратности корней уравнения для порождающих констант существенно отличается от аналогичной классификации периодических задач в случае параметрического резонанса [35, 36] и соответствует общей классификации периодических и нетеровых краевых задач [9, 33]. Полученные для линейных матричных краевых задач в случае параметрического резонанса условия разрешимости, а также уравнение для порождающих функций обобщают соответствующие условия разрешимо-

сти, а также традиционное уравнения для порождающих констант в случае параметрического резонанса [40, 41, 42] — на случай линейных матричных краевых задач [12], при этом существенно используется техника решения матричных уравнений Ляпунова, а также их обобщений — матричных уравнения Сильвестра [8, 10, 17].

8.1 Постановка задачи

Исследуем задачу о построении решений

$$Z(\cdot, \varepsilon) \in \mathbb{C}_{\alpha \times \beta}^1[a; b], \quad Z(t, \cdot) \in \mathbb{C}_{\alpha \times \beta}[0; \varepsilon_0], \quad h(\varepsilon) \in \mathbb{C}_\rho[0; \varepsilon_0]$$

матричного дифференциального уравнения

$$Z'(t, \varepsilon) = AZ(t, \varepsilon) + Z(t, \varepsilon)B + F(t, \varepsilon) + \varepsilon \Phi(Z(t, \varepsilon), h(\varepsilon), t, \varepsilon), \quad (40)$$

подчиненных краевому условию

$$\mathcal{L}Z(\cdot, \varepsilon) = \mathcal{A}(\varepsilon), \quad \mathcal{A}(\varepsilon) \in \mathbb{C}_{\delta \times \gamma}[0; \varepsilon_0]. \quad (41)$$

Решение матричной краевой задачи (40), (41) ищем в малой окрестности решения порождающей задачи

$$Z'_0(t, \varepsilon) = AZ_0(t, \varepsilon) + Z_0(t, \varepsilon)B + F(t, \varepsilon), \quad \mathcal{L}Z_0(\cdot, \varepsilon) = \mathcal{A}(\varepsilon). \quad (42)$$

Здесь $A \in \mathbb{R}^{\alpha \times \alpha}$ и $B \in \mathbb{R}^{\beta \times \beta}$ — постоянные матрицы. Матричный оператор $\Phi(Z(t, \varepsilon), h(\varepsilon), t, \varepsilon)$ предполагаем линейным по первому аргументу $Z(t, \varepsilon)$, а также линейным по второму аргументу $h(\varepsilon)$. Матрицы $F(t, \varepsilon)$ и $\mathcal{A}(\varepsilon)$ предполагаем непрерывными по независимой переменной $t \in [a; b]$, а также непрерывными по малому параметру $\varepsilon \in [0; \varepsilon_0]$. Кроме того, $\mathcal{L}Z(\cdot, \varepsilon)$ — линейный ограниченный матричный

функционал:

$$\mathcal{L}Z(\cdot, \varepsilon) : \mathbb{C}_{\alpha \times \beta}^1[a; b] \rightarrow \mathbb{R}^{\delta \times \gamma}.$$

Вообще говоря, предполагаем $\alpha \neq \beta \neq \delta \neq \gamma$. Условия разрешимости и структура решения линейной дифференциальной системы (42) были приведены в монографии [2]. Конструктивные условия разрешимости и структура периодического решения линейной дифференциальной системы (42) при условии $\alpha = \beta$ получены в статье [7] с использованием обобщенного обращения матриц и операторов, описанного в статье [6]. Как известно [2, с. 211], общее решение

$$W(t, \Theta) = U(t) \cdot \Theta \cdot V(t), \quad \Theta \in \mathbb{R}^{\alpha \times \beta}$$

задачи Коши

$$Z'(t) = AZ(t) + Z(t)B, \quad Z(a) = \Theta$$

определяют $U(t)$ и $V(t)$ — нормальные фундаментальные матрицы:

$$U'(t) = AU(t), \quad U(a) = I_\alpha, \quad V'(t) = BV(t), \quad V(a) = I_\beta.$$

Общее решение $Z(t) \in \mathbb{C}_{\alpha \times \beta}^1[a; b]$ задачи Коши [7]

$$Z'(t) = AZ(t) + Z(t)B + F(t), \quad Z(a) = \Theta \quad (43)$$

имеет вид

$$Z(t, \Theta) = W(t, \Theta) + K[F(s)](t), \quad \Theta \in \mathbb{R}^{\alpha \times \beta},$$

где

$$K[F(s)](t) := \int_a^t U(t)U^{-1}(s)F(s)V(t)V^{-1}(s) ds$$

— оператор Грина задачи Коши для матричного уравнения (43). Подставляя общее решение матричного дифференциального уравнения (43) в краевое условие (41), приходим к линейному алгебраическому уравнению

$$\mathcal{L}Z(\cdot, \Theta) = \mathcal{A} - \mathcal{L}K[F(s)](\cdot) \quad (44)$$

относительно матрицы $\Theta \in \mathbb{R}^{\alpha \times \beta}$. Обозначим

$$\Xi^{(j)} \in \mathbb{R}^{\alpha \times \beta}, \quad j = 1, 2, \dots, \alpha \cdot \beta$$

— естественный базис [11] пространства $\mathbb{R}^{\alpha \times \beta}$ и c_j — константы, определяющие разложение матрицы $\Theta \in \mathbb{R}^{\alpha \times \beta}$ по векторам $\Xi^{(j)}$ базиса пространства $\mathbb{R}^{\alpha \times \beta}$, при этом

$$\mathcal{L}W(\cdot, \Theta) = \sum_{j=1}^{\alpha \cdot \beta} \mathcal{L}U(\cdot) \Xi^{(j)} V(\cdot) c_j, \quad \Theta = \sum_{j=1}^{\alpha \cdot \beta} \Xi^{(j)} c_j, \quad c_j \in \mathbb{R}^1.$$

Таким образом, приходим к линейному алгебраическому уравнению

$$\mathcal{Q} \cdot c = \mathcal{M}[\mathcal{A}] - \mathcal{M}\{\mathcal{L}K[F(s)](\cdot)\} \quad (45)$$

относительно вектора $c \in \mathbb{R}^{\alpha \cdot \beta}$, равносильному уравнению (44); здесь

$$\begin{aligned} \mathcal{Q} &:= [\mathcal{M}[\mathcal{Q}^{(1)}] \quad \mathcal{M}[\mathcal{Q}^{(2)}] \dots \mathcal{M}[\mathcal{Q}^{(\alpha \cdot \beta)}]], \\ \mathcal{Q}^{(j)} &:= \mathcal{L}U(\cdot) \Xi^{(j)} V(\cdot) \in \mathbb{R}^{\beta \times \delta}. \end{aligned}$$

Уравнение (45) разрешимо тогда и только тогда, когда

$$P_{\mathcal{Q}_d^*} \mathcal{M}\{\mathcal{A} - \mathcal{L}K[F(s)](\cdot)\} = 0. \quad (46)$$

Здесь $P_{\mathcal{Q}^*}$ — ортопроектор: $\mathbb{R}^{\delta \cdot \gamma \times \delta \cdot \gamma} \rightarrow \mathbb{N}(\mathcal{Q}^*)$; матрица $P_{\mathcal{Q}_d^*}$ составлена из d линейно независимых строк ортопроектора

P_{Q^*} матрицы $\mathcal{Q} \in \mathbb{R}^{\delta \cdot \gamma \times \alpha \cdot \beta}$. При условии (46) и только при нем общее решение уравнения (45)

$$c = \mathcal{Q}^+ \mathcal{M} \{ \mathcal{A} - \mathcal{L}K[F(s)](\cdot) \} + P_{Q_r} c_r, \quad c_r \in \mathbb{R}^r$$

определяет общее решение [8, 10] матричного уравнения (44)

$$\Theta = \mathcal{M}^{-1} \{ \mathcal{Q}^+ \mathcal{M} \{ \mathcal{A} - \mathcal{L}K[F(s)](\cdot) \} \} + \mathcal{M}^{-1} [P_{Q_r} c_r],$$

а также общее решение матричного дифференциального уравнения (43), подчиненного краевому условию (41)

$$Z(t, \Theta_r) = W(t, \Theta_r) + G[F(s); \mathcal{A}](t), \quad \Theta_r := \mathcal{M}^{-1} [P_{Q_r} c_r].$$

Здесь P_Q — ортопроектор: $\mathbb{R}^{\alpha \cdot \beta \times \alpha \cdot \beta} \rightarrow \mathbb{N}(\mathcal{Q})$; матрица P_{Q_r} составлена из r линейно независимых столбцов ортопроектора P_Q ,

$$G[F(s); \mathcal{A}](t) := W \{ t, \mathcal{M}^{-1} \{ \mathcal{Q}^+ \mathcal{M} [\mathcal{A} - \mathcal{L}K[F(s)](\cdot)] \} \} + K[F(s)](t)$$

— обобщенный оператор Грина [12] матричной краевой задачи (41), (43) \mathcal{Q}^+ — псевдообратная (по Муру-Пенроузу) матрица [9, 11]. Обозначим индексы

$$\{j_1, j_2, \dots, j_r\} \subseteq \{1, 2, \dots, m \cdot n\}$$

линейно независимых столбцов ортопроектора P_Q , при этом

$$W(t, \Theta_r) := \sum_{k=1}^r U(t) \cdot \Xi^{(j_k)} V(t) \cdot c_{j_k}, \quad \Theta_r \in \mathbb{R}^{\alpha \times \beta}$$

— общее решение матричного дифференциального уравнения (43), подчиненного краевому условию (41). При условии $P_{Q^*} \neq 0$ будем говорить, что для краевой задачи (42) имеет

место критический случай, при этом задача (42) разрешима лишь для тех неоднородностей $F(t)$ и \mathcal{A} , для которых выполнено условие (46). В свою очередь, при условии $P_{Q^*} = 0$ для краевой задачи (42) имеет место некритический случай, при этом задача (42) разрешима для любых неоднородностей $F(t, \varepsilon)$ и $\mathcal{A}(\varepsilon)$. Условие (46) является обобщением соответствующих условий [9] на случай матричной краевой задачи (42).

8.2 Условия разрешимости

Предположим, что для краевой задачи (42) имеет место критический случай, при этом условие (46) выполнено и задача (40), (41) в малой окрестности решения

$$Z_0(t, \Theta_r) = W(t, \Theta_r) + G[F(s, \varepsilon); \mathcal{A}(\varepsilon)](t)$$

порождающей задачи (42) имеет решение

$$Z(t, \varepsilon) = Z_0(t, \Theta_r) + X(t, \varepsilon), \quad \Theta_r \in \mathbb{R}^{\alpha \times \beta},$$

для которого в достаточно малой окрестности начального значения собственной функции $\mu_0(\varepsilon)$ существует непрерывная собственная функция

$$h(\varepsilon) = h_0(\varepsilon) + \zeta(\varepsilon), \quad h_0(\varepsilon), \zeta(\varepsilon) \in \mathbb{C}_\rho[0; \varepsilon_0].$$

Таким образом, приходим к задаче о нахождении решения

$$X(t, \varepsilon) : \quad X(\cdot, \varepsilon) \in \mathbb{C}_{\alpha \times \beta}^1[a, b], \quad X(t, \cdot) \in \mathbb{C}_{\alpha \times \beta}[0, \varepsilon_0]$$

и собственной функции $\zeta(\varepsilon)$ матричной нетеровой краевой задачи

$$dX(t, \varepsilon)/dt = AX(t, \varepsilon) + X(t, \varepsilon)B +$$

$$+\varepsilon\Phi(Z_0(t, c_0(\varepsilon)) + X(t, \varepsilon), h_0(\varepsilon) + \zeta(\varepsilon), t, \varepsilon), \quad \mathcal{L}X(\cdot, \varepsilon) = 0, \quad (47)$$

разрешимой тогда и только тогда, когда

$$P_{Q_d^*}\mathcal{MLK}[\Phi(Z_0(t, c_0(\varepsilon)) + X(t, \varepsilon), h_0(\varepsilon) + \zeta(\varepsilon), t, \varepsilon)](\cdot) = 0.$$

Обозначим вектор

$$\check{c}_0(\varepsilon) := \begin{bmatrix} c_0(\varepsilon) \\ h_0(\varepsilon) \end{bmatrix} \in \mathbb{C}_{r+\rho}[0, \varepsilon_0].$$

В силу непрерывности по $Z(t, \varepsilon)$ и $\mu(\varepsilon)$ нелинейной функции $\Phi(Z(t, \varepsilon), \mu(\varepsilon), t, \varepsilon)$ в малой окрестности решения порождающей задачи (42) и начального значения $h_0(\varepsilon)$ функции $h(\varepsilon)$ приходим к следующему уравнению

$$\mathcal{F}(\check{c}_0(\varepsilon)) := \mathcal{MLK}[\Phi(Z_0(t, c_0(\varepsilon)), h_0(\varepsilon), t, \varepsilon)](\cdot) = 0.$$

Необходимые условия существования решения матричной краевой задачи (40), (41) в случае параметрического резонанса определяет следующая лемма, являющаяся обобщением соответствующего утверждения [42] на случай матричной краевой задачи, а также [9, 33] на случай параметрического резонанса и явной зависимости неоднородностей порождающей краевой задачи от малого параметра.

Лемма 8.1 *Пусть матричная краевая задача (40), (41) представляет критический ($P_{Q_d^*} \neq 0$) случай и выполнено условие разрешимости (46) порождающей задачи (42). Предположим также, что в малой окрестности порождающего решения $Z_0(t, c_0(\varepsilon))$ матричная краевая задача (40), (41) имеет решение*

$$Z(\cdot, \varepsilon) \in \mathbb{C}_{\alpha \times \beta}^1[a; b], \quad Z(t, \cdot) \in \mathbb{C}_{\alpha \times \beta}[0; \varepsilon_0],$$

при этом в достаточно малой окрестности функции $h_0(\varepsilon)$ существует собственная функция $h(\varepsilon) \in \mathbb{C}_\rho[0; \varepsilon_0]$. Тогда имеет место равенство

$$\mathcal{F}(\check{c}_0(\varepsilon)) = 0. \quad (48)$$

По аналогии с нетеровыми слабонелинейными краевыми задачами в критическом случае [9], а также периодическими краевыми задачами в случае параметрического резонанса [33, 35, 36], уравнение (48) будем называть уравнением для порождающих функций матричной краевой задачи (40), (41) в случае параметрического резонанса. Корни уравнения для порождающих функций (48), в данном случае — матрицы $\Theta_0(\varepsilon) \in \mathbb{R}^{\alpha \times \beta}$, а также собственные функции $h_0(\varepsilon)$ определяют порождающее решение $Z_0(t, \Theta_0(\varepsilon))$, в малой окрестности которого могут существовать искомые решения исходной матричной краевой задачи (40), (41) в случае параметрического резонанса. Если же уравнение (48) не имеет корней

$$\Theta_0(\varepsilon) \in \mathbb{C}_{\alpha \times \beta}[0; \varepsilon_0], \quad h_0(\varepsilon) \in \mathbb{C}_\rho[0; \varepsilon_0],$$

то исходная матричная краевая задача (40), (41) в случае параметрического резонанса не имеет искомых решений. Предположим, что уравнение для порождающих функций (48) имеет непрерывные действительные корни. Фиксируя одно из решений $\check{c}_0(\varepsilon) \in \mathbb{C}_{r+\rho}[0; \varepsilon_0]$ уравнения (48), приходим к задаче об отыскании решения

$$X(t, \varepsilon) : X(\cdot, \varepsilon) \in \mathbb{C}_{\alpha \times \beta}^1[a; b], \quad X(t, \cdot) \in \mathbb{C}_{\alpha \times \beta}[0, \varepsilon_0]$$

матричной краевой задачи (40), (41) в окрестности порождающего решения

$$Z_0(t, \Theta_r(\varepsilon)) = W(t, \Theta_r(\varepsilon)) + G[F(s); \mathcal{A}(\varepsilon)](t),$$

$$\Theta_r(\varepsilon) := \mathcal{M}^{-1}[P_{Q_r} c_r(\varepsilon)],$$

а также функции

$$h(\varepsilon) := h_0(\varepsilon) + \zeta(\varepsilon), \quad \zeta(\varepsilon) \in \mathbb{C}_\rho[0, \varepsilon_0]$$

в окрестности точки $h_0(\varepsilon)$. В указанной окрестности имеет место разложение вектор-функции

$$\begin{aligned} & \Phi[Z_0(t, \Theta_0(\varepsilon)) + X(t, \varepsilon), h_0(\varepsilon) + \zeta(\varepsilon), t, \varepsilon] = \\ & = \Phi[Z_0(t, \Theta_0(\varepsilon)), h_0(\varepsilon), t, \varepsilon] + D_X[Z_0(t, \Theta_0(\varepsilon)), h_0(\varepsilon), X(t, \varepsilon)] + \\ & \quad + D_h[Z_0(t, \Theta_0(\varepsilon)), h_0(\varepsilon), \zeta(\varepsilon)] + \\ & \quad + R[Z_0(t, \Theta_0(\varepsilon)) + X(t, \varepsilon), h_0(\varepsilon) + \zeta(\varepsilon), t, \varepsilon]. \end{aligned}$$

Действительно, в малой окрестности решения $\check{c}_0(\varepsilon)$ уравнения для порождающих порождающих функций (48) имеет место разложение вектор-функции [43, с. 636]

$$\begin{aligned} & \mathcal{M}\Phi[Z_0(t, \Theta_0(\varepsilon)) + X(t, \varepsilon), h_0(\varepsilon) + \zeta(\varepsilon), t, \varepsilon] = \\ & = \mathcal{M}\Phi[Z_0(t, \Theta_0(\varepsilon)), h_0(\varepsilon), t, \varepsilon] + \\ & + \mathcal{A}_x[Z_0(t, \Theta_0(\varepsilon)), h_0(\varepsilon)]x(t, \varepsilon) + \mathcal{A}_\zeta[Z_0(t, \Theta_0(\varepsilon)), h_0(\varepsilon)]\zeta(\varepsilon) + \\ & + \mathcal{R}[Z_0(t, \Theta_0(\varepsilon)) + X(t, \varepsilon), h_0(\varepsilon) + \zeta(\varepsilon), t, \varepsilon]. \end{aligned}$$

Здесь

$$\mathcal{A}_x[Z_0(t, \Theta_0(\varepsilon)), h_0(\varepsilon)] := \frac{\partial}{\partial x} \Phi[Z(t, \varepsilon), h(\varepsilon), t, \varepsilon] \left| \begin{array}{l} X(t, \varepsilon) = 0 \\ \zeta(\varepsilon) = 0 \end{array} \right.$$

$-(\alpha \cdot \beta \times \alpha \cdot \beta)$ – матрица,

$$\mathcal{A}_\zeta[Z_0(t, \Theta_0(\varepsilon)), h_0(\varepsilon)] := \frac{\partial}{\partial \zeta} \Phi[Z(t, \varepsilon), h(\varepsilon), t, \varepsilon] \left| \begin{array}{l} X(t, \varepsilon) = 0 \\ \zeta(\varepsilon) = 0 \end{array} \right.$$

— $(\alpha \cdot \beta \times \rho)$ — матрица, $\mathcal{R}[Z(t, \varepsilon), h(\varepsilon), t, \varepsilon]$ — остаток этого разложения и

$$x(t, \varepsilon) := \mathcal{M}X(t, \varepsilon) \in \mathbb{C}_{\alpha\beta}^1[a; b]$$

— неизвестная вектор-функция. Таким образом

$$\begin{aligned} D_X[Z_0(t, \Theta_0(\varepsilon)), h_0(\varepsilon), X(t, \varepsilon)] &:= \\ &= \mathcal{M}^{-1}\{\mathcal{A}_x[Z_0(t, \Theta_0(\varepsilon)), h_0(\varepsilon)]x(t, \varepsilon)\} \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} D_h[Z_0(t, \Theta_0(\varepsilon)), h_0(\varepsilon), \zeta(\varepsilon)] &:= \\ &= \mathcal{M}^{-1}\{\mathcal{A}_\zeta[Z_0(t, \Theta_0(\varepsilon)), h_0(\varepsilon)]\zeta(\varepsilon)\} \end{aligned}$$

— дифференциалы матричной функции

$$\Phi[Z_0(t, \Theta_0(\varepsilon)) + X(t, \varepsilon), h_0(\varepsilon) + \zeta(\varepsilon), t, \varepsilon] \in \mathbb{C}_{\alpha \times \beta}^1[a; b]$$

и

$$R[Z(t, \varepsilon), h(\varepsilon), t, \varepsilon] := \mathcal{M}^{-1}\{\mathcal{R}[Z(t, \varepsilon), h(\varepsilon), t, \varepsilon]\} \in \mathbb{C}_{\alpha \times \beta}^1[a; b]$$

— остаток этого разложения. С учетом уравнения для порождающих функций (48), а также последнего разложения задача о нахождении решения

$$X(t, \varepsilon) = W(t, \Theta_r(\varepsilon)) + X^{(1)}(t, \varepsilon)$$

и собственной функции $\zeta(\varepsilon)$ матричной нетеровой краевой задачи (47) разрешима тогда и только тогда, когда

$$\begin{aligned} P_{Q_d^*} \mathcal{MLK} \{ &D_X[Z_0(t, \Theta_0(\varepsilon)), h_0(\varepsilon), X(t, \varepsilon)] + \\ &+ D_h[Z_0(t, \Theta_0(\varepsilon)), h_0(\varepsilon), \zeta(\varepsilon)] + \\ &+ R[Z_0(t, \Theta_0(\varepsilon)) + X(t, \varepsilon), h_0(\varepsilon) + \zeta(\varepsilon), t, \varepsilon] \}(\cdot) = 0. \end{aligned}$$

Здесь $W(t, \Theta_r(\varepsilon))$ — общее решение однородной части краевой задачи (47) и

$$X^{(1)}(t, \varepsilon) := \varepsilon G[\Phi(Z(s, \varepsilon), h(\varepsilon), s, \varepsilon); 0](t)$$

— частное решение матричной краевой задачи (47). Обозначим $\xi_j(\varepsilon)$ скалярные функции, определяющие разложение матрицы

$$\Theta_r(\varepsilon) = \sum_{j=1}^{\alpha \cdot \beta} \Xi^{(j)} \xi_j(\varepsilon), \quad \xi_j(\varepsilon) \in \mathbb{C}[0, \varepsilon_0], \quad j = 1, 2, \dots, \alpha \cdot \beta$$

по векторам $\Xi^{(j)} \in \mathbb{R}^{\alpha \times \beta}$ базиса пространства $\mathbb{R}^{\alpha \times \beta}$, вектор

$$\check{c}(\varepsilon) := \begin{pmatrix} \xi(\varepsilon) \\ \zeta(\varepsilon) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{\alpha\beta+\rho}, \quad \xi(\varepsilon) \in \mathbb{R}^{\alpha\beta}, \quad \zeta(\varepsilon) = \sum_{j=1}^{\rho} \theta^{(j)} \zeta_j(\varepsilon);$$

здесь $\theta^{(j)} \in \mathbb{R}^{\rho}$, $j = 1, 2, \dots, \rho$ — естественный базис [11] пространства \mathbb{R}^{ρ} и $\zeta_j(\varepsilon)$ — константы, определяющие разложение векторной функции $\zeta(\varepsilon) \in \mathbb{R}^{\rho}$ по векторам $\theta^{(j)}$ базиса пространства \mathbb{R}^{ρ} . Таким образом, матричная краевая задача (47) разрешима тогда и только тогда, когда

$$\begin{aligned} P_{Q_d^*} \mathcal{MLK} \{ & D_X [Z_0(t, \Theta_0(\varepsilon)), h_0(\varepsilon), W(t, \Theta_r(\varepsilon))] + \\ & + D_h [Z_0(t, \Theta_0(\varepsilon)), h_0(\varepsilon), \zeta(\varepsilon)] \} (\cdot) = \\ = - & P_{Q^*} \mathcal{MLK} \{ D_X [Z_0(t, \Theta_0(\varepsilon)), h_0(\varepsilon), X^{(1)}(t, \varepsilon)] + \\ & + R[Z(t, \varepsilon), h(\varepsilon), t, \varepsilon] \} (\cdot). \end{aligned}$$

Найденное необходимое и достаточное условие разрешимости матричной краевой задачи (47) представляет собой линейное алгебраическое уравнение относительно матрицы $\Theta_r(\varepsilon)$, а также векторной функции $\zeta(\varepsilon)$. Обозначим матрицу

$$\mathcal{D}_0 = \mathcal{D}(\check{c}_0(\varepsilon)) := \{ \mathcal{D}_0^{(0)} ; \mathcal{D}_0^{(1)} \} \in \mathbb{C}_{d \times (\alpha \cdot \beta + \rho)}[0, \varepsilon_0];$$

здесь

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_0^{(0)}(\check{c}_0(\varepsilon)) &:= \\ = \left\{ P_{Q_d^*} \mathcal{MLK} \left\{ D_X \left[Z_0(t, \Theta_0), h_0, W(t, \Xi^{(i)}) \right] \right\}(\cdot) \right\} &\Bigg|_{i=0}^{\alpha \cdot \beta}, \\ \mathcal{D}_0^{(1)}(\check{c}_0(\varepsilon)) &:= \\ = \left\{ P_{Q_d^*} \mathcal{MLK} \left\{ D_h \left[Z_0(t, \Theta_0(\varepsilon)), h_0(\varepsilon), \theta^{(j)} \right] \right\}(\cdot) \right\} &\Bigg|_{j=0}^{\rho}. \end{aligned}$$

Аналогично предложенной выше схеме решения линейного алгебраического уравнения (44) приходим к уравнению

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_0 \check{c}(\varepsilon) = -P_{Q_d^*} \mathcal{MLK} \left\{ D_X \left[Z_0(t, \Theta_0(\varepsilon)), h_0(\varepsilon), X^{(1)}(t, \varepsilon) \right] + \right. \\ \left. + R \left[Z(t, \varepsilon), h(\varepsilon), t, \varepsilon \right] \right\}(\cdot) \end{aligned}$$

относительно векторной функции $\check{c}(\varepsilon) \in \mathbb{R}^{\alpha\beta+\rho}$. При условии [42]

$$P_{\mathcal{D}_0^*} P_{Q_d^*} = 0, \quad \mathcal{D}_0^+ (\check{c}_0(\varepsilon)) \in \mathbb{C}_{(\alpha \cdot \beta + \rho) \times d} [0, \varepsilon_0] \quad (49)$$

матричная краевая задача (40), (41) имеет по меньшей мере одно решение. Здесь $P_{\mathcal{D}_0^*} - (d \times d)$ — матрица-ортопроектор:

$$P_{\mathcal{D}_0^*(\check{c}_0(\varepsilon))} : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{N}(\mathcal{D}_0^*(\check{c}_0(\varepsilon))),$$

$D_0^+(\check{c}_0(\varepsilon))$ — псевдообратная по Муру-Пенроузу матрица [9, 11]. Таким образом, при условии (49) по меньшей мере одно решение матричной краевой задачи (40), (41) определяет следующая операторная система

$$Z(t, \varepsilon) = Z_0(t, \Theta_0(\varepsilon)) + X(t, \varepsilon), \quad h(\varepsilon) := h_0(\varepsilon) + \zeta(\varepsilon),$$

$$\begin{aligned}
X(t, \varepsilon) &= W(t, \Theta_r(\varepsilon)) + X^{(1)}(t, \varepsilon), \quad \zeta(\varepsilon) = \mathfrak{J}_1 \check{c}(\varepsilon), \\
\check{c}(\varepsilon) &= -\mathcal{D}_0^+ P_{Q_d^*} \mathcal{MLK} \left\{ D_X \left[Z_0(t, \Theta_0(\varepsilon)), h_0(\varepsilon), X^{(1)}(t, \varepsilon) \right] + \right. \\
&\quad \left. + R \left[Z(t, \varepsilon), h(\varepsilon), t, \varepsilon \right] \right\}(\cdot), \quad \Theta_r(\varepsilon) = \mathcal{M}^{-1} [\mathfrak{J}_0 \check{c}(\varepsilon)], \\
X^{(1)}(t, \varepsilon) &= \varepsilon G \left[\Phi(Z_0(s, \Theta_0(\varepsilon)) + X(s, \varepsilon), \right. \\
&\quad \left. h_0(\varepsilon) + \zeta(\varepsilon), s, \varepsilon); 0 \right](t);
\end{aligned} \tag{50}$$

здесь

$$\mathfrak{J}_0 := \begin{pmatrix} I_{\alpha\beta} & O \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{\alpha\beta \times (\rho+\alpha\beta)}, \quad \mathfrak{J}_1 := \begin{pmatrix} O & \dots & I_\rho \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{\rho \times (\rho+\alpha\beta)}$$

— постоянные матрицы. Для нахождения приближенного решения операторной системы (50) применим метод последовательных приближений [9, 33, 43]. Таким образом, доказано следующее утверждение, которое является обобщением соответствующего утверждения для нетеровых краевых задач для систем обыкновенных дифференциальных уравнений на случай матричных краевых задач с параметрическим возбуждением [35, 36, 42, 46].

Теорема 8.1 Пусть матричная краевая задача (40), (41) представляет критический ($P_{Q^*} \neq 0$) случай и выполнено условие разрешимости (46) порождающей задачи (42). Тогда для каждого корня

$$c_0(\varepsilon) \in \mathbb{C}_r[0, \varepsilon_0], \quad h_0(\varepsilon) \in \mathbb{C}_\rho[0, \varepsilon_0]$$

уравнения для порождающих функций (48) при условии (49) в малой окрестности решения $Z_0(t, c_0(\varepsilon))$ порождающей задачи (42) и в достаточно малой окрестности начального значения $h_0(\varepsilon)$ функции $h(\varepsilon)$ задача (47) имеет по меньшей мере одно решение

$$X(t, \varepsilon) : \quad X(\cdot, \varepsilon) \in \mathbb{C}^1[a, b], \quad X(t, \cdot) \in \mathbb{C}[0, \varepsilon_0]$$

и существует непрерывная функция $h(\varepsilon) : h(0) := h_0^*$. При этом в малой окрестности решения $Z_0(t, c_0(\varepsilon))$ порождающей задачи (42) и в достаточно малой окрестности начального значения $h_0(\varepsilon)$ функции $h(\varepsilon)$ матричная краевая задача (40), (41) имеет по меньшей мере одно решение

$$Z(t, \varepsilon) : Z(\cdot, \varepsilon) \in \mathbb{C}_{\alpha \times \beta}^1[a, b], \quad Z(t, \cdot) \in \mathbb{C}_{\alpha \times \beta}[0, \varepsilon_0],$$

которые определяет операторная система (50); для нахождения этого решения применима итерационная схема

$$\begin{aligned} Z_{k+1}(t, \varepsilon) &= Z_0(t, \Theta_0(\varepsilon)) + X_{k+1}(t, \varepsilon), \quad h_{k+1}(\varepsilon) := h_0(\varepsilon) + \zeta_{k+1}(\varepsilon), \\ X_{k+1}(t, \varepsilon) &= W(t, \Theta_r(\varepsilon)) + X_{k+1}^{(1)}(t, \varepsilon), \quad k = 0, 1, 2 \dots, \quad (51) \\ \check{c}_{k+1}(\varepsilon) &= -\mathcal{D}_0^+ P_{Q_d^*} \mathcal{MLK} \left\{ D_X [Z_0(t, \Theta_0(\varepsilon)), h_0(\varepsilon), X_k^{(1)}(t, \varepsilon)] + \right. \\ &\quad \left. + R[Z_k(t, \varepsilon), h_k(\varepsilon), t, \varepsilon] \right\}(\cdot), \quad \zeta_{k+1}(\varepsilon) = \mathfrak{J}_1 \check{c}_{k+1}(\varepsilon), \\ \Theta_{r_{k+1}}(\varepsilon) &= \mathcal{M}^{-1} [\mathfrak{J}_0 \check{c}_{k+1}(\varepsilon)], \quad X_{k+1}^{(1)}(t, \varepsilon) = \\ &= \varepsilon G [\Phi(Z_0(s, \Theta_0(\varepsilon)) + X_k(s, \varepsilon), h_0(\varepsilon) + \zeta_k(\varepsilon), s, \varepsilon); 0](t). \end{aligned}$$

Длина отрезка $[0, \varepsilon^*]$, на котором применим метод простых итераций, может быть оценена, как посредством мажорирующих уравнений Ляпунова [9, 33], так и непосредственно из условия сжимаемости соответствующего оператора аналогично [48, 47]. В случае параметрического резонанса доказанная теорема является обобщением соответствующих утверждений [40, 41, 42] на случай матричной краевой задачи и векторной функции $h(\varepsilon)$. В отсутствие параметрического резонанса доказанная теорема является обобщением соответствующего утверждения [9, 33] на случай явной зависимости неоднородностей $F(t, \varepsilon)$ и $\mathcal{A}(\varepsilon)$ порождающей краевой задачи (41) от малого параметра.

8.3 Периодическая задача для уравнения типа Матье

Условия доказанной теоремы 8.1 выполняются в случае 2π -периодической задачи для уравнения типа Матье

$$Z'(t, \varepsilon) = AZ(t, \varepsilon) + Z(t, \varepsilon)B + \varepsilon \Phi(Z(t, \varepsilon), h(\varepsilon), t, \varepsilon), \quad (52)$$

где

$$\begin{aligned} \Phi(Z(t, \varepsilon), h(\varepsilon), t, \varepsilon) := & \mu(\varepsilon)S_1Z(t, \varepsilon) + \nu(\varepsilon)Z(t, \varepsilon)S_2 + \\ & + S_3 \cos^2 t Z(t, \varepsilon), \quad h(\varepsilon) := (\mu(\varepsilon) \quad \nu(\varepsilon)) \in \mathbb{C}_2[0, \varepsilon_0], \end{aligned}$$

кроме того

$$\begin{aligned} A := & \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad B := \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}, \quad S_1 := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ S_2 := & \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad S_3 := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Общее решение полуоднородной задачи Коши для матричного дифференциального уравнения $Z'(t) = AZ(t) + Z(t)B$, $Z(0) = \Theta$ имеет вид

$$W(t, \Theta) = U(t) \cdot \Theta \cdot V(t), \quad \Theta \in \mathbb{R}^{2 \times 2},$$

где $U(t)$ и $V(t)$ — нормальные ($U(0) = I_2$, $V(0) = I_2$) фундаментальные матрицы:

$$\begin{aligned} U(t) = & \begin{pmatrix} \cos t + \sin t & -2 \sin t \\ \sin t & \cos t - \sin t \end{pmatrix}, \\ V(t) = & \begin{pmatrix} \cos 2t - \sin 2t & -\sin 2t \\ 2 \sin 2t & \cos 2t + \sin 2t \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Обозначим

$$\Xi^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Xi^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \dots, \quad \Xi^{(4)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

— естественный базис пространства $\mathbb{R}^{2 \times 2}$. Общее решение однородной части матричной задачи (52) определяет матрица $\mathcal{Q} = 0$ и ее ортопроекторы $P_{\mathcal{Q}} = P_{\mathcal{Q}^*} = I_4$. Таким образом, для матричной 2π -периодической задачи для уравнения типа Матье (52) имеет место критический случай; уравнение (48) при этом имеет действительный корень

$$\check{c}_0(\varepsilon) := \begin{bmatrix} c_0(\varepsilon) \\ h_0(\varepsilon) \end{bmatrix} \in \mathbb{C}_6[0, \varepsilon_0], \quad h_0(\varepsilon) := \begin{bmatrix} \mu_0(\varepsilon) \\ \nu_0(\varepsilon) \end{bmatrix} \in \mathbb{C}_2[0, \varepsilon_0],$$

где

$$c_0(\varepsilon) = \frac{1}{20} \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 - \sqrt{3} & -1 + \sqrt{3} \end{pmatrix}^*$$

и

$$\mu_0(\varepsilon) \equiv -\frac{1}{3}(2 + \sqrt{3}), \quad \nu_0(\varepsilon) \equiv -\frac{1}{3}.$$

Этому корню соответствует матрица полного ранга $D_0(\check{c}_0(\varepsilon))$, при этом условие (49) выполнено, следовательно, согласно доказанной теореме, в малой окрестности порождающего решения $Z_0(t, c_0(\varepsilon))$ и в достаточно малой окрестности начального значения $h_0(\varepsilon)$ функции $h(\varepsilon)$ 2π -периодическая задача для уравнения типа типа (52) имеет по меньшей мере одно решение

$$Z(t, \varepsilon) : Z(\cdot, \varepsilon) \in \mathbb{C}_{2 \times 2}[a, b], \quad Z(t, \cdot) \in \mathbb{C}_{2 \times 2}[0, \varepsilon_0].$$

Заметим, что матрица \mathcal{D}_0 , ключевая при исследовании матричных краевых задач (40), (41) в случае параметрического резонанса, как и в случае нетеровых краевых задач

для систем обыкновенных дифференциальных уравнений, может быть найдена непосредственно из уравнения для порождающих функций (48). Действительно:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \check{c}} P_{\mathcal{Q}_d^*} \mathcal{M} \left\{ \mathcal{L} K \left[\Phi(Z_0(s, \Theta_0(\varepsilon)), h_0(\varepsilon), s, \varepsilon) \right] (\cdot) \right\} = \\ = \frac{\partial}{\partial(\xi, \zeta)} P_{\mathcal{Q}_d^*} \mathcal{M} \left\{ \mathcal{L} K \left\{ D_X \left[Z_0(s, \Theta_0(\varepsilon)), h_0(\varepsilon), \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. W(s, \sum_{j=1}^{\alpha \cdot \beta} \Xi^{(j)} \xi_j(\varepsilon)) + X^{(1)}(s, \varepsilon) \right] + \right. \right. \\ \left. \left. + D_h \left[Z_0(s, \Theta_0(\varepsilon)), h_0(\varepsilon), \sum_{j=1}^{\rho} \theta^{(j)} \zeta_j(\varepsilon) \right] \right\} (\cdot) \right\} \Bigg| \begin{array}{l} X(t, \varepsilon) = 0 \\ \zeta(\varepsilon) = 0 \end{array}, \end{aligned}$$

следовательно

$$\frac{\partial}{\partial \check{c}} P_{\mathcal{Q}_d^*} \mathcal{M} \left\{ \mathcal{L} K \left[\Phi(Z_0(s, \Theta_0(\varepsilon)), h_0(\varepsilon), s, \varepsilon) \right] (\cdot) \right\} = \mathcal{D}_0.$$

Предложенная схема исследовании матричных краевых задач (40), (41) в случае параметрического резонанса, как и в случае нетеровых краевых задач для систем обыкновенных дифференциальных уравнений, аналогично [9, 15, 49, 50] может быть перенесена на матричные краевые задачи с запаздыванием, аналогично [9, 48, 44, 45] на автономные матричные краевые задачи, аналогично [51] на линейные нетеровы краевые задачи для матричных дифференциальных уравнений с импульсным воздействием в случае параметрического резонанса, аналогично [52, 53] на линейные нетеровы краевые задачи для матричных разностных уравнений в случае параметрического резонанса.

Список литературы

- [1] Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. — М.: Наука. — 1988. — 552 с.
- [2] Беллман Р. Введение в теорию матриц. — М.: Наука. — 1969. — 367 с.
- [3] Ланкастер П. Теория матриц. — М.: Наука. — 1978. — 280 с.
- [4] Далецкий Ю.Л., Крейн М.Г. Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. — М.: Наука. — 1970. — 534 с.
- [5] Коробов В.И., Бебия М.О. Стабилизация одного класса нелинейных систем, неуправляемых по первому приближению // Доп. НАН України. — 2014. — № 2. — С. 20–25.
- [6] Boichuk A.A., Krivosheya S.A. Criterion of the solvability of matrix equations of the Lyapunov type // Ukrainian Mathematical Journal. — 1998. — 50, № 8. — P. 1162 — 1169.
- [7] Boichuk A.A., Krivosheya S.A. A Critical Periodic Boundary Value Problem for a Matrix Riccati Equation // Differential Equations. — 2001. — 37, № 4. — P. 464 — 471.
- [8] Чуйко С.М. О решении матричного уравнения Сильвестра // Вестник Одесского национального университета. Сер. математика и механика. — 2014, 19, Вип. 1 (21), С. 49 — 57.
- [9] Бойчук А.А., Журавлев В.Ф., Самойленко А.М. Обобщенно-обратные операторы и нетеровы краевые

- задачи. — Киев: Ин-т математики НАН Украины, — 1995. — 318 с.
- [10] Чуйко С.М. О решении матричных уравнений Ляпунова // Вестник Харьковского национального университета им. В.Н. Каразина. Серия: Математика, прикладная математика и механика. — № 1120. — 2014. — С. 85 – 94.
- [11] Воеводин В.В., Кузнецов Ю.А. Матрицы и вычисления. — М.: Наука. — 1984. — 318 с.
- [12] Чуйко С.М. Оператор Грина линейной нетеровой краевой задачи для матричного дифференциального уравнения // Динамические системы. — 2014. — 4 (32), № 1 — 2. — С. 101 — 107.
- [13] Деревенский В.П. Матричные уравнения Бернулли // Известия вузов. Математика. — 2008. — № 2. — Р. 14–23.
- [14] Чуйко С.М. Обобщенное матричное дифференциально алгебраическое уравнение // Український математичний вісник. — 2015. — 12, № 1. — С. 11 – 26.
- [15] Чуйко С.М. Оператор Грина обобщенной матричной дифференциально-алгебраической краевой задачи // Сибирский математический журнал. — 2015. — 56, № 4. — С. 942 — 951.
- [16] Chuiko S.M. The Green's operator of a generalized matrix linear differential-algebraic boundary value problem // Siberian Mathematical Journal. — 2015. — 56, № 4. — pp. 752 – 760.

- [17] Чуйко С.М. О решении обобщенного матричного уравнения Сильвестра // Чебышевский сборник. — 2015. — **16**, Вып. 1. — С. 52 – 66.
- [18] Арнольд В.И., Варченко А.Н., Гусейн-Заде С.М. Особенности дифференцируемых отображений. 3 изд. М.: Изд. МЦНМО. — 2009. — 672 с.
- [19] Chuiko S.M., Chuiko E.V., Belushenko A.V. On a regularization method for solving linear matrix equation // Bull. of Taras Shevchenko National Univ. Ser. Math. — 2014. — **1**, pp. 12 – 14.
- [20] Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач. — М.: Наука, — 1986. — 288 с.
- [21] Chuiko S.M. On the regularization of a linear Fredholm boundary-value problem by a degenerate pulsed action // Journal of Mathematical Sciences — 2014. — **197**, № 1. — pp. 138 – 150.
- [22] Азбелев Н.В., Максимов Н.П., Рахматуллина Л.Ф. Введение в теорию функционально-дифференциальных уравнений. — М.: Наука, 1991. — 277 с.
- [23] Бойчук А.А. Конструктивные методы анализа краевых задач. — Киев.: Наук. думка. — 1990. — 96 с.
- [24] Campbell S.L. Singular Systems of differential equations. — San Francisco – London – Melbourne: Pitman Advanced Publishing Program. — 1980. — 178 p.

- [25] Чистяков В.Ф. Алгебро-дифференциальные операторы с конечномерным ядром. — Новосибирск; Наука, 1996. — 280 с.
- [26] Бояринцев Ю.Е., Чистяков В.Ф. Алгебро-дифференциальные системы. Методы решения и исследования. — Новосибирск. — Наука. — 1998. 224 с.
- [27] Чистяков В.Ф., Щеглова А.А. Избранные главы теории алгебро-дифференциальных систем. — Новосибирск; Наука, 2003. — 317 с.
- [28] Чуйко С.М. Линейные нетеровы краевые задачи для дифференциально-алгебраических систем // Комп. исследов. и моделирование, 2013, **5**, №5, С. 769 — 783.
- [29] Бойчук А.А., Шегда Л.М Вироджені нетерові крайові задачі // Нелінійні коливання. — 2007. — **10**, № 3. — С. 303 — 312.
- [30] Чуйко С.М. Линейная нетерова краевая задача для вырожденной дифференциально-алгебраической системы // Spectral and Evolution Problems. — **23**. — 2013. С. 148–157.
- [31] Boichuk A.A., Pokutnyi A.A., Chistyakov V.F. Application of perturbation theory to the solvability analysis of differential algebraic equations // Computational Mathematics and Mathematical Physics. — 2013. — **53**. — №6. — Р. 777 — 788.
- [32] Крейн С.Г. Линейные уравнения в банаховом пространстве. М.: Наука, 1971. — 104 с.

- [33] Гребенников Е.А., Рябов Ю.А. Конструктивные методы анализа нелинейных систем. — М.: Наука, 1979. — 432 с.
- [34] Мандельштам Л.И., Папалекси Н.Д. О параметрическом возбуждении электрических колебаний. Журн. техн. физики. 1934. № 3. С. 5 — 29.
- [35] Шмидт Г. Параметрические колебания. — М.: Мир, 1978. — 336 с.
- [36] Якубович В.А., Старжинский В.М. Параметрический резонанс в линейных системах. — М.: Наука, 1987. — 328 с.
- [37] Силин В.П. Параметрическое воздействие излучения большой мощности на плазму. — М. : Наука, 1973. — 287 с.
- [38] Болотин В. В. Динамическая устойчивость упругих систем. — М.: Гостехиздат, 1956. — 600 с.
- [39] Копелев Ю.Ф. Параметрические колебания станков. — Металлорежущие станки: респ межвед. науч. — техн. сб. — Киев, 1984. Вып. 12. — С. 3 — 8.
- [40] Чуйко С.М., Кулиш П.В. Линейная нетерова краевая задача в случае параметрического резонанса // Труды ИПММ НАН Украины. — 2012. — **24**. — С. 243 — 252.
- [41] Чуйко С.М., Чуйко Е.В., Кулиш П.В. Периодическая краевая задача для уравнения типа Хилла в случае параметрического резонанса // Динамические системы. — **3(32)**. — №1. — 2013.

- [42] Чуйко С.М. Нелинейная нетерова краевая задача в случае параметрического резонанса // Нелинейные колебания. — 2014. — **17**, № 1. — С. 137 — 148.
- [43] Канторович Л.В., Акилов Г.П. Функциональный анализ. — М.: Наука. — 1977. — 744 с.
- [44] Boichuk A., Chuiko S. Autonomous Weakly Nonlinear Boundary Value Problems in Critical Cases // Differential Equations. — 1992. — № 10, Р. 1353 — 1358.
- [45] Chuiko S.M., Boichuk I.A. An autonomous Noetherian boundary value problem in the critical case // Nonlinear Oscillations (N.Y.) — **12**. — 2009. № 3, Р. 405 — 416.
- [46] Chuiko S.M. Nonlinear Noetherian boundary-Value problem in the case of parametric resonance // Journal of Mathematical Sciences. — March, 2015, **205**, № 6, — pp. 859 — 870.
- [47] Чуйко А.С. Область сходимости итерационной процедуры для слабонелинейной краевой задачи // Нелинейные колебания. — 2005. — **8**, № 2.— С. 278 — 288.
- [48] Чуйко С.М. Область сходимости итерационной процедуры для автономной краевой задачи // Нелінійні коливання. — 2006. — **9**, № 3. — С. 416 — 432.
- [49] Бойчук А.А., Журавлев В.Ф. Построение решений линейных нетеровых операторных уравнений в гильбертовых пространствах // Докл. АН УССР. Сер. А. — 1990. — № 8. — С. 3 — 6.

- [50] *Chuiko S.M., Chuiko A.S.* On the approximate solution of periodic boundary value problems with delay by the least-squares method in the critical case // Nonlinear Oscillations (N.Y.) — **14**. — 2012. № 3. С. 445 — 460.
- [51] Чуйко С.М. Оператор Грина линейной нетеровой краевой задачи для матричного дифференциального уравнения с импульсным воздействием // Труды ИПММ НАН Украины. — 2014. — **28**. — С. 148 — 158.
- [52] Чуйко С.М. Обобщенный оператор Грина линейной нетеровой краевой задачи для матричного разностного уравнения // Таврический вестник информатики и математики. — 2015. — № 1 (26). — С. 104 — 116.
- [53] Чуйко С.М., Старкова О.В., Сысоев Д.В. Матричная нетерова краевая задача в случае параметрического резонанса // Таврический вестник информатики и математики. — 2015. — № 1 (26). — С. 117 — 134.

9 Совместные заседания семинара ИПММ НАНУ и кафедры математики

2 апреля 2015 г.

- Доктор физико-математических наук, профессор А.Л. Зуев. Modelling and control of a shell structure based on a finite dimensional variational formulation.
- Доктор физико-математических наук, профессор С.М. Чуйко. Нетеровы краевые задачи для матричных дифференциальных уравнений.
- Кандидат физико-математических наук, доцент С.О. Чайченко. Апроксимативні характеристики діагональних операторів у просторах Орлича.

22 апреля 2015 г.

- Доктор физико-математических наук, профессор С.М. Чуйко. О решениях обобщенного матричного уравнения Сильвестра.
- Доктор физико-математических наук, профессор С.М. Чуйко, кандидат физико-математических наук, доцент О.В. Старкова. Нелинейная нетерова краевая задача в случае параметрического резонанса.
- Доктор физико-математических наук, профессор С.М. Чуйко, аспирант Д.В. Сысоев. Нелинейная матричная краевая задача в случае параметрического резонанса.

10 Программа семинара, посвященного юбилею А.А. Бойчука

8 сентября 2015 г.

$10^{00} - 10^{15}$ Доктор физико-математических наук, профессор С.М Чуйко. Вступительное слово. А.А. Бойчук и Донбасский государственный педагогический университет.

$10^{15} - 10^{45}$ Член-корреспондент Национальной Академии наук Украины, доктор физико-математических наук, профессор В.Я. Гутлянский Уравнение Бельтрами: современная теория и ее приложения.

$10^{45} - 11^{45}$ Доктор физико-математических наук, профессор А.Е. Шишков. Локализация особенностей решений полулинейных параболических и эллиптических уравнений с вырождающимся абсорбционным потенциалом.

$12^{00} - 13^{00}$ Доктор физико-математических наук, старший научный сотрудник М.М. Маламуд. Детерминанты возмущения и тождества следов для граничных задач.

$13^{00} - 14^{00}$ Доктор физико-математических наук, профессор В.И. Рязанов. О проблеме Римана-Гильберта.

9 сентября 2015 г.

$10^{00} - 10^{30}$ Кандидат физико-математических наук, доцент С.О. Чайченко. Ряди Фур'є по системі раціональних функцій.

10³⁰ — 11³⁰ Доктор физико-математических наук, профессор С.М. Чуйко. О регуляризации матричной дифференциально-алгебраической краевой задачи.

12⁰⁰ — 13⁰⁰ Доктор физико-математических наук, профессор

И.И. Скрипник. О точных оценках решений квазилинейных эллиптических уравнений с нестандартными условиями роста через потенциалы Вольфа.

13⁰⁰ — 13³⁰ Доктор физико-математических наук, старший научный сотрудник В.Ф. Щербак. Синтез инвариантных многообразий в задачах наблюдения и идентификации динамических систем.

13³⁰ — 14⁰⁰ Кандидат физико-математических наук В.И. Могилевский. Спектральные и псевдоспектральные функции симметрических систем.

Работа выполнена при финансовой поддержке Государственного фонда фундаментальных исследований. Номер государственной регистрации 0109U000381.

Материалы расширенного семинара Института прикладной математики и механики НАН Украины и кафедры математики Донбасского государственного педагогического университета (к 65-летию члена-корреспондента НАН Украины А.А. Бойчука). — Славянск. — 2016. — 112 с.