УДК 373.5.016:531.1:51

Бєлошапка О.Я., Недоступ В.В.
[1] *старший викладач кафедри фізики, ДВНЗ «ДДПУ»*
e-mail: kafedrafiziki2018@gmail.com, ORCID 0000-0001-7448-3832
[2] *здобувач магістерського РВО фізико-математичного факультету, ДВНЗ «ДДПУ»*
e-mail: vladislavnedostup@gmail.com, ORCID 0009-0002-2525-6849

ДО ПИТАННЯ ЗВ'ЯЗКІВ МАТЕМАТИКИ ТА ФІЗИКИ

Стаття присвячена розв'язанню задачі з механіки і наочно демонструє зв'язок математики і фізики.
Ключові слова: *механіка*, *похідна*, *механічний рух*, *кривина*, *викладання фізики*.

Вступ

Розв'язання задач механіки за допомогою можливостей аналізу є цікавим. Звичайна фізична задача розв'язується за допомогою геометрії.

Мета: показати використання міжпредметних зв'язків на прикладі задачі з механіки.

Основна частина

Матеріальна точка у полі сили тяжіння $\vec{g}$ рухається гладкою поверхнею $y = y(x)$. Знайти залежність координат точки від часу, а також модуль сили реакції в залежності від часу.

Вектор кривини кривої (як плоскої, так і просторової) природно визначити як похідну одиничного вектора дотичної за натуральним параметром:

$$\vec{k} = \frac{d\vec{\tau}}{dl}$$

Знайдемо напрямок вектора кривини

$$\vec{\tau} \cdot \vec{\tau} = \tau^2,$$

$$\frac{d\vec{\tau}}{dl} \cdot \vec{\tau} + \vec{\tau} \cdot \frac{d\vec{\tau}}{dl} = 0,$$

$$2 \cdot \left(\frac{d\vec{\tau}}{dl} \cdot \vec{\tau} \right) = 0,$$

$$\frac{d\vec{\tau}}{dl} \cdot \vec{\tau} = 0.$$

Зрозуміло, що вектор кривини перпендикулярний до одиничного вектора дотичної і спрямований у бік вогнутості кривої. Таким чином вектор кривини співнапрямлений з вектором головної нормалі кривої:

$$\vec{k} \uparrow\uparrow \vec{n}$$

Модуль вектора кривини $\vec{k}$.

$$k = \left|\frac{d\vec{\tau}}{dl}\right|.$$

Оскільки модуль відношення дорівнює відношенню модулів

$$k = \frac{\left|d\vec{\tau}\right|}{\left|dl\right|}.$$

Очевидно, що

$$\left|d\tau\right| = \left|\vec{\tau}\right| \cdot \left|d\varphi\right|.$$

Оскільки $\left|\vec{\tau}\right| = 1$, то

$$\left|d\tau\right| = \left|d\varphi\right|,$$

де $\left|d\varphi\right|$ – модуль приросту кута φ.

Маємо:

$$k = \frac{\left|d\varphi\right|}{\left|dl\right|}.$$

Важливою перевагою цієї формули є те, що вона отримана шляхом аналізу кривої незалежно від способу її задання.

Знайдемо вираз для $\left|d\varphi\right|$ і $\left|dl\right|$ у випадку якщо крива задана у декартових прямокутних координатах.

Відомо

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{dy}{dx} = y',$$

$$\varphi(x) = \operatorname{arctg} y',$$

$$\frac{d\varphi}{dx} = \left(\operatorname{arctg} y'\right)'_x,$$

$$\frac{d\varphi}{dx} = \frac{y'}{1+\left(y'\right)^2}.$$

Таким чином модуль прирощення кута φ дорівнює

$$\left|d\varphi\right| = \frac{\left|y''\right|}{1+\left(y'\right)^2} \cdot \left|dx\right|.$$

За теоремою Піфагора:

$$\left(dl\right)^2 = \left(dx\right)^2 + \left(dy\right)^2,$$

$$\left|dl\right| = \sqrt{\left(dx\right)^2 + \left(dy\right)^2}.$$

Замінимо $dy = y'dx$

$$|dl| = \sqrt{1 + (y')^2} \cdot |dx|$$

Підставляємо і отримаємо

$$k = \frac{\dfrac{|y''|}{1 + (y')^2} \cdot |dx|}{\sqrt{1 + (y')^2} \cdot |dx|}.$$

Остаточно

$$k = \frac{|y''|}{\left(1 + (y')^2\right)^{\frac{3}{2}}}.$$

Для задач фізики представляє інтерес природній зв'язок кривини з радіусом кривини:

$$k = \frac{1}{R}.$$

Радіус кривини кривої

$$R = \frac{\left(1 + (y')^2\right)^{\frac{3}{2}}}{|y''|}.$$

Підкреслимо – ці формули для кривини та радіуса кривини справедливі лише в декартових координатах.

Також далі стануть в нагоді вирази для одиничного вектора дотичної і одиничного вектора нормалі.

За визначенням

$$\vec{\tau} = \frac{d\vec{l}}{\left|d\vec{l}\right|}$$

В декартовій системі координат можемо записати

$$d\vec{l} = dx \cdot \vec{i} + dy \cdot \vec{j},$$

де $d\vec{l}$ є вектор направлений у бік руху точки. Ми вважаємо, що точка рухається в додатному напрямку вісі Ox. Це означає що $dx > 0$

Отримаємо

$$\vec{\tau} = \frac{dx}{\sqrt{1 + (y')^2}dx} \cdot \vec{i} + \frac{dy}{\sqrt{1 + (y')^2}dx} \cdot \vec{j}$$

до кривої. Замінюючи $dy = y'dx$ і скоротивши отримаємо:

$$\vec{\tau}(x) = \frac{1}{\sqrt{1 + (y')^2}} \cdot \vec{i} + \frac{y'}{\sqrt{1 + (y')^2}} \cdot \vec{j}.$$

Таким чином ми отримали вираз для одиничного вектора дотичної, направленого в бік збільшення координати x.

DOI: https://doi.org/...

Якщо б ми захотіли отримати одиничний вектор дотичної напрямлений в бік зменшення x, то зробивши ті ж самі кроки, очевидно, отримали б

$$\vec{\tau}(x) = \frac{-1}{\sqrt{1+(y')^2}} \cdot \vec{i} + \frac{y'}{\sqrt{1+(y')^2}} \cdot \vec{j}\,.$$

Перейдемо до відшукання одиничного вектора нормалі – вектора з одиничним модулем, який напрямлений в бік опуклості кривої. Одиничний вектор нормалі знайдемо з умови $\vec{\tau} \cdot \vec{n} = 0$, а також того факту, що вектор нормалі повинен бути направлений в бік опуклості кривої.

Проміжки опуклості кривої визначаються точками перегину які знаходяться. за відомими правилами математичного аналізу. Після того як виявлені проміжки опуклості необхідно проаналізувати $\vec{\tau} \cdot \vec{j}$ і визначити знак проекцій вектора нормалі. Цим повністю визначається одиничний вектор нормалі. Після аналізу геометричної сторони питання далі легко перейти до фізичної суті задачі.

Другий закон Ньютона має вигляд:

$$\vec{F} = m\frac{d\vec{v}}{dt}\,.$$

Стосовно нашої задачі

$$m\vec{g} + \vec{N} = m\frac{d\vec{v}}{dt}\,.$$

Спроектуємо 2-й закон Ньютона на дотичну і нормаль.

Проекція на дотичну:

$$m\frac{dv}{dt} = m\vec{g} \cdot \vec{\tau}\,,$$

$$\frac{dv}{dt} = \vec{g} \cdot \vec{\tau}\,.$$

Проекція на нормаль:

$$m\frac{v^2}{R} = m\vec{g} \cdot \vec{n} - N\,.$$

Можемо знайти модуль сили реакції N як функцію координати x:

$$N(x) = m\vec{g} \cdot \vec{n} - m\frac{v^2}{R}\,.$$

Так як тертя відсутнє – справедливий закон збереження повної механічної енергії

$$E = const$$

$$\frac{mv^2}{2} + mgy = const$$

Із ЗЗЕ знайдемо залежність модуля швидкості від координати y:

$$v = v(y)\,.$$

Вектор прискорення вільного падіння вважаємо відомим і направленим перпендикулярно до вісі Ox.

Таким чином – ми знаємо все, що необхідно для знаходження модуля сили реакції

$$N(x) = m\vec{g} \cdot \vec{n} - m\frac{v^2}{R}.$$

Сила реакції опори направлена протилежно одиничному вектору нормалі

$$\vec{N} = -N \cdot \vec{n}$$

Знаючи вектор сили реакції опори і вектор сили тяжіння – легко запишемо другий закон Ньютона, але вже в проекціях на вісі координат

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -N \cdot \left(\vec{n} \cdot \vec{i}\right).$$

Розв'язуючи це рівняння знайдемо залежність координати x від часу $x = x(t)$.

Знаючи $y = y(x)$ підстановкою знайдемо залежність координати у від часу $y = y(t)$.

Таким чином завдяки засобам геометрії ми без великого клопоту розв'язали задачу про рух матеріальної точки

Висновки

На прикладі поданої задачі можна наочно продемонструвати тісний та невід'ємний зв'язок фізики з математикою. Задачі такого типу стають в нагоді при роботі:

– у профільних класах;

– у індивідуальній роботі з обдарованими дітьми;

розширення загального світогляду здобувачів освіти у ЗЗСО та ЗВО.

– під час організації та проведення факультативних занять

Зважаючи на це, принципово важливим є формування навичок певного рівня з математики задля свідомого сприйняття та побудови математичних моделей. Беручи до уваги очевидну доступність запропонованої задачі, для розуміння здобувачами ЗЗСО, за перспективу подальших досліджень маємо пошук та використання аналогічних задач практичного спрямування у навчальному процесі з фізики.

Матеріал цієї теми сприяє активізації пізнавальної і розумової діяльності учнів, підвищує їхній інтерес і успішність у навчанні, сприяє свідомому вибору майбутньої професії.

DOI: https://doi.org/...

Література

1. Програма фізики для середніх навчальних закладів.
2. Ландсберг Г.С. Елементарний підручник фізики. – К.: Радянська школа, 1967. – 456 с.
3. Бевз В. Міжпредметні зв’язки як необхідний елемент предметної системи навчання.// Ма тематика в школі.
4. Бар’яхтар В.Г. Фізика. 11 клас. Академічний рівень. Профільний рівень : Підручник для загальноосвіт. навч. закл. / В.Г. Бар’яхтар, Ф.Я. Божинова, М. М. Кірюхін, О. О. Кірюхіна. – Х. : Видавництво «Ранок», 2011. – 320 с.
5. Коршак Є.В., Ляшенко О.І., Савченко В.Ф. Фізика. 10 клас. Рівень стандарту : Підручник. – К.: Генеза, 2012. – 192 с.

Oleksandr Ya. Beloshapka, Vladislav Nedostup
Donbas State Pedagogical University, Sloviansk, Ukraine

To the question of connections of the mathematics and physics

The article is devoted to the solution of mechanics problem and it clearly demonstrates a connection of the mathematics and physics.

Keywords: *mechanics, mechanical movement, radius of curvature, teaching of physics.*