УДК 37.016:514.144

Кадубовський О.А., Соколова О.В., Шульгіна А.О.

[1] *канд. фізико-математичних наук, доцент каф. математики та інформатики, ДВНЗ «ДДПУ»*
e-mail: kadubovs@ukr.net, ORCID 0000-0003-2045-810X

[2] *студентка 3 курсу фізико-математичного факультету, ДВНЗ «ДДПУ»*
e-mail: olyha.sokolovo4ka@gmail.com, ORCID 0000-0001-9808-3630

[3] *студентка 3 курсу фізико-математичного факультету, ДВНЗ «ДДПУ»*
e-mail: annshulgina1418@gmail.com, ORCID 0000-0003-4247-4063

ДО ЗАДАЧ НА КОНФІГУРАЦІЮ ДЕЗАРГА З НЕВЛАСНИМИ ЕЛЕМЕНТАМИ ТА СУМІЖНІ ПИТАННЯ

Представлена стаття присвячена дидактичним та методичним аспектам вивчення конфігурації Дезарга (зокрема з невласними елементами) на площині. Наведено алгоритми-вказівки до можливих способів розв'язання найбільш типових задач на побудову конфігурації Дезарга з невласними елементами; в явному вигляді наведено всі розв'язки ключових задач на відновлення елементів певної конфігурації Дезарга з фіксованим дезарговим центром, прямою або ж трикутником; наведено формулювання (в певному сенсі всіх) частинних випадків прямої та оберненої теорем Дезарга в термінах евклідової геометрії.

Ключові слова: *проективна площина, теорема Дезарга на площині, конфігурація Дезарга на площині, невласні елементи.*

Вступ

Добре відомо (напр. [1]), що *конфігураційні теореми* (теореми геометрії, в яких йдеться лише про скінчене число точок і прямих та їх взаємну приналежність) успішно застосовують при вивченні властивостей многокутників та розв'язуванні задач. Вони є особливо корисними при розв'язуванні задач на побудову в умовах обмежень різного характеру: при побудовах за допомогою лише (односторонньої) лінійки (без міток), при побудовах на обмеженій частині площини, при побудовах з недосяжними точками тощо.

Також відомо (напр. [14]), що зміст теореми Дезарга є суто конструктивним (а сама вона є конфігураційною теоремою), проте наслідки з неї призводять до результатів, які мають більш принципове значення та далеко виходять за межі звичайної геометричної конструкції. На основі теореми Дезарга виникають найважливіші поняття проективної геометрії.

Крім підручників [2, 3, 5], [9], [11], [17] та посібників [12], [13], [16] з проективної геометрії серед останніх досліджень слід виділити дисертацію [7], яку присвячено методичній системі навчання проективної геометрії в педагогічних університетах. В роботі [6] виділено найпростіші та основні задачі на побудову в курсі проективної геометрії; демонструється їх розв'язання та застосування до розв'язування інших задач, зокрема з недосяжними елементами; запропоновано класифікацію задач з недосяжними елементами тощо.

На превеликий жаль, слід констатувати, що у більшості діючих підручниках із вищої геометрії для студентів фізико-математичних спеціальностей не завжди звертається увага на зв'язок університетського та шкільного курсів геометрії. Але ж саме цей зв'язок і покликаний сприяти якісній професійній підготовці майбутніх вчителів математики. Та, як справедливо відзначає С.П. Семенець в [15], «особливо відчутною ця проблема є при вивченні студентами питань проективної та диференціальної геометрії, які в найбільшій мірі є відірваними від теорії та методики викладання геометрії у школі».

З іншого боку, досвід викладання проективної геометрії свідчить про те, що при вивченні теореми Дезарга, найбільші труднощі у студентів виникають саме під час знайомства з розширеною евклідовою площиною при дослідженні конфігурацій Дезарга з невласними елементами.

Крім того, автори переконані, що встановлення та зміцнення зазначеного вище зв'язку неможливе без цілісного сприйняття частинних випадків прямої та оберненої теорем Дезарга в термінах евклідової геометрії.

З урахуванням зазначеного, дана стаття й присвячена теоретичним та методичним аспектам вивчення: конфігурацій Дезарга, зокрема з невласними елементами, на розширеній евклідовій площині; задач про відновлення її елементів; частинних випадків прямої та оберненої теорем Дезарга (на площині) в термінах евклідової геометрії, які «традиційно пропонуються» студентам на самостійне опрацювання, проте викликають неабиякі труднощі.

Основні поняття та попередні відомості

Три точки на площині (зокрема розширеній) називають колінеарними (неколінеарними), якщо вони належать (*не належать*) одній прямій.

В подальшому термін «інцидентність» буде виражати відношення належності. Точку і пряму називатимемо інцидентними, якщо точка належить прямій; фраза «точка інцидентна прямій» означатиме те саме що і фраза «точка належить прямій», а фраза «прямая інцидентна точці» означатиме те саме що і фраза «пряма проходить через точку». Відзначимо, що цей «нейтральний» термін підкреслює взаємність зазначеного відношення та є досить зручним для формулювання тверджень, зокрема двоїстих, в термінах проективної геометрії.

Означення 1. *Тривершинником* ABC *називають множину, яка складається з трьох неколінеарних точок* A, B, C *та трьох прямих* (AB), (AC), (BC), *які містять ці точки.*

Теорема 1. (пряма теорема Дезарга) *Якщо два тривершинника розмістити на розширеній евклідовій площині так, щоб три прямі, які є інцидентними парам відповідних вершин, були би інцидентними одній точці, то три точки, які інцидентні трьом парам відповідних сторін, є інцидентними одній прямій.*

Теорема 2. (обернена теорема Дезарга) *Якщо два тривершинника розмістити на розширеній евклідовій площині так, щоб три точки, які є інцидентними парам відповідних сторін, були би інцидентними одній прямій, то три прямі, які інцидентні трьом парам відповідних вершин, є інцидентними одній точці.*

Означення 2. ([16]) *Конфігурацією Дезарга називають фігуру, яка складається* ***з десяти точок:*** шести вершин двох тривершинників *(«дезаргових трикутників»),* трьох точок на осі Дезарга *(«дезарговій прямій»),* центра Дезарга *(«дезаргової точки») та* ***десяти прямих:*** шести сторін *(двох даних) тривершинників,* трьох прямих*, що сполучають відповідні вершини тривершинників та осі Дезарга.*

В подальшому вершини одного з трикутників конфігурації Дезарга будемо позначати як $A_1B_1C_1$, іншого — $A_2B_2C_2$, через S і u позначати дезаргову точку та дезаргову пряму відповідно, а точки, що є інцидентними (відповідним сторонам тривершинників) прямим B_1B_2 і C_1C_2, C_1C_2 і A_1A_2, A_1A_2 і B_1B_2 позначатимемо як A_0, B_0 та C_0 відповідно.

Зауваження 1. *З урахуванням введених позначень та використовуючи загальноприйняту символіку, пряму та обернену теореми Дезарга можна подати у символьному вигляді, а саме. Нехай*
$A_0 = (B_1C_1) \cap (B_2C_2)$, $B_0 = (A_1C_1) \cap (A_2C_2)$, $C_0 = (A_1B_1) \cap (A_2B_2)$. *Тоді:*
Якщо $(A_1A_2) \cap (B_1B_2) \in (C_1C_2)$, *то* $A_0 \in (B_0C_0)$.
Якщо $A_0 \in (B_0C_0)$, *то* $(A_1A_2) \cap (B_1B_2) \in (C_1C_2)$.

Означення 3. (напр. [13]) *Якщо прямі* A_1A_2, B_1B_2 *та* C_1C_2 *(що є інцидентними відповідним вершинам тривершинників) є інцидентними точці* S, *то говорять, що такі тривершинники мають центр перспективи* S; *якщо точки* A_0, B_0 *та* C_0 *(що є інцидентними відповідним сторонам тривершинників* B_1B_2 *і* C_1C_2, C_1C_2 *і* A_1A_2, A_1A_2 *і* B_1B_2*) є інцидентними прямій* u, *то говорять, що тривершинники мають вісь перспективи* u.

Зауваження 2. *З урахуванням означення 3, пряму та обернену тереми Дезарга можна сформулювати наступним чином:* «якщо два тривершинники мають центр перспективи, то вони мають вісь перспективи»*;* «якщо два тривершинники мають вісь перспективи, то вони мають центр перспективи».

DOI: https://doi.org/10.31865/2413-26672415-3079112021234879

Основна частина

Перш ніж перейти до розгляду конфігурацій з невласними елементами, з'ясуємо питання щодо кількості елементів, які можна обирати **довільно** для побудови конфігурації Дезарга, кожна з десяти точок якої є власною.

1. Конфігурації Дезарга, серед 10 точок якої немає невласних

На думку авторів, відповідь на зазначене вище питання дає наступна низка пропонованих задач

Задача 1. *Дано пряму u та неколінеарні точки S, A_1, B_1, C_1, жодна з яких не є інцидентною до прямої u та жодна з прямих (A_1B_1), (A_1C_1), (B_1C_1) не є паралельною до u. Добудувати конфігурацію Дезарга так, щоб пряма u була дезарговою віссю, точка S — дезарговим центром, а тривершинник $A_1B_1C_1$ — дезарговим трикутником.*

Розв'язання.

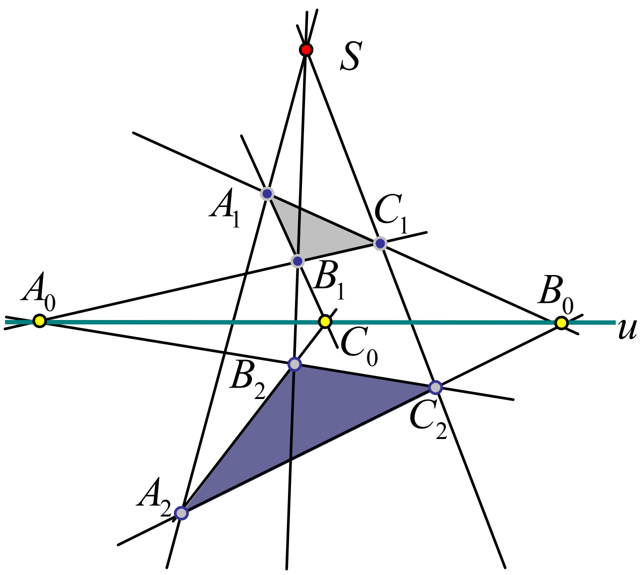

Рис. 1: до задачі 1.

1) Оскільки жодна з прямих (A_1B_1), (A_1C_1), (B_1C_1) не є паралельною до u, то точки їх перетину з прямою u існують та визначаються однозначно. Позначимо їх як $C_0 = (A_1B_1) \cap u$, $B_0 = (A_1C_1) \cap u$ і $A_0 = (B_1C_1) \cap u$.

2) За умовою т. S, A_1, B_1, C_1 є неколінеарними, тому жодна з точок A_0, B_0, C_0 не може належати жодній з прямих $(SA_1), (SB_1), (SC_1)$.

3) Оскільки пряма u повинна бути дезарговою віссю, то точки A_0, B_0, C_0 є точками перетину відповідних сторін дезаргових трикутників, тобто: $C_0 = (A_1B_1) \cap (A_2B_2)$; $B_0 = (A_1C_1) \cap (A_2C_2)$; $A_0 = (B_1C_1) \cap (B_2C_2)$, де A_2, B_2, C_2 — шукані вершини другого дерзагового трикутника. Звідки маємо що $B_2 \in (A_2C_0), C_2 \in (A_2B_0)$.

4) За умовою точка S повинна бути дезарговим центром. Тому точки A_2, B_2 і C_2 повинні належати прямим (SB_1) та (SC_1) відповідно.

Таким чином, з урахуванням п. 3), маємо що: B_2 одночасно належить прямим (A_2C_0) та (SB_1), а C_2 — прямим (A_2B_0) та (SC_1).

5) Через точку C_0 проведемо пряму b паралельно до прямої (SB_1); оскільки прямі (SB_1) та (SA_1) перетинаються в точці S, то (за властивістю паралельних прямих) b також перетинає пряму (SA_1) в певній точці B^*.

6) Через точку B_0 проведемо пряму c паралельно до прямої (SC_1); оскільки прямі (SC_1) та (SA_1) перетинаються в точці S, то (за властивістю паралельних прямих) c також перетинає пряму (SA_1) в певній точці C^*.
7) Оберемо на прямій (SA_1) таку точку A_2, яка не співпадає з жодною з точок S, A_1, B^*, C^* та не є інцидентною до прямої u. Тоді: (A_2C_0) та (SB_1) не є паралельними і тому перетинаються у точці B_2; (A_2B_0) та (SC_1) також не є паралельними і тому перетинаються у точці C_2.

Таким чином A_2, $B_2 = (A_2C_0) \cap (SB_1)$ і $C_2 = (A_2B_0) \cap (SC_1)$ — шукані вершини другого дезаргового трикутника. З останнього й випливає відповідний спосіб добудови конфігурації Дезарга, серед 10 точок якої немає невласних точок та яка задовольняє умову задачі.

Зауваження 3. *З метою дотримання належного рівня математичної строгості необхідно приділити увагу питанню щодо колінеарності точок A_0, B_2 і C_2, бо за наведеним способом розв'язання немає підстав говорити «за побудовою». Крім того, досить часто через похибки креслярських інструментів (та/або неточність побудов) у багатьох студентів зазначені точки «не є колінеарними». Тому має сенс запропонувати студентам довести колінеарність точок A_0, B_2 і C_2 методом від супротивного з урахуванням прямої теореми Дезарга.*

Задача 2. *Дано неколінеарні точки S, A_1, B_1, C_1. Добудувати конфігурацію Дезарга так, щоб точка S була дезарговим центром, а тривершинник $A_1B_1C_1$ — дезарговим трикутником.*

Задача 3. *Дано пряму u та неколінеарні точки A_1, B_1, C_1, жодна з яких не є інцидентною до прямої u та жодна з прямих (A_1B_1), (A_1C_1), (B_1C_1) не є паралельною до u. Добудувати конфігурацію Дезарга так, щоб пряма u була дезарговою віссю, а $A_1B_1C_1$ — дезарговим трикутником.*

Зауваження 4. *Для розв'язання задач 2 і 3* ***довільність вибору*** *відповідних елементів досить узгодити з умовою та розв'язанням задачі 1.*

Зауваження 5. *Якщо додаткову* ***вимогу щодо власності точок конфігурації Дезарга не накладати****, то для розв'язання задачі 1 точку A_2 досить обрати на прямій (SA_1) так, щоб вона не співпадала з точками S, A_1 та не була інцидентною до прямої u.*

Крім того, в контексті питання щодо кількості елементів, які можна обирати ***довільно*** *для побудови конфігурації Дезарга, доцільно запропонувати задачу на добудову конфігурації Дезарга, якщо дано* ***п'ять*** *із шести вершин дезаргових трикутників.*

DOI: https://doi.org/10.31865/2413-26672415-3079112021234879

2. Конфігурації Дезарга, серед 10 точок якої є невласні

Добре відомо (напр. [13], С. 201), що проективну геометрію можна вивчати в будь-якій з її реалізацій. Найбільш простою та наочною реалізація одержується шляхом поповнення евклідового простору невласними (нескінченно віддаленими) елементами – невласними точками, прямими і площиною.

Крім того, при довільному з підходів до «побудови» проективної площини, до основних положень (аксіом, наслідків, рідше – домовленостей) відносять наступні твердження щодо інцидентності власних та невласних елементів розширеної евклідової площини $\overline{R_2}$:

I. *Кожна власна пряма розширеної евклідової площини містить точно одну невласну точку.*

II. *Паралельні прямі розширеної евклідової площини мають спільну невласну точку («перетинаються у невласній точці»).*

III. *Існує єдина пряма, що є інцидентною двом різним точкам розширеної евклідової площини.*

IV. *Існує єдина точка, що є інцидентною двом різним прямим розширеної евклідової площини.*

З урахуванням зазначеного, виділяють наступні можливі способи задання невласних елементів на розширеній евклідовій площині $\overline{R_2}$.

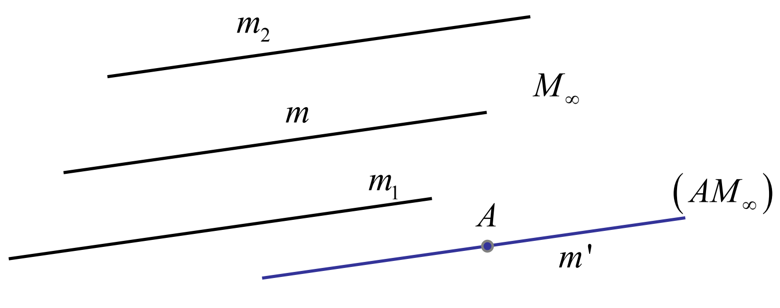

Рис. 2:

На підставі твердження **I**, невласну точку M_∞ зручно задавати за допомогою власної прямої m, яка інцидентна цій точці. Крім того, на підставі твердження **II**, невласна точка M_∞ може бути задана за допомогою будь-якої з паралельних прямих m_i $(m_i || m)$ — рис. 2.

Невласна пряма не потребує в такому задані, оскільки вона єдина на $\overline{R_2}$. Проте її можна задати за допомогою двох власних непаралельних прямих.

З урахуванням зазначеного вище, є всі підстави для надання наступних **рекомендацій**, які доцільно використовувати при побудовах конфігурації Дезарга з невласними елементами:

1) провести пряму (AM_∞) через власну точку A та невласну точку M_∞ це теж саме, що через точку A провести пряму m' паралельно до прямої m — рис. 2;

2) нехай дано три прямі, які є інцидентними одній точці; якщо дві з трьох прямих є паралельними між собою, то і третя з таких прямих є паралельною до кожної з двох із зазначених паралельних прямих;
3) нехай дано три точки, які є інцидентними одній прямій; якщо дві з трьох точок є невласними, то і третя з таких точок є невласною точкою $\overline{R_2}$.

З урахуванням зазначеного, можна виділити наступі властивості конфігурації Дезарга з невласними елементами на розширеній евклідовій площині (з акцентами в термінах евклідової геометрії).

1^0. *Якщо дві відповідні вершини дезаргових трикутників є невласними точками, то центр Дезарга також є невласною точкою площини* $\overline{R_2}$.

2^0. *Якщо центр Дезарга є невласною точкою площини* $\overline{R_2}$*, то три прямі, що є інцидентими відповідним вершинам дезаргових трикутників, є попарно паралельними.*

3^0. *Якщо дві точки на осі Дезарга (з числа 10 точок конфігурації Дезарга) є невласними точками, то вісь Дезарга є невласною прямою площини* $\overline{R_2}$.

4^0. *Якщо вісь Дезарга є невласною прямою* $\overline{R_2}$*, то відповідні сторони дезаргових трикутників є паралельними*;

особливістю такої конфігурації є те, що дезаргові трикутники будуть гомотетичними в гомотетії з центром у дезарговій точці та коефіцієнтом, рівним відношенню довжин відповідних сторін.

5^0. *Якщо центр та вісь Дезарга є невласними елементами* $\overline{R_2}$*, то прямі, що є інцидентими відповідним вершинам дезаргових трикутників, є попарно паралельними та паралельними є відповідні сторони дезаргових трикутників*;

особливістю такої конфігурації є те, що дезаргові трикутники є рівними.

6^0. *Якщо точно одна з вершин одного з дезаргових трикутників є невласною точкою, то в такому тривершиннику дві його сторони є паралельними.*

7^0. *Якщо дві вершини одного з дезаргових трикутників є невласними точками площини* $\overline{R_2}$*, то в такому тривершиннику третя вершина обов'язково є власною точкою* $\overline{R_2}$;

особливістю такої конфігурації є те, що відповідна сторона в другому дезарговому трикутнику є паралельною до осі Дезага.

8^0. *Якщо лише дві з відповідних сторін дезаргових трикутників є паралельними, то дезаргова пряма є паралельною до паралельних сторін трикутників.*

9^0. *Якщо власна дезаргова пряма є паралельною до сторони одного з дезаргових трикутників, то вона є паралельною і до відповідної сторони другого дезаргового трикутника.*

DOI: https://doi.org/10.31865/2413-26672415-3079112021234879

Задача 4. *Побудувати конфігурацію Дезарга, для якої одна вершина* (A_2) *одного з трикутників* ($A_2B_2C_2$) *є невласною точкою* ($A_2 \equiv A_{2\infty}$).

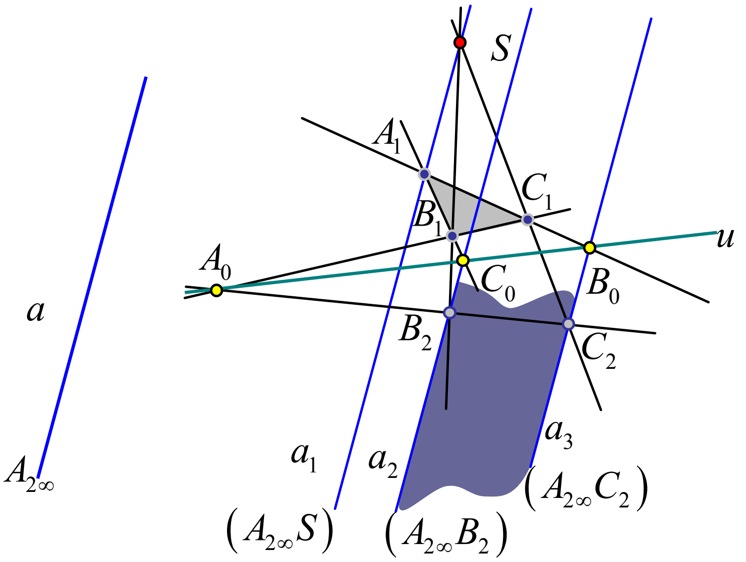

Рис. 3: до конфігурації Дезарга, коли одна з вершин одного з дезаргових трикутників є невласною точкою

Вказівки до одного з можливих способів розв'язання.

1) Задамо на площині $\overline{R_2}$ невласну точку $A_2 \equiv A_{2\infty}$ дезаргового трикутника $A_{2\infty}B_2C_2$ за допомогою власної прямої a.

2) Оберемо на площині $\overline{R_2}$ пряму u, яка не є паралельною до a, та такі неколінеарні точки A_1, B_1, C_1, жодна з яких не є інцидентною до прямої u та жодна з прямих (A_1B_1), (A_1C_1), (B_1C_1) не є паралельною до u та a.

3) Проведемо через точку A_1 пряму $a_1 \equiv (A_{2\infty}A_1)$ паралельно до прямої a та оберемо на $(A_{2\infty}A_1)$ таку точку S, яка: не співпадає з A_1, не належить u та не належить (B_1C_1).

Добудуємо конфігурацію Дезарга так, щоб пряма u була дезарговою віссю, точка S — дезарговим центром, $A_1B_1C_1$ — дезарговим трикутником, а точка $A_2 \equiv A_{2\infty}$ — вершиною дезаргового трикутника $A_{2\infty}B_2C_2$.

4) Оскільки жодна з прямих (A_1B_1), (A_1C_1), (B_1C_1) не є паралельною до u, то точки їх перетину з прямою u існують та визначаються однозначно. Позначимо їх як $C_0 = (A_1B_1) \cap u$, $B_0 = (A_1C_1) \cap u$ і $A_0 = (B_1C_1) \cap u$.

5) Проведемо через точку C_0 пряму $a_2 \equiv (A_{2\infty}B_2)$ паралельно до прямої a та позначимо через $B_2 = (SB_1) \cap a_2$.

6) Проведемо через точку B_0 пряму $a_3 \equiv (A_{2\infty}C_2)$ паралельно до прямої a та позначимо через $C_2 = (SC_1) \cap a_3$.

$\{A_1B_1C_1; A_{2\infty}B_2C_2; S, u \equiv (A_0B_0C_0)\}$ — шукана конфігурація.

Задача 5. *Побудувати конфігурацію Дезарга, для якої дві вершини (A_2 і C_2) одного з трикутників є невласними точками ($A_2 \equiv A_{2\infty}$, $C_2 \equiv C_{2\infty}$).*

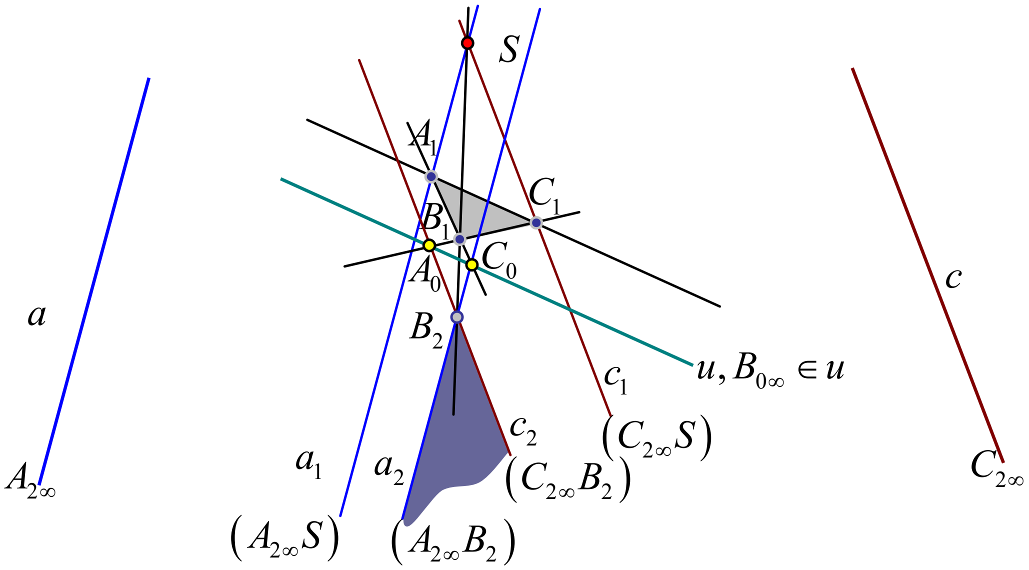

Рис. 4: до конфігурації Дезарга, коли дві вершини одного з дезаргових трикутників є невласними точками

Вказівки до одного з можливих способів розв'язання.

1) Задамо на площині $\overline{R_2}$ невласні точки $A_2 \equiv A_{2\infty}$ і $C_2 \equiv C_{2\infty}$ дезаргового трикутника $A_{2\infty}B_2C_{2\infty}$ за допомогою власних непаралельних прямих a та c відповідно.

2) Оберемо на площині $\overline{R_2}$ такі неколінеарні точки A_1, B_1, C_1, що жодна з прямих (A_1B_1), (A_1C_1), (B_1C_1) не є паралельною до прямих a та c.

3) Проведемо через точки A_1 і C_1 прямі $a_1 \equiv (A_1A_{2\infty})$ і $c_1 \equiv (C_1C_{2\infty})$ паралельно до прямих a та c відповідно. Оскільки a та c не є паралельними, то a_1 та c_1 також не є паралельними і тому позначимо через $S = a_1 \cap c_1$.

4) Оберемо на прямій SB_1 таку точку B_2, яка не співпадає з жодною із точок S і B_1 та не належить A_1C_1.

5) Проведемо через точку B_2 прямі $a_2 \equiv (B_2A_{2\infty})$ та $c_2 \equiv (B_2C_{2\infty})$ паралельно до прямих a та c відповідно.

6) Позначимо через $A_0 = (C_1B_1) \cap (C_{2\infty}B_2)$, а через $C_0 = (A_1B_1) \cap (A_{2\infty}B_2)$.

7) За побудовою прямі $(A_1A_{2\infty})$, (B_1B_2) та $(C_1C_{2\infty})$ є інцидентними одній точці S, тобто виконано умови прямої теореми Дезарга. Звідки точка $B_0 = (A_{2\infty}C_{2\infty}) \cap (A_2C_2)$ є інцидентною до прямої (A_0C_0). Оскільки $(A_{2\infty}C_{2\infty})$ є невласною прямою, то кожна її точка, зокрема B_0, є невласною точкою. Звідки $B_0 \equiv B_{0\infty}$ — спільна невласна точка власних прямих (A_0C_0) та (A_1C_1). І тому $(A_0C_0) || (A_1C_1)$.

$\{A_1B_1C_1; A_{2\infty}B_2C_{2\infty}; S, u \equiv (A_0C_0)\}$ — шукана конфігурація.

Задача 6. *Побудувати конфігурацію Дезарга, для якої дві невідповідні вершини (A_1 і C_2) дезаргових трикутників ($A_1B_1C_1$ та $A_2B_2C_2$) є невласними точками ($A_1 \equiv A_{1\infty}$, $C_2 \equiv C_{2\infty}$).*

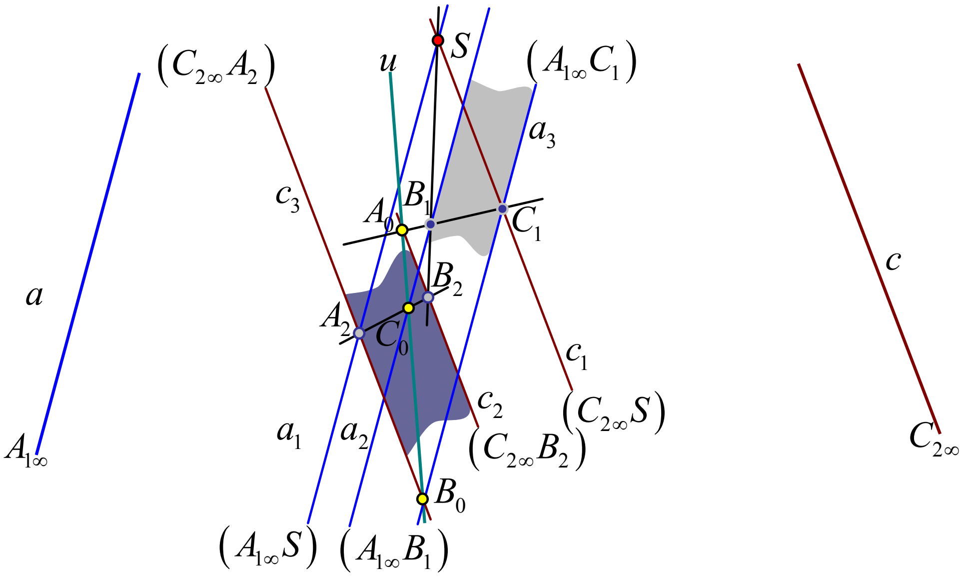

Рис. 5: до конфігурації Дезарга, коли дві *невідповідні* вершини дезаргових трикутників є невласними точками

Вказівки до одного з можливих способів розв'язання.

1) Задамо на площині $\overline{R_2}$ невласні точки $A_1 \equiv A_{1\infty}$ і $C_2 \equiv C_{2\infty}$ дезаргових трикутників $A_{1\infty}B_1C_1$ і $A_2B_2C_{2\infty}$ за допомогою власних непаралельних прямих a та c відповідно.

2) Оберемо на площині $\overline{R_2}$ такі неколінеарні точки A_2, B_1, C_1, що жодна з прямих (A_2B_1), (A_2C_1), (B_1C_1) не є паралельною до прямих a та c.

3) Проведемо через точки A_2 і C_1 прямі $a_1 \equiv (A_{1\infty}A_2)$ і $c_1 \equiv (C_{2\infty}C_1)$ паралельно до прямих a та c відповідно. Оскільки a та c не є паралельними, то a_1 та c_1 також не є паралельними і тому позначимо через $S = a_1 \cap c_1$.

4) Оберемо на прямій SB_1 таку точку B_2, яка не співпадає з жодною із точок S і B_1.

5) Проведемо через точки B_1 і C_1 прямі $a_2 \equiv (A_{1\infty}B_1)$ і $a_3 \equiv (A_{1\infty}C_1)$ паралельно до прямої a, а через точки B_2 і A_2 прямі $c_2 \equiv (C_{2\infty}B_2)$ і $c_3 \equiv (C_{2\infty}A_2)$ паралельно до прямої c.

Оскільки прямі a і c не є паралельними, то жодні з прямих a_i та c_j також не є паралельними. З урахуванням способу вибору т. A_2, B_1, C_1 та B_2, наступні власні прямі не є паралельними, і тому перетинаються у точках: $C_0 = a_2 \cap (A_2B_2) = (A_{1\infty}B_1) \cap (A_2B_2)$, $B_0 = a_3 \cap c_3 = (A_{1\infty}C_1) \cap (A_2C_{2\infty})$, $A_0 = (C_1B_1) \cap c_2 = (C_1B_1) \cap (C_{2\infty}B_2)$.

$\{A_{1\infty}B_1C_1; A_2B_2C_{2\infty}; S, u \equiv (A_0B_0C_0)\}$ — шукана конфігурація.

Задача 7. *Побудувати конфігурацію Дезарга, для якої дві відповідні вершини (A_1 і A_2) дезаргових трикутників ($A_1B_1C_1$ та $A_2B_2C_2$) є невласними точками ($A_1 \equiv A_{1\infty}$, $A_2 \equiv A_{2\infty}$).*

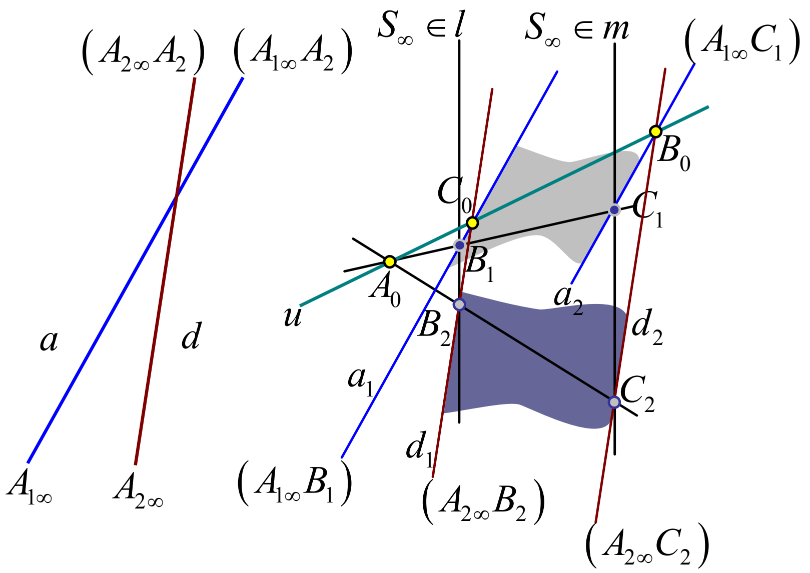

Рис. 6: до конфігурації Дезарга, коли дві *відповідні* вершини дезаргових трикутників є невласними точками

Вказівки до одного з можливих способів розв'язання.

1) Задамо на площині $\overline{R_2}$ невласні точки $A_1 \equiv A_{1\infty}$ і $A_2 \equiv A_{2\infty}$ дезаргових трикутників $A_{1\infty}B_1C_1$ і $A_{2\infty}B_2C_2$ за допомогою власних непаралельних прямих a та d відповідно. Оскільки дезаргова точка S є інцидентною до прямої $(A_{1\infty}A_{2\infty})$, то S є невласною точкою S_∞. *Більше того, власні прямі l та m, що є інцидентними до двох інших пар відповідних вершин дезаргових трикутників, є паралельними.*

2) Оберемо на площині $\overline{R_2}$ пряму u, яка не є паралельною до прямих a і d, та такі точки B_1 і C_1, що пряма (B_1C_1) не є паралельною до жодної з прямих u, a, d.

3) Проведемо через точки B_1 і C_1 прямі a_1 і a_2 паралельно до прямої a. Оскільки u не є паралельною до прямих (B_1C_1) та a, то позначимо точки перетину зазначених нижче пар прямих наступним чином: $A_0 = (B_1C_1) \cap u$, $C_0 = a_1 \cap u$, $B_0 = a_2 \cap u$.

4) Проведемо через точки C_0 і B_0 прямі $d_1 \equiv (A_{2\infty}C_0)$ і $d_2 \equiv (A_{2\infty}B_0)$ паралельно до прямої d. Тоді точки B_2 і C_2 належать (є інцидентними) прямим d_1 і d_2 відповідно.

5) Оберемо на прямій $d_1 \equiv (A_{2\infty}C_0)$ точку B_2, яка не співпадає з точкою C_0 та не належить (B_1C_1). Оскільки $d_1 || d_2$, то пряма (A_0B_2) перетинає пряму d_2 у шуканій точці C_2.

$\{A_{1\infty}B_1C_1; A_{2\infty}B_2C_2; u \equiv (A_0B_0C_0)\}$ — шукана конфігурація.

3. Про «відновлення» елементів дезаргової конфігурації

Добре відомо (напр. [17], [9]), що конфігурація Дезарга (всі точки якої є власними точками) має наступні властивості:

1^0. Якщо будь-яку з **10** точок конфігурації Дезарга обрати за дезаргову точку (центр Дезарга), то (у цій конфігурації) **однозначно** визначаються дезаргові трикутники і дезаргова пряма (вісь Дезарга).

2^0. Якщо будь-яку з **10** прямих конфігурації Дезарга обрати за дезаргову пряму (вісь Дезарга), то (у цій конфігурації) **однозначно** визначаються дезаргові трикутники і дезаргова точка (центр Дезарга).

Слід також відзначити, що М.І. Кованцов розробив декілька правил-схем, за допомогою яких можна знаходити всі елементи дезаргової конфігурації, якщо задано деякі з них (напр. [9], С. 107–108 або ж [16], С. 63–65).

Не важко перевірити, що для конфігурації Дезарга на площині, всі точки якої є власними точками, існує точно **20** тривершинників, вершинами і сторонами яких є точки і прямі такої конфігурації. Більше того, має місце й наступна маловідома властивість конфігурації Дезарга (напр. [5], С. 45–46)

3^0. Якщо будь-який з **20** тривершинників, вершинами і сторонами якого є точки і прямі конфігурації Дезарга, обрати за дезарговий трикутник, то (у цій конфігурації) **однозначно** визначаються другий дезарговий трикутник, дезаргова пряма (вісь Дезарга) і дезаргова точка (центр Дезарга).

З урахуванням зазначеного, можна виділити наступні ключові задачі на відновлення елементів дезаргової конфігурації, в якій кожна точка є власною.

Задача 8. *Беручи довільну точку* (будь-яку з 10) *конфігурації Дезарга за дезаргову точку* S, *знайти* (у цій конфігурації) *дезаргові трикутники* $A_1B_1C_1$ *і* $A_2B_2C_2$ (вершини яких є точками конфігурації) *та пряму* u (з числа 10 прямих конфігурації), *для яких ця конфігурація буде конфігурацією Дезарга з центром* S *та віссю* u.

Задача 9. *Беручи довільну пряму* (будь-яку з 10) *конфігурації Дезарга за дезаргову пряму* u, *знайти* (у цій конфігурації) *дезаргові трикутники* $A_1B_1C_1$ *і* $A_2B_2C_2$ (вершини яких є точками конфігурації) *та точку* S (з числа 10 точок конфігурації), *для яких ця конфігурація буде конфігурацією Дезарга з віссю* u *та центром* S.

Задача 10. *Беручи довільний тривершинник* (будь-який з 20), *вершинами і сторонами якого є точки і прямі конфігурації Дезарга, за дезарговий трикутник* $A_1B_1C_1$, *знайти* (у цій конфігурації) *другий дезарговий трикутник* $A_2B_2C_2$ (вершини якого є точками конфігурації), *дезаргову пряму* u *та дезаргову точку* S (з числа 10 прямих і 10 точок конфігурації), *для яких ця конфігурація буде конфігурацією Дезарга з віссю* u *та центром* S.

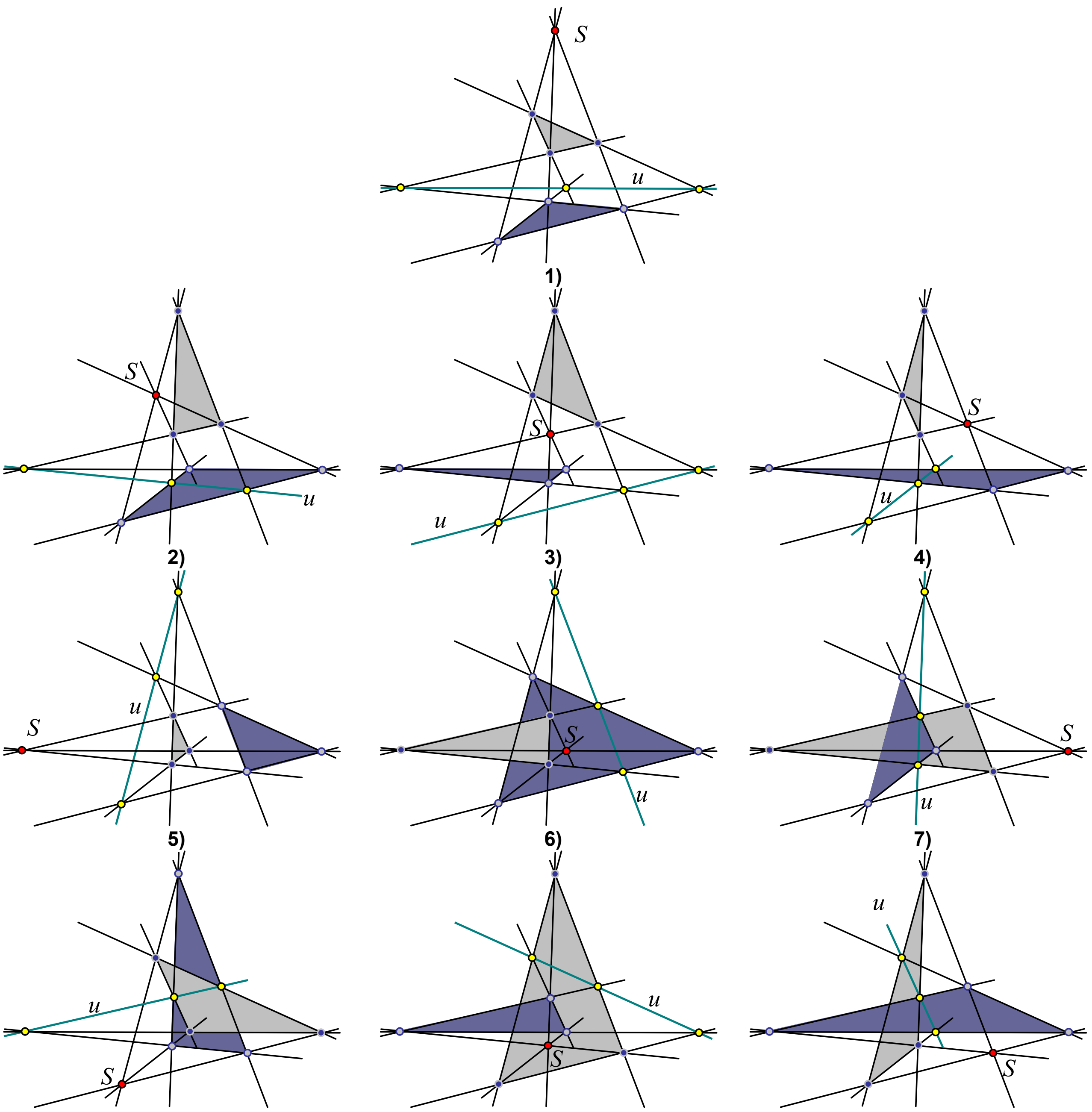

Рис. 7: до задач 8, 9 і 10 — відповідні дезаргові трикутники, центр та пряма

На рис. 7 в явному вигляді наведено відповідні розв'язки задач 8, 9 та 10 — «результати відновленя» відповідних невідомих елементів фіксованої дезаргової конфігурації $\{A_1B_1C_1; A_2B_2C_2; S, u \equiv (A_0B_0C_0)\}$ (з урахуванням позначень на рис. 1) для випадків коли:

1) в якості дезаргової точки обрано точки $S, A_1, B_1, C_1, A_0, C_0, B_0, A_2, B_2, C_2$ — конфігурації $1), \ldots, 10)$ відповідно на рис. 7;

2) в якості дезаргової прямої обрано прямі $(A_0C_0B_0)$, $(A_0B_2C_2)$, $(A_2C_2B_0)$, $(A_2B_2C_0)$, (SA_1A_2), (SC_1C_2), (SB_1B_2), $(A_0B_2C_2)$, $(A_1C_1B_0)$, $(A_1B_1C_0)$ — конфігурації $1), \ldots, 10)$ відповідно на рис. 7;

3) в якості дезаргового трикутника обрано трикутники $A_1B_1C_1$ (або ж $A_2B_2C_2$), SB_1C_1 (або ж $A_2C_0B_0$), SA_1C_1 (або ж $B_2C_0A_0$), SA_1B_1 (або ж $C_2B_0A_0$), $B_1B_2C_0$ (або ж $C_1B_0C_2$), $B_1A_0B_2$ (або ж $A_1B_0A_2$), $C_1A_0C_2$ (або ж $A_1C_0A_2$), $A_1C_0B_0$ (або ж SB_2C_2), SA_2C_2 (або ж $B_1C_0A_0$), SA_2B_2 (або ж $C_1B_0A_0$) — конфігурації $1), \ldots, 10)$ відповідно на рис. 7.

Зауваження 6. *Відсутність позначень для вершин дезаргових трикутників та точок (на дезарговій прямій) перетину відповідних сторін на рис. 7 не є випадковою. Бо основний акцент в задачах* 8, 9 *і* 10, *як ілюстрацій до відповідних властивостей* 1^0 –3^0, *було зроблено на відшуканні невідомих елементів (конфігурації) як геометричних фігур, які з точністю до перепозначень або при відсутності позначень взагалі, визначаються однозначно.*

Крім того, з досвіду самостійної роботи студентів над задачами 8, 9 і 10 з однаковою умовою (конфігурацією та одним з її дезаргових елементів: точки, прямої або ж трикутника), слід відзначити, що відмінність у відновленнях позначень для точок конфігурації не раз ставала приводом для дискусій щодо «правильності» знайденого розв'язку.

З урахуванням зазначеного, автори переконані в тому, що вкрай важливими є й задачі на **відновлення позначень** для фіксованої конфігурації Дезарга (всі точки якої є власними) за умов фіксації позначень одного з її елементів: дезаргової точки, дезаргової прямої або ж дезаргового трикутника. З урахуванням властивостей $1^0 – 3^0$, коректність постановки зазначеного типу задач не викликає сумнівів, а самі задачі (за своєю суттю) є уточненням задач 8, 9 і 10 шляхом їх доповнення завданням комбінаторного характеру: «Скільки розв'язків має задача з урахуванням можливих позначень?».

Як з'ясувалося, кожна із таких задач, з урахуванням можливих позначень, має точно **12 різних розв'язків** — рис. 8. Пояснимо останнє:
1) центр Дезарга визначається однозначно, тому його буде позначено як S;
2) оскільки дезаргова пряма визначається однозначно, а точки на ній слід позначати через A_0, B_0 і C_0, то існує $3! = 6$ способів для позначення точок на осі Дезарга;
3) оскільки дезаргові трикутники визначається однозначно, то їх вершини слід позначати через $A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$ або ж навпаки; крім того, оскільки точки конфігурації на дезарговій осі вже позначено через A_0, B_0 і C_0, то індекси вершин $A_iB_iC_i$ кожного з трикутників визначаються однозначно, бо $A_0 \in (B_iC_i)$, $B_0 \in (A_iC_i)$ та $C_0 \in (A_iB_i)$; тобто існує лише 2 способи для позначення вершин дезаргових трикутників (з точністю до заміни їх індексів).

Отже, існує лише 12 способів для відновлення позначень на дезарговій конфігурації з фіксованим дезарговим елементом.

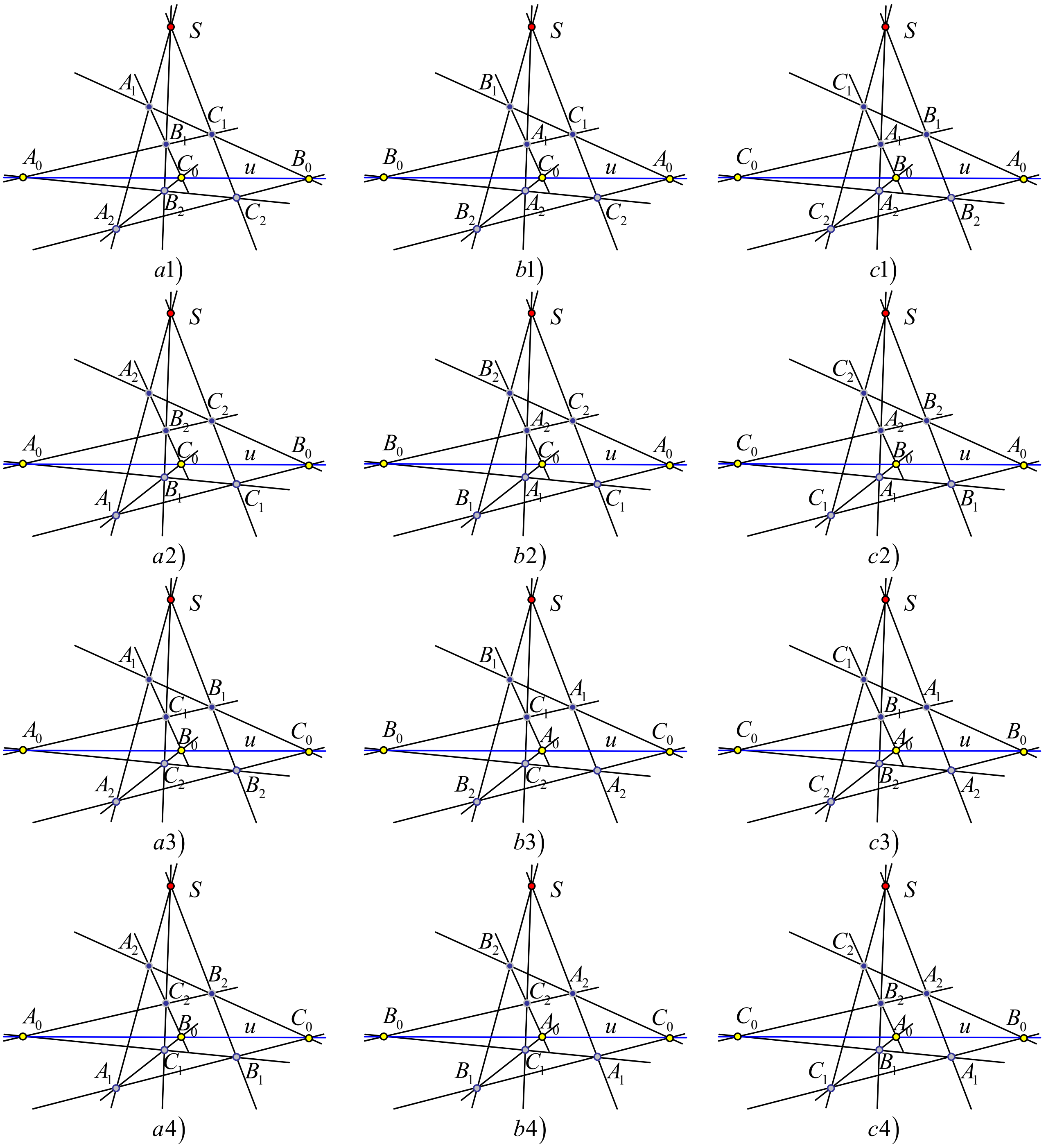

Рис. 8: всі з 12 можливих позначень точок певної конфігурації Дезарга **з фіксованим дезарговим елементом** (точкою / прямою / трикутником)

4. Теореми Дезарга в термінах евклідової геометрії

Маємо своїм приємним обов'язком відзначити, що в підручнику з геометрії (профільний рівень) для 10 класу ([10], С. 33–35) автори звертають увагу на значенні просторової теореми Дезарга для побудови зображень перерізів многогранників та знайомлять учнів з формулюванням теореми Дезарга в термінах проективної геометрії.

DOI: https://doi.org/10.31865/2413-26672415-3079112021234879

І хоча формулювання зазначеної теореми в термінах проективної геометрії є яскравим прикладом одночасної лаконічності та змістовної ємності в математиці, проте, оскільки учням не є знайомими поняття *невласних елементів розширеної евклідової площини*, то при ознайомленні учнів (та студентів педагогічних спеціальностей — майбутніх вчителів математики) з теоремою Дезарга важливо наголосити на тому, що в термінах (евклідової геометрії) шкільного курсу геометрії, ця теорема містить шість випадків-тверджень, які можна викласти, наприклад, наступним чином

Пряма теорема Дезарга. *Нехай дано* $\triangle\ A_1B_1C_1$ *та* $\triangle\ A_2B_2C_2$ . ...

Теорема 1.1. *Якщо три прямі, що проходять через відповідні вершини трикутників, перетинаються в одній точці та жодна з пар прямих, які містять відповідні сторони трикутників не є паралельними, то точки їх перетину належать одній прямій.* Тобто, якщо

$(A_1A_2)\cap(B_1B_2)\cap(C_1C_2)=S$; $A_0=(B_1C_1)\cap(B_2C_2)$, $B_0=(A_1C_1)\cap(A_2C_2)$, $C_0=(A_1B_1)\cap(A_2B_2)$, то $A_0\in(B_0C_0)$ — рис. 9 a).

Теорема 1.2. *Якщо три прямі, що проходять через відповідні вершини трикутників, є попарно паралельними та жодна з пар прямих, які містять відповідні сторони трикутників не є паралельними, то точки їх перетину належать одній прямій.* Тобто, якщо

$(A_1A_2)||(B_1B_2)$, $(B_1B_2)||(C_1C_2)$, $(C_1C_2)||(A_1A_2)$; $A_0 = (B_1C_1)\cap(B_2C_2)$, $B_0=(A_1C_1)\cap(A_2C_2)$, $C_0=(A_1B_1)\cap(A_2B_2)$, то $A_0\in(B_0C_0)$ — рис. 9 b).

Теорема 1.3. *Якщо три прямі, що проходять через відповідні вершини трикутників, перетинаються в одній точці та лише дві з відповідних сторін трикутників є паралельними, то пряма, що проходить через точки перетину двох інших пар прямих (які містять відповідні сторони трикутників), є паралельною до кожної з паралельних сторін трикутників.* Тобто, якщо

$(A_1A_2)\cap(B_1B_2)\cap(C_1C_2)=S$; $A_0=(B_1C_1)\cap(B_2C_2)$, $C_0=(A_1B_1)\cap(A_2B_2)$, $(A_1C_1)||(A_2C_2)$, то $(A_0C_0)||(A_1C_1)$ і $(A_0C_0)||(A_2C_2)$ — рис. 9 c).

Теорема 1.4. *Якщо три прямі, що проходять через відповідні вершини трикутників, є попарно паралельними та лише дві з відповідних сторін трикутників є паралельними, то пряма, що проходить через точки перетину двох інших пар прямих (які містять відповідні сторони трикутників), є паралельною до кожної з паралельних сторін трикутників.*

Тобто, якщо

$(A_1A_2)||(B_1B_2)$, $(B_1B_2)||(C_1C_2)$, $(C_1C_2)||(A_1A_2)$;

$A_0=(B_1C_1)\cap(B_2C_2)$, $C_0=(A_1B_1)\cap(A_2B_2)$, $(A_1C_1)||(A_2C_2)$, то

$(A_0C_0)||(A_1C_1)$ і $(A_0C_0)||(A_2C_2)$ — рис. 9 d).

Теорема 1.5. *Якщо три прямі, що проходять через відповідні вершини трикутників, перетинаються в одній точці та дві сторони одного з трикутників є попарно паралельними до двох відповідних сторін другого трикутника, то й треті відповідні сторони трикутників є паралельними.*
Тобто, якщо $(A_1A_2)\cap(B_1B_2)\cap(C_1C_2)=S$; $(A_1B_1)||(A_2B_2)$, $(A_1C_1)||(A_2C_2)$, то $(B_1C_1)||(B_2C_2)$ — рис. 9 *e*).

Теорема 1.6. *Якщо три прямі, що проходять через відповідні вершини трикутників, є попарно паралельними та дві сторони одного з трикутників є попарно паралельними до двох відповідних сторін другого трикутника, то й треті відповідні сторони трикутників є паралельними.*
Тобто, якщо $(A_1A_2)||(B_1B_2)$, $(B_1B_2)||(C_1C_2)$, $(C_1C_2)||(A_1A_2)$; $(A_1B_1)||(A_2B_2)$, $(A_1C_1)||(A_2C_2)$, то $(B_1C_1)||(B_2C_2)$ — рис. 9 *f*).

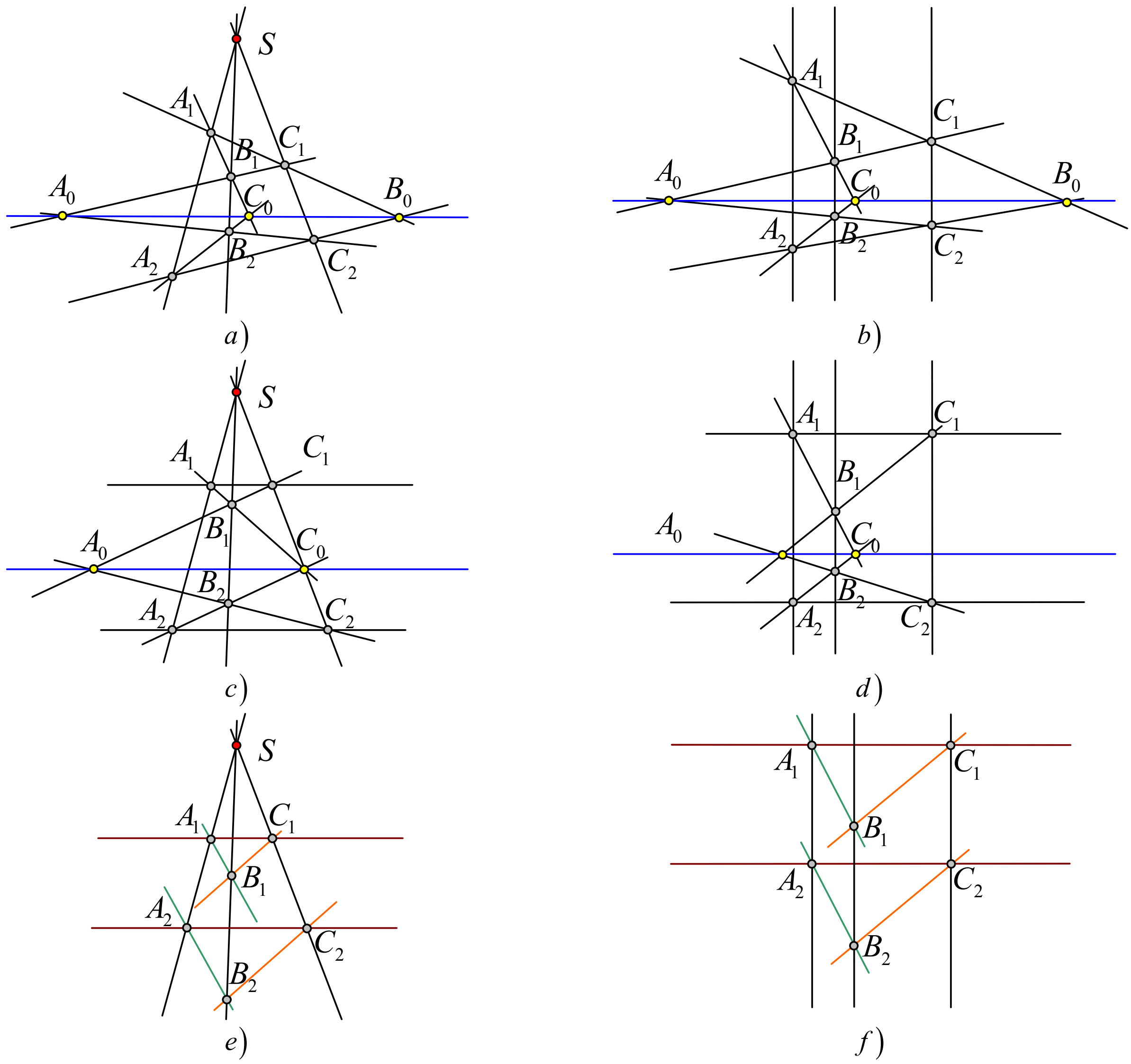

Рис. 9: до частинних випадків прямої та оберненої теорем Дезарга

Традиційно, в більшості існуючих підручників, посібників та збірниках задач, частинні випадки та обернені твердження (пов'язані з теоремою Дезарга) в термінах евклідової геометрії пропонують читачеві сформулювати самостійно. Не можна не погодитися з важливістю самостійного виконання зазначеного типу задач та переоцінити їх значення в контексті формування відповідних компетентностей. Проте автори вважають своїм обов'язком, принаймні задля цілісності викладу матеріалу та спроби забезпечення належного рівня сформованості відповідних результатів навчання у студентів, навести формулювання (в термінах евклідової геометрії) частинних випадків-тверджень для оберненої теореми Дезарга.

Обернена теорема Дезарга. *Нехай дано* $\triangle\, A_1B_1C_1$ *та* $\triangle\, A_2B_2C_2$ *. ...*

Теорема 2.1. *Якщо три точки перетину прямих, що містять відповідні сторони трикутників, належать одній прямій та дві прямі, які проходять через відповідні вершини трикутників не є паралельними (перетинаються в певній точці), то пряма, яка проходить через третю пару відповідних вершин трикутників, проходить через зазначену точку.*

Тобто, якщо
$A_0=(B_1C_1)\cap(B_2C_2)\,,\ B_0=(A_1C_1)\cap(A_2C_2)\,,\ C_0=(A_1B_1)\cap(A_2B_2)$ і
$A_0\in(B_0C_0)$, то $(A_1A_2)\cap(B_1B_2)\cap(C_1C_2)=S$ — рис. 9 a).

Теорема 2.2. *Якщо три точки перетину прямих, що містять відповідні сторони трикутників, належать одній прямій та дві прямі, які проходять через відповідні вершини трикутників є паралельними, то пряма, яка проходить через третю пару відповідних вершин трикутників, є паралельною до кожної із останніх зазначених паралельних прямих.*

Тобто, якщо
$A_0=(B_1C_1)\cap(B_2C_2)\,,\ B_0=(A_1C_1)\cap(A_2C_2)\,,\ C_0=(A_1B_1)\cap(A_2B_2)\,,$
$A_0\in(B_0C_0)\,,\ (A_1A_2)||(B_1B_2)$, то $(C_1C_2)||(A_1A_2)\,,\ (C_1C_2)||(B_1B_2)$ — рис. 9 b).

Теорема 2.3. *Якщо лише дві з відповідних сторін трикутників є паралельними, а пряма, яка проходить через точки перетину прямих, що містять інші відповідні сторони трикутників, є паралельною до кожної з паралельних сторін трикутників та дві прямі, які проходять через відповідні вершини трикутників не є паралельними (перетинаються в певній точці), то пряма, яка проходить через третю пару відповідних вершин трикутників, проходить через зазначену точку.*

Тобто, якщо
$A_0=(B_1C_1)\cap(B_2C_2)\,,\ C_0=(A_1B_1)\cap(A_2B_2)\,,\ (A_1C_1)||(A_2C_2)\,,$
$(A_0C_0)||(A_1C_1)\,,\ (A_0C_0)\parallel(A_2C_2)$ та $(A_1A_2)\nparallel(B_1B_2)$, то
$(A_1A_2)\cap(B_1B_2)\cap(C_1C_2)=S$ — рис. 9 c).

Теорема 2.4. *Якщо лише дві з відповідних сторін трикутників є паралельними, а пряма, яка проходить через точки перетину відповідних прямих трикутників (що містять інші відповідні сторони трикутників), є паралельною до кожної з паралельних сторін трикутників та дві прямі, які проходять через відповідні вершини трикутників, є паралельними, то пряма, яка проходить через третю пару відповідних вершин трикутників, є паралельною до кожної із останніх зазначених паралельних прямих.*

Тобто, якщо $A_0=(B_1C_1)\cap(B_2C_2), C_0=(A_1B_1)\cap(A_2B_2), (A_1C_1)||(A_2C_2)$, $(A_0C_0)||(A_1C_1)$, $(A_0C_0)||(A_2C_2)$ та $(A_1A_2)||(B_1B_2)$, то $(C_1C_2)||(A_1A_2)$, $(C_1C_2)||(B_1B_2)$ — рис. 9 d).

Теорема 2.5. *Якщо кожна пара прямих, що містять відповідні сторони трикутників, є паралельними та дві прямі, які проходять через відповідні вершини трикутників не є паралельними (перетинаються в певній точці), то пряма, яка проходить через третю пару відповідних вершин трикутників, проходить через зазначену точку.*

Тобто, якщо
$(B_1C_1)||(B_2C_2)$, $(A_1C_1)||(A_2C_2)$, $(A_1B_1)||(A_2B_2)$ і $(A_1A_2)\nparallel(B_1B_2)$, то $(A_1A_2)\cap(B_1B_2)\cap(C_1C_2)=S$ — рис. 9 e).

Теорема 2.6. *Якщо кожна пара прямих, що містять відповідні сторони трикутників, є паралельними та дві прямі, які проходять через відповідні вершини трикутників, є паралельними, то пряма, яка проходить через третю пару відповідних вершин трикутників, є паралельною до кожної із останніх зазначених паралельних прямих.*

Тобто, якщо
$(B_1C_1)||(B_2C_2)$, $(A_1C_1)||(A_2C_2)$, $(A_1B_1)||(A_2B_2)$ і $(A_1A_2)||(B_1B_2)$, то $(C_1C_2)||(A_1A_2)$, $(C_1C_2)||(B_1B_2)$ — рис. 9 f).

Зауваження 7. *Очевидно, що наведену низку тверджень доцільно використовувати (принаймні під час первинних уявлень та умовиводів) в якості відповідних ознак: «приналежності трьох точок одній прямій», «перетину трьох прямих в одній точці», «паралельності прямих» тощо.*

Зауваження 8. *Наведена низка частинних випадків прямої та оберненої теорем Дезарга на площині в термінах евклідової геометрії аж ніяк не претендує на оригінальність. З іншими підходами до формулювань цих тверджень можна ознайомитися, наприклад, в [11], С. 44; [12], С. 26. Основна ж мета наведених тверджень — цілісність та повнота матеріалу, одним з основних призначень якого є ідейна основа для можливих їх застосувань до розв'язання широкого кола задач на побудову, зокрема з недосяжними точками.*

Прикінцеві зауваження

Добре відомо (напр. [3], С. 169-170; [13], С. 199–201; [17], С. 98–101), що один з традиційних підходів до доведення прямої та оберненої теорем Дезарга полягає у наступному: спочатку доводяться «просторові варіанти» (коли трикутники належать різним непаралельним площинам) прямої та оберненої теорем Дезарга; потім на підставі «просторових варіантів» та шляхом розгляду допоміжної площини доводяться пряма та обернена теореми Дезарга на площині. Як зазначається в [14], особливістю способу доведення просторового варіанту теореми Дезарга є наступне: «*Доказательство, получается только из внимательного рассмотрения чертежа и установления определенных, следующих из этого выводов. Теорема Дезарга прекрасно иллюстрирует мысль о том, что значит и как важно уметь смотреть на чертеж и видеть по возможности все то, что на нем изображено. …Следует еще отметить, что все доказательство не выходит за пределы совершенно элементарных соображений, доступных всем изучающим стереометрию.*»

Слід також відзначити, що «просторовий варіант» теореми Дезарга є узагальненням добре відомого твердження зі шкільного курсу стереометрії: «Якщо трикутну піраміду з основою ABC перетнути (січною) площиною γ паралельно до площини (ABC), то в перерізі одержимо $\triangle\ A'B'C'$, подібний до $\triangle\ ABC$ та гомотетичний до нього» (більш детально — в [14], С. 46–47).

Крім того, «просторовий варіант» теореми Дезарга є однією з найважливіших теорем нарисної геометрії, на її основі розв'язується широке коло задач проекційного креслення та на побудову зображень в стереометрії.

Особливо цікавими є дослідження Д. Гільберта [4] щодо ролі теореми Дезарга для побудови систем аксіом проективної площини та проективного простору (напр. [5], С. 276–280; [16], С. 56). Проте мусимо відзначити, що М.І. Кованцов (в [9], С. 109) звертає увагу на те, що така роль має випадковий характер, бо при побудові проективної геометрії на іншій системі аксіом (наприклад, коли в основу покладено систему аксіом лінійного простору) ця роль може й не виявитись.

Висновки

Таким чином в представленій статті:

— виокремлено низку властивостей конфігурації Дезарга з невласними елементами на розширеній евклідовій площині;

— наведено алгоритми (можливі способи) розв'язання до п'яти найбільш типових задач на побудову конфігурації Дезарга з невласними елементами (за винятком першої з них) за принципом мінімальності числа невласних її елементів;

— для кожної з **трьох** ключових задач на відновлення елементів конфігурації Дезарга (10 точок якої є власними) в явному вигляді наведено їх розв'язки;
— за умов фіксації літер алфавіту та наборів відповідних індексів, наведено всі **дванадцять** з можливих розв'язків кожної із зазначених вище задач (всіх можливих позначень точок певної конфігурації Дезарга за умов обрання-фіксації дезаргової точки, прямої або ж трикутника);
— наведено формулювання (в певному сенсі всіх) частинних випадків прямої та оберненої теорем Дезарга на площині в термінах евклідової геометрії.

На думку авторів цілком досяжними є дослідження та систематичний виклад випадків, коли у дезаргових трикутників співпадають вершини або сторони. А, з урахуванням результатів роботи [8] та розгалуженості можливих випадків (на підставі довільності вибору певних точок та/або прямих), цікавим також здається як сам алгоритм, так і його програмна реалізація для побудови конфігурації Дезарга на площині.

Література

1. *Аргунов Б.И., Скорняков Л.А.* Конфигурационные теоремы. — М. : ГИТТЛ, 1957. — 44 с.
2. *Атанасян Л.С., Базылев В.Т.* Геометрия. Учеб. пос. для студентов физ.-мат. фак. пед. ин-тов. В 2 ч. Ч. 2. — М. : Просвещение, 1987. — 352 с.
3. *Боровик В.Н., Яковець В.П.* Курс вищої геометрії: Навчальний посібник. Суми : ВТД «Університетська книга», 2004. 464 с.
4. *Гильберт Д.* Основания геометрии. М., Л. : ОГИЗ, Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1948. — 491 с.
5. *Глаголев Н.А.* Проективная геометрия / Н.А. Глаголев; под ред. проф. Глаголева А. А. — 2-е изд., испр. и доп. — М. : Высш. шк., 1963. — 344 с.
6. *Заїка О.В.* Базові задачі в курсі проективної геометрії. Педагогічні науки: теорія, історія, інноваційні технології. Суми: СумДПУ імені А.С. Макаренка, 2011. №(11). С. 15–23.
7. *Заїка О.В.* Методична система навчання проективної геометрії в педагогічних університетах: дис. ... кан.пед.наук: 13.00.02 / Заїка Оксана Володимирівна; НПУ імені М.П. Драгоманова. К., 2013. 257 с.
8. *Иващенко А.В., Знаменская Е.П.* Варианты последовательностей построения конфигурации Дезарга // Вестник МГСУ. 2016. № 9. С. 130-139. DOI: 10.22227/1997-0935.2016.9.130-139
9. *Кованцов М.І.* Проективна геометрія. — К. : Вища школа, 1985. — 367 с.
10. *Мерзляк А.Г.* Геометрія : проф. рівень : підруч. для 10 кл. закладів загальної середньої освіти / А.Г. Мерзляк, Д.А. Номіровський, В.Б. Полонський, М.С. Якір. — Х. : Гімназія, 2018. — 240 с.

11. *Певзнер Л.С.* Проективная геометрия. М. : Просвещение, 1980. — 128 с.
12. *Певзнер С.Л., Цаленко М.М.* Задачник-практикум по проективной геометрии. — М. : Просвещение, 1982. — 80 с.
13. *Погорелов А.В.* Геометрия. М. : Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1983. — 288 с.
14. *Потоцкий М.В.* Что изучает проективная геометрия? — М. : Просвещение, 1982. — 80 с.
15. *Семенець С.П., Семенець Л.М.* Проективні перетворення площини. Теорема Паскаля // Проблеми освіти: Наук.-метод. зб. — 2004. — №37. — С. 61-66.
16. *Сергунова О.П., Котлова В.М.* Практикум з проективної геометрії. — К. : Вища школа, 1977. — 192 с.
17. *Четверухин Н.Ф.* Проективная геометрия. Учебник для педагогических институтов. — М. : Просвещение, 1969. — 368 с.

O.A. Kadubovskyi, O.V. Sokolova, A.O. Shulgina
Donbas State Pedagogical University, Sloviansk, Ukraine.

On problems for the Desargues configuration with improper elements and related issues

This article covers didactic and methodological aspects of studying Desargues configuration (in particular with improper elements) on the plane.

The authors have identified a number of properties of the Desargues configuration with improper elements on the extended Euclidean plane. Algorithms (possible methods) for solving up to five of the most typical problems for constructing the Desargues configuration with improper elements (with the exception of the first one) are given according to the principle of the minimum number of improper elements. For each of the three key problems for restoring elements of the Desargues configuration (all 10 points of which are proper) solutions are explicitly given; under the conditions of fixing the letters of the alphabet and sets of corresponding indices, all twelve possible solutions to each of the above problems are given (possible designations of points of a certain Desargues configuration, provided that a Desargues centre, a Desargues axis, or a Desargues triangle is chosen).

In addition, the authors give formulations (in some sense, of all) special cases of direct and inverse Desargues theorems on the plane in terms of Euclidean geometry.

Keywords: *projective plane, Desargues theorem on the plane, Desargues configuration on the plane, improper elements.*