

<sup>1</sup> вчителька Харківської загальноосвітньої школи №63

e-mail: krohmal\_tm@ukr.net, ORCID 0000-0002-2961-2671

<sup>2</sup> кандидат технічних наук, доцент каф. інформаційно-вимірювальних технологій Харківського національного університету радіоелектроніки

e-mail: nikonxipe@gmail.com, ORCID 0000-0002-1082-5247

## ОСОБЛИВОСТІ ТРАЄКТОРІЙ РУХУ ЗАРЯДЖЕНИХ ЧАСТИНОК У СХРЕЩЕНИХ ЕЛЕКТРИЧНОМУ ТА МАГНІТНОМУ ПОЛЯХ

Розглянуто траєкторії руху заряджених частинок у приладах зі схрещеними електричним та магнітним полями, які є результатом моделювання за різними моделями, які використовують. За всіма розглянутими моделями траєкторії мають циклоїдоподібні траєкторії. За наявності дисипації ці траєкторії кардинально змінюються в залежності від моделі, яку розглядають. Аналіз цих траєкторій значно спростив пояснення певних загадок магнетронів.

**Ключові слова:** *площинна модель, модель з гребінчатою структурою, магнетронний діод, магнетрон, мінімум потенційної енергії*

### Вступ

Дослідження та моделювання фізичних процесів реальних об'єктів вимагають в залежності від деталізації опису уточнення або додаткового опису окремих складових частин, що розглядають.

Генерація мікрохвильового випромінювання різних рівнів потужності є актуальною задачею протягом кількох десятиріч. Електромагнітне випромінювання від десятих часток міліметра до десятків сантиметрів використовують у різноманітних галузях науки, техніки, радіолокації, дефектоскопії, спектроскопії, медицині, побуті тощо.

Чільне місце серед приладів НВЧ посідають прилади зі схрещеними статичними полями, однак, треба визнати недостатнім рівень розуміння суті явищ, які відповідають за формування вихідного спектру в них, що не дозволяє оцінювати зміни вихідного сигналу в залежності від умов роботи.

Системи зі схрещеними полями – це електронні лампи, які ефективно перетворюють вхідну потужність сталого струму у НВЧ хвилі з високим ккд. Широкий перелік переваг систем М-типу обумовлює їх застосування у різноманітних радіоелектронних системах під час вирішення задач радіолокації, радіонавігації, зв'язку, радіопротидії та радіоелектронного придушення

й медичного та побутового НВЧ–нагрівання. Останнім часом широкого розповсюдження набули НВЧ пічки, які застосовують для нагрівання їжі [1].

Наразі для отримання високого рівня потужності випромінювання використовують вакуумні генератори, зокрема, прилади зі схрещеними полями, такі як магнетрони, в яких активним середовищем є електронний потік [2].

Магнетрон — один з перших й найрозповсюдженіших генераторів надвисоких частот, де електрони, що рухаються у схрещених статичних електричному та магнітному полях, взаємодіють з високочастотним електромагнітним полем [3].

З конструктивної точки зору сучасний багаторезонаторний магнетрон складається з трьох частин: катоду, анодного блоку, який містить порожнисті резонатори, й пристрою для виводу високочастотної енергії [4]. Поведінку роботи цих приладів аналізують за допомогою РІС кодів [5] і теорії ведучих центрів [6, 7]. Моделювання роботи приладів магнетронного типу пов'язане з розв'язанням складних диференціальних рівнянь, найчастіше чисельними методами, використовуючи пакети MAGIK-3D [8] та CST Studio Suite [9]. Такі моделі потребують занадто великих комп'ютерних й часових ресурсів [10].

Наразі для дослідження фізичних процесів у приладах зі схрещеними полями застосовують так званий «обчислювальний» експеримент [11]. За такого підходу до вивчення систем зі схрещеними полями набуто певних результатів.

У багатьох задачах вакуумної електроніки під час досліджень фізичних процесів, що мають місце в електронних приладах, постає необхідність досліджень траєкторій руху заряджених частинок в таких системах.

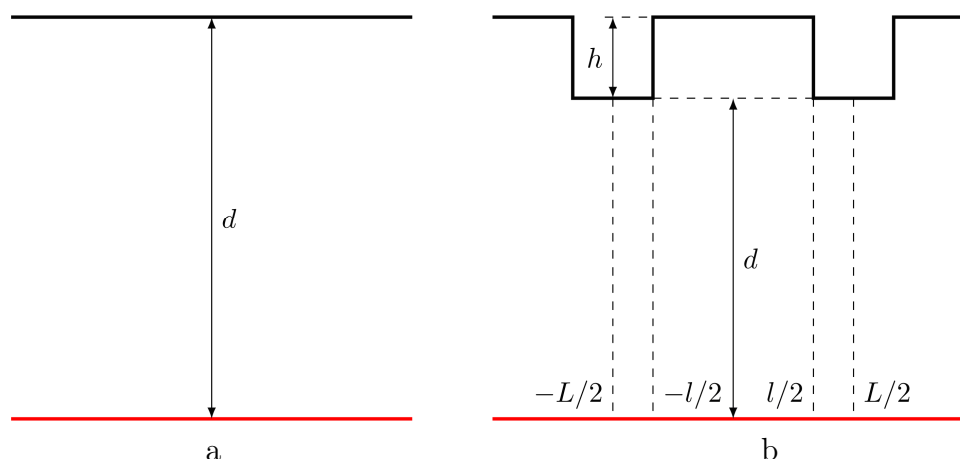
Теоретичне дослідження взаємодії електронів з полем у багаторезонаторному магнетроні або споріднених з ним приладах починається з розв'язання двовимірної задачі про рух електронів в однорідному магнітному та електричному полях [12].

Метою цієї статті є вивчення траєкторій руху заряджених частинок (електронів) у різних моделях приладів зі схрещеними полями за різних умов роботи та порівняння цих траєкторій.

## Основна частина

Обчислення руху заряджених частинок (електронів) розпочнемо з найпростішої пласкої моделі (рис. 1). Розгляд пласкої моделі є важливим не тільки з точки зору простоти математичного розв'язання. Більшість сучасних магнетронів мають катод великого діаметру, що дозволяє наближено зобразити катод і анод паралельними площинами.

Для розв'язання поставленої задачі має бути використано загальне рівня-



**Рис. 1:** Простір взаємодії  
а – магнетронний діод; б – гребінка

ння Лоренця, яке визначає силу, що діє на заряд за наявності електричного і магнітного полів.

### Магнетронний діод

Отже, рівняння руху заряджених частинок у схрещених електричному та магнітному полях, що описують в декартовій системі координат  $(x, y)$ , є задачею Коші й визначають такою системою рівнянь

$$\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} &= \eta \left( E_x + B \frac{dy}{dt} \right) \\ \frac{d^2y}{dt^2} &= \eta \left( E_y - B \frac{dx}{dt} \right), \end{aligned} \quad (1)$$

де  $\eta$  — питомий заряд електрону;

$B$  — напруженість поперечного магнітного поля;

$E_x$  — напруженість електричного поля вздовж осі абсцис;

$E_y$  — напруженість електричного поля вздовж осі ординат.

Початкові умови для цієї задачі набувають таких значень:

$$\begin{aligned} x(0) &= 0; \\ \left. \frac{dx}{dt} \right|_{t=0} &= 0; \\ y(0) &= 0; \\ \left. \frac{dy}{dt} \right|_{t=0} &= 0. \end{aligned} \quad (2)$$

Напруженість електростатичного поля для конфігурації, що зображено на рис. 1а має вигляд:

$$\begin{aligned} E_x &= 0; \\ E_y &= \frac{U_a}{d}, \end{aligned} \quad (3)$$

де  $U_a$  — напруга на одному з електродів, найчастіше анодна.

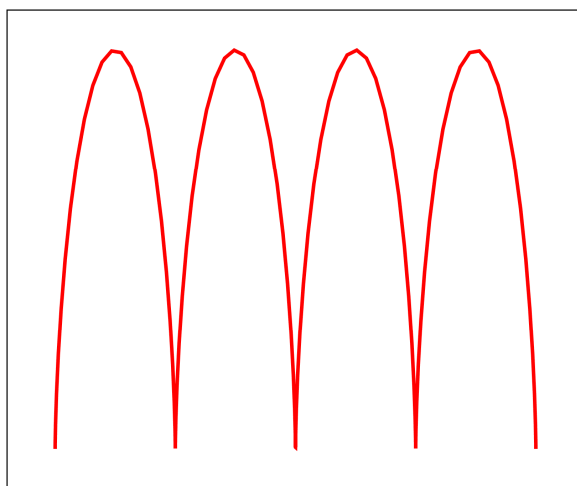
Розв'язок системи рівнянь (1) з початковими умовами (2) та конфігурацією електростатичного поля (3) є відомим і описаний майже в усіх публікаціях, що присвячені руху заряджених частинок у схрещених полях і має вигляд

$$x = \frac{U_a}{\eta d B^2} (\omega_H t - \sin \omega_H t);$$

$$y = \frac{U_a}{\eta d B^2} (1 - \cos \omega_H t),$$

де  $\omega_H = \eta B$  — циклотронна частота.

Це параметричне рівняння циклоїди. Траєкторію руху електронів у площинному магнетронному діоді наведено на рис. 2.



**Рис. 2:** Траєкторія руху в площинному магнетронному діоді

### Площинна гребінчата структура

Кращим наближенням до реальних приладів є площинна модель з гребінчатою структурою (рис. 1b).

Математично цю модель описують за допомогою рівнянь руху (1), початкових умов (2) та напруженості електричного поля [12, 13]

$$E_x = \frac{4\pi h}{L} A_0 \sum_{n=1}^{\infty} n A_n \sin \frac{2\pi n x}{L} \operatorname{sh} \frac{ny}{d}; \quad (4)$$

$$E_y = A_0 \left( 1 - \frac{2h}{d} \sum_{n=1}^{\infty} n A_n \cos \frac{2\pi n x}{L} \operatorname{ch} \frac{ny}{d} \right),$$

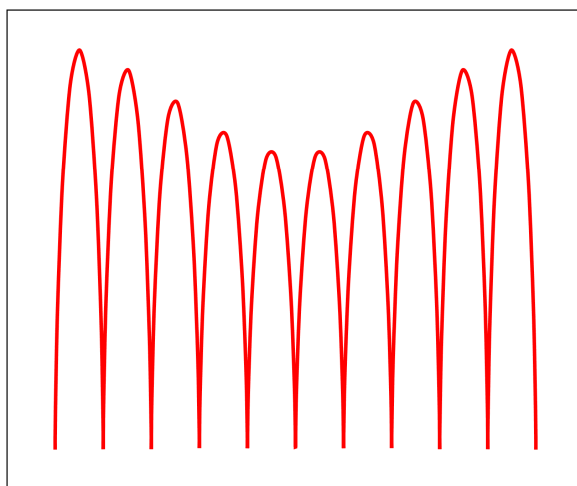
де

$$A_0 = \frac{U_a}{d + \frac{lh}{L}},$$

$$A_n = \frac{\sin \frac{\pi nl}{L}}{\left( \frac{\pi nl}{L} + \sin \frac{2\pi nl}{L} \right) \left( \operatorname{sh} \frac{n(h+d)}{d} - \operatorname{sh} n \right) + \pi \operatorname{sh} n}.$$

Нажаль для системи рівнянь (1) за початкових умов (2) та напруженостями електричних полів (4) не можливо отримати аналітичний розв'язок, тому розв'язування здійснювали за допомогою чисельного методу Рунге-Кутти четвертого порядку.

Траєкторії руху, що отримано за допомогою чисельного методу, наведено на рис. 3.

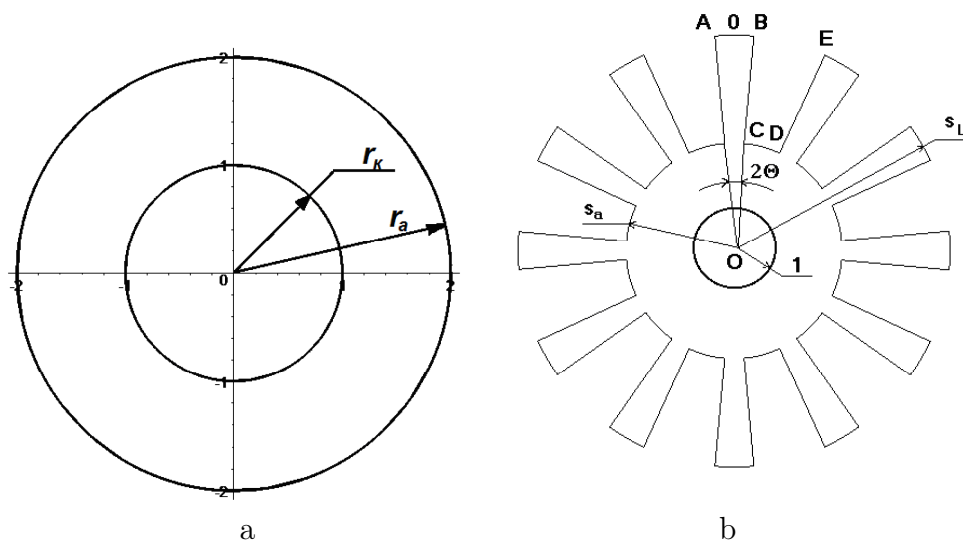


**Рис. 3:** Траєкторія руху в площинній гребінчатій структурі

З порівняння зображень на рис. 2 та 3 можна побачити, що під час моделювання врахування розподілу поля, яке притаманне гребінчатій структурі (рис. 1b), виявляє наявність модуляції потоку заряджених частинок, що схоже на прояв діокоттонного ефекту [7] і призводить до суттєвого впливу на еволюцію системи.

## Циліндричний магнетронний діод

Щодо систем зі схрещеними полями, які мають циліндричну конструкцію електродів, розглянемо найпростішу з них — циліндричний магнетронний діод (рис. 4a) та модель магнетрону (рис. 4b). Ці конструкції складаються з двох співвісних циліндрів (магнетронний діод) і замість одного з циліндрів розташовують електрод зі складною конфігурацією (магнетрон).



**Рис. 4:** Простір взаємодії  
a – магнетронний діод; b – магнетрон

Рівняння руху зарядженої частинки у схрещених полях для циліндричних конструкцій описують в полярній системі координат  $(s, \phi)$  і це є задачею Коші, яку визначають такою системою рівнянь [14]

$$\begin{aligned} \frac{d^2 s}{dt^2} - s \left( \frac{d\phi}{dt} \right)^2 &= \eta \left( E_s + B s \frac{d\phi}{dt} \right) \\ s \frac{d^2 \phi}{dt^2} + 2 \frac{ds}{dt} \frac{d\phi}{dt} &= \eta \left( E_\phi - B \frac{ds}{dt} \right), \end{aligned} \quad (5)$$

де  $s$  — безрозмірний радіус  $\frac{r_a}{r_k}$  ;

$E_s$  — напруженість електростатичного поля вздовж радіальної координати;

$E_\phi$  — напруженість електростатичного поля по азимутальній координаті.

При цьому початкові умови набувають таких значень:

$$\begin{aligned} s(0) &= 1; \\ \left. \frac{ds}{dt} \right|_{t=0} &= 0; \\ \phi(0) &= 0; \\ \left. \frac{d\phi}{dt} \right|_{t=0} &= 0. \end{aligned} \quad (6)$$

Напруженості електростатичного поля для магнетронного діода визначають як

$$\begin{aligned} E_s &= \frac{\eta}{r_k^2 \omega_H^2} \frac{U_a}{s \ln s_a} \\ E_\phi &= 0. \end{aligned} \quad (7)$$

Нажаль для системи рівнянь (5) за початкових умов (6) та напруженостями електричних полів (7) не можливо отримати аналітичний розв'язок, тому розв'язування здійснювали за допомогою чисельного методу Рунге-Кутти четвертого порядку.

Траєкторії руху, що отримано за допомогою чисельного методу, наведено на рис. 5. Ці траєкторії не є епіциклоїдами, як могло здатися виходячи з траєкторій руху в площинному магнетронному діоді.

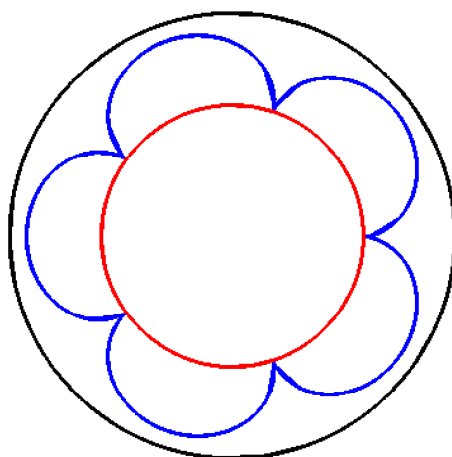


Рис. 5: Траєкторія руху в циліндричному магнетронному діоді

## Магнетрон

Найкращим наближенням до реальних приладів є модель магнетрону (рис. 4b).

Математично цю модель описують за допомогою рівнянь руху (5), початкових умов (6) та напруженості електричного поля [15]

$$E_s = \frac{a_0 z}{s} \left( 1 - 2N \ln \frac{s_v}{s_a} \sum_{n=1}^{\infty} n a_n \operatorname{cor} s^{Nn} \cos Nn\varphi \right); \quad (8)$$

$$E_\phi = 2a_0 z N \ln \frac{s_v}{s_a} \sum_{n=1}^{\infty} n a_n \operatorname{sir} s^{Nn} \sin Nn\varphi,$$

де  $N$  — кількість резонаторів;

$$a_0 = \frac{U_a}{\ln s_a + \frac{N\theta}{\pi} \ln \frac{s_v}{s_a}},$$

$$a_n = \frac{\sin nN\theta}{(nN\theta + \sin 2nN\theta)(\operatorname{sir} s_v^{Nn} - \operatorname{sir} s_a^{Nn}) + \pi \operatorname{sir} s_a^{Nn}}$$

$$z = \frac{\eta U_a}{\omega_H^2 r_k^2};$$

$$\operatorname{sir} x = \frac{x - x^{-1}}{2};$$

$$\operatorname{cor} x = \frac{x + x^{-1}}{2}.$$

Нажаль для системи рівнянь (5) за початкових умов (6) та напруженостями електричних полів (8) як і в попередніх випадках не можливо отримати аналітичний розв'язок, тому розв'язування здійснювали за допомогою чисельного методу Рунге-Кутти четвертого порядку.

Траєкторії руху, що отримано за допомогою чисельного методу, наведено на рис. 6. Ці траєкторії не є епіциклоїдами і дуже схожі на траєкторії, які було отримано в магнетронному діоді і з просторовою модуляцією як в гребінці.

## Дисипація

За класичною електродинамікою кожна заряджена частинка, що рухається прискорено, випромінює енергію.

Випромінювання енергії, зазвичай, відбивається на русі частинки. Припущення про те, що у магнітному полі «швидкість частинки не змінюється», є лише наближено вірним. Частинка, що рухається за круговою траєкторією, випромінює енергію у вигляді електромагнітних хвиль, через те, що зміна напрямку швидкості означає, що рух є прискореним.

У звичайних електронних приладах (клістролах, магнетронах, лампах з біжною хвилею тощо) обидва процеси — випромінювання та формуван-



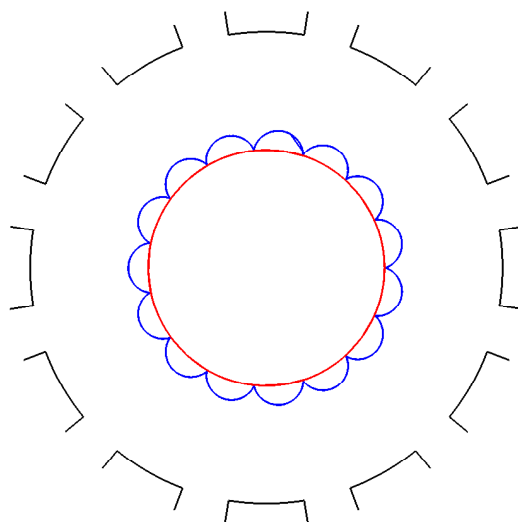


Рис. 6: Траєкторія руху в магнетроні

ня згустків — відбуваються одночасно, згустки формуються під дією власного випромінювання, в результаті чого випромінювання підсилюється й формування продовжується аж до його обмеження нелінійними ефектами. Випромінювання відбувається й тоді, коли заряджена частинка пролітає повз яке-небудь тіло або осідає на ньому — це так зване перехідне випромінювання. Найпростіший випадок перехідного випромінювання — випромінювання за рівномірного та прямолінійного руху частинки у порожньому напівпросторі.

Спонтанне та індукційоване випромінювання — це основні поняття квантової теорії випромінювання, без яких не можна обійтися під час вивчення квантової електроніки; у класичній електроніці, що оперує з рухом електронів у вакуумі до відносно недавнього часу таке трактування фактично не застосовували, оскільки змістовних та нових результатів вона не надавала [16, 17].

При врахуванні в системах зі схрещеними полями дисипації, яку обумовлено втратою енергії електронів через різні механізми, рівняння руху заряджених частинок у вище описаних моделях (1) та (5) слід доповнити доданком  $\alpha \frac{dy}{dt}$  для моделі (1) та доданком  $\alpha \frac{ds}{dt}$  для моделі (5) [18], при чому початкові умови (2) і (6) та розподіли електростатичного поля по координатах (3), (4), (7) та (8) залишаються незмінними.

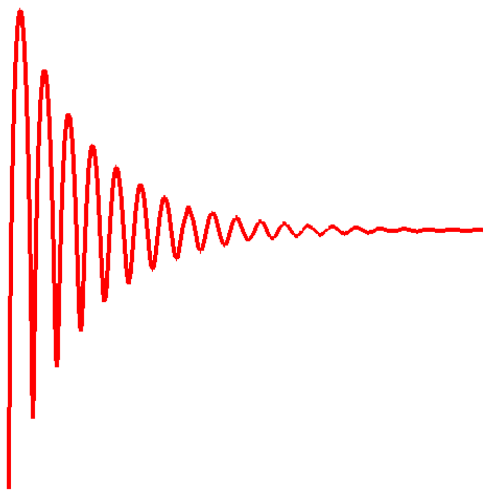
Базуючись на принципі мінімуму потенційної енергії, що будь-яка замкнена система прагне перейти в такий стан, в якому її потенційна енергія є мінімальною, за наявності дисипації вище розглянуті системи прагнутимуть до мінімуму своєї потенційної енергії. Розташування цих мінімумів можна визначити дослідивши ці системи.

Для площинної системи (1) такий мінімум розташовуватиметься на прямій  $y_0 = \eta \frac{U_a}{\omega_H^2 d}$ .

Для магнетронного діода (5) такий мінімум розташовуватиметься на колі радіуса  $s_0 = \sqrt{2b + \sqrt{4b^2 + 1}}$ , де  $b = \frac{\eta}{r_k^2 \omega_H^2} \frac{U_a}{\ln s_a}$

Для гребінки (1), як і для магнетрону (5) вираз для розташування мінімуму потенційної енергії є дуже громіздким, але можна визначити область розташування цих мінімумів. Для гребінки —  $y > d$ , для магнетрону —  $s > s_a$ .

Траєкторії руху, що отримано для площинної моделі, наведено на рис. 7.



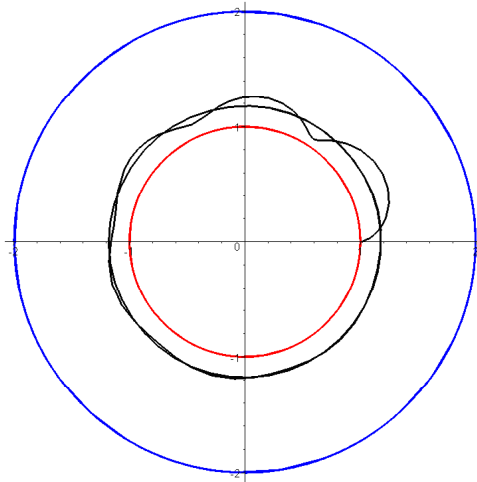
**Рис. 7:** Траєкторія руху в площинному магнетронному діоді за наявності дисипації

З рисунку видно, що траєкторії прагнуть до мінімуму потенціалу в цій системі  $y_0 = \eta \frac{U_a}{\omega_H^2 d}$ . Це добре узгоджується і просто пояснює твердження, що в міру накопичення просторового заряду в такий системі утворюється прямолінійний потік, хоч там і не згадували про мінімум потенційної енергії.

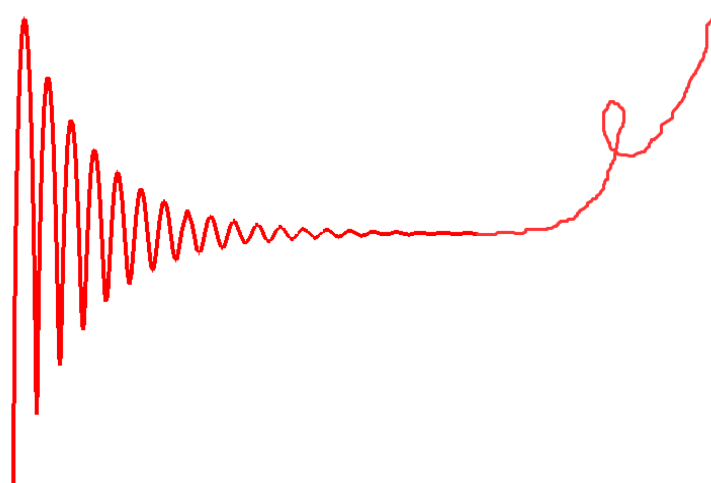
Траєкторії руху, що отримано для моделі циліндричного магнетронного діода, наведено на рис. 8.

З рисунку видно, що траєкторії прагнуть до мінімуму потенціалу в цій системі  $s_0 = \sqrt{2b + \sqrt{4b^2 + 1}}$ . Це добре узгоджується і просто пояснює механізм накопичення просторового заряду в такий системі, хоч пояснення такого механізму подають у не зрозумілих припущеннях. Електрони рухаються до мінімуму потенціалу, тим самим утворюючи хмару просторового заряду в мінімумі потенційної енергії [19].

Траєкторії руху, що отримано для моделі площинної гребінчастої структури, наведено на рис. 9.

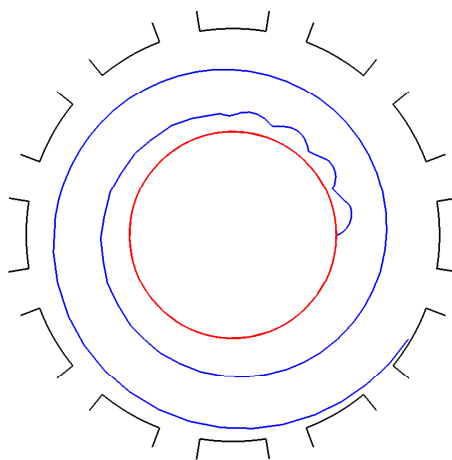


**Рис. 8:** Траєкторія руху в циліндричному магнетронному діоді за наявності дисипації



**Рис. 9:** Траєкторія руху в площинній гребінчатій структурі за наявності дисипації

Траєкторії руху, що отримано для моделі магнетрону, наведено на рис. 10.



**Рис. 10:** Траєкторія руху в магнетроні за наявності дисипації

З рисунків 9 та 10 видно, що траєкторії прагнуть до мінімуму потенціалу

в цих системах, який знаходиться всередині анодного блоку. Це просто пояснює механізм протікання струму на анод за будь-якої анодної напруги, хоч пояснення такого механізму подають у не зрозумілих припущеннях.

## Висновки

Таким чином, порівняно траєкторії рухів чотирьох моделей приладів зі схрещеними полями. Ці траєкторії мають циклоїдоподібні траєкторії.

Врахування ефектів дисипації в розглянутих моделях призводить до значної зміни траєкторій руху.

Для площинного магнетронного діода траєкторія стає прямолінійним потоком. Для циліндричного магнетронного діода траєкторія стає кільцевим рухом, пояснюючи механізм накопичення просторового заряду і розв'язуючи одну із загадок магнетронів [4].

Траєкторія частинок в площинній гребінчатій структурі та магнетроні прямують до аноду, пояснюючи одну із загадок магнетронів [4] про існування анодного струму в передгенераційному режимі роботи.

## Література

1. *Kawaguchi T.* Analysis of Magnetron Operation in Microwave Oven // Toshiba Revyu, 1985, v. 40, No 6, P. 531 – 534. – Яп.
2. *Гуляев Ю.В., Корниенко В.Н., Олейников А.Я., Черепенин В.А.* Технология открытых систем и вычислительный эксперимент в радиоэлектронике // Журнал радиоэлектроники. — 2002 — №9 — <http://jre.cplire.ru/>
3. *Воловенко М.В., Копоть М.А., Нікітенко О.М.* Порівняльний аналіз методів розв'язання рівнянь руху в системах зі схрещеними полями. Збірник наукових праць фізико-математичного факультету ДДПУ. 2020. Вип. 10. С. 31–42.
4. *Ланда П.С., Трубецков Д.И., Гусев В.А.* Заблуждение и реальность в некоторых задачах физики (теория и эксперимент) // Успехи физических наук — 2009. — т. 179, — № 3 — С. 255–277
5. *Dombrowski G.E.* Simulation of Magnetrons and Crossed-Field Amplifier. IEEE Transactions on electron devices. 1988. vol. 35. no 11. PP. 2060–2067.
6. *Нечаев В.Е.* К анализу процессов в многорезонаторных магнетронах // Известия вузов. Радиотехника. — 1964. — 7 — № 1. — С. 146–159.
7. *Каур D.J., Thomas G.E.* Chaotic instabilities and density profiles in a crossed-field electron vacuum devices // SPIE. — 2000. — 4031. — PP. 54–64.
8. *Goplen B., Ludeking L., Smith D., Warren G.* User-configurable MAGIK for electromagnetic PIC calculations Comput. Phys. Commun. — 1995 — vol. 87. — nos. 1–2. — PP. 54–86.

9. (2008) CST Studio Suite. [Online]. Available: <http://www.cst.com>
10. Корчакова А. С., Нікітенко О. М. Использование линейризованного подхода к моделированию приборов со скрещенными полями // Известия Волгоградского государственного технического университета : межвуз. сб. науч. ст. № 23(126) / ВолгГТУ. — Волгоград, 2013. (Серия «Электроника, измерительная техника, радиотехника и связь»; вып. 8). — С. 48–57
11. Hockney R. W., and Eastwood J. W. Computer Simulation Using Particles, McGraw-Hill, New York, 1981.
12. Воловенко М. В., Кузнiченко В. В., Нікітенко О. М. Моделювання руху заряджених частинок у схрещених полях з гребiнчастою уповiльнюючою системою. // Дванадцята вiдкрита наукова конференцiя Інституту прикладної математики та фундаментальних наук (ІМФН) – Львiв: Видавництво Львiвської полiтехнiки, 2016. С. 61 – 63
13. Корчакова А. С., Нікітенко О. М. Моделювання розподiлу електростатичного поля в пласких системах зi складною конфiгурацiєю електродiв // «Компьютерное моделирование в наукоемких технологиях» (КМНТ-2014) С. 200 – 203
14. Воловенко М. В., Колендовська М. М., Нікітенко О. М. Моделювання руху заряджених частинок у приладах зi схрещеними полями цилiндричної конструкцiї Тринадцята вiдкрита наукова конференцiя Інституту прикладної математики та фундаментальних наук присвячена 125-рiччю вiд дня народження Стефана Банаха(ІМФН) – Львiв: Видавництво Тараса Сороки, 2017. С. 78–79.
15. Nikitenko O. M. Distribution of electrostatic potential in crossed-field system with complex electrodes' configuration // Journal of Microwaves and Optoelectronics, Vol. 2, No. 2, December 2000. — PP. 1–9.
16. Вайнштейн Л.А., Солнцев В.А. Лекции по сверхвысокочастотной электронике. М.: Сов. радио, 1973. 400 с.
17. Лекции по электронике СВЧ и радиофизике. 8-я школа-семинар инженеров. Саратов, Саратовский университет, 1989, 206 с.
18. Воловенко М. В. Зiнкiвський В.М. Нікітенко О.М. Стiйкiсть та перiодичний рух нелiнійної динамiчної системи «магнетронний дiод з дисипацiєю» Радіотехніка. Всеукр. мiжвiд. наук.-техн. зб. 2010. Вип.160. — С. 351–355.
19. Nikitenko O. Has a magnetron abnormal anode current? 2019 International Conference on Information and Telecommunication Technologies and Radio Electronics, UkrMiCo 2019 — Proceedings, 2019, doi 10.1109/UkrMiCo47782.2019.9165516

**T.M. Krokmal, O.M. Nikitenko**

Kharkiv secondary school №63, Kharkiv, Ukraine;

Kharkiv National University of Radio Electronics, Kharkiv, Ukraine.

**Feature of charged particles' trajectories in crossed electrical and magnetic fields**

The charged particles trajectories were modeling results using models in crossed-field devices was described. The trajectories were calculated by different models are cycloid like. When we had a dissipation these trajectories change cardinally. It depended by using model. This trajectories' analysis largely simplified the explain of some magnetrons' secrets.

**Keywords:** *plane model, comb structure model, magnetron diode, magnetron, potential energy minimum*

---