УДК 373.5.016:51

Кадубовський О.А., Беседін Б.Б., Білоус М.А.

[1] *канд. фізико-математичних наук, доцент каф. математики та інформатики, ДВНЗ «ДДПУ»*

[2] *канд. педагогічних наук, доцент каф. МНМ та МНІ, ДВНЗ «ДДПУ»*

[3] *студент 4 курсу фізико-математичного факультету, ДВНЗ «ДДПУ»*

e-mail: kadubovs@ukr.net, besedin_boris@ukr.net

ДО ЗАДАЧ НА ДОСЛІДЖЕННЯ КВАДРАТНОГО ТРИЧЛЕНА З КОЕФІЦІЄНТАМИ, ЗАЛЕЖНИМИ ВІД ПАРАМЕТРА

Стаття висвітлює можливий підхід до дослідження квадратного тричлена, коефіцієнти якого містять параметр. Надаються певні поради методичного характеру щодо вивчення відповідного матеріалу учнями закладів середньої освіти. Наводяться аналітичні умови, що визначають положення графіка квадратного тричлена на координатній площині.

Ключові слова: *квадратний тричлен, квадратне рівняння, параметр, розташування коренів, розташування параболи на координатній площині.*

Вступ

Питання підвищення якості математичної освіти за результатами зовнішнього незалежного оцінювання минулого (2018) року за своєю актуальністю набуває рівня державного значення. Як наслідок, було затверджено положення про обов'язкове оцінювання досягнень випускників закладів середньої освіти з математики починаючи з 2021 року.

Одним із напрямків посилення ефективності навчального процесу є застосування у вивченні математики задач дослідницького характеру. В першу чергу такими задачами є дослідження рівнянь, нерівностей та їх систем з параметрами.

Дана стаття є логічним продовженням попередніх публікацій, які висвітлювали алгоритмічні способи аналізу лінійних та квадратних рівнянь та нерівностей з параметрами [3, 4]. Задачі на дослідження квадратного тричлена, коефіцієнти якого містять параметри, потребують від учнів вмінь проводити змістовний аналіз відповідних ситуацій, володіння властивостями функцій різних класів та здатність застосовувати ці властивості під час проведення тих чи інших міркувань [5], [6], [7]. Такі задачі вимагають від учнів систематизованих та узагальнених знань та вмінь. Вони сприяють формуванню алгоритмічного мислення, дуже важливого вміння розробляти структурований план розв'язання задачі та здійснювати поетапну його реалізацію. В цьому полягає їх особлива методична цінність.

В роботах [1], [2] наведено наступну класифікацію **основних задач** на дослідження квадратного тричлена з коефіцієнтами, залежними від параметра:

1. Розв'язати рівняння $A(a)x^2 + B(a)x + C(a) = 0\,.$ $\quad(*)$
2. Розв'язати нерівність $A(a)x^2 + B(a)x + C(a) \asymp 0$, де $\asymp$ — один із чотирьох знаків порівняння: $>$, $\geqslant$, $<$, $\leqslant$.
3. Знайти всі значення параметра a, при яких рівняння $(*)$ має дійсні корені, та визначити їх знаки.
4. Дослідити розташування дійсних коренів рівняння $(*)$ по відношенню до заданої точки чи проміжку.
5. Знайти всі значення параметра a, при яких з однієї нерівності випливає інша.
6. Знайти всі значення параметра a, при яких корені x_1, x_2 рівняння $(*)$ задовольняють певну умову.
7. Знайти всі значення параметра a, при яких рівняння $A_1(a)x^2 + B_1(a)x + C_1(a) = 0$ та $A_2(a)x^2 + B_2(a)x + C_2(a) = 0$ мають спільні корені (хоча б один спільний корінь).
8. Знайти всі значення параметра a, при яких квадратний тричлен $y = A(a)x^2 + B(a)x + C(a) = 0$ чи задана функція $y = F(x_1; x_2)$ (x_1, x_2 – корені рівняння $(*)$) набуває найбільшого (найменшого) значення на заданому проміжку.

В статтях [3, 4] висвітлюється авторський досвід застосування алгоритмічного підходу під час навчання методам розв'язання рівнянь та нерівностей (з однією змінною) першого та другого степеня з параметром. В термінах, що не виходять за межі програмного змістового модуля «Множини та операції над ними» для учнів 8 класу з поглибленим вивченням математики, в статтях запропоновано граф-схеми та алгоритми до розв'язання рівнянь та нерівностей першого та другого степеня з параметром.

Метою представленої статті є висвітлення одного з можливих підходів до дослідження квадратного тричлена, коефіцієнти якого містять параметр. Одним із завдань — навести поради методичного характеру щодо вивчення відповідного матеріалу учнями закладів середньої освіти.

Крім того, в роботі наведено аналітичні умови, що визначають положення графіка квадратного тричлена (з коефіцієнтами залежними від параметра) на координатній площині.

1. Попередні відомості та зауваження

Нехай дано квадратне рівняння

$$ax^2 + bx + c = 0, \quad a, b, c \in R, \quad a \neq 0 \tag{1}$$

$$f(x) = ax^2 + bx + c \tag{2}$$

$$D = b^2 - 4ac \tag{3}$$

Твердження 1. *Обидва корені рівняння* (1) *більші за число* λ *тоді і лише тоді, коли виконуються умови*

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} a > 0 \\ f(\lambda) > 0 \\ -\frac{b}{2a} > \lambda \\ D \geqslant 0 \end{cases} \\ \begin{cases} a < 0 \\ f(\lambda) < 0 \\ -\frac{b}{2a} > \lambda \\ D \geqslant 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \begin{cases} a \cdot f(\lambda) > 0 \\ -\frac{b}{2a} > \lambda \\ D \geqslant 0 \end{cases}$$

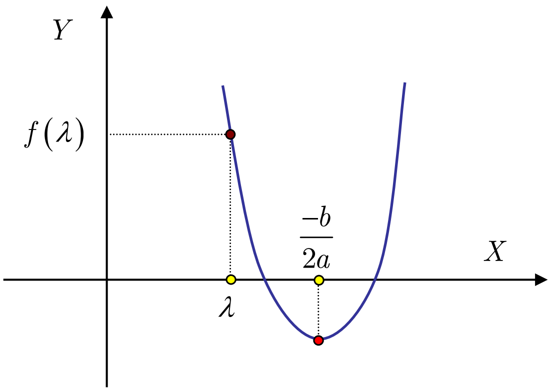

Рис. 1: до твердження 1 ($a > 0$)

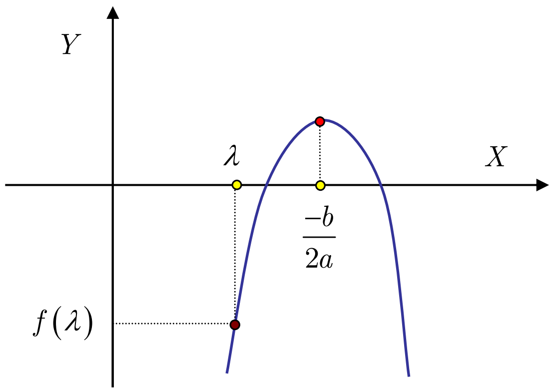

Рис. 2: до твердження 1 ($a < 0$)

Твердження 2. *Обидва корені рівняння* (1) *менші за число* λ *тоді і лише тоді, коли виконуються умови*

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} a > 0 \\ f(\lambda) > 0 \\ -\frac{b}{2a} < \lambda \\ D \geqslant 0 \end{cases} \\ \begin{cases} a < 0 \\ f(\lambda) < 0 \\ -\frac{b}{2a} < \lambda \\ D \geqslant 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \begin{cases} a \cdot f(\lambda) > 0 \\ -\frac{b}{2a} < \lambda \\ D \geqslant 0 \end{cases}$$

Наслідок 1. *Корені рівняння* (1) *мають однакові знаки тоді і лише тоді, коли виконуються умови*

$$\begin{cases} a \cdot f(0) = a \cdot c > 0 \\ D \geqslant 0 \end{cases}$$

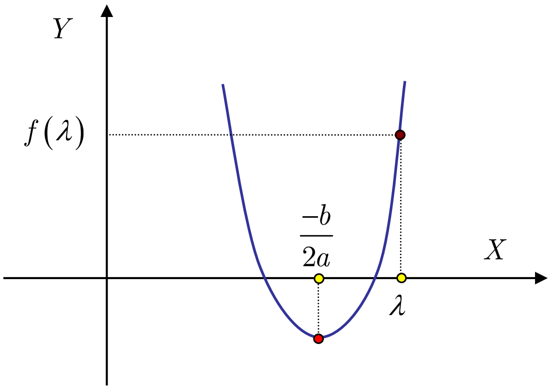

Рис. 3: до твердження 2 ($a > 0$)

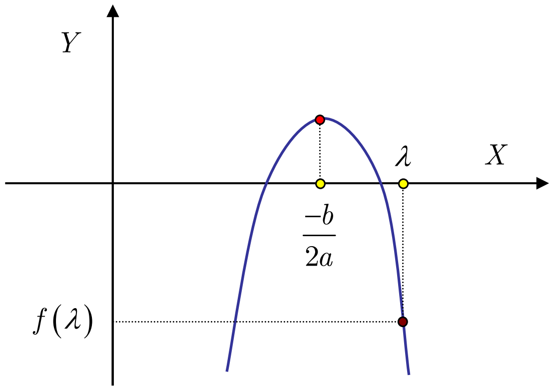

Рис. 4: до твердження 2 ($a < 0$)

Твердження 3. *Корені рівняння* (1) *належать проміжку* $(\lambda_1; \lambda_2)$ *тоді і лише тоді, коли виконуються умови*

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} a > 0 \\ f(\lambda_1) > 0 \\ a \cdot f(\lambda_2) > 0 \\ \lambda_1 < -\frac{b}{2a} < \lambda_2 \\ D \geqslant 0 \end{cases} \\ \begin{cases} a < 0 \\ f(\lambda_1) < 0 \\ a \cdot f(\lambda_2) > 0 \\ \lambda_1 < -\frac{b}{2a} < \lambda_2 \\ D \geqslant 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \begin{cases} a \cdot f(\lambda_1) > 0 \\ a \cdot f(\lambda_2) > 0 \\ \lambda_1 < -\frac{b}{2a} < \lambda_2 \\ D \geqslant 0 \end{cases}$$

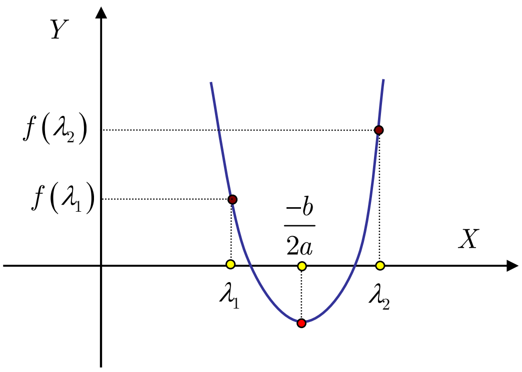

Рис. 5: до твердження 3 ($a > 0$)

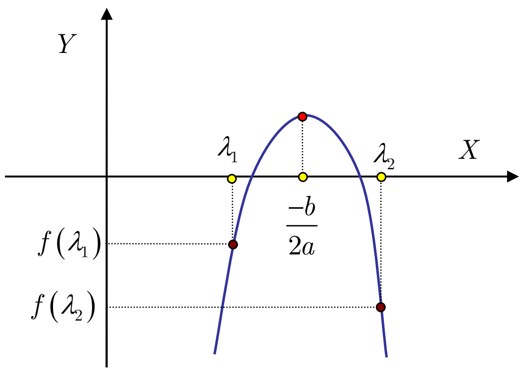

Рис. 6: до твердження 3 ($a < 0$)

Твердження 4. *Число* λ *знаходиться між коренями рівняння* (1) *тоді і лише тоді, коли виконується умова*

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases} a > 0 \\ f(\lambda) < 0 \end{cases} \\ \begin{cases} a < 0 \\ f(\lambda) > 0 \end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow a \cdot f(\lambda) < 0.$$

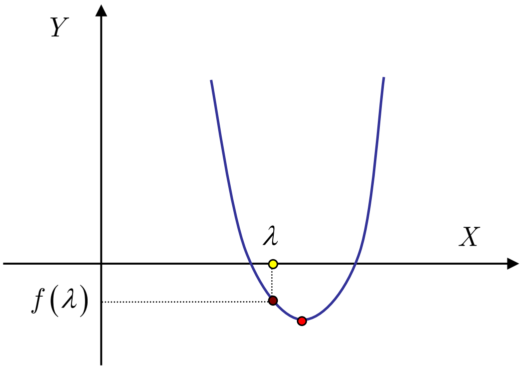

Рис. 7: до твердження 4 ($a > 0$)

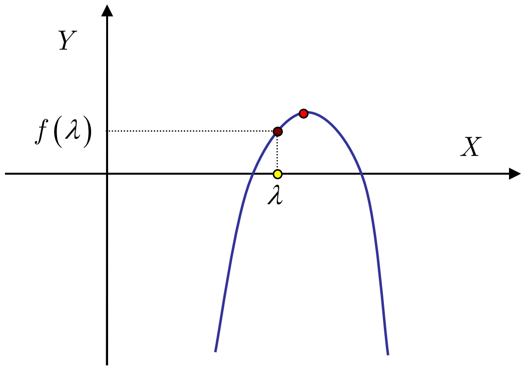

Рис. 8: до твердження 4 ($a < 0$)

Наслідок 2. *Корені рівняння* (1) *мають різні знаки тоді і лише тоді, коли*

$$a \cdot c < 0.$$

Твердження 5. *Тільки більший корінь рівняння* (1) *належить проміжку* $(\lambda_1; \lambda_2)$ *тоді і лише тоді, коли виконуються умови*

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases} a > 0 \\ f(\lambda_1) < 0 \\ f(\lambda_2) > 0 \end{cases} \\ \begin{cases} a < 0 \\ f(\lambda_1) > 0 \\ f(\lambda_2) < 0 \end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \begin{cases} a \cdot f(\lambda_1) < 0 \\ a \cdot f(\lambda_2) > 0 \end{cases}$$

Твердження 6. *Тільки менший корінь рівняння* (1) *належить проміжку* $(\lambda_1; \lambda_2)$ *тоді і лише тоді, коли виконуються умови*

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases} a > 0 \\ f(\lambda_1) > 0 \\ f(\lambda_2) < 0 \end{cases} \\ \begin{cases} a < 0 \\ f(\lambda_1) < 0 \\ f(\lambda_2) > 0 \end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \begin{cases} a \cdot f(\lambda_1) > 0 \\ a \cdot f(\lambda_2) < 0 \end{cases}$$

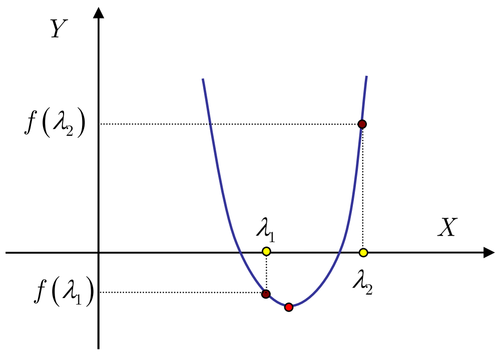

Рис. 9: до твердження 5 ($a > 0$)

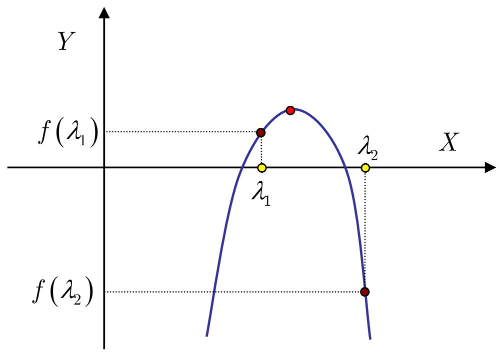

Рис. 10: до твердження 5 ($a < 0$)

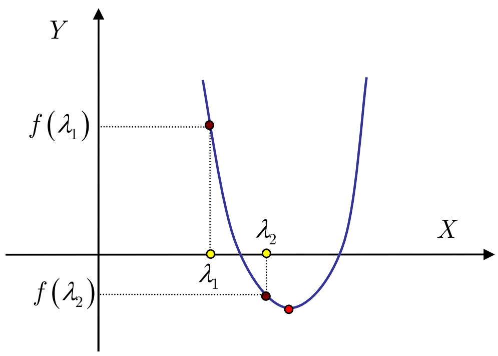

Рис. 11: до твердження 6 ($a > 0$)

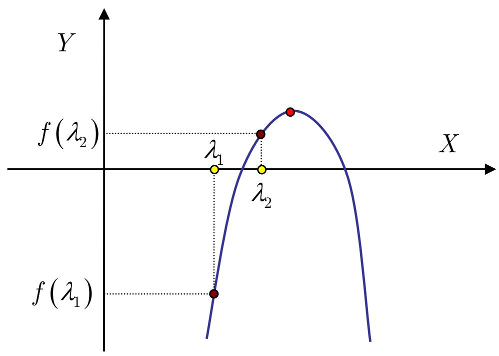

Рис. 12: до твердження 6 ($a < 0$)

Твердження 7. *Відрізок* $[\lambda_1; \lambda_2]$ *знаходиться всередині проміжку між коренями рівняння* (1) *тоді і лише тоді, коли виконуються умови*

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} a > 0 \\ f(\lambda_1) \leqslant 0 \\ f(\lambda_2) \leqslant 0 \end{cases} \\ \begin{cases} a < 0 \\ f(\lambda_1) \geqslant 0 \\ f(\lambda_2) \geqslant 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \begin{cases} a \cdot f(\lambda_1) \leqslant 0 \\ a \cdot f(\lambda_2) \leqslant 0 \end{cases}$$

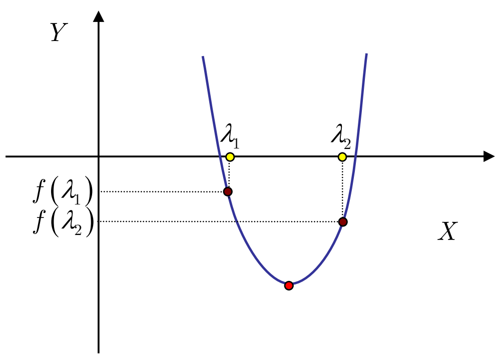

Рис. 13: до твердження 7 ($a > 0$)

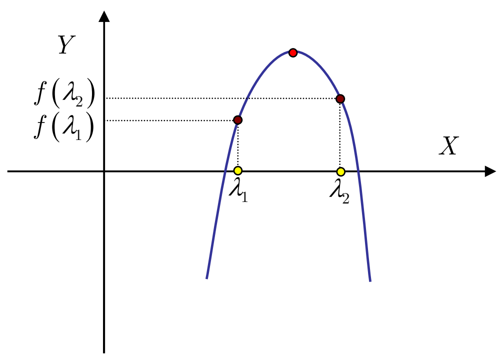

Рис. 14: до твердження 7 ($a < 0$)

2. Основна частина

Означення 1. *Рівняння виду*

$$f(a) \cdot x^2 + g(a) \cdot x + h(a) = 0, \tag{4}$$

де $f(a), g(a), h(a)$ *— функції від (параметра)* a*, будемо називати рівнянням степеня не більше 2 з параметром* a*, або ж, коротко, квадратним рівнянням з параметром* a*.*

Введемо наступні позначення:
D_f — область визначення функції $f = f(a)$ (як функції від параметра a);
D_g — область визначення функції $g = g(a)$ (як функції від параметра a);
D_h — область визначення функції $h = h(a)$ (як функції від параметра a);
$D_{f,g,h} = D_f \bigcap D_g \bigcap D_h$ —
область допустимих значень **параметра** a — **ОДЗП рівняння** (4);

$$Q(x) = f(a) \cdot x^2 + g(a) \cdot x + h(a); \tag{5}$$

$$D(a) = \left(g(a)\right)^2 - 4 \cdot f(a) \cdot h(a). \tag{6}$$

Зауваження 1. *Оскільки розв'язками нерівностей* $D(a) \asymp 0$ *і* $Q(\lambda) \asymp 0$ $\forall \lambda \in R$ *(де* $\asymp$ *— один із чотирьох знаків порівняння:* $>$, $\geqslant$, $<$, $\leqslant$*) можуть бути виключно значення параметра* a*, що належать* $D_{f,g,h}$*, то в кожній із систем нижче, які містять нерівності* $D(a) \geqslant 0$ *і* $Q(\lambda) \asymp 0$ *їх* ***оснащення*** *додатковою* ***умовою*** $a \in D_{f,g,h}$ ***є надлишковим****.*

Проте слід зауважити, що досить поширеною помилкою є неуважне розв'язання нерівностей $Q(\lambda) \asymp 0$ *при певних* λ*, коли* $f(a)$ *і* $g(a)$ *та/або* $f(a)$ *і* $h(a)$ *та/або* $g(a)$ *і* $h(a)$ *«начебто» взаємознищуються.*

Теорема 1. *Обидва корені рівняння* (4) *більші за число* λ *тоді і лише тоді, коли виконуються умови*

$$\begin{cases} f(a) \cdot Q(\lambda) > 0 \\ -\dfrac{g(a)}{2f(a)} > \lambda \\ D(a) \geqslant 0 \end{cases}$$

Теорема 2. *Обидва корені рівняння* (4) *менші за число* λ *тоді і лише тоді, коли виконуються умови*

$$\begin{cases} f(a) \cdot Q(\lambda) > 0 \\ -\dfrac{g(a)}{2f(a)} < \lambda \\ D(a) \geqslant 0 \end{cases}$$

Наслідок 3. *Корені рівняння* (4) *мають однакові знаки тоді і лише тоді, коли виконуються умови*

$$\begin{cases} f(a)\cdot Q(0) = f(a)\cdot h(a) > 0 \\ D(a) \geqslant 0 \end{cases}$$

Теорема 3. *Корені рівняння* (4) *належать проміжку* $(\lambda_1; \lambda_2)$ *тоді і лише тоді, коли виконуються умови*

$$\begin{cases} f(a)\cdot Q(\lambda_1) > 0 \\ f(a)\cdot Q(\lambda_2) > 0 \\ \lambda_1 < -\dfrac{g(a)}{2f(a)} < \lambda_2 \\ D(a) \geqslant 0 \end{cases}$$

Теорема 4. *Число* λ *знаходиться між коренями рівняння* (4) *тоді і лише тоді, коли виконується умова*

$$f(a)\cdot Q(\lambda) < 0.$$

Наслідок 4. *Корені рівняння* (4) *мають різні знаки тоді і лише тоді, коли*

$$\begin{cases} f(a)\cdot h(a) < 0 \\ a \in D_g. \end{cases}$$

Теорема 5. *Тільки більший корінь рівняння* (4) *належить проміжку* $(\lambda_1; \lambda_2)$ *тоді і лише тоді, коли виконуються умови*

$$\begin{cases} f(a)\cdot Q(\lambda_1) < 0 \\ f(a)\cdot Q(\lambda_2) > 0 \end{cases}$$

Теорема 6. *Тільки менший корінь рівняння* (4) *належить проміжку* $(\lambda_1; \lambda_2)$ *тоді і лише тоді, коли виконуються умови*

$$\begin{cases} f(a)\cdot Q(\lambda_1) > 0 \\ f(a)\cdot Q(\lambda_2) < 0 \end{cases}$$

Теорема 7. *Відрізок* $[\lambda_1; \lambda_2]$ *знаходиться всередині проміжку між коренями рівняння* (4) *тоді і лише тоді, коли виконуються умови*

$$\begin{cases} f(a)\cdot Q(\lambda_1) \leqslant 0 \\ f(a)\cdot Q(\lambda_2) \leqslant 0 \end{cases}$$

2.1. Значення параметра, що визначають положення графіка квадратичної функції відносно осей прямокутної (декартової) системи координат

Нехай задано квадратний тричлен

$$y = f(a) \cdot x^2 + g(a) \cdot x + h(a), \tag{7}$$

де $f(a), g(a), h(a)$ — функції від (параметра) a.

Очевидною є доцільність доповнення наведеної у вступі класифікації основних задач на дослідження квадратного тричлена з коефіцієнтами, залежними від параметра, ще одним типом задач, а саме: *знайти значення параметра, що визначають певне положення графіка квадратичної функції відносно осей прямокутної (декартової) системи координат.*

Нижче наведено відповідні аналітичні умови для випадків 1)–13) (рис. 15) розташування графіка квадратичної функції $y = f(a) \cdot x^2 + g(a) \cdot x + h(a)$ відносно координатних осей прямокутної декартової системи координат (надалі – ПДСК).

$$1.\ \begin{cases} f(a) > 0 \\ D(a) < 0 \\ g(a) < 0 \\ h(a) > 0 \end{cases} \quad 2.\ \begin{cases} f(a) > 0 \\ g(a) = 0 \\ h(a) > 0 \end{cases} \quad 3.\ \begin{cases} f(a) > 0 \\ D(a) < 0 \\ g(a) > 0 \\ h(a) > 0 \end{cases} \quad 4.\ \begin{cases} f(a) > 0 \\ D(a) = 0 \\ g(a) < 0 \\ h(a) > 0 \end{cases}$$

$$5.\ \begin{cases} f(a) > 0 \\ g(a) = 0 \\ h(a) = 0 \end{cases} \quad 6.\ \begin{cases} f(a) > 0 \\ D(a) = 0 \\ g(a) > 0 \\ h(a) > 0 \end{cases} \quad 7.\ \begin{cases} f(a) > 0 \\ D(a) > 0 \\ g(a) < 0 \\ h(a) > 0 \end{cases} \quad 8.\ \begin{cases} f(a) > 0 \\ g(a) < 0 \\ h(a) = 0 \end{cases}$$

$$9.\ \begin{cases} f(a) > 0 \\ g(a) < 0 \\ h(a) < 0 \end{cases} \quad 10.\ \begin{cases} f(a) > 0 \\ g(a) = 0 \\ h(a) < 0 \end{cases} \quad 11.\ \begin{cases} f(a) > 0 \\ g(a) > 0 \\ h(a) < 0 \end{cases} \quad 12.\ \begin{cases} f(a) > 0 \\ g(a) > 0 \\ h(a) = 0 \end{cases}$$

$$13.\ \begin{cases} f(a) > 0 \\ D(a) > 0 \\ g(a) > 0 \\ h(a) > 0 \end{cases}$$

Знаходження відповідних аналітичних умов для випадків $1')$–$13')$ (розташування графіка квадратичної функції $y = f(a) \cdot x^2 + g(a) \cdot x + h(a)$ відносно координатних осей ПДСК – рис. 15) пропонуємо в якості вправ для проведення самостійних досліджень.

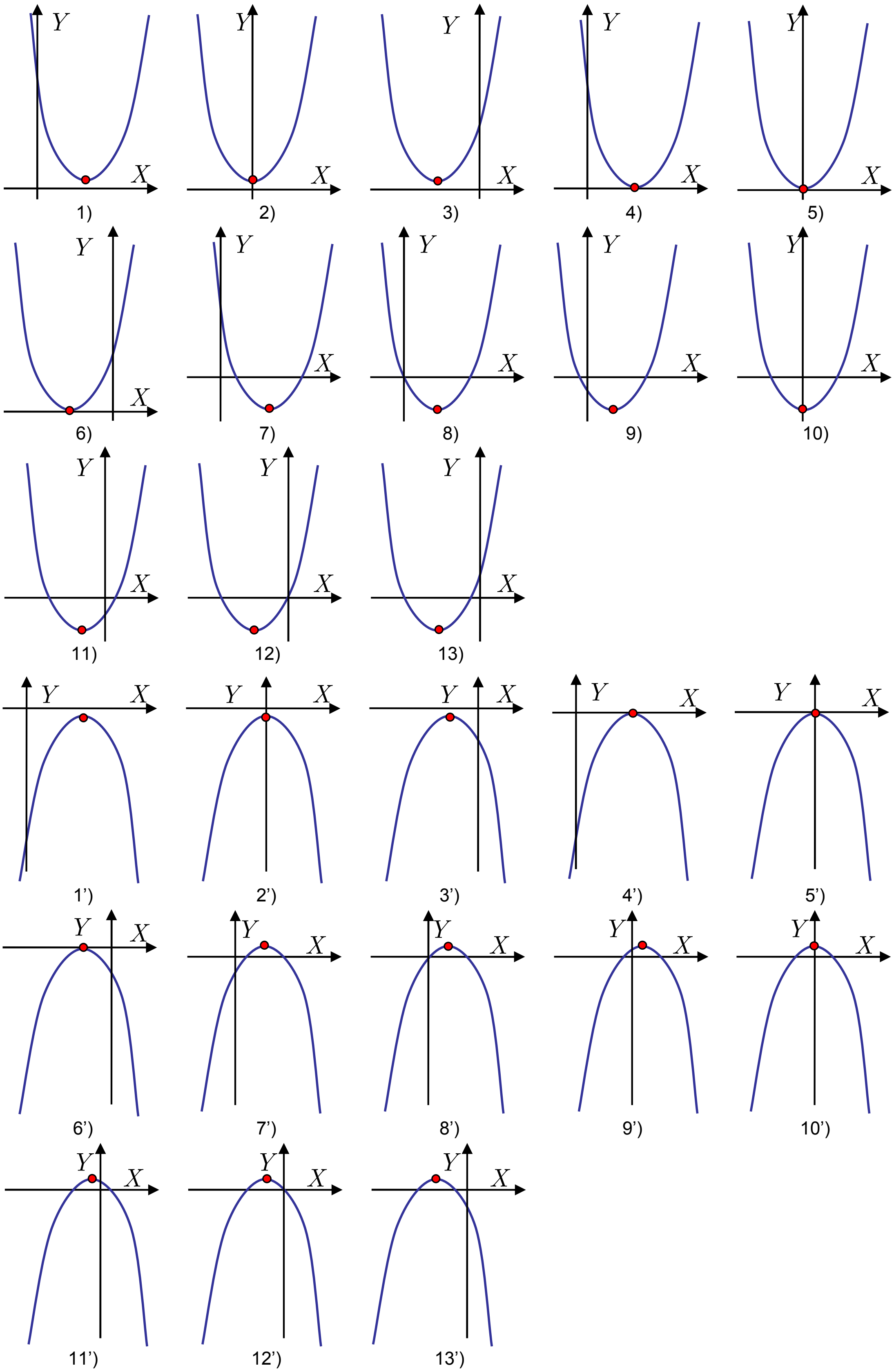

Рис. 15: Суттєво різні розташування графіка квадратичної функції

2.2. Методичні особливості дослідження квадратного тричлена

Спираючись на власний багаторічний досвід викладання математики в класах математичного профілю, автори вважають, що не доцільно вимагати від учнів запам'ятовування всіх теорем, які охоплюють окремі випадки взаємного розміщення коренів квадратного тричлена.

Достатньо обмежитись розгляданням трьох теорем, першу з яких вчитель може сформулювати разом з учнями, а дві наступні слід запропонувати учням отримати в результаті проведення самостійної дослідницької роботи:

Теорема 1. Корені квадратного тричлена $f(x) = ax^2+bx+c$ належать проміжку $(d; e)$ тоді і лише тоді, коли

$$\begin{cases} b^2 - 4ac \geqslant 0 \\ a \cdot f(d) > 0 \\ a \cdot f(e) > 0 \\ d < -\dfrac{b}{2a} < e. \end{cases}$$

Теорема 2. Корені квадратного тричлена $f(x) = ax^2 + bx + c$ більші за число d тоді і лише тоді, коли

$$\begin{cases} b^2 - 4ac \geqslant 0 \\ a \cdot f(d) > 0 \\ -\dfrac{b}{2a} > d. \end{cases}$$

Теорема 3. Число d знаходиться між коренями квадратного тричлена $f(x) = ax^2 + bx + c$ тоді і лише тоді, коли

$$a \cdot f(d) < 0.$$

Зауваження. Вивчення *теореми 1* слід доповнити розглядом випадків $[d; e)$, $(d; e]$, $[d; e]$; *теореми 2* — розглядом випадків: не менше за число d; менше за число d; не більше за число d.

Для учнів більш важливими є не самі твердження та їх запам'ятовування, а способи їх отримування та ті міркування, які до них приводять. Такий підхід сприяє більш свідомому засвоєнню учнями навчального матеріалу і формує у них навички дослідницької діяльності.

Висновки

Вважаємо, що запропонований підхід до дослідження квадратного тричлена разом з методичними порадами щодо застосування його в навчальному процесі будуть корисними як для вчителів математики, так і для учнів під час вивчення відповідного матеріалу на уроках, на заняттях математичних гуртків, факультативів, в процесі підготовки до підсумкової атестації, зовнішнього незалежного оцінювання, конкурсів, олімпіад.

Література

1. Балан В. Г., Лавренюк В. І., Шарова Л. І. Квадратний тричлен з параметрами на вступних іспитах: навч. посіб. К. : Альфа, 2006. 80 с.
2. Балан В. Г., Лавренюк В. І., Шарова Л. І. Квадратний тричлен з коефіцієнтами залежними від параметра. К. : 1996. 107 с.
3. Беседін Б. Б., Кадубовський О. А., Фролов К. П. Про алгоритмічний підхід до розв'язування лінійних рівнянь та нерівностей (з однією змінною) з параметром. Збірник наукових праць фізико-математичного факультету ДДПУ. 2018. № 8. С. 122-133.
4. Беседін Б. Б., Кадубовський О. А. Про алгоритмічний підхід до розв'язання рівнянь та нерівностей (з однією змінною) другого степеня з параметром. Фізико-математична освіта : науковий журнал. 2018. Випуск 2 (16). С. 18–22.
5. Гашков С. Б. Квадратный трехчлен в задачах. М.: МЦНМО, 2015. 192 с.
6. Коваленко В. Г., Кривошеєв В. Я., Старосєльцева О. В. Алгебра : Експериментальний навчальний посібник для 9 класу шкіл з поглибленим вивченням математики і спеціалізованих шкіл фізико-математичного профілю. К. : Освіта, 1998. 288 с.
7. Мерзляк А. Г., Полонський В. Б., Якір М. С. Алгебра для загальноосвітніх навчальних закладів з поглибленим вивченням математики : підручник для 9 кл. Харків : Гімназія, 2017. 416 с.

Kadubovs'kyi Oleksandr A., Besedin Boris B., Bilous Mykhailo A.
Donbas State Pedagogical University, Slovians'k, Ukraine.

To tasks for the study of a quadratic trinomial with coefficients that depend on the parameter

The article highlights a possible approach to the study of quadratic trinomials, whose coefficients contain a parameter. Some kind of methodological advice on the study of relevant material by students of secondary education institutions is provided. The analytical conditions that determine the position of the graph of a quadratic trinomial on a coordinate plane are given.

Keywords: *quadratic trinomial, quadratic equation, parameter, location of roots, location of a parabola on a coordinate plane.*