МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

ДЕРЖАВНИЙ ВИЩИЙ НАВЧАЛЬНИЙ ЗАКЛАД
«ДОНБАСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ ПЕДАГОГІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ»

ISSN 2413-2667 (Print)
ISSN 2415-3079 (Online)

ЗБІРНИК
НАУКОВИХ ПРАЦЬ
фізико-математичного факультету
ДДПУ

Заснований у 2010 році

Випуск №8

Рекомендовано вченою радою
Донбаського державного педагогічного університету
в якості наукового видання

Слов'янськ – 2018

УДК 51+53+37.016:[51+53+004].
ББК 22.1+22.3+74.262.21+74.262.22.

З – 414

Збірник наукових праць фізико-математичного факультету ДДПУ. — Слов'янськ : ДДПУ, 2018. — Випуск № 8 — 204 с.

Для студентів, аспірантів та науковців в галузі фізико-математичних наук; вчителів та викладачів фізико-математичних дисциплін в ЗОШ та ВНЗ.

РЕКОМЕНДОВАНО ДО ДРУКУ

вченою радою державного вищого навчального закладу «Донбаський державний педагогічний університет», протокол № **9** від **31.05.2018** р.

За достовірність посилань, цитат і результатів експериментів відповідальність несуть автори.

Від редакційної колегії

Шановні читачі!

Ви тримаєте в руках *восьмий* випуск «Збірника наукових праць фізико-математичного факультету ДДПУ» державного вищого навчального закладу «Донбаський державний педагогічний університет». Видання наукових праць викладачів, студентів та молодих науковців фізико-математичного факультету ДДПУ започатковано у 2010 році, коли результати наукових досліджень було опубліковано окремою серією «Фізико-математичні науки» в збірнику наукових праць «Пошуки і знахідки» за матеріалами науково-практичної конференції «Актуальні питання науки і освіти» (Слов'янськ, СДПУ, 20-22 квітня 2010 р.)

Метою збірника є підтримка наукової активності як серед студентів, так і серед молодих викладачів ДДПУ та інших ВНЗ.

Основу *восьмого* випуску збірника складають оригінальні повнотекстові статті (в авторській редакції) переважно із числа доповідей, зроблених під час секційних засідань на цьогорічній Всеукраїнській науково-практичній конференції студентів і молодих учених «Перспективні напрямки сучасної науки та освіти», Слов'янськ, ДДПУ, 23–24 травня 2018 р. Основні результати доповідались на секційних засіданнях та були рекомендовані до друку головами секцій, завідувачами випускових кафедр та науковими керівниками випускових робіт.

Засновники збірника мають намір зробити його максимально відкритим як для авторів, так і для читачів. Він виходить один раз на рік у друкованому та електронному вигляді. Електронна версія журналу та інформація щодо співпраці з авторами є доступною на офіційному сайті збірника за адресою `http://ddpu.edu.ua/fizmatzbirnyk/begin.htm`.

Запрошуємо до співпраці. Наснаги та творчих успіхів!
Члени редакційної колегії.

УДК 929

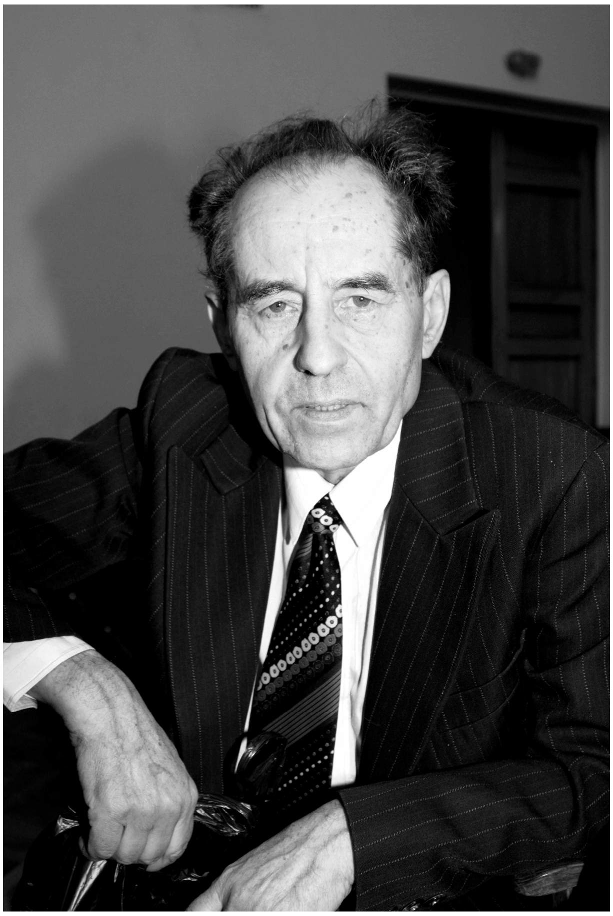
Чуйко С.М., Чуйко О.В.

[1] *доктор фізико-математичних н., завідувач каф. математики та інформатики, ДВНЗ «ДДПУ»*

[2] *кандидат фізико-математичних н., доцент каф. математики та інформатики, ДВНЗ «ДДПУ»*

e-mail: chujko-slav@ukr.net

ПАМ'ЯТІ ЄВГЕНА ПЕТРОВИЧА БЕЛАНА



10 жовтня 2017 року після важкої тривалої хвороби пішов з життя на 77 році відомий український учений, доктор фізико-математичних наук, професор Євген Петрович Белан. Народився Євген Петрович 28 лютого 1941 року в місті Євпаторія Кримської області у родині Белана Петра Андрійовича 1913 р.н. і Воловік Олени Юхимівни 1916 р.н. У 1963 році Євген Петрович закінчив фізико-математичний факультет Кримського державного педагогічного інституту ім. М.В. Фрунзе за фахом «математика, креслення та астрономія».

Ще до закінчення інституту з 1 січня 1962 р. по 30 жовтня 1962 р. працював вчителем математики і фізики військової середньої школи Кримської області. Під час навчання в аспірантурі в Інституті математики АН УРСР (1 листопада 1963 р. по 30 жовтня 1965 р.) під керівництвом академіка АН УРСР Ю.О. Митропольського у 1965 році його було призвано до лав Радянської Армії. По закінченні служби у лавах Радянської Армії він повернувся на навчання в аспірантуру Інституту математики АН УРСР, яку закінчив 31 червня 1968 р. із представленням дисертації. У 1967 р. Євген Петрович одружився на Світлані Євгенівні Єфрємовій 1940 р.н. У 1968 р. у них народився син Олексій.

У Слов'янському державному педагогічному інституті Євген Петрович працював із 1 липня 1968 р. на посаді викладача кафедри математики. На той час із 30 викладачів фізико-математичного факультету було лише чотири кандидата фізико-математичних наук. 22 квітня 1969 р. в Інституті математики АН УРСР під керівництвом академіка АН УРСР Ю.О. Митропольського Євген Петрович успішно захистив дисертацію на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук, на підставі чого з 15 листопада 1968 р. був переведений на посаду старшого викладача кафедри математики, а 22 травня 1970 р. рішенням ВАК СРСР отримав диплом кандидата фізико-математичних наук.

На фізико-математичному факультеті Євген Петрович із липня 1968 р. прочитав курси диференціальних рівнянь, аналітичної геометрії, проводив заняття з математичного аналізу. За сприяння ректора Слов'янського державного педагогічного інституту Євгену Петровичу було виділено трикімнатну квартиру, тим не менш 1 серпня 1971 р. Євген Петрович написав заяву про звільнення із Слов'янського державного педагогічного інституту у зв'язку з обранням на посаду до Кримського державного педагогічного інституту ім. М.В. Фрунзе. 28 серпня 1971 р. Євген Петрович був звільнений із посади старшого викладача кафедри математики Слов'янського державного педагогічного інституту.

З 1971 р. Євген Петрович працює на факультеті математики та інформатики Кримського національного університету імені В.І. Вернадського, на кафедрі диференціальних рівнянь і геометрії. У 2007 р. в Інституті математики АН УРСР під керівництвом академіка АН УРСР А.М. Самойленка Євген Петрович успішно захистив дисертацію на здобуття наукового ступеня доктора фізико-математичних наук. Назва дисертації: Метод інваріантних многовидів в теорії параболічних і функціонально-диференціальних рівнянь та його застосування. У 2013 р. Євген Петрович отримав звання професора кафедри диференціальних рівнянь і геометрії.

На факультеті математики та інформатики Кримського національного університету імені В.І. Вернадського Євген Петрович читав рівняння математичної фізики, якісну теорію диференціальних рівнянь, сингулярно збурені задачі та спецкурси «Елементи теорії біфуркації» та «Динаміка структур в нескінченновимірних динамічних системах».

У коло наукових інтересів Євгена Петровича входили інваріантні многовиди у безкінечновимірних динамічних системах; біфуркації у параболічних задачах із перетворенням просторових змінних; динаміка дисипативних структур у параболічних задачах із малою дифузією.

Євген Петрович приймав участь у роботі оргкомітетів міжнародних конференцій КРОМШ та «Метод функцій Ляпунова та його застосування». Під науковим керівництвом Євгена Петровича у 2017 р. підготувала до захисту дисертацію «Динаміка структур параболічної задачі з перетворенням просторової змінної» Юлія Олександрівна Хазова. Наукова спеціальність: 01.01.02 — диференціальні рівняння, динамічні системи і оптимальне управління.

Євген Петрович входив до редакційних колегій Таврійського Вісника інформатики і математики та журналу Динамічні системи.

Вибрані публікації Євгена Петровича Белана

Література

1. Belan E.P., Lykova O.B. Rotating structures in a parabolic functional-differential equation // Differ. Equ. 40 (2004), no. 10, 1419–1430.
2. Belan E.P. On the interaction of traveling waves in a parabolic functional-differential equation // Differ. Equ. 40 (2004), no. 5, 692–702.
3. Belan E.P., Mikhalevich M.V., Sergienko I.V. Cyclicity of economic processes in systems with a monopsonic labor market // Cybernet. Systems Anal. 39 (2003), no. 4, 488–500.
4. Samoilenko A.M., Belan E.P. Quasiperiodic solutions of differential-difference equations on a torus // Special issue dedicated to Victor A. Pliss on the occasion of his 70-th birthday. J. Dynam. Differential Equations 15 (2003), no. 2–3, 305–325.
5. Belan E.P. Rotating waves in a parabolic problem with a transformed argument // J. Math. Sci. (New York) 107 (2001), no. 6, 4437–4442.
6. Belan E.P. Construction of an inertial manifold of a parabolic equation with a monotonic nonlinear part J. Math. Sci. (New York) 103 (2001), no. 1, 121-126.

7. Belan E.P., Lykova O.B. Central manifolds of quasilinear parabolic equations // Ukrainian Math. J. 50 (1998), no. 3, 361–376.
8. Belan E.P. Averaging and Hopf bifurcation in degenerate systems of differential equations with delays // J. Math. Sci. (New York) 90 (1998), no. 6, 2513–2517.
9. Belan E.P., Lykova O.B. A theorem on the central manifold of a nonlinear parabolic equation Ukrainian Math. J. 48 (1996), no. 8, 1153–1170.
10. Belan E.P., Lykova O.B. Integral manifolds and exponential splitting of linear parabolic equations with rapidly changing coefficients // Ukrainian Math. J. 47 (1995), no. 12, 1818-1836.
11. Belan E.P. Quasiperiodic solutions of semilinear groups of symmetries // J. Math. Sci. 82 (1996), no. 2, 3391–3394.
12. Belan E.P. Asymptotic method in the theory of second-order quasilinear Volterra integro-differential equations // Ukrain. Mat. Zh. 34 (1982), no. 6, 738–741.
13. Belan E.P., Semencov A.V. The isomorphism of R-normed modules // Ukrain. Mat. Ž. 28 (1976), no. 4, 524–526.
14. Mitropol'skiy̌ Ju.A., Belan E.P. The reduction principle in the theory of stability of linear differential equations // Ukrain. Mat. Ž. 20 1968 no. 5, 654-660.
15. Belan E.P. The stability of almost diagonal systems of linear differential equations // Ukrain. Mat. Ž. 20 1968, 449–459.
16. Belan E.P. On the averaging method in the theory of finite difference equations // Ukrain. Mat. Ž. 19 1967 no. 3, 85–90.

Chujko S.M., Chujko O.V.
Donbas State Teachers' Training University, Slovians'k, Ukraine.

In memory of Yevgen Petrovich Belan

МАТЕМАТИКА

УДК 517.5

Новіков О.О., Ровенська О.Г., Козаченко Ю.О., Бондаренко А.О., Панюхно В.Д.

[1] *канд. фізико-математичних наук, доцент каф. математики та інформатики, ДВНЗ «ДДПУ»*

[2] *канд. фізико-математичних наук, доцент каф. вищої математики, ДДМА*

[3] *студентка 4 курсу фізико-математичного факультету, ДВНЗ «ДДПУ»*

[4] *студентка 2 курсу (магістратура) фізико-математичного факультету, ДВНЗ «ДДПУ»*

[5] *студентка 2 курсу (магістратура) фізико-математичного факультету, ДВНЗ «ДДПУ»*

e-mail: sgpi@slav.dn.ua

ОЦІНКА ЗНИЗУ ГОЛОВНОГО ЧЛЕНА АСИМПТОТИЧНОЇ РІВНОСТІ ВІДХИЛЕНЬ ОПЕРАТОРІВ ФЕЙЄРА НА КЛАСІ ІНТЕГРАЛІВ ПУАСОНА

Розглянуті питання наближення функцій, які можна подати у вигляді інтегралів Пуассона, класичними операторами Фейєра. Отримані оцінки знизу значень верхніх граней відхилень операторів Фейєра на класі інтегралів Пуассона для більш широкого спектру параметрів, що їх визначають.

Ключові слова: *ряди Фур'є, оператори Фейєра, асимптотичні формули*

Стаття присвячена питанням наближення періодичних функцій тригонометричними поліномами, породжуваними лінійними операторами підсумовування рядів Фур'є. Досліджуються питання у рамках екстремальної задача для метода Фейєра, на класах аналітичних періодичних функцій дійсної змінної, які можна подати у вигляді згорток.

Позначимо через L множину 2π –періодичних функцій, які на проміжку $[-\pi;\pi]$ мають скінчений інтеграл Лебега. Нехай $f \in L$ і

$$S_n(f;x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=0}^{n} a_k \cos kx + b_k \sin kx$$

– часткова суми ряду Фур'є порядку n. Суми Фейєра задаються співвідношенням

$$\sigma_n(f,x) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} S_k(f,x). \tag{1}$$

Через $C^q_{\beta,\infty}$, ($q \in (0;1)$, $\beta \in \mathbb{R}$) позначимо класи неперервних $2\pi-$ періодичних функцій $f(x)$, які можна подати у вигляді згортки

$$f(x) = A_0 + \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} \varphi(x+t) \sum_{k=1}^{\infty} q^k \cos(kt + \frac{\beta\pi}{2})\ dt,$$

де для функції $\varphi(x)$ виконана така умова $\mathrm{ess}\sup|\varphi(x)| \leqslant 1$. Функцію $f(x)$ називають інтегралом Пуассона функції $\varphi(x)$ [1].

В роботі [2] показано, що має місце твердження.

Теорема 1. *Нехай* $q \in (0; q_0]$, $q_0 = 2 - \sqrt{3} \approx 0,267949$. *Тоді при* $n \to \infty$ *виконуються рівності*

$$\mathcal{E}(C^q_{0,\infty}, \sigma_n) \equiv \sup_{f \in C^q_{0,\infty}} ||f(x) - \sigma_n(f,x)||_C = \frac{4q}{\pi n(1+q^2)} + O(1)\frac{q^n}{n}, \qquad (2)$$

$$\mathcal{E}(C^q_{1,\infty}, \sigma_n) \equiv \sup_{f \in C^q_{1,\infty}} ||f(x) - \sigma_n(f,x)||_C = \frac{4q}{\pi n(1-q^2)} + O(1)\frac{q^n}{n}, \qquad (3)$$

де величина $O(1)$ *рівномірно обмежена за* n, q.

З цього випливає, що для $\beta \in \mathbb{R}$

$$\mathcal{E}(C^q_{\beta,\infty}, \sigma_n) \leqslant \frac{4q|\sin\frac{\beta\pi}{2}|}{\pi n(1-q^2)} + \frac{4q|\cos\frac{\beta\pi}{2}|}{\pi n(1+q^2)} + O(1)\frac{q^n}{n},$$

Дане повідомлення присвячене обчисленню оцінки знизу для величин

$$\mathcal{E}(C^q_{\beta,\infty}, \sigma_n) \equiv \sup_{f \in C^q_{\beta,\infty}} ||f(x) - \sigma_n(f,x)||_C.$$

Оцінка знизу для відхилення сум Фейєра від своїх інтегралів Пуассона

Теорема 2. *Нехай* $\beta \in \mathbb{R}$, $q \in (0; q_0]$, $q_0 = 2 - \sqrt{3} \approx 0,267949$. *Тоді при* $n \to \infty$ *виконується нерівність*

$$\mathcal{E}(C^q_{\beta,\infty}, \sigma_n) \geqslant \frac{4q\cos^3\frac{\beta\pi}{2}}{\pi n(1+q^2)} + \frac{4q\sin^3\frac{\beta\pi}{2}}{\pi n(1-q^2)} + O(1)\frac{q^n}{n}. \qquad (4)$$

де величина $O(1)$ *рівномірно обмежена за* n, q.

Доведення.

В [2] показано, що

$$\mathcal{E}(C^q_{\beta,\infty},\sigma_n)=$$

$$\sup_{f\in C^q_{\beta,\infty}}\left\|\frac{q}{\pi n}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f^q_\beta(x+t)\frac{[(1+q^2)\cos t-2q]\cos\frac{\beta\pi}{2}-[(1-q^2)\sin t]\sin\frac{\beta\pi}{2}}{(1-2q\cos t+q^2)^2}dt\right\|,$$

а для

$$\varphi_0(t)=\operatorname{sign}\left(\frac{(1+q^2)\cos t-2q}{(1-2q\cos t+q^2)^2}-\frac{-2q}{(1+q^2)^2}\right)=\begin{cases}-1, & t\in(-\pi;-\pi/2)\\ 1, & t\in(-\pi/2;\pi/2)\\ -1, & t\in(\pi/2;\pi).\end{cases}$$

$$\varphi_1(t)=\operatorname{sign}((1-q^2)\sin t)=\begin{cases}-1, & t\in(-\pi;0)\\ 1, & t\in(0;\pi).\end{cases}=\begin{cases}-1, & t\in(-\pi;-\pi/2)\\ -1, & t\in(-\pi/2;0)\\ 1, & t\in(0;\pi/2)\\ 1, & t\in(\pi/2;\pi),\end{cases}$$

для $q\in(0;q_0]$, $q_0=2-\sqrt{3}\approx 0,267949$ мають місце рівності

$$\mathcal{E}(C^q_{1,\infty},\sigma_n)=\left\|\frac{q}{\pi n}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\varphi_1(t)\frac{[(1-q^2)\sin t]}{(1-2q\cos t+q^2)^2}dt\right\|,$$

$$\mathcal{E}(C^q_{0,\infty},\sigma_n)=\left\|\frac{q}{\pi n}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f^q_\beta(x+t)\frac{(1+q^2)\cos t-2q}{(1-2q\cos t+q^2)^2}dt\right\|.$$

Тоді, поклавши

$$\varphi(t)=\varphi_0(t)\cos^2\frac{\beta\pi}{2}-\varphi_1(t)\sin^2\frac{\beta\pi}{2}=$$

$$=\cos^2\frac{\beta\pi}{2}\begin{cases}-1, & t\in(-\pi;-\pi/2)\\ 1, & t\in(-\pi/2;0)\\ 1, & t\in(0;\pi/2)\\ -1, & t\in(\pi/2;\pi).\end{cases}-\sin^2\frac{\beta\pi}{2}\begin{cases}-1, & t\in(-\pi;-\pi/2)\\ -1, & t\in(-\pi/2;0)\\ 1, & t\in(0;\pi/2)\\ 1, & t\in(\pi/2;\pi)\end{cases}=$$

$$=\begin{cases}-\cos^2\frac{\beta\pi}{2}+\sin^2\frac{\beta\pi}{2}, & t\in(-\pi;-\pi/2)\\ \cos^2\frac{\beta\pi}{2}+\sin^2\frac{\beta\pi}{2}, & t\in(-\pi/2;0)\\ \cos^2\frac{\beta\pi}{2}-\sin^2\frac{\beta\pi}{2} & t\in(0;\pi/2)\\ -\cos^2\frac{\beta\pi}{2}-\sin^2\frac{\beta\pi}{2}, & t\in(\pi/2;\pi)\end{cases}$$

і $f^q_\beta(x+t)=\varphi(t)$, отримуємо

$$\mathcal{E}(C^q_{\beta,\infty},\sigma_n)\geqslant$$

$$\geqslant\left\|\frac{q}{\pi n}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\varphi(t)\frac{[(1+q^2)\cos t-2q]\cos\frac{\beta\pi}{2}-[(1-q^2)\sin t]\sin\frac{\beta\pi}{2}}{(1-2q\cos t+q^2)^2}dt\right\|=$$

$$=\left\|\frac{q\cos^3\frac{\beta\pi}{2}}{\pi n}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\varphi_0(t)\frac{[(1+q^2)\cos t-2q]}{(1-2q\cos t+q^2)^2}dt+\right.$$

$$\left.+\frac{q\sin^3\frac{\beta\pi}{2}}{\pi n}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\varphi_1(t)\frac{-[(1-q^2)\sin t]}{(1-2q\cos t+q^2)^2}dt\right\|.$$

Виконуючи обчислення, отримуємо співвідношення (4).

Література

1. *Степанец А.И.* Равномерные приближения тригонометрическими полиномами / А.И. Степанец. — К. : Наук. думка, 1981. — 340 с.
2. *Novikov O.O.* Approximation of periodic analytic functions by Fejer sums / O.O. Novikov, O.G. Rovenska // Mat. Stud. — 2017. — 47. — P. 196–201.

Novikov O., Rovenska O., Kozachenko Y., Bondarenko A., Paniukhno V.
Donbas State Pedagogical University, Sloviansk, Ukraine
Donbas State Engineering Academy, Kramatorsk, Ukraine

Lower estimate of the main member of asymptotic equality of deviations of operators of Fejer on the class of Poisson integrals

The questions of an approximation of functions, which can be presented in the form of Poisson integrals, classical operators of Fejer have been considered. The lower estimates of values of upper bounds of deviations of operators of Fejer on the class of Poisson integrals for the wider spectrum of parameters which define them have been received.

Keywords: *Fourier series, operators of Fejer, asymptotic formulas.*

УДК 517.5

Бодра В.В., Новіков О.О., Козаченко Ю.О., Семенова Ю.І., Сипчук Є.Ю.

[1] *асистент каф. вищої математики, Київський національний університет технологій і дизайну*

[2] *канд. фізико-математичних наук, доцент каф. математики та інформатики, ДВНЗ «ДДПУ»*

[3] *студентка 4 курсу фізико-математичного факультету, ДВНЗ «ДДПУ»*

[4] *студентка 2 курсу (магістратура) фізико-математичного факультету, ДВНЗ «ДДПУ»*

[5] *студент 3 курсу фізико-математичного факультету, ДВНЗ «ДДПУ»*

e-mail: sgpi@slav.dn.ua

ПОВЕДІНКА ГОЛОВНОГО ЧЛЕНА АСИМПТОТИЧНОЇ РІВНОСТІ ВІДХИЛЕНЬ ОПЕРАТОРІВ ФЕЙЄРА

Розглянуті питання наближення класичними операторами Фейєра функцій, які можна подати у вигляді інтегралів Пуассона.

Ключові слова: *ряди Фур'є, оператори Фейєра, асимптотичні формули*

Стаття присвячена питанням наближення періодичних функцій тригонометричними поліномами, породжуваними лінійними операторами підсумовування рядів Фур'є. Досліджуються питання у рамках екстремальної задачі для метода Фейєра, на класах аналітичних періодичних функцій дійсної змінної, які можна подати у вигляді згорток.

Актуальність теми. Будемо позначати символом L множину $2\pi-$ періодичних функцій, що мають скінчений на періоді інтеграл Лебега. Нехай $f \in L$ і

$$S[f] = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k(f)\cos kx + b_k(f)\sin kx)$$

— ряд Фур'є функції f, де $a_k(f)$, $b_k(f)$ — коефіцієнти Фур'є функції f.

Нехай

$$S_n(f;x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=0}^{n} a_k\cos kx + b_k\sin kx$$

– часткова суми ряду Фур'є порядку n. Окрім сум Фур'є цікавими для наближення аналітичних функцій виявляються суми Валле Пуссена та суми Фейєра.

Суми Валле Пуссена функції $f \in L$ задаються для фіксованого $p \in \mathbb{N}$, $p \leqslant n$ наступним співвідношенням

$$V_{n,p}(f,x) = \frac{1}{p} \sum_{k=n-p}^{n-1} S_k(f,x).$$

Суми Валле Пуссена у випадку $p = n$ мають назву сум Фейєра, які можна задати співвідношенням

$$\sigma_n(f,x) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} S_k(f,x). \qquad (1)$$

Через $C^q_{\beta,\infty}$, $C^q_\beta H_\omega$, ($q \in (0;1)$, $\beta \in R$, $\omega(t)$ – певний модуль неперервності) позначимо класи неперервних 2π–періодичних функцій $f(x)$, які можна подати у вигляді згортки

$$f(x) = A_0 + \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \varphi(x+t) P^q_\beta(t)\, dt,$$

з ядром Пуассона $P^q_\beta(t) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} q^k \cos(kt + \frac{\beta\pi}{2})$, де для функції $\varphi(x)$ виконана така умова $\mathrm{esssup}|\varphi(x)| \leqslant 1$ або така

$$|\varphi(t') - \varphi(t'')| \leqslant \omega(|t' - t''|), \forall t', t'' \in R.$$

Функцію $f(x)$ називають інтегралом Пуассона функції $\varphi(x)$.

Добре відомо [1,с. 31], що множини $C^q_{\beta,\infty}$ і $C^q_\beta H_\omega$, складаються з функцій $f(x)$, які є звуженнями на дійсну ось функцій $F(z)$, аналітичних в області $|\mathrm{Im} z| \leqslant \ln \frac{1}{q}$.

Задачам про наближення класів $C^q_{\beta,\infty}$, $C^q_\beta H_\omega$ присвячено ряд відомих робіт. Відмітимо найбільш важливі роботи цього напряму.

С.М. Нікольський [2] показав, що для верхніх граней відхилень часткових сум Фур'є порядку n на класі інтегралів Пуассона майже всюди обмежених функцій має місце така асимптотична формула

$$\mathcal{E}\left(C^q_{\beta,\infty}; S_n\right) \equiv \sup_{f \in C^q_{\beta,\infty}} ||f(x) - S_n(f,x)||_C = \frac{8q^n}{\pi^2} \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{du}{\sqrt{1 - q^2 \sin^2 u}} + O(1)\frac{q^n}{n},$$

де

$$K(q) = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{du}{\sqrt{1 - q^2 \sin^2 u}} \qquad (2)$$

— повний еліптичний інтеграл першого роду, величина $O(1)$ рівномірно обмежена відносно $n \in N$. С.Б. Стечкин [3] показав, що залишковий член цієї рівності можна подати у вигляді $O(1)\frac{q^n}{n(1-q)}$, де величина $O(1)$ рівномірно обмежена відносно $n \in N$ та $q \in (0;1)$.

В роботі [4] О.І. Степанець отримав аналогічну асимптотичну формулу для класів $C^q_\beta H_\omega$

$$\mathcal{E}\left(C^q_\beta H_\omega; S_n\right) = \frac{4q^n}{\pi^2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{du}{\sqrt{1-q^2\sin^2 u}} e_n(\omega) + O(1)\frac{q^n}{n(1-q)}\omega(1/n),$$

де

$$e_n(\omega) = \theta_\omega \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \omega(2t/n)\sin t dt,$$

$\theta_\omega \in [1/2;1]$, і $\theta_\omega = 1$, якщо $\omega(t)$ – опуклий модуль неперервності.

В.І. Рукасов та С.О. Чайченко [5] для верхніх граней відхилень сум Валле Пуссена на класах $C^q_{\beta,\infty}$ і $C^q_\beta H_\omega$ отримали аналогічні формули:

$$\mathcal{E}\left(C^q_{\beta,\infty}; V_{n,p}\right) = \frac{4q^{n-p+1}}{\pi p(1-q^2)} + O(1)\left(\frac{q^{n-p+1}}{p(n-p)(1-q)^3} + \frac{q^n}{p(1-q^2)}\right), \tag{3}$$

$$\mathcal{E}\left(C^q_\beta H_\omega; V_{n,p}\right) = \frac{2\theta_\omega q^{n-p+1}}{\pi p(1-q^2)}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \omega(\frac{2t}{n-p})\sin t dt +$$

$$+O(1)\omega(\frac{1}{n-p})\left(\frac{q^{n-p+1}}{p(n-p)(1-q)^3} + \frac{q^n}{p(1-q^2)}\right).$$

А.С. Сердюк [6] показав, що має місце більш загальна рівність

$$\mathcal{E}\left(C^q_{\beta,\infty}; V_{n,p}\right) = \frac{q^{n-p+1}}{p}\left(\frac{4}{\pi^2}K_{p,q} + O(1)\left(\frac{q}{(n-p+1)(1-q)^s}\right)\right),$$

де для $p = 1, 2, ..., n$ поведінка константи $K_{q,p}$ визначається наступним співвідношенням, отриманим у роботі [7]:

$$K_{q,p} = 2\frac{1-q^{2p}}{1-q^2}K(q^p), \quad s = s(p) = \begin{cases} 1, & p = 1, \\ 3, & p = 2, 3, ... \end{cases} \tag{4}$$

і величина $K(q)$ визначена вище співвідношенням (2).

В роботі [8] показано, що має місце наступне твердження.

Теорема 1. *Нехай* $q \in (0; q_0]$, $q_0 = 2 - \sqrt{3} \approx 0,267949$. *Тоді при* $n \to \infty$ *виконується рівність*

$$\mathcal{E}(C^q_{0,\infty}, \sigma_n) \equiv \sup_{f \in C^q_{0,\infty}} ||f(x) - \sigma_n(f,x)||_C = \frac{4q}{\pi n(1+q^2)} + O(1)\frac{q^n}{n}, \qquad (5)$$

де величина $O(1)$ *рівномірно обмежена за* n, q.

Можна показати, що асимптотична рівність має місце і для більш довгого проміжку, а саме для $q \in (0; q_0]$, де $q_0 = \sqrt{2 + \sqrt{5} - 2\sqrt{2 + \sqrt{5}}} \approx 0,346$.

Дане повідомлення присвячене наближеним обчисленням величин головного члена асимптотичної рівності для величин

$$\mathcal{E}(C^q_{0,\infty}, \sigma_n) \equiv \sup_{f \in C^q_{0,\infty}} ||f(x) - \sigma_n(f,x)||_C$$

для окремих значень $q \in [q_0; 1)$. На підставі результатів можна зробити висновок, що ця величина не задовольняє рівності (5) і з ростом q зростає істотно швидше, коли q наближається до 1.

Наближені значення головного члена асимптотичної рівності для відхилення сум Фейєра від своїх інтегралів Пуассона

В роботі [8] показано, що для величини

$$\delta_n(f;x) = f(x) - \sigma_n(f,x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^q_\beta(x+t)\left(\sigma_1^{(1)}\cos\frac{\beta\pi}{2} - \sigma_2^{(1)}\sin\frac{\beta\pi}{2}\right)dt, \quad (6)$$

де для $r \in \mathbb{N}$ величини $\sigma_1^{(r)} = \sigma_1^{(r)}(t,q,n)$, $\sigma_2^{(r)} = \sigma_2^{(r)}(t,q,n)$ задані співвідношеннями

$$\sigma_1^{(r)} = \frac{Z_q^{2(r+1)}(t)}{\prod_{i=1}^r p_i}\sum_{\alpha\subset\overline{r}}(-1)^{(r-|\alpha|)}\sum_{\nu=0}^{r+1}(-1)^\nu C_{r+1}^\nu q^{n-\Sigma_p^\alpha+r+\nu}\cos(n-\Sigma_p^\alpha+r-\nu)t,$$

$$\sigma_2^{(r)} = \frac{Z_q^{2(r+1)}(t)}{\prod_{i=1}^r p_i}\sum_{\alpha\subset\overline{r}}(-1)^{(r-|\alpha|)}\sum_{\nu=0}^{r+1}(-1)^\nu C_{r+1}^\nu q^{n-\Sigma_p^\alpha+r+\nu}\sin(n-\Sigma_p^\alpha+r-\nu)t,$$

$|\alpha|$ – кількість елементів множини α, $\Sigma_p^\alpha = \sum_{i\in\alpha} p_i = n-1$, $\Sigma_0^\alpha = 0$.

Для $r=1; p=n; \beta=0$ маємо

$$\sigma_1^{(1)}(t;q)=\frac{qZ_q^4(t)}{n}\left[(1+q^2)\cos t-2q-q^{n+1}[\cos(n+1)t-2q\cos nt+q^2\cos(n-1)t]\right];$$

$$\delta_n(f;x)=f(x)-\sigma_1^{(1)}(x;q)=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}f_\beta^q(x+t)\frac{qZ_q^4(t)}{n}\left[(1+q^2)\cos t-2q-\right.$$

$$\left.-q^{n+1}[\cos(n+1)t-2q\cos nt+q^2\cos(n-1)t]\right]dt,$$

Виконуючи обчислення, отримуємо

$$\delta_n(f;x)=\frac{q}{\pi n}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\frac{f_0^q(x+t)[(1+q^2)\cos t-2q]}{(1-2q\cos t+q^2)^2}dt+O(1)\frac{q^n}{n(1-q)^3}.$$

Тоді

$$\mathcal{E}(C_{0,\infty}^q,\sigma_n)=\sup_{f\in C_{0,\infty}^q}||\delta_n(f;x)||=$$

$$=\sup_{f\in S_M^0}\left|\frac{q}{\pi n}\int\limits_{-\pi}^{\pi}f(t)\left(\frac{(1+q^2)\cos t-2q}{(1-2q\cos t+q^2)^2}-B(q)\right)dt+O(1)\frac{q^n}{n(1-q)^3}\right|,$$

де $B(q)$ таке, що на проміжку $t\in[-\pi;\pi]$ для величин

$$\Gamma(t;q)=\frac{(1+q^2)\cos t-2q}{(1-2q\cos t+q^2)^2}$$

виконується $\mathrm{mes}(\Gamma(t;q)-B(q)\leqslant 0)=\mathrm{mes}(\Gamma(t;q)-B(q)\geqslant 0)$.

Для окремих значень $q\in(\sqrt{2+\sqrt{5}-2\sqrt{2+\sqrt{5}}};1)$ спробуємо відшукати такі значення $t_q\leqslant\pi/2$, для яких виконується

$$\Gamma(t_q;q)=\frac{(1+q^2)\cos t_q-2q}{(1-2q\cos t_q+q^2)^2}=\frac{(1+q^2)\cos(t_q+\pi/2)-2q}{(1-2q\cos(t_q+\pi/2)+q^2)^2}=\Gamma(t_q+\frac{\pi}{2};q). \tag{7}$$

У такому випадку

$$\mathcal{E}(C_{0,\infty}^q,\sigma_n)=\frac{2q}{\pi n}\left[\int\limits_0^{t_q}\left(\frac{(1+q^2)\cos t-2q}{(1-2q\cos t+q^2)^2}-\Gamma(t_q;q)\right)dt-\right.$$

$$-\int\limits_{t_q}^{t_q+\pi/2}\left(\frac{(1+q^2)\cos t-2q}{(1-2q\cos t+q^2)^2}-\Gamma(t_q;q)\right)dt+$$

$$\left.+\int\limits_{t_q+\pi/2}^{\pi}\left(\frac{(1+q^2)\cos t-2q}{(1-2q\cos t+q^2)^2}-\Gamma(t_q;q)\right)dt\right]+O(1)\frac{q^n}{n}=$$

$$=\frac{2q}{\pi n}\left(2J(t_q)-2J(t_q-\pi/2)-J(0)-J(\pi)\right)+O(1)\frac{q^n}{n}=$$

$$=\frac{4q}{\pi n}\left(J(t_q)-J(t_q-\pi/2)\right)+O(1)\frac{q^n}{n}.$$

Задача полягає в обчисленні для заданого q наближених значень величин t_q, для яких виконується (7), і обчисленні для таких t_q величин $J(t_q)-J(t_q-\pi/2)$, де

$$J(t)=\int\frac{(1+q^2)\cos t-2q}{(1-2q\cos t+q^2)^2}dt=\frac{\sin t}{(1-2q\cos t+q^2)}.$$

Розпочнемо з випадку

$$q=\sqrt{2+\sqrt{5}-2\sqrt{2+\sqrt{5}}}=0,346014339235825...$$

Підставимо значення q в (10) та виконаємо перетворення. Після округлення отримуємо:

$$\frac{\sin t_q+0,618}{(\sin t_q+1,618)^2}=\frac{0,618-\cos t_q}{(1,618-\cos t_q)^2}.$$

Виконуючи перетворення та обчислення, отримуємо співвідношення, в якому можна скоротити на $(\sin t_q+\cos t_q)$

$$0,618076(\sin t_q+\cos t_q)+\cos t_q\sin t_q(\sin t_q+\cos t_q)=$$

$$=0,618(\sin t_q-\cos t_q)(\sin t_q+\cos t_q).$$

Виконуючи далі перетворення, отримуємо

$$(\cos t_q\sin t_q)^2+1,999848\sin t_q\cos t_q=0.$$

Єдиним розв'язком останньої рівності є розв'язок рівняння

$$\sin t_q\cos t_q=0, t\in(0;\pi).$$

Отримуємо, що для $q = 0,346014339235825...$ єдиним розв'язком рівняння

$$\frac{(1+q^2)(-\sin t_q) - 2q}{(1+2q\sin t_q + q^2)^2} = \frac{(1+q^2)\cos t_q - 2q}{(1-2q\cos t_q + q^2)^2}$$

є $t_q = \pi/2$.

Виконуючи обчислення, отримуємо

$$J(\pi/2) - J(\pi) = 0,893... = \frac{1}{(1+q^2)}.$$

Нехай тепер $q = 0,35$. Виконуючи перетворення, отримуємо рівність

$$314,307015625 + 550,025\sin t_q \cos t_q = 343(\sin t_q - \cos t_q).$$

Застосовуючи заміну $\sin t_q \cos t_q = a,$ і рівність

$$(\sin t_q - \cos t_q) = \sqrt{1 - 2\sin t_q \cos t_q},$$

отримуємо рівняння

$$302527,500625a^2 + 581051,43253828125a - 18860,099928906 = 0,$$

яке має розв'язок $a = \sin t_q \cos t_q = 0,03192782362...$. Отже, отримуємо $t_q = 1,53884676679....$ Тоді, $\sin t_q = 0,999489656...; \cos t_q = 0,0319441247....$ Таким чином, для $q = 0,35$, для величин

$$\frac{(1+q^2)\cos(t_q+\pi/2) - 2q}{(1-2q\cos(t_q+\pi/2)+q^2)^2} = 0,548739478025...$$

$$\frac{(1+q^2)\cos t_q - 2q}{(1-2q\cos t_q + q^2)^2} = 0,548739478...$$

має місце співпадіння до 7-го знаку, а виконуючи обчислення отримуємо наступне:

$$J(t_q) - J(t_q + \pi/2) = 0,8909809874...$$

З іншого боку, для $q = 0,35$, маємо

$$\frac{1}{1+q^2} = \frac{1}{1,1225} = \mathbf{0,890}86859688....$$

Отже, робимо висновок, що для $q = 0,35$ компонента головного члена збільшилася приблизно на $0,000112$ по відношенню до того, якою вона мала бути, якщо рівність (5) мала б місце для $q = 0,35$.

За аналогією для $q=0,36$ знаходимо

$$t_q=1,46572899...;\sin t=0,9944855...;\cos t=0,1048741...$$

Виконуючи обчислення, маємо:

$$J(1,46572899...)-J(1,46572899...+\pi/2)=0,8866305547...,$$

а величина

$$\frac{1}{1+q^2}=\frac{1}{1,1296}=0,885269...$$

менша за отриману величину на $0,0014$. Різниця у порівнянні з попереднім випадком зросла.

Продовжимо обчислення. Для $q=0,37$, отримуємо $t_q=1,356732....$, $\sin t_q=0,977175599926823...;\cos t_q=0,212433158682....$ Виконуючи обчислення, маємо

$$J(t_q)-J(t_q+\pi/2)=0,883157785...,$$

що не менше, ніж на $0,00357$ перевищує $\frac{1}{1+q^2}=0,8795848...$

Виконаємо аналогічні обчислення для $q=0,38$. Отримуємо

$$t_q=1,3373484567948966...$$

Таким чином, $\sin t_q=0,972874572325...;\cos t_q=0,231333236962....$ Виконуючи обчислення, маємо

$$J(t_q)-J(t_q+\pi/2)=0,8816245...,$$

що не менше ніж на $0,0078$ перевищує $\frac{1}{1+q^2}=0,87382...$

Продовжуючи обчислення, для $q=0,39$, отримуємо

$$t_q=1,2811154217948966....$$

Виконуючи обчислення, маємо

$$J(t_q)-J(t_q+\pi/2)=0,88087693...,$$

що не менше ніж на $0,012$ перевищує $\frac{1}{1+q^2}=0,86798021...$

Далі для $q=0,40$, отримуємо

$$t_q=1,22881198679...$$

Виконуючи обчислення, маємо

$$J(t_q)-J(t_q+\pi/2)=0,88125164...,$$

що не менше ніж на $0,019$ перевищує $\frac{1}{1+q^2} = 0,8620689655....$

Для $q = 0,45$, отримуємо $t_q = 1,09701731....$ Виконуючи обчислення, маємо

$$J(t_q) - J(t_q + \pi/2) = 0,871798256...,$$

що не менше ніж на $0,04$ перевищує величину $\frac{1}{1+q^2} = 0,8316008316....$

Для $q = 0,475$, отримуємо $t_q = 0,9195....$ Виконуючи обчислення, маємо для такого q

$$J(t_q) - J(t_q + \pi/2) = 0,918...,$$

що не менше ніж на $0,1$ перевищує $\frac{1}{1+q^2} = 0,81591....$

Для $q = 0,5$, отримуємо $t_q = 0,8382....$ Виконуючи обчислення, маємо

$$J(t_q) - J(t_q + \pi/2) = 0,94365...,$$

що не менше ніж на $0,14$ перевищує $\frac{1}{1+q^2} = 0,8.$

Для $q = 0,55$, отримуємо $t_q = 0,69672....$ Таким чином,

$$J(t_q) - J(t_q + \pi/2) = 1,01662...,$$

що не менше ніж на $0,248$ перевищує $\frac{1}{1+q^2} = 0,7677543...$

Далі, для $q = 0,6$, отримуємо

$$t_q = 0,57676489....$$

Виконуючи обчислення, маємо

$$J(t_q) - J(t_q + \pi/2) = 1,12378...,$$

що не менше ніж на $0,388$ перевищує $\frac{1}{1+q^2} = 0,735294...$

Для $q = 0,9$, отримуємо $t_q = 0,1062248533974483....$ Виконуючи обчислення, маємо

$$J(t_q) - J(t_q + \pi/2) = 4,76592121...,$$

що не менше ніж на $4,2$ перевищує $\frac{1}{1+q^2} = 0,552...$

Для $q = 0,95$, отримуємо $t_q = 0,102391....$ Виконуючи обчислення, маємо

$$J(t_q) - J(t_q + \pi/2) = 7,7346972...,$$

що не менше ніж на $7,2$ перевищує $\frac{1}{1+q^2} = 0,5256...$

Для $q = 0,975$, отримуємо $t_q = 0,04976....$ Виконуючи обчислення, маємо

$$J(t_q) - J(t_q + \pi/2) = 15,881...,$$

що не менше ніж на $15,3$ перевищує $\frac{1}{1+q^2} = 0,512656...$

Поєднуючи отримані обчислення, природно зробити висновок, що при $n \to \infty$ виконується рівність

$$\mathcal{E}(C^q_{0,\infty}, \sigma_n) \equiv \sup_{f \in C^q_{0,\infty}} ||f(x) - \sigma_n(f,x)||_C = \frac{4q}{\pi n(1+q^2)} + O(1)\frac{q^n}{n}$$

лише для $q \in \left(0; \sqrt{2+\sqrt{5}-2\sqrt{2+\sqrt{5}}}\right]$.

Література

1. *Степанец А.И.* Равномерные приближения тригонометрическими полиномами / А.И. Степанец. — К. : Наук. думка, 1981. — 340 с.
2. *Никольский С.М.* Приближение функций тригонометрическими полиномами в среднем / С.М. Никольский // Изв. АН СССР. Сер. мат. — 1946. — Т. 10, № 3. — С. 207—256.
3. *Стечкин С.Б.* Оценка остатка ряда Фурье для дифференцируемых функций // Тр. Мат. ин-та АН СССР. — 1980. — Т. 45. — С. 126—151.
4. *Степанец А.И.* Приближение суммами Фурье интегралов Пуассона непрерывных функций / А.И. Степанец // Докл. РАН. — 2000. — Т. 373, № 2. — С. 171—173.
5. *Рукасов В.І.* Про наближення неперервних періодичних функцій сумами Валле–Пуссена / В.І. Рукасов, С.О. Чайченко // Доп. НАН України. — 2002. — № 3. — С. 35—39.
6. *Сердюк А.С.* Наближення інтегралів Пуасона сумами Валле Пуссена / А.С. Сердюк // Укр. мат. журн. — 2004. — Т. 56, № 1. — С. 97-107.
7. *В.В. Савчук* Наближення аналітичних функцій сумами Валле Пуссена / М.В. Савчук, С.О. Чайченко // Мат. студії. – 2010. – 34, (2). – С. 207–219.
8. *Novikov O.O.* Approximation of periodic analytic functions by Fejer sums / O.O. Novikov, Rovenska O.G. // Mat. Stud. — 2017. — 47. — P. 196–201.

Bodra V., Novikov O., Kozachenko Yu., Semenova Yu., Sypchuk Ye.
Kyiv National University of Technologies and Design, Kyiv, Ukraine,
Donbas State Pedagogical University, Sloviansk, Ukraine

The behavior of the main member of asymptotic equality of deviations of operators of Fejer

The questions of an approximation of functions, which can be presented in the form of Poisson integrals, have been considered.

Keywords: *Fourier series, operators of Fejer, asymptotic formulas.*

УДК 517.5

Стьопкін А.В., Шулик Т.В., Ровенська О.Г., Чала В.В., Шажко С.П.

[1] *канд. фізико-математичних наук, ст. викл. каф. МНМ та МНІ, ДВНЗ «ДДПУ»*

[2] *канд. педагогічних наук, ст. викл. каф. математики та інформатики, ДВНЗ «ДДПУ»*

[3] *канд. фізико-математичних наук, доцент каф. вищої математики, ДДМА*

[4] *студентка 2 курсу (магістратура) фізико-математичного факультету, ДВНЗ «ДДПУ»*

[5] *студент 2 курсу (магістратура) фізико-математичного факультету, ДВНЗ «ДДПУ»*

e-mail: sgpi@slav.dn.ua

НАБЛИЖЕННЯ КЛАСІВ ІНТЕГРАЛІВ ПУАССОНА НЕПОВНИМИ ОПЕРАТОРАМИ ФЕЙЄРА

Отримані асимптотичні формули для верхніх граней відхилень лінійних операторів на класах інтегралів Пуассона.

Ключові слова: *інтеграли Пуассона, оператори Фейєра*

Нехай L — множина сумовних 2π–періодичних функцій, $f \in L$ і

$$S[f] = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k(f)\cos kx + b_k(f)\sin kx) \equiv \sum_{k=0}^{\infty} A_k(f;x)$$

— ряд Фур'є функції f. Позначимо через $S_n(f;x)$ часткові суми ряду Фур'є, тоді для фіксованого $p \in \mathbb{N}$, $p \leqslant n$ суми Валле Пуссена функції $f \in L$ задаються наступним співвідношенням

$$V_{n,p}(f,x) = \frac{1}{p}\sum_{k=n-p}^{n-1} S_k(f,x).$$

Поліноми наближення Валле Пуссена у випадку $p = n$ мають назву сум Фейєра, які можна задати співвідношенням

$$\sigma_n(f,x) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} S_k(f,x). \tag{1}$$

Наслідуючи О.І. Степанця [1], позначимо $C^q_{\beta,\infty}$ – класи неперервних 2π–періодичних функцій $f(x)$, які задаються наступною згорткою

$$f(x) = A_0 + \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \varphi(x+t) P^q_\beta(t)\, dt,$$

де $P_{\beta}^{q}(t) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} q^k \cos(kt + \frac{\beta\pi}{2})$ – ядро Пуассона, а $\varphi \in S_M^0$, тобто функція $\varphi(x)$ має нульове середнє значення на періоді і $\operatorname{esssup}|\varphi(x)| \leqslant 1$.

Задача про наближення класів $C_{\beta,\infty}^q$ лінійними методами має історію. С.М. Нікольський [2] та С.Б. Стечкин [3] показали, що для верхніх граней відхилень часткових сум Фур'є на класі інтегралів Пуассона має місце асимптотична рівність

$$\mathcal{E}\left(C_{\beta,\infty}^q; S_n\right) = \frac{8q^n}{\pi^2} \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{du}{\sqrt{1 - q^2 \sin^2 u}} + O(1)\frac{q^n}{n(1-q)},$$

де величина $O(1)$ рівномірно обмежена відносно $n \in \mathbb{N}$ та $q \in (0;1)$.

В роботі [1] О.І. Степанець отримав аналогічну асимптотичну формулу для класів $C_{\beta}^q H_{\omega}$. В.І. Рукасов та С.О. Чайченко [4] для верхніх граней відхилень сум Валле Пуссена на класах $C_{\beta,\infty}^q$ і $C_{\beta}^q H_{\omega}$ отримали аналогічні асимптотичні формули. Зокрема, у цій роботі показано, що

$$\mathcal{E}\left(C_{\beta,\infty}^q; V_{n,p}\right) = \frac{4q^{n-p+1}}{\pi p(1-q^2)} + O(1)\left(\frac{q^{n-p+1}}{p(n-p)(1-q)^3} + \frac{q^n}{p(1-q^2)}\right).$$

А.С. Сердюк [5] показав, що має місце більш загальна рівність

$$\mathcal{E}\left(C_{\beta,\infty}^q; V_{n,p}\right) = \frac{q^{n-p+1}}{p}\left(\frac{4}{\pi^2}K_{p,q} + O(1)\left(\frac{q}{(n-p+1)(1-q)^s}\right)\right),$$

де для $p = 1, 2, ..., n$ поведінка константи $K_{q,p}$ визначається наступним співвідношенням, отриманим у роботі [6]

$$K_{q,p} = 2\frac{1-q^{2p}}{1-q^2}K(q^p), \quad s = s(p) = \begin{cases} 1, & p = 1, \\ 3, & p = 2, 3, ... \end{cases}$$

і величина $K(q)$ визначена вище співвідношенням (2).

В даній роботі отримані асимптотичні рівності для верхніх граней відхилень на класах $C_{\beta,\infty}^q$ тригонометричних поліномів

$$\widetilde{\sigma}_n(f;x) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-2} S_k(f;x), \tag{2}$$

які дещо відрізняються від класичних сум Фейєра $\sigma_n(f,x)$.

Теорема 1. *Нехай* $q \in (0;1)$. *Тоді для* $n \to \infty$ *має місце асимптотична формула*

$$\mathcal{E}(C_{1,\infty}^q, \widetilde{\sigma}_n) = \frac{2}{\pi n}\left(\frac{2q}{1-q^2} + \ln\frac{1+q}{1-q}\right) + O(1)\frac{q^n}{n(1-q)^3}. \tag{3}$$

Якщо $q \in (0;1/2)$, *то для* $n \to \infty$ *має місце асимптотична формула*

$$\mathcal{E}(C^q_{0,\infty}, \widetilde{\sigma}_n) = \frac{2}{\pi n}\left(\frac{2q}{1+q^2} - \mathrm{arctg} q\right) + O(1)\frac{q^n}{n}. \tag{4}$$

Доведення. На підставі співвідношення (2) маємо

$$\delta_n(f;x) \equiv f(x) - \widetilde{\sigma}_n(f;x) =$$

$$= \frac{1}{n}\left[nf(x) - \sum_{k=0}^{n-2} S_k(f;x)\right] = \frac{1}{n}\left[f(x) + \sum_{k=0}^{n-2}(f(x) - S_k(f;x))\right] =$$

$$= \frac{1}{n}\left[\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f^q_0(x+t)\sum_{k=0}^{\infty} q^k \cos(kt + \frac{\beta\pi}{2})dt + \sum_{k=0}^{n-2}\rho_k(f;x)\right], \tag{5}$$

де

$$\rho_m(f;x) \equiv f(x) - S_m(f;x) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f^q_\beta(x+t)\sum_{k=m+1}^{\infty} q^k \cos(kt + \frac{\beta\pi}{2})dt =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f^q_\beta(x+t)\sum_{k=0}^{\infty} q^{k+m+1} \cos((k+m+1)t + \frac{\beta\pi}{2})dt =$$

$$= \frac{q^{m+1}}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f^q_\beta(x+t)\Bigg(\cos((m+1)t + \frac{\beta\pi}{2})\sum_{k=0}^{\infty} q^k \cos kt -$$

$$- \sin((m+1)t + \frac{\beta\pi}{2})\sum_{k=0}^{\infty} q^k \sin kt\Bigg) dt.$$

Застосовуючи формули роботи [6, с.123],

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k \cos kt = \frac{1 - q\cos t}{1 - 2q\cos t + q^2}, \quad \sum_{k=0}^{\infty} q^k \sin kt = \frac{q \sin t}{1 - 2q\cos t + q^2},$$

отримуємо

$$\rho_m(f;x) = \frac{q^{m+1}}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f^q_\beta(x+t)\Bigg\{\frac{1 - q\cos t}{1 - 2q\cos t + q^2}\cos((m+1)t + \frac{\beta\pi}{2}) -$$

$$- \frac{q\sin t}{1 - 2q\cos t + q^2}\sin((m+1)t + \frac{\beta\pi}{2})\Bigg\} dt. \tag{6}$$

Тоді на підставі (5), (6), маємо

$$f(x)-\widetilde{\sigma}_n(f;x)=\frac{1}{n}\left[\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}f_\beta^q(x+t)\sum_{k=0}^{\infty}q^k\cos(kt+\frac{\beta\pi}{2})dt+\sum_{k=0}^{n-2}\rho_k(f;x)\right]=$$

$$=\frac{1}{n}\left[\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}f_\beta^q(x+t)\left\{\frac{1-q\cos t}{1-2q\cos t+q^2}\cos\frac{\beta\pi}{2}-\frac{q\sin t}{1-2q\cos t+q^2}\sin\frac{\beta\pi}{2})\right\}dt+\right.$$

$$+\sum_{m=0}^{n-2}\frac{q^{m+1}}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}f_\beta^q(x+t)\left\{\frac{1-q\cos t}{1-2q\cos t+q^2}\cos((m+1)t+\frac{\beta\pi}{2})-\right.$$

$$\left.\left.-\frac{q\sin t}{1-2q\cos t+q^2}\cos((m+1)t+\frac{\beta\pi}{2})\right\}dt\right]=$$

$$=\frac{1}{n}\left[\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}f_\beta^q(x+t)\left\{\frac{1-q\cos t}{1-2q\cos t+q^2}\cos\frac{\beta\pi}{2}-\frac{q\sin t}{1-2q\cos t+q^2}\sin\frac{\beta\pi}{2})\right\}dt+\right.$$

$$+\sum_{m=1}^{n-1}\frac{q^{m}}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}f_\beta^q(x+t)\times$$

$$\left.\times\left\{\frac{1-q\cos t}{1-2q\cos t+q^2}\cos(mt+\frac{\beta\pi}{2})-\frac{q\sin t}{1-2q\cos t+q^2}\cos(mt+\frac{\beta\pi}{2})\right\}dt\right]=$$

$$=\sum_{m=0}^{n-1}\frac{q^{m}}{n\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}f_\beta^q(x+t)\times$$

$$\left\{\frac{1-q\cos t}{1-2q\cos t+q^2}\cos(mt+\frac{\beta\pi}{2})-\frac{q\sin t}{1-2q\cos t+q^2}\cos(mt+\frac{\beta\pi}{2})\right\}dt.$$

Застосовуючи прийоми роботи [6, с.123], отримуємо

$$\delta_n(f;x)=\frac{1}{\pi n}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\frac{f_\beta^q(x+t)}{1-2q\cos t+q^2}\left[\Sigma_1\cos\frac{\beta\pi}{2}+\Sigma_2\sin\frac{\beta\pi}{2}\right]dt, \tag{7}$$

де

$$\Sigma_1=\sum_{k=0}^{n-1}q^k[\cos kt-q\cos(k-1)t]=\frac{1}{1-2q\cos t+q^2}[1-2q\cos t+$$

$$+q^2\cos 2t+q^n(-\cos nt+2q\cos(n-1)t-q^2\cos(n-2)t)],$$

$$\Sigma_2 = \sum_{k=0}^{n-1} q^k[q\sin(k-1)t - \sin kt] = \frac{1}{1-2q\cos t+q^2}[-2q\sin t+$$

$$+q^2\sin 2t + q^n(\sin nt + 2q\sin(n-1)t - q^2\sin(n-2)t)].$$

Тоді, враховуючи, що

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{dt}{(1-2q\cos t+q^2)^2} = O(1)(1-q)^{-3},$$

на підставі (7) маємо

$$\delta_n(f;x) = \frac{1}{\pi n}\int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{f_\beta^q(x+t)}{(1-2q\cos t+q^2)^2}\left[[1-2q\cos t+q^2\cos 2t]\cos\frac{\beta\pi}{2}-\right.$$

$$\left.-[-2q\sin t+q^2\sin 2t]\sin\frac{\beta\pi}{2}\right]dt + O(1)\frac{q^n}{(1-q)^3 n}.$$

Нехай $\beta = 1$. Тоді

$$\delta_n(f;x) = \frac{1}{\pi n}\int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{f_1^q(x+t)[-2q\sin t+q^2\sin 2t]}{(1-2q\cos t+q^2)^2}dt + O(1)\frac{q^n}{(1-q)^3 n}.$$

Отже, в силу інваріантості класу $C_{1,\infty}^q$ відносно зсуву за аргументом

$$\sup_{f\in C_{1,\infty}^q} ||\delta_n(f;x)|| = \sup_{f\in S_M^0}\left|\frac{1}{\pi n}\int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{f(t)[-2q\sin t+q^2\sin 2t]}{(1-2q\cos t+q^2)^2}dt + \frac{O(1)q^n}{(1-q)^3 n}\right| =$$

$$= \frac{1}{\pi n}\int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{\varphi(t)(-2q\sin t+q^2\sin 2t)}{(1-2q\cos t+q^2)^2}dt + O(1)\frac{q^n}{(1-q)^3 n}.$$

де

$$\varphi(t) = \operatorname{sign}(-2q\sin t+q^2\sin 2t) = \begin{cases} -1, & t\in(0;\pi),\\ 1, & t\in(-\pi;0).\end{cases}$$

Оскільки $\varphi \in S_M^0$, то отримуємо

$$\mathcal{E}(C_{1,\infty}^q, \widetilde{\sigma}_n) = \frac{2}{\pi n}\int\limits_{0}^{\pi} \frac{2q\sin t - q^2\sin 2t}{(1-2q\cos t+q^2)^2}dt + O(1)\frac{q^n}{(1-q)^3 n}. \qquad (8)$$

Обчислимо інтеграл. Застосовуючи заміну $z = \cos t$, маємо

$$\int \frac{2q\sin t - q^2\sin 2t}{(1-2q\cos t+q^2)^2}dt = -\int \frac{2q-2q^2z}{(1-2qz+q^2)^2}dz =$$

$$= -\frac{(1-q^2)}{2}(1-2q\cos t+q^2)^{-1} + \frac{1}{2}\ln(1-2q\cos t+q^2).$$

Таким чином,

$$\int\limits_0^\pi \frac{2q\sin t - q^2\sin 2t}{(1-2q\cos t+q^2)^2}dt = \frac{2q}{(1-q^2)} + \ln\frac{(1+q)}{(1-q)}.$$

Отже, на підставі (8) отримуємо (3).

Нехай тепер $\beta = 0$. Тоді для $f_0^q \in S_M^0$

$$\delta_n(f;x) = \frac{1}{\pi n}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f_0^q(x+t)\left(I + \frac{1-2q\cos t+q^2\cos 2t}{(1-2q\cos t+q^2)^2}\right)dt + O(1)\frac{q^n}{(1-q)^3 n},$$

де I таке, що $\mathrm{mes}T(I + \frac{1-2q\cos t+q^2\cos 2t}{(1-2q\cos t+q^2)^2} \geqslant 0) = \mathrm{mes}T(I + \frac{1-2q\cos t+q^2\cos 2t}{(1-2q\cos t+q^2)^2} \leqslant 0)$. Відшукаємо проміжки монотонності функції

$$\Gamma(t;q) = \frac{1-2q\cos t+q^2\cos 2t}{(1-2q\cos t+q^2)^2},$$

Оскільки

$$\left(\frac{1-2q\cos t+q^2\cos 2t}{(1-2q\cos t+q^2)^2}\right)' = \frac{2q\sin t(-1+3q^2-2q^3\cos t)}{(1-2q\cos t+q^2)^3},$$

то на проміжку $(0;\pi)$ екстремуми функції $\Gamma(t;q)$ задовольняють умову

$$\cos t = \frac{-1+3q^2}{2q^3}.$$

Оскільки для $q \in (0;1/2)$ виконується

$$\frac{-1+3q^2}{2q^3} < -1,$$

то для $q \in (0;1/2)$ на проміжку $[-\pi;0]$ функція $\Gamma(t;q)$ зростає, а на проміжку $[0;\pi]$ спадає. Так, що для $q \in (0;1/2)$, функція

$$\Gamma(t;q) - \Gamma(\frac{\pi}{2};q) = \frac{1-2q\cos t+q^2\cos 2t}{(1-2q\cos t+q^2)^2} - \frac{1-q^2}{(1+q^2)^2}$$

додатна на $(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2})$ і від'ємна на $(-\pi;\frac{\pi}{2})\cup(\frac{\pi}{2};\pi)$. Тому для $q\in(0;1/2)$ виконується $f_0^q(x)=\varphi(t)=\mathrm{sign}(\Gamma(t;q)-\Gamma(\frac{\pi}{2};q))\in S_M^0$ і

$$\mathcal{E}(C^q_{0,\infty},\widetilde{\sigma}_n)=\frac{1}{\pi n}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\varphi(x+t)(\Gamma(t;q)-\Gamma(\frac{\pi}{2};q))dt+O(1)\frac{q^n}{n}=$$

$$=\frac{1}{\pi n}\int\limits_{-\pi}^{\pi}|\Gamma(t;q)-\Gamma(\frac{\pi}{2};q)|dt+O(1)\frac{q^n}{n}=\frac{2}{\pi n}\int\limits_{0}^{\pi}|\Gamma(t;q)-\Gamma(\frac{\pi}{2};q)|dt+O(1)\frac{q^n}{n}=$$

$$=\frac{2}{\pi n}\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}\Gamma(t;q)dt-\frac{2}{\pi n}\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\Gamma(t;q)dt+O(1)\frac{q^n}{n}=$$

$$=\frac{2}{\pi n}\Bigg[\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{dt}{(1-2q\cos t+q^2)}dt-\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{dt}{(1+2q\sin t+q^2)}-$$

$$-2q^2\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^2 t dt}{(1-2q\cos t+q^2)^2}+2q^2\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^2 t dt}{(1+2q\sin t+q^2)^2}\Bigg]+O(1)\frac{q^n}{n}. \qquad (7)$$

Виконуючи обчислення, отримуємо

$$\int\frac{dt}{(1-2q\cos x+q^2)}=\frac{2}{(1-q^2)}\mathrm{arctg}\frac{1+q}{1-q}t,$$

$$\int\frac{dt}{(1+2q\sin x+q^2)}=\frac{2}{(1-q^2)}\mathrm{arctg}\left(\frac{1+q^2}{1-q^2}t+\frac{2q}{1-q^2}\right),$$

$$\int\frac{\sin^2 t dt}{(1-2q\cos t+q^2)^2}=$$

$$=\frac{-\mathrm{tg}\frac{t}{2}}{q[(1+q)^2\mathrm{tg}^2\frac{t}{2}+(1-q)^2]}-\frac{1}{2q^2}\frac{t}{2}+\frac{1+q^2}{2q^2(1-q^2)}\mathrm{arctg}\frac{1+q}{1-q}\mathrm{tg}\frac{t}{2},$$

$$\int\frac{\cos^2 t dt}{(1+2q\sin t+q^2)^2}=$$

$$=\frac{-(1+q^2+2q\mathrm{tg}\frac{t}{2})}{q(1+q^2)^2(\mathrm{tg}^2\frac{t}{2}+\frac{4q}{1+q^2}\mathrm{tg}\frac{t}{2}+1)}+\frac{1+q^2}{2q^2(1-q^2)}\mathrm{arctg}\frac{\mathrm{tg}\frac{t}{2}(1+q^2)+2q}{1-q^2}+\frac{-t}{4q^2}.$$

Застосовуючи отримане і знову виконуючи обчислення, маємо

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{(1-2q\cos t+q^2)} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{(1+2q\sin t+q^2)} = \frac{4}{1-q^2}\operatorname{arctg} q,$$

$$2q^2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 t dt}{(1-2q\cos t+q^2)^2} - 2q^2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 t dt}{(1+2q\sin t+q^2)^2} = \frac{2q}{1+q^2} - \frac{2(1+q^2)}{1-q^2}\operatorname{arctg} q.$$

Отже на підставі (7) отримуємо (4). Терема доведена.

Література

1. *Степанец А.И.* Решение задачи Колмогорова-Никольского для интегралов Пуассона непрерывных функций // Мат. сборник. — 2001. — Т. 192, № 1. — С. 113—138.
2. *Никольский С.М.* Приближение функций тригонометрическими полиномами в среднем // Изв. АН СССР. Сер. мат. — 1946. — Т. 10, № 3. — С. 207—256.
3. *Стечкин С.Б.* Оценка остатка ряда Фурье для дифференцируемых функций // Тр. Мат. ин-та им. В.А. Стеклова АН СССР. — 1980. — Т. 145. — С. 126—151.
4. *Рукасов В.І.* Наближення аналітичних періодичних функцій сумами Валле-Пуссена / В.І. Рукасов, С.О. Чайченко // Укр. мат. журн. — 2002. — Т. 54, № 12. — С. 1653—1668.
5. *Сердюк А.С.* Наближення інтегралів Пуасона сумами Валле Пуссена // Укр. мат. журн. — 2004. — Т. 56, № 1. — С. 97—107.
6. *Савчук В.В.* Наближення аналітичних функцій сумами Валле Пуссена / М.В. Савчук, С.О. Чайченко // Мат. студії. – 2010. – 34, (2). – С. 207–219.
7. *Степанец А.И.* Классификация и приближение периодических функций. — Киев: Наук. думка, 1987. — 268 с.

Stepkin A., Shulyk T., Rovenska O., Chala V., Shazhko S.

Donbas State Pedagogical University, Sloviansk, Ukraine

Donbas State Engineering Academy, Kramatorsk, Ukraine

The approximation of classes of Poisson integrals with the Fejer operators

The asymptotic formulas for upper bounds of deviations of linear operators on the classes of Poisson integrals have been received.

Keywords: *Poisson integrals, Fejer operators*

УДК 519.175

Кадубовський О.А., Калініченко Я.В.

[1] *канд. фізико-математичних наук, доцент каф. математики та інформатики, ДВНЗ «ДДПУ»*

[2] *студент 2 курсу (магістратура) фізико-математичного факультету, ДВНЗ «ДДПУ»*

e-mail: kadubovs@ukr.net, kalinichenkoddpu@ukr.net

ПЕРЕРАХУВАННЯ ДВОКОЛЬОРОВИХ ХОРДОВИХ O-ДІАГРАМ РОДУ 1, ЯКІ МАЮТЬ ДВА ЧОРНИХ (АБО СІРИХ) ЦИКЛИ, ВІДНОСНО ДІЇ ГРУПИ ДІЕДРА

Для натуральних $n \geqslant 4$ встановлено формули підрахунку числа нееквівалентних 2-кольорових хордових O-діаграм (з n хордами), які мають лише два сірих (чорних) та $(n-3)$ чорних (відповідно сірих) циклів відносно дії діедральної групи (порядку $2n$). Крім того, для початкових $4 \leqslant n \leqslant 7$ в явному вигляді наведено всі неізоморфні та нееквівалентні діаграми із зазначених класів, а для $4 \leqslant n \leqslant 24$ — точні значення числа неізоморфних та відповідно нееквівалентних таких діаграм.

Ключові слова: *2-кольорова хордова O-діаграма з n хордами, род діаграми, цикл діаграми, група діедра.*

Вступ

Нагадаємо, що *хордовою діаграмою* або, коротко, n-діаграмою називають конфігурацію на площині, що складається з кола, $2n$ точок на ньому (які є вершинами правильного $2n$-кутника) та n хорд, що сполучають вказані точки. Хордові діаграми називають *ізоморфними*, якщо одну можна одержати з іншої в результаті повороту. Діаграми називають *еквівалентними*, якщо їх можна сумістити за допомогою повороту, дзеркального відбиття, або ж їх композиції.

Питаннями переліку певних класів хордових n-діаграм (відносно дії циклічної групи порядку $2n$ та діедральної групи порядку $4n$) займалась ціла низка відомих математиків: T.R.S. Walsh, A.B. Lehman, J. Riordan, J. Harer, D. Zagier. Серед сучасників слід виділити авторів робіт [7], [2], [8], [5], [1].

Задачі про підрахунок числа неізоморфних та нееквівалентних n-діаграм були повністю розв'язані у 1997–1998 рр. в роботах [7], [5], [2], [8]. Формули для підрахунку числа неізоморфних *планарних* (роду 0), *тороїдальних* (роду 1) n-діаграм та $2m$-діаграм *максимального роду* m було встановлено у 2000 р. в роботі [2]. Причому задача про підрахунок числа нееквівалентних діаграм *максимального роду* була повністю розв'язана лише у 2017 р. в роботі [6].

Крім того, слід констатувати, що *одержання явних формул для підрахунку числа неізоморфних (а тому і нееквівалентних)*, зокрема двокольорових, n-діаграм *фіксованого роду* виявилося досить складною задачею і в загальному випадку до сьогодні *нерозв'язаною проблемою.*

Для **двокольорових** діаграм найбільш вагомими є наступні результати:

задачі про підрахунок числа неізоморфних та нееквівалентних O- і N-діаграм (відповідно) повністю розв'язано в 2010 р. у роботі [11];

формули для підрахунку числа неізоморфних та нееквівалентних O-діаграм (N-діаграм), які мають *точно один цикл певного кольору* (чорний або ж сірий) одержано в 2010 та 2012 рр. у роботах [12] і [13] відповідно;

формули для підрахунку числа неізоморфних та нееквівалентних *планарних* O-діаграм (з n хордами) було встановлено у 2000 р. в роботі [1]; проте питання про узагальнення цієї задачі на випадок фіксованого числа чорних (або ж сірих) циклів було повністю розв'язано лише у 2014 р. в роботі [14];

задача про підрахунок числа неізоморфних O-діаграм *максимального роду* (з одним чорним та одним сірим циклом) була розв'язана у 2006 р. в роботі [10], а про число нееквівалентних таких діаграм — лише у 2015 р. в [15];

формули для підрахунку числа неізоморфних та нееквівалентних O-діаграм (з n хордами) роду 1, які мають лише один чорний (або ж сірий) цикл, одержано в 2016 р. у роботі [16].

Проте навіть для випадку O-діаграм (з n хордами) роду 1, які мають *точно* $k>1$ чорних (або ж сірих) та $l=n-1-k>1$ сірих (відповідно чорних) циклів **питання залишається відкритим**.

Встановленню формул для підрахунку числа неізоморфних та нееквівалентних O-діаграм (з n хордами) роду 1, які мають точно два сірих (або ж чорних) цикли й присвячена дана стаття. А її основною метою — виклад одержаних результатів, анонсованих авторами в роботах [17] і [18].

1. Основні поняття та попередні відомості

Означення 1. *Коло з $2n$ точками на ньому (що є вершинами правильного $2n$-кутника), дуги якого почергово розфарбовані у два кольори (чорний і сірий) та фіксованою нумерацією вершин за годинниковою стрілкою, будемо називати двокольоровим $2n$-шаблоном — рис. 1 a).*

2-кольоровою *хордовою n-діаграмою будемо називати n-діаграму, побудовану на основі двокольорового $2n$-шаблону.*

Означення 2. *2-кольорову n-діаграму, яка не містить (містить) хорди, що сполучає вершини з номерами однакової парності, називають O-діаграмою (N-діаграмою) — рис. 1 c) (рис. 1 b)).*

Означення 3. *«Чорним» («сірим») циклом 2-кольорової діаграми називатимемо послідовність хорд та чорних (сірих) дуг, які утворюють гомеоморфний образ (орієнтованого) кола — рис. 1 b) – c).*

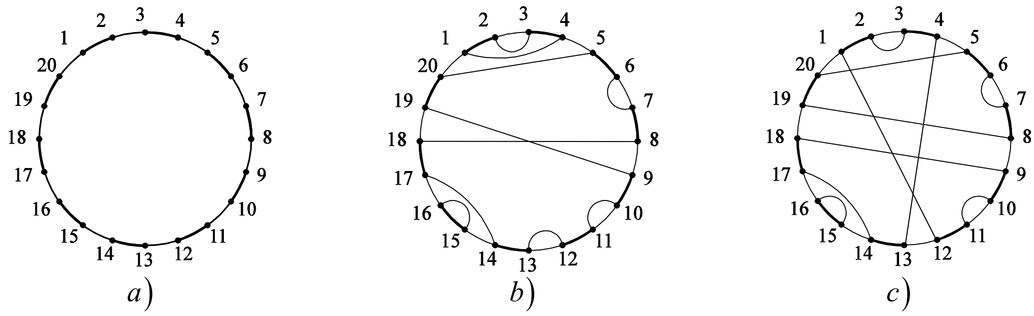


Рис. 1:
a) двокольоровий 20-шаблон;
b) N-діаграма (з 10 хордами), яка має 7 сірих та 3 чорних циклів;
c) O-діаграма (з 10 хордами), яка має 6 сірих та 3 чорних циклів

Якщо не приймати до уваги кольори, то кожен чорний та сірий цикл 2-кольорової O-діаграми співпадає з відповідним циклом непофарбованої діаграми. Тоді наслідуючи [2], природним чином визначається рід O-діаграми

Означення 4. *Родом 2-кольорової O-діаграми з n хордами будемо називати ціле число g, яке визначається рівністю*

$$2g = n + 1 - (k + l), \tag{1}$$

де k і l — число чорних та (відповідно) сірих циклів діаграми.

Означення 5. *Множину O-діаграм з n хордами (побудованих на 2-кольоровому $2n$-шаблоні), які мають точно k чорних (сірих) та l сірих (відповідно чорних) циклів будемо позначати $\Im_{k,l}^{n,g}$, де g – рід діаграми.*

2. Основна частина

2.1. Число діаграм з класу $\Im_{n-3;2}^{n,1}$ та його характеристичні підкласи

З урахуванням результатів роботи [17], у 1997 р. в роботі [9, С. 4] вперше встановлено рекурентні формули, за допомогою яких є принципово можливим підрахунок числа діаграм з класу $\Im_{k,l}^{n,g}$ ($2g = n + 1 - k - l$). Крім того, для початкових $g = 0; 1; 2; 3$ в [9, С. 8-9] встановлено явні формули, які пізніше також були одержані та уточнені й в [4, С. 833], а в роботі [3, С. 888] — для цілих $g \geqslant 0$ запропоновано іншу рекурентну формулу. Так, наприклад, для випадку $g = 1$ в роботі [4] наведено наступну формулу

$$t(n; k, l) = \left|\Im_{k,l}^{n,1}\right| = \frac{1}{3!} \cdot C_{n+1}^{2} \cdot C_{n-1}^{k-1} \cdot C_{n-1}^{l-1}, \tag{2}$$

звідки маємо, що число $t(n) = t(n; n-3, 2)$ діаграм з класу $\Im^{n,1}_{n-3;2}$ можна знайти за формулою

$$t(n) = \frac{(n+1)\cdot n\cdot (n-1)^2\cdot (n-2)\cdot (n-3)}{72} = \frac{5}{3}(n-1)C^5_{n+1}. \qquad (3)$$

Приклад 1. *При* $n = 4$ *існує лише* ***п'ять*** *діаграм з класу* $\Im^{5,1}_{2;2}$ *– рис.* 2.

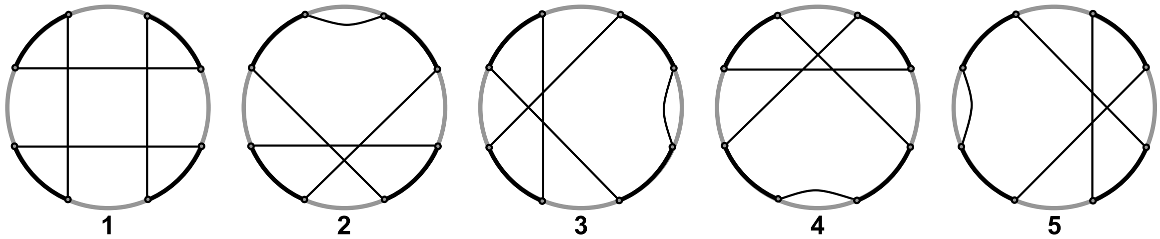


Рис. 2: всі діаграми з класу $\Im^{5,1}_{2;2}$

Зауваження 1. *Оскільки діаграми з класу* $\Im^{n,1}_{n-3;2}$ *(крім 2 сірих циклів) мають точно* $k = n-3$ *чорних циклів (які містять всі* n *чорних дуг двокольорового* $2n$*-шаблону), а* $3 = (3+0) = (2+1) = (1+1+1)$, *то кожна з таких діаграм може мати лише один з наступних наборів чорних циклів:*

або один 4*-цикл (довжини 4) та* $(n-4)$ 1*-циклів (довжини 1) — рис.* 3 $a), d)$;

або один 3*-цикл, один* 2*-цикл та* $(n-5)$ 1*-циклів — рис.* 3 $e), f), g)$;

або три 2*-цикли та* $(n-6)$ 1*-циклів — рис.* 3 $b), c)$.

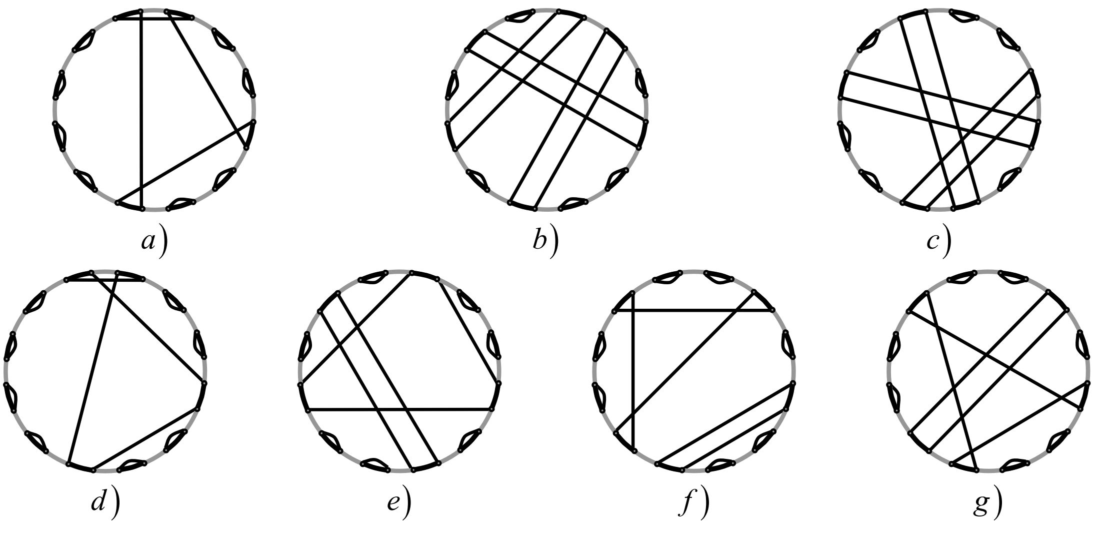


Рис. 3: типові представники характеристичних підкласів A, B, C, D, E, F, G класу $\Im^{n,1}_{n-3;2}$

Таким чином, всі діаграми з класу $\Im^{n,1}_{n-3;2}$ *умовно можна поділити на сім характеристичних підкласів —* A, B, C, D, E, F *і* G, *типові представники яких зображено на рис.* 3 $a), b), c), d), e), f)$ *і* $g)$ *відповідно.*

2.2. Ілюстративні приклади до числа нееквівалентних діаграм з класу $\Im^{n,1}_{n-3;2}$ для початкових n

Нижче для натуральних $n = 4; 5; 6$ в явному вигляді наведено всі неізоморфні діаграми з відповідних класів $\Im^{n,1}_{n-3;2}$.

Рис. 4: всі неізоморфні діаграми з класу $\Im^{4,1}_{1;2}$

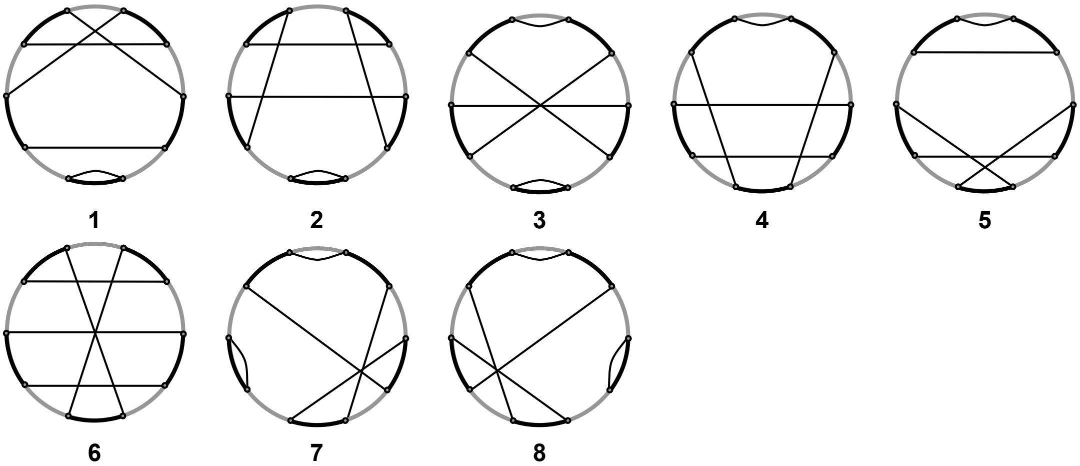


Рис. 5: всі неізоморфні діаграми з класу $\Im^{5,1}_{2;2}$

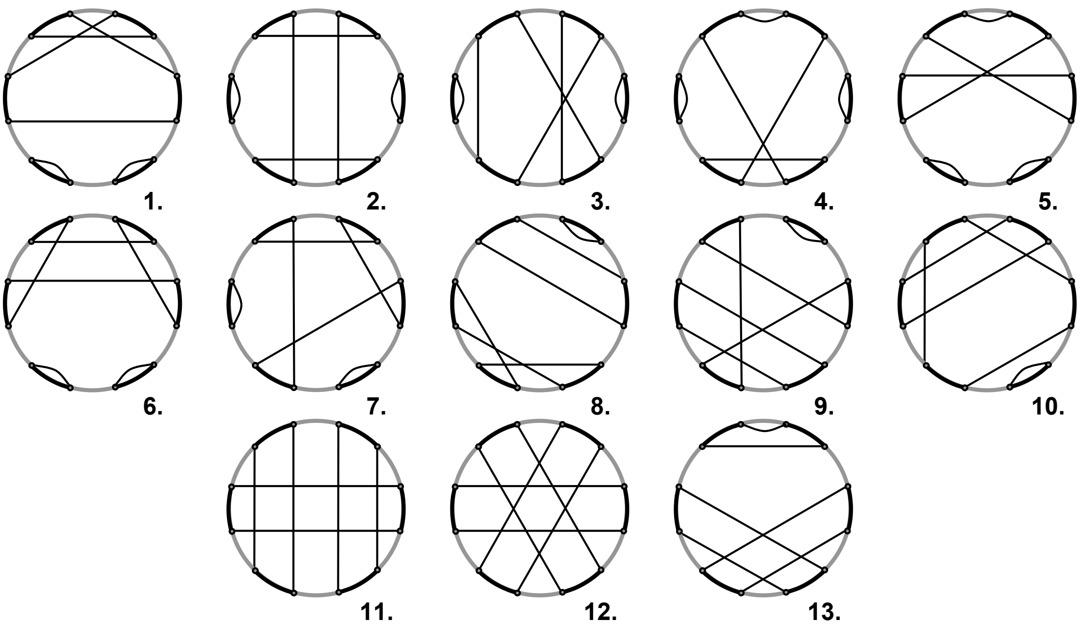


Рис. 6: всі неізоморфні «симетричні» діаграми з класу $\Im^{6,1}_{3;2}$

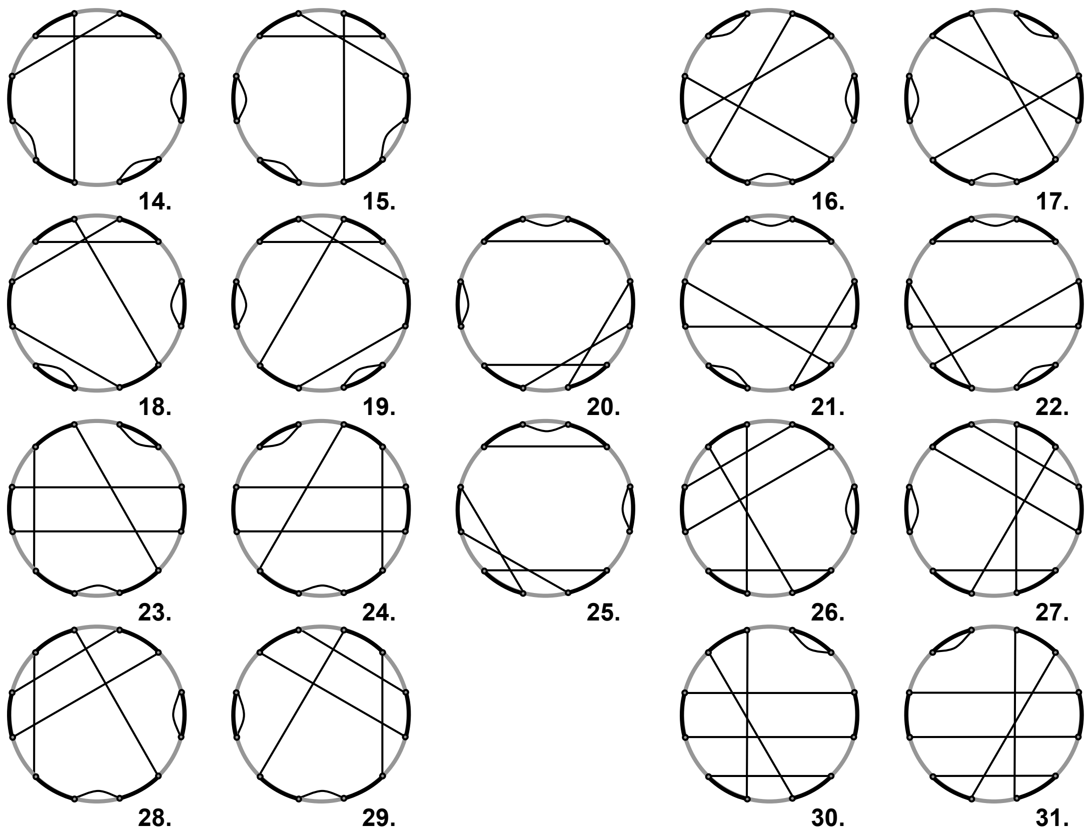


Рис. 7: всі неізоморфні «не симетричні» діаграми з класу $\Im_{3;2}^{6,1}$

Не важко бачити, що:

у випадку $n = 4$ (рис. 4 вище) всі неізоморфні (відносно повороту) діаграми є також і нееквівалентними (відносно дії діедральної групи), тобто існує лише 2 нееквівалентні діаграми з класу $\Im_{1;2}^{4,1}$;

у випадку $n = 5$ (рис. 5) серед 8 неізоморфних діаграми 7 і 8 є еквівалентними, а тому існує лише 7 нееквівалентних діаграм з класу $\Im_{2;2}^{5,1}$;

у випадку $n = 6$: всі неізоморфні «симетричні» (відносно повороту) діаграми є також і нееквівалентними (відносно дії діедральної групи) — рис. 6; серед 18 неізоморфних «не симетричних» діаграм, зображених на рис. 7, діаграми 14 і 15, 16 і 17, 18 і 18, 21 і 22, 23 і 24, 26 і 27, 28 і 29, 30 і 31 та 20 і 25 є еквівалентними. І тому існує лише $31 - 18 + 9 = 22$ нееквівалентних діаграм з класу $\Im_{3;2}^{6,1}$.

2.3. Число неізоморфних діаграм з класу $\Im_{n-3;2}^{n,1}$

За лемою Бернсайда (див. напр. [2], [11], [12]) число $t^*(n)$ неізоморфних (нееквівалентних відносно дії циклічної групи порядку n) діаграм з класу $\Im_{n-3;2}^{n,1}$ можна знайти за допомогою співвідношення

$$t^*(n) = \frac{1}{n}\left(t(n) + \sum_{i|n,\ i\neq n} \phi\left(\frac{n}{i}\right) \cdot \rho\left(n, i\right)\right), \tag{4}$$

де $t(n) = \left|\Im_{n-3;2}^{n,1}\right|$; $\phi(q)$ — функція Ейлера (кількість натуральних менших за q чисел, взаємнопростих із ним), а $\rho\,(n,i)$ — число тих діаграм з класу $\Im_{n-3;2}^{n,1}$, які самосуміщуються при повороті (за годинниковою стрілкою) на кут $\omega(n,i) = \frac{2\pi}{2n} \cdot 2i = 2\pi \cdot \frac{i}{n}$.

Очевидно, що для дільників $i \neq n$ числа n кут $\omega(n,i) \leqslant \pi$. Більше того, поклавши $j = \frac{n}{i}$, співвідношення (4) можна подати у вигляді

$$t^*(n) = \frac{1}{n}\left(t(n) + \sum_{j|n,\ j\neq 1} \phi(j) \cdot \rho\left(n, \tfrac{n}{j}\right)\right), \tag{5}$$

де $\rho\left(n, \frac{n}{j}\right)$ — число тих діаграм з класу $\Im_{n-3;2}^{n,1}$, які самосуміщуються при повороті (за годинниковою стрілкою) на кут $\omega\left(n, \frac{n}{j}\right) = \frac{2\pi}{j}$.

Теорема 1. *Для натуральних $n \geqslant 4$ число $t^*(n)$ неізоморфних (нееквівалентних відносно дії циклічної групи порядку n) діаграм з класу $\Im_{n-3;2}^{n,1}$ можна обчислити за формулою*

$$t^*(n) = \frac{1}{n}\left(\frac{5}{3}(n-1)C_{n+1}^5 + \sum_{j|n,\ j\in\{2;3;4;6\}} \phi(j) \cdot \rho\left(n, \tfrac{n}{j}\right)\right), \tag{6}$$

де: $\phi(q)$ — функція Ейлера; $\forall j \in N : \frac{n}{j} \notin N$ величини $\rho\left(n, \frac{n}{j}\right) \equiv 0$, а $\forall j \in \{2;3;4;6\} : \frac{n}{j} \in N$ величини $\rho\left(n, \frac{n}{j}\right)$ визначаються за допомогою співвідношень

$$\begin{aligned} &\rho\left(n, \tfrac{n}{2}\right) = \frac{n(n-2)(2n-5)}{24}, && \rho\left(n, \tfrac{n}{3}\right) = \frac{n(n-3)}{18}, \\ &\rho\left(n, \tfrac{n}{4}\right) = \frac{n}{4}, && \rho\left(n, \tfrac{n}{6}\right) = \frac{n}{6}. \end{aligned} \tag{7}$$

Доведення. Як було зазначено вище, всі діаграми з класу $\Im_{n-3;2}^{n,1}$ можна поділити на сім характеристичних підкласів — A, B, C, D, E, F і G, типові представники яких зображено на рис. 3 $a), b), c), d), e), f)$ і $g)$ відповідно.

1) Не важко переконатися, що серед діаграм кожного з характеристичних підкласів D, E, F і G немає таких, які самосуміщуються при повороті на певний кут $\omega\left(n, \frac{n}{j}\right) = \frac{2\pi}{j} < 2\pi$.

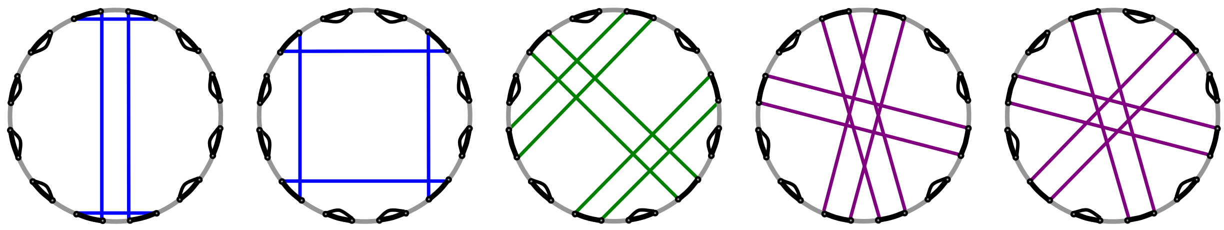


Рис. 8: всі типи діаграм з класу $\Im_{n-3;2}^{n,1}$, які самосуміщуються при повороті на кут $\omega \leqslant \pi$

2) Діаграми з підкласу A самосуміщуються при повороті на певний кут

$$\omega\left(n, \tfrac{n}{j}\right) = \tfrac{2\pi}{j}, \quad j \in \{2, ..., n\} \tag{8}$$

лише за умов, коли n ділиться на 2 або ж на 4. Причому: *в першому випадку* поворот здійснюється на кут кратний куту $\omega = \frac{2\pi}{2}$ (при $j=2$) — рис. 8 a); *в другому випадку* — на кут кратний куту $\omega = \frac{2\pi}{4}$ (при $j=4$) — рис. 8 b). Крім того, не важко перевірити, що:

в першому випадку для $n=2k$ число відповідних діаграм становить C_k^2; звідки для цілих $\frac{n}{2}$ число зазначених діаграм становить $\rho_A\left(n, \frac{n}{2}\right) = C_{n/2}^2$;

в другому випадку для $n=4k$ число відповідних діаграм становить C_k^1; звідки для цілих $\frac{n}{4}$ число зазначених діаграм становить $\rho_A\left(n, \frac{n}{4}\right) = \frac{n}{4}$.

3) Діаграми з підкласу B самосуміщуються при повороті на певний кут (8) лише за умов, коли n ділиться на 2, а поворот здійснюється на кут кратний куту $\omega = \frac{2\pi}{2}$ (при $j=2$) — рис. 8 c).

Для $n=2k \geqslant 6$ число таких діаграм становить $3 \times C_k^3$, або, що теж саме, для цілих $\frac{n}{2} \geqslant 3$ число зазначених діаграм становить $\rho_B\left(n, \frac{n}{2}\right) = 3 \times C_{n/2}^3$.

4) Діаграми з підкласу C самосуміщуються при повороті на певний кут (8) лише за умов, коли n ділиться на 2, 3 або ж на 6. Причому: *в 1-му випадку* поворот здійснюється на кут кратний куту $\omega = \frac{2\pi}{2}$ (при $j=2$) — рис. 8 d); *в 2-му випадку* — на кут кратний куту $\omega = \frac{2\pi}{3}$ (при $j=3$) — рис. 8 e); *в 3-му випадку* — на кут кратний куту $\omega = \frac{2\pi}{6}$ (при $j=6$) — рис. 8 e). Крім того, не важко перевірити, що:

в 1-му випадку для $n=2k$ число відповідних діаграм становить C_k^3; звідки для цілих $\frac{n}{2} \geqslant 3$ число зазначених діаграм становить $\rho_C\left(n, \frac{n}{2}\right) = C_{\frac{n}{2}}^3$;

в 2-му випадку для $n=3k$ число відповідних діаграм становить C_k^2; звідки для цілих $\frac{n}{3} \geqslant 2$ число зазначених діаграм становить $\rho_C\left(n, \frac{n}{3}\right) = C_{n/3}^2$;

в 3-му випадку для $n=6k$ число відповідних діаграм становить C_k^1; звідки для цілих $\frac{n}{6}$ число зазначених діаграм становить $\rho_C\left(n, \frac{n}{6}\right) = \frac{n}{6}$;

5) Таким чином маємо, що: $\rho\left(n, \frac{n}{6}\right) = \rho_C\left(n, \frac{n}{6}\right) = \frac{n}{6}$;
$\rho\left(n, \frac{n}{4}\right) = \rho_A\left(n, \frac{n}{4}\right) = \frac{n}{4}$; $\rho\left(n, \frac{n}{3}\right) = \rho_C\left(n, \frac{n}{3}\right) = C_{n/3}^2$;

$\rho\left(n,\frac{n}{2}\right)=\rho_A\left(n,\frac{n}{2}\right)+\rho_B\left(n,\frac{n}{2}\right)+\rho_C\left(n,\frac{n}{2}\right)=C^2_{n/2}+4\times C^3_{n/2}=\frac{n(n-2)(2n-5)}{24}$. $\square$

2.4. Число нееквівалентних діаграм з класу $\Im^{n,1}_{n-3;2}$

Застосовуючи лему Бернсайда (див. напр. [2], [11], [12]), не важко встановити, що число $t^{**}(n)$ нееквівалентних (відносно дії діедральної групи) діаграм з класу $\Im^{n,1}_{n-3;2}$ можна визначити за допомогою співвідношення

$$t^{**}_n=\frac{1}{2}\left(t^*(n)+S(n)\right), \tag{9}$$

де $t^*(n)$ — число неізоморфних діаграм з класу $\Im^{n,1}_{n-3;2}$,

$$S(n)=\begin{cases} s_0(n), & n=2m+1\\ \frac{1}{2}(s_1(n)+s_2(n)), & n=2m,\end{cases} \tag{10}$$

$s_0(n)$ – число тих діаграм з класу $\Im^{n,1}_{n-3;2}$, що є симетричними відносно **фіксованої осі симетрії**, яка проходить через середини протилежних чорної та сірої дуг 2-кольорового $2n$-шаблону;
$s_1(n)$ ($s_2(n)$) — число тих діаграм з класу $\Im^{n,1}_{n-3;2}$, що є симетричними відносно **фіксованої осі симетрії**, яка проходить через середини протилежних сірих (відповідно чорних) дуг 2-кольорового $2n$-шаблону.

Лема 1. *Нехай $n=2m+1$. Тоді число $s_0(n)$ діаграм з класу $\Im^{n,1}_{n-3;2}$, що є симетричними відносно фіксованої осі симетрії, яка проходить через середини протилежних чорної та сірої дуг 2-кольорового $2n$-шаблону, можна обчислити за формулою.*

$$s_0(n)=\frac{1}{12}(n-1)(n-3)(n+4). \tag{11}$$

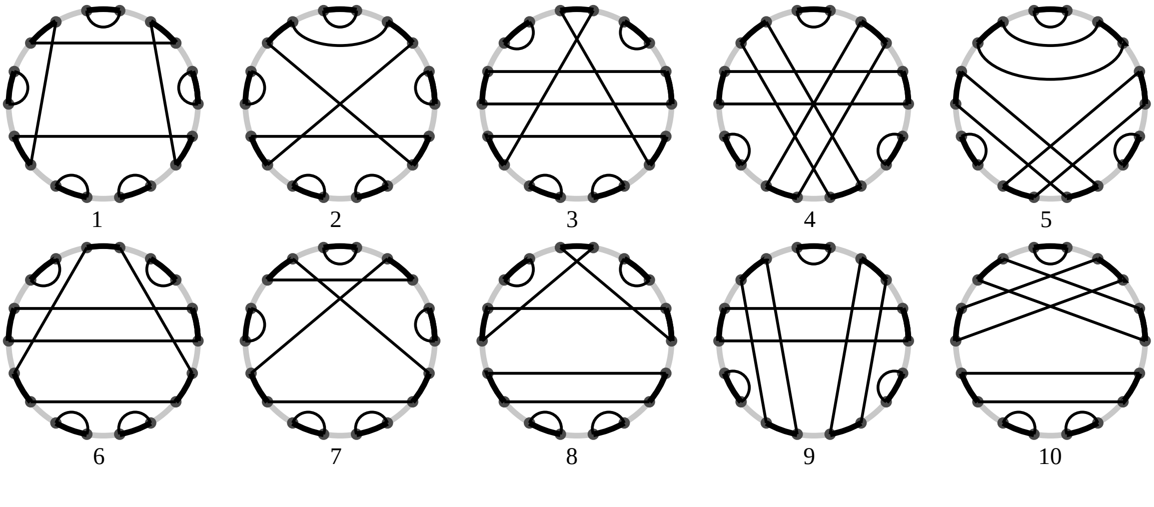


Рис. 9: до леми 1

Доведення. Всі діаграми з класу $\Im_{n-3;2}^{n,1}$, що є симетричними відносно фіксованої осі симетрії, яка проходить через середини протилежних чорної та сірої дуг 2-кольорового $2n$-шаблону ($n=2m+1$), вичерпуються діаграмами десяти типів, зображених та занумерованих числами від 1 до 10 на рис. 9.

Оскільки $n=2m+1$, то *сумарне* число $s_0(n)$ діаграм зазначених типів становить

$6\times C_{\frac{n-1}{2}}^2+4\times C_{\frac{n-1}{2}}^3=6\times C_m^2+4\times C_m^3=\frac{1}{3}m(m-1)(2m+5)$,

звідки, з урахуванням рівності $m=\frac{n-1}{2}$, одержуємо, що

$s_0(2m+1)=s_0(n)=\frac{1}{12}(n-1)(n-3)(n+4)$. □

Лема 2. *Нехай $n=2m$. Тоді мають місце рівності*

$$s_1(n)=\frac{1}{24}n(n-2)(2n+1),\quad s_2(n)=\frac{1}{24}(n-2)(2n^2+13n-72); \qquad (12)$$

$$\frac{1}{2}\left(s_1(n)+s_2(n)\right)=\frac{1}{24}(n-2)(2n^2+7n-36). \qquad (13)$$

Доведення. Всі діаграми з класу $\Im_{n-3;2}^{n,1}$, що є симетричними відносно фіксованої осі симетрії, яка проходить через середини протилежних сірих дуг 2-кольорового $2n$-шаблону ($n=2m$), вичерпуються діаграмами семи типів, зображених та занумерованих числами від 1 до 7 на рис. 10.

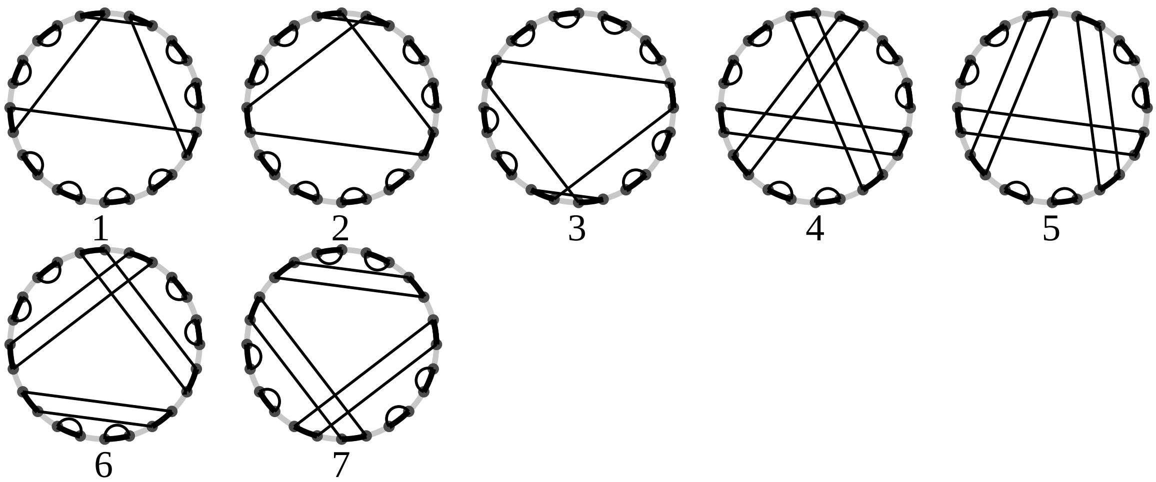


Рис. 10: до леми 2

Оскільки $n=2m$, то *сумарне* число $s_1(n)$ діаграм зазначених типів становить

$3\times C_{\frac{n}{2}}^2+4\times C_{\frac{n}{2}}^3=3\times C_m^2+4\times C_m^3=\frac{1}{6}m(m-1)(4m+1)$,

звідки, з урахуванням рівності $m=\frac{n}{2}$, одержуємо, що

$s_1(2m)=s_1(n)=\frac{1}{24}n(n-2)(2n+1)$.

Діаграми з класу $\Im_{n-3;2}^{n,1}$, що є симетричними відносно фіксованої осі симетрії, яка проходить через середини протилежних чорних дуг 2-кольорового $2n$-шаблону, вичерпуються діаграмами шістнадцяти типів, зображених та занумерованих числами від 1 до 16 на рис. 11.

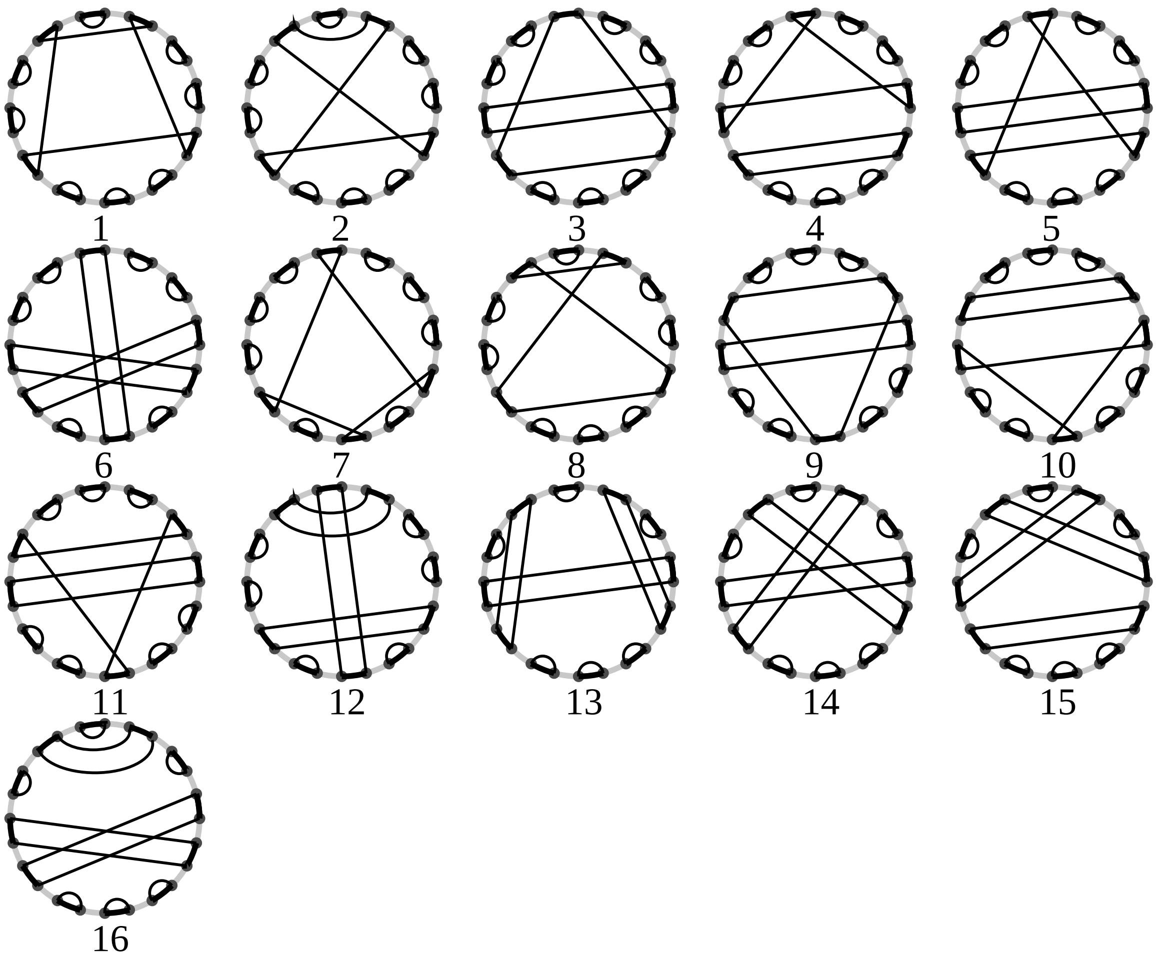


Рис. 11: до леми 2

Оскільки $n = 2m$, то *сумарне* число $s_2(n)$ діаграм зазначених типів становить

$$1 \times C^1_{\frac{n-2}{2}} + 11 \times C^2_{\frac{n-2}{2}} + 4 \times C^3_{\frac{n-2}{2}} = 1 \times C^1_{m-1} + 11 \times C^2_{m-1} + 4 \times C^3_{m-1} =$$
$$= \frac{1}{6}(m-1)(4m^2 + 13m - 36),$$

звідки, з урахуванням рівності $m = \frac{n}{2}$, одержуємо, що

$$s_2(2m) = s_2(n) = \frac{1}{24}(n-2)(2n^2 + 13n - 72).$$

Крім того, безпосередньою перевіркою не важко переконатися, що $\frac{1}{2}\left(s_1(n) + s_2(n)\right) = \frac{1}{24}(n-2)(2n^2 + 7n - 36).$ □

З урахуванням співвідношень (9), (10) та лем 1 і 2, має місце

Теорема 2. *Для натуральних $n \geqslant 4$ число $t^{**}(n)$ нееквівалентних (відносно дії діедральної групи) діаграм з класу $\Im^{n,1}_{n-3;2}$ можна обчислити за формулою*

$$t^{**}(n) = \frac{1}{2}\left(t^*(n) + S(n)\right), \tag{14}$$

де $t^*(n)$ визначається за формулами (6), (7), а

$$S(n) = \begin{cases} \frac{1}{12}(n-1)(n-3)(n+4), & n = 2m+1 \\ \frac{1}{24}(n-2)(2n^2+7n-36), & n = 2m. \end{cases} \tag{15}$$

3. Додатки та прикінцеві зауваження

Повторюючи міркування, аналогічні наведеним в роботі [5], не важко встановити справедливість наступного твердження

Твердження 1. *При $n \to \infty$ величини $t^{**}(n)$ та $\frac{t(n)}{2n} = \frac{(n+1)\cdot(n-1)^2\cdot(n-2)\cdot(n-3)}{144}$ є еквівалентними нескінченно великими величинами.*

n	$t(n)$	$t^*(n)$	$S(n)$	$t^{**}(n)$	$\overline{t^{**}(n)} = \left[\frac{t(n)}{2n}\right]$
4	5	2	2	2	0
5	40	8	6	7	4
6	175	31	13	22	14
7	560	80	22	51	40
8	1 470	187	37	112	91
9	3 360	374	52	213	186
10	6 930	698	78	388	346
11	13 200	1 200	100	650	600
12	23 595	1 976	140	1 058	983
13	40 040	3 080	170	1 625	1 540
14	65 065	4 659	227	2 443	2 323
15	101 920	6 796	266	3 531	3 397
16	154 700	9 685	343	5 014	4 834
17	228 480	13 440	392	6 916	6 720
18	329 460	18 326	492	9 409	9 151
19	465 120	24 480	552	12 516	12 240
20	644 385	32 246	678	16 462	16 109
21	877 800	41 802	750	21 276	20 900
22	1 177 715	53 565	905	27 235	26 766
23	1 558 480	67 760	990	34 375	33 880
24	2 036 650	84 903	1 177	43 040	42 430

Табл. 1: початкові значення величин $t(n)$, $t^*(n)$ та $t^{**}(n)$

Нижче (на рис. 12 та 13) в явному вигляді наведено всі неізоморфні діаграми з класу $\Im^{7,1}_{4;2}$.

Не важко перевірити, що серед 80 неізоморфних діаграм з класу $\Im^{7,1}_{4;2}$ є 29 пар еквівалентних діаграм. І тому $t^{**}(7) = 80 - 2\cdot 29 + 29 = 51$.

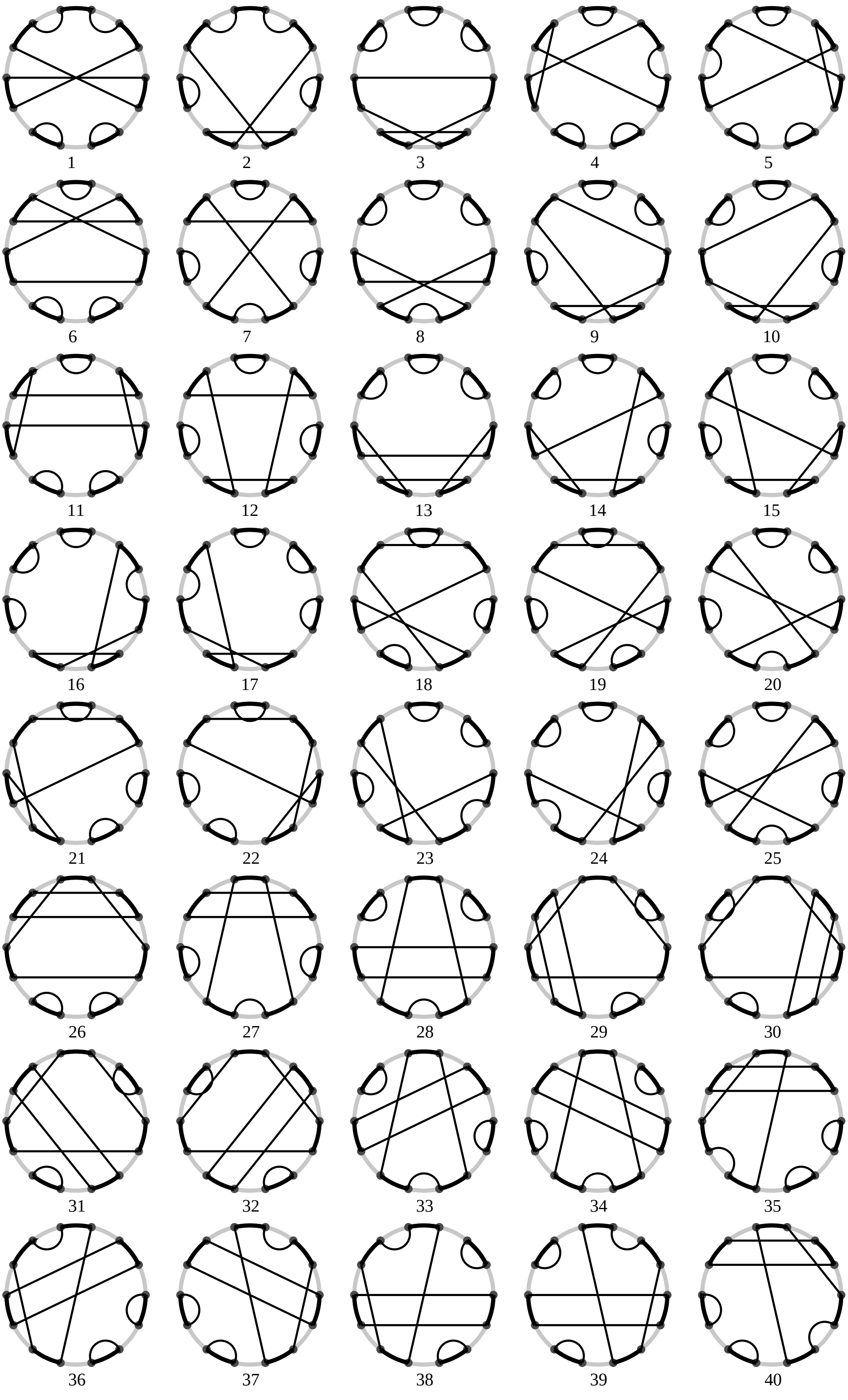


Рис. 12: «перші» 40 із 80 неізоморфних діаграм з класу $\Im^{7,1}_{4;2}$

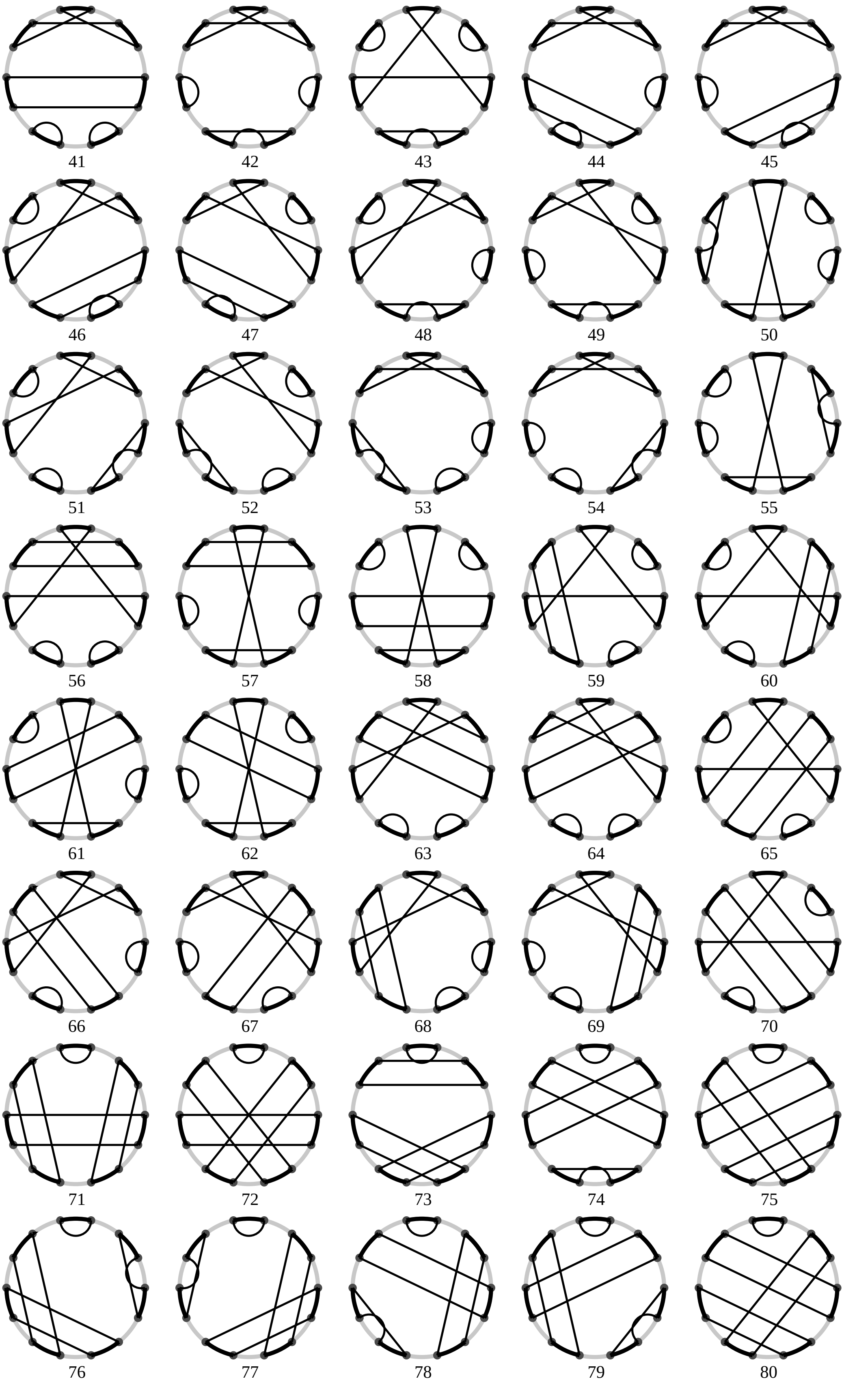


Рис. 13: «останні» 40 із 80 неізоморфних діаграм з класу $\Im_{4;2}^{7,1}$

Література

1. *Callan D., Smiley L.* Noncrossing partitions under reflection and rotation; preprint, arXiv:math/0510447 [math.CO], 2000.
2. *Cori R.* Counting non-isomorphic chord diagrams / R. Cori, M. Marcus // Theoretical Computer Science. — 1998. — Vol. 204. — P. 55–73.
3. *Chapuy G.* A new combinatorial identity for unicellular maps, via a direct bijective approach / G. Chapuy // Advances in Applied Mathematics. — 2011. — Vol. 47, No. 4. — P. 874–893.
4. *Goupil A.* Factoring n-cycles and counting maps of given genus / A. Goupil, G. Schaeffer // European Journal of Combinatorics. — 1998. — Vol. 19, No. 7. — P. 819–834.
5. *Khruzin A.* Enumeration of chord diagrams; preprint, arXiv:math/0008209 [math.CO], 1998.
6. *Krasko E.* Counting Unlabelled Chord Diagrams of Maximal Genus; preprint, arXiv:1709.00796 [math.CO], 2017.
7. *Li B.* Exact number of chord diagrams and an estimation of the number of spine diagrams of order n / B. Li, H. Sun // Chinese Science Bulletin. — 1997. — Vol. 42, No. 9. — P. 705–720.
8. *Stoimenov A.* Enumeration of chord diagrams and an upper bound for Vassiliev invariants / A. Stoimenov // Journal of Knot and its Ramifications. — 1998. — Vol. 7, No. 1. — P. 93–114.
9. *Адрианов Н.М.* Аналог формулы Харера-Цагира для одноклеточных двукрашенных карт / Н.М. Адрианов // Функциональный анализ и его приложения. — 1997. — Том 31, № 3. — С. 1–9.
10. *Кадубовський О.* Про один клас хордових діаграм максимального роду / О. Кадубовський // Вісник Київського університету Серія: фізико-математичні науки. — 2006. — Вип. 1. — С. 17–27.
11. *Кадубовський О.А.* Двокольорові O- і N-діаграми / О.А. Кадубовський, О.В. Сторожилова, Н.В. Сторожилова // Пошуки і знахідки. Серія: фізико-математичні науки. — 2010. — Том I, Вип. 10. — С. 41–50.
12. *Кадубовський О.А.* Двокольорові O-діаграми з одним чорним циклом / О.А. Кадубовський, Ю.С. Саприкіна, С.Ю. Мазур // Пошуки і знахідки. Серія: фізико-математичні науки. — 2010. — Том I, Вип. 10. — С. 51–60.
13. *Кадубовский А.А.* Двухцветные хордовые N-диаграммы с одним черным циклом // Труды института прикладной математики и механики НАН Украины. — 2012. — Том 24. — С. 134–146.
14. *Кадубовский А.А.* О числе топологически неэквивалентных функций с одной вырожденной критической точкой типа седло на двумерной сфе-

ре, II / А.А. Кадубовский / Труды международного геометрического центра. — 2015. — Том 8, № 1. — С. 46–61.

15. *Кадубовський О.А.* Перерахування топологічно нееквівалентних гладких мінімальних функцій на замкнених поверхнях // Топологія відображень маловимірних многовидів : Збірник праць Інституту математики НАН України. — 2015. — Том 12, № 6. — С. 105–145.
16. *Кадубовський О.А.* Перерахування двокольорових хордових О-діаграм роду 1, які мають один чорний (або сірий) цикл, відносно дії циклічної та діедральної груп / О.А. Кадубовський, Н.П. Баляса // Зб. наук. праць фізико-математичного факультету ДДПУ. — 2016. — Вип. 6. — С. 31–46.
17. *Калініченко Я. В., Кадубовський О. А.* Про число неізоморфних двокольорових хордових діаграм роду один з двома циклами певного кольору // Зб. наукових праць міжнародної науково-методичної конференції «Сучасна освіта та інтеграційні процеси», 22–23 листопада 2017 р., Краматорськ, Україна. — Краматорськ : ДДМА, 2017. — С. 80–82. — 246 с.
18. *Калініченко Я. В., Кадубовський О. А.* Про число нееквівалентних двокольорових хордових діаграм роду один з двома циклами певного кольору // XIII Всеукраїнська студентська наукова конференція «Перспективи розвитку точних наук, економіки та методики їх викладання», 26 – 27 квітня 2018 р., Ніжин, Україна: Тези доповідей. — Ніжин : Навчально-науковий інститут точних наук і економіки Ніжинського державного університету імені Миколи Гоголя, 2018. — С. 26–30. — 219 с.

Kadubovs'kyi Oleksandr A., Kalinichenko Yaroslav V.
Donbas State Pedagogical University, Sloviansk, Ukraine.

Enumeration of 2-color chord O-diagrams of the genus one that have two grey (or black) faces under rotation and reflection

In this paper we consider 2-color chord O-diagrams (of order n) with two grey and $(n-3)$ black faces under the action of (i) the rotation group (cyclic of the order n) and of (ii) the rotation/reflection group (dihedral of the order $2n$).

For natural $4 \leqslant n \leqslant 7$ we have illustrated all non-isomorphic and non-equivalent of such diagrams. We have established explicit formulas for counting the number of non-isomorphic and non-equivalent diagrams from the specified class. In addition, for natural $4 \leqslant n \leqslant 24$ we have also listed the exact value of the number of non-isomorphic and non-equivalent such diagrams accordingly.

Keywords: *2-color chord O-diagrams, genus of a diagram, faces of a diagram, cyclic and dihedral groups.*

УДК 519.11

Рябухо О.М., Турка Т.В.

[1] *канд. фізико-математичних наук, доцент, «КДМТУ»*

[2] *канд. фізико-математичних наук, доцент, ДВНЗ «ДДПУ»*

e-mail: tvturka@gmail.com

ЗАСТОСУВАННЯ ГРУП ПІДСТАНОВОК ДЛЯ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ НА ПЕРЕЛІК

Представлені задачі на перелік, які розв'язані за допомогою груп підстановок. Обчислювалася кількість орбіт деякої індукованої групи підстановок. Число орбіт індукованої групи підстановок можна знаходити за цикловим індексом вихідної групи підстановок.

Ключові слова: *цикловий індекс, задачі на перелік, група підстановок, індукована група, орбіта, вагова функція.* .

Вступ

Задачі на перелік виникають у різних розділах математики в зв'язку з обчисленням кількості можливих варіантів виконання тієї чи іншої дії, знаходженням кількості об'єктів, що мають певні властивості. Застосування теорії груп для розв'язування задач на перелік зумовлене можливістю знаходження розв'язків без детального аналізу даної математичної моделі. Одержані результати можна автоматично поширювати на цілий клас моделей, об'єднаних за певною груповою ознакою. Раціоналізм, властивий математиці, в теорії груп значно підвищується, образно кажучи, підноситься до квадрату. Метод Пойя в теорії переліку — це метод переліку орбіт груп підстановок, який використовує їх циклові індекси. Цей метод ґрунтується на досить простому твердженні про число орбіт групи підстановок, яке в тій чи іншій формі зустрічається в роботах О.Коші, Г.Фробеніуса, В.Бернсайда.

Цикловий індекс групи підстановок.

Нехай A – група підстановок з множиною об'єктів $X = \{1, 2, \ldots, n\}$. Для кожного $k = 1, 2, \ldots, n$ через $j_k(\alpha)$ позначимо число циклів довжини k у розміщенні підстановок α у добуток непересічних циклів. Тоді цикловий індекс групи A, який позначаємо $Z(A)$, представляє собою многочлен від змінних $s_1, s_2, ..., s_n$, визначених формулою

$$Z(A) = |A|^{-1} \sum_{\alpha \in A} \sum_{k=1}^{n} s_k^{j_{k(\alpha)}}.$$

Таким чином, цикловий індекс симетричної групи задається формулою

$$Z\left(S_n\right) = \left(\frac{1}{n!}\right) \sum_j h\left(j\right) \prod_{k=1} S_k^{j_k}.$$

Нехай A_n – знакозмінна група, яка складається з усіх парних підстановок групи S_n. Тоді

$$Z\left(A_n\right) = \frac{1}{3} \cdot \left(S_1^3 + 2S_3\right)$$

Цикловий індекс симетричної групи задовольняє рекурсивному співвідношенню

$$Z\left(S_n\right) = n^{-1} \sum_{k=1}^{n} S_k Z\left(S_{n-k}\right).$$

Циклічна група степеня n, яку позначають C_n, породжена циклом $(1\,2\,3\,\ldots n)$, має цикловий індекс:

$$Z\left(C_n\right) = n^{-1} \sum_{k=1}^{n} \phi\left(k\right) S_k^{\frac{n}{k}},$$

де ϕ – функція Ейлера.

Цикловий індекс діедральної групи $n-$ порядку D_n, породженої циклом $(1\,2\,3\,\ldots n)$ і відображенням $(1n)\left(2\left(n-1\right)\right)\left(3\left(n-2\right)\right)\ldots$ може бути виражений через $Z\left(C_n\right)$.

$$Z\left(D_n\right) = \frac{1}{2} Z\left(C_n\right) + \left\{ \begin{array}{ll} \frac{1}{2} \cdot S_1 S_2^{\frac{(n-1)}{2}}, & n - \text{не парне}, \\ \frac{1}{4} \cdot \left(S_2^{\frac{n}{2}} + S_1^2 S_2^{\frac{(n-2)}{2}}\right), & n - \text{парне}. \end{array} \right\}$$

Цикловий індекс одиничної групи E_n, що діє на множині із n об'єктів:

$$Z\left(E_n\right) = S_1^n.$$

Цикловий індекс не визначає однозначно групу підстановок. А саме, дві групи підстановок A і B не обов'язково ідентичні, якщо їх циклові індекси однакові. У дійсності вони можуть бути навіть не ізоморфними і хоча мають однаковий цикловий індекс.

Означення 1. Дві групи підстановок комбінаторно еквівалентні тоді і тільки тоді, коли вони мають однакові циклові індекси.

Теорема 1. *Цикловий індекс добутку дорівнює добутку циклових індексів груп — співмножників.*

$$Z\left(AB\right) = Z\left(A\right) \cdot Z\left(B\right).$$

Група повного графу K_n з n вершинами дорівнює S_n. Крім того, граф G, компонентами якого є графи K_n і K_m $(n \neq m)$, має групу $\Gamma(G) = S_n S_m$. Отже, за теоремою 1 отримуємо

$$Z(\Gamma(G)) = Z(S_n) \cdot Z(S_m).$$

Лема Бернсайда

Нехай A – група підстановок з множиною об'єктів $X = \{1, 2, \ldots, n\}$. Тоді елементи x і y із X називаються A – еквівалентними або подібними, якщо існує підстановка α із A така, що $\alpha x = y$. Класичним результатом є ствердження того, що введене відношення є еквівалентність. Класи еквівалентності називаються орбітами, або системами транзитивності групи A.

Для кожного x із X покладемо

$$A(x) = \{\alpha \in A \vee \alpha x = x\}.$$

Множина $A(x)$ називається стабілізатором елемента x. Помічаємо, якщо елементи x і y одній і тій самій орбіті, множини $A(x)$ і $A(y)$ є спряженими підгрупами групи A з чого випливає, що

$$|A(x)| = |A(y)|.$$

Число елементів в орбіті, яка має елемент y, дорівнює індексу стабілізатора елемента y у групі А.

Лема 1. (Бернсайда) *Число $N(A)$ орбіт групи A задається формулою*

$$N(A) = |A|^{-1} \sum_{\alpha \in A} j_1(\alpha),$$

де $j_1(\alpha)$ – число циклів довжини 1 у розкладенні підстановки α в добуток непересічних циклів, з порожнім перетином.

Зауважимо, що число орбіт в точності співпадає з числом способів отримання із графа G різних не помічених кореневих графів. Щоб отримати усі такі графи, треба просто обирати в якості кореня по одній вершині (точці) із кожної орбіти.

Наслідок 1. (обмежена форма леми Бернсайда) *Нехай треба обмежити дію групи A на деяку підмножину Y множини X, де Y — об'єднання яких-небудь орбіт групи A. Позначимо через $\frac{A}{Y}$ множину підстановок визначених на Y і, які отримуються за допомогою обмеження на підмножину Y відповідних підстановок групи A. Для кожної підстановки α з* *групи* A *число елементів в* Y , *нерухомих відносно підстановки* α , *позначимо через* $j_1\left(\frac{\alpha}{Y}\right)$ *маємо*

$$N\left(\frac{A}{Y}\right)=|A|^{-1}\sum_{\alpha\in A}j_1\left(\frac{\alpha}{Y}\right).$$

Наслідок 2. (зважена форма леми Бернсайда) *Нехай* R *— довільне комутативне кільце, яке містить множину всіх раціональних чисел, і* ω *— деяка функція, яка називається ваговою функцією, відображає множину об'єктів* X *групи* A *в кільце* R. *Для кожної орбіти* X_i *позначимо її вагу через* $\omega\left(X_i\right)$ *і визначимо його відношенням* $\omega\left(X_i\right)=\omega\left(x\right)$ *для будь-якого елементу* x *із* X_i.

Сума ваги орбіт групи A *задається формулою*

$$\sum_{i=1}^{m}\omega\left(X_i\right)=|A|^{-1}\sum_{\alpha\in A}\sum_{x=\alpha x}\omega\left(x\right).$$

Застосування теорії груп в теорії переліку

Введемо поняття степеневої групи. Нехай A – група підстановок з множиною об'єктів $X=\{1,2,\ldots,n\}$, і нехай B - скінченна група підстановок з зліченною множиною об'єктів Y , яка має не менше двох елементів. Тоді степенева група, яку позначають B^A, яка має в якості множини об'єктів сукупність Y^X усіх функцій, які діють із X в Y . Підстановками групи B^A є всі впорядковані пари підстановок α із A і β із B , які записуються у вигляді $(\alpha;\beta)$. Образ довільної функції f з Y^X при дії на неї підстановки $(\alpha;\beta)$ задається формулою

$$\left(\left(\alpha;\beta\right)f\right)\left(x\right)=\beta f\left(\alpha x\right)$$

при усіх x із X .

Розглянемо тепер степеневу групу E^A, яка діє на множині Y^X . Нехай $\omega{:}Y\rightarrow\{0,1,2,\ldots\}$ – функція, область значень якої є множина невід'ємних цілих чисел і для якої $\left|\omega^{-1}\left(k\right)\right|<\infty$ при всіх k . Зокрема, для кожного $k=0,1,2,\ldots$ нехай

$$C_k=\left|\omega^{-1}\left(k\right)\right|$$

буде числом «фігур» ваги k .

Тоді про елемент y із Y , для якого $\omega\left(y\right)=k$, говорять що він має вагу k , а функція ω називають ваговою функцією.

Ряд $C\left(x\right)=\sum_{k=0}^{\infty}C_kx^k$ відносно змінної x , який перелічує елементи множини Y у відповідності з їх вагами, називають «перелічувальним рядом для фігур».

Вага функції f з Y^X визначається формулою

$$\omega\left(f\right)=\sum_{x\in X}\omega\left(f\left(x\right)\right).$$

Не важко показати, що функції, які належать одній орбіті степеневої групи E^A, мають однакову вагу. З цього випиває, що вагою $\omega\left(F\right)$ орбіти F групи E^A є вага будь-якої функції f з орбіти F. Так як $\left|\omega^{-1}\left(k\right)\right|<\infty$ для будь-якого $k=0,1,2,\ldots$ то існує скінченне число орбіт кожної ваги. Позначимо через C_k число орбіт ваги k. Маємо ряд

$$C\left(x\right)=\sum_{k=0}^{\infty}C_kx^k.$$

Тепер можемо сформулювати основну теорему, яка виражає ряд $C\left(x\right)$ у термінах циклового індексу $Z\left(A\right)$ і ряд $c\left(x\right)$.

Позначимо $Z\left(A,c\left(x\right)\right)=Z\left(A;c\left(x\right),c\left(x^2\right),c\left(x^3\right),\ldots\right)$.

Теорема 2. (теорема переліку Пойа) *Ряд $C\left(x\right)$, який перелічує функції, отримують за допомогою підстановки в цикловий індекс $Z\left(A\right)$ групи A на місце кожної змінної S_k ряду $c\left(x^k\right)$, який перелічує фігури:*

$$C\left(x\right)=Z\left(A,c\left(x\right)\right).$$

Наслідок 3. *Число орбіт, які визначаються степеневою групою E_m^A, виходить в наслідок підстановки числа m замість кожної змінної в $Z\left(A\right)$:*

$$N\left(E_m^A\right)=Z\left(A,m\right).$$

Нехай N – множина цілих невід'ємних чисел і $N^n=N*N*\ldots*N$ – декартового добутку n копій множини N. Множина об'єктів степеневої групи E^A є множина Y^x і вагова функція $\omega{:}Y\rightarrow N^n$ має ту властивість, що для кожного $z\in N^n$ виконується нерівність $\left|\omega^{-1}\left(z\right)\right|<\infty$. Покомпонентна адитивність в N^n, ваги функцій з Y^X і орбіти, індуцировані групою E^A. Коефіцієнт при $x_1^{r_1}x_2^{r_2}\ldots x_n^{r_n}$ у ряду $c\left(x_1,x_2,\ldots,x_n\right)$, який переліковує фігури, дорівнює за означенням $\left|\omega^{-1}\left(r_1,r_2,\ldots,r_n\right)\right|$. Коефіцієнт при $x_1^{t_1}x_2^{t_2}\ldots x_n^{t_n}$ у ряді $C\left(x_1,x_2,\ldots,x_n\right)$, який перелічує функції, дорівнює числу орбіт ваги $\left(t_1,t_2,\ldots,t_n\right)$. Через $Z\left(A,c\left(x_1,x_2,\ldots,x_n\right)\right)$ позначаємо ряд, який виходить за допомогою підстановки замість кожної змінної S_k в $Z\left(A\right)$ ряду $c\left(x_1^k,x_2^k,\ldots,x_n^k\right)$.

Теорема 3. *Якщо* $c(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *— перелічувальний ряд для фігур множини* Y*, то орбіти функцій в* Y^X*, які визначаються степеневою групою* E^A*, перелічуються у відповідності зі своїми вагами рядом* $C(x_1, x_2, \ldots, x_n)$

$$C(x_1, x_2, \ldots, x_n) = Z(A, c(x_1, x_2, \ldots, x_n)).$$

Приклад 1

Знайдемо перелічувальний ряд для намист з чотирма бусинками і трьома допустимими кольорами. Покладемо $Y = \{a, b, c\}$ і будемо розглядати довільну функцію f з X в Y, як представлення намиста з $\left|f^{-1}(a)\right|$ червоними, $\left|f^{-1}(b)\right|$ білими і $\left|f^{-1}(c)\right|$ блакитними бусинками. Покладемо, $\omega(a) = (0,0)$, $\omega(b) = (1,0)$ і $\omega(c) = (0,1)$, то

$$\omega(f) = \sum_{x \in X} \omega(f(x))$$

і $\omega(f)$ є упорядкованою парою в якій перша координата дорівнює числу білих бусинок, а друга координата – числу блакитних. Число червоних бусинок, звісно, дорівнює в точності різниці між і числом білих і блакитних бусинок. Тепер у відповідності з означенням перелічувальний ряд для фігур є $C(x) = 1 + x_1 + x_2$. Виходить, на основі теореми перелічувальний ряд для намист має вигляд:

$$C(x_1, x_2) = Z(D_4, 1 + x_1 + x_2).$$

Підставивши перелічувальний ряд для фігур в цикловий індекс $Z(D_4)$, отримуємо

$$C(x_1, x_2) = 1 + x_1 + 2x_1^2 + x_1^3 + x_1^4 + x_2 + 2x_2^2 + x_2^3 + x_2^4 + 2x_1x_2+$$

$$+2x_1^2x_2 + x_1^3x_2 + 2x_1x_2^2 + x_1x_2^3 + 2x_1^2x_2^2.$$

Обчислимо суму коефіцієнтів многочлена $C(x_1, x_2)$. Знайдемо значення $Z(D_4, 3)$.

$$Z(D_4) = \frac{1}{8}\left(S_1^4 + 2S_1^2S_2 + 3S_2^2 + 2S_4\right);$$

$$Z(D_4) = \frac{1}{8}\left(3^4 + 2 \cdot 3^3 + 3 \cdot 3^3 + 2 \cdot 3\right) = \frac{84}{4} = 21.$$

Значення $Z(D_4, 3)$ співпадає з сумою коефіцієнтів многочлена $C(x_1, x_2)$.

Приклад 2

Знайдемо число різних конфігурацій, які можна отримати, розміщуючи «заповнений» вузол в кожну з яких-небудь чотирьох вершин куба і «порожній» вузол в кожну із чотирьох інших вершин, якщо конфігурації, які відрізняються тільки розташуванням, тобто одна виходить з іншої за допомогою обертань куба у просторі, не вважаються різними.

Цикловий індекс групи обертів куба, діє на множині S вершин куба, має вигляд:

$$Z\left(S\right)=\frac{1}{24}\left(s_1^8+9s_2^4+8s_3^2s_1^2+6s_4^2\right).$$

Якщо в $Z\left(S\right)$ замість кожної змінної S_r підставити x^2+y^2, то отримаємо многочлен:

$$x^8+x^7y+3x^6y^2+3x^5y^3+7x^4y^4+3x^3y^5+3x^2y^6+xy^7+y^8,$$

в якому коефіцієнт при x^ty^{8-t} перелічує різні можливі конфігурації з t вузлами і $8-t$ вузлами. В нашому прикладі число конфігурацій дорівнює коефіцієнту при x^4y^4 і дорівнює 7.

Сума коефіцієнтів в даному висловлюванні дорівнює 23, що представляє загальне число конфігурацій, коли число вершин обох кольорів не фіксовано. Це перелічування досягається також підстановкою 2 замість кожної змінної S_r в $Z\left(S\right)$.

$$Z\left(S\right)=\frac{1}{24}\left(2^8+9\cdot 2^4+8\cdot 2^4+6\cdot 2^2\right)=\frac{69}{3}=23.$$

Аналогічно, якщо маємо k кольорів, то підставляємо число k замість кожної змінної S_r в $Z\left(S\right)$. Так, при 3 кольорах маємо

$$\frac{1}{24}\left(3^8+9\cdot 3^4+8\cdot 3^4+6\cdot 3^2\right)=333$$

можливих конфігурацій.

Якщо замість $Z\left(S\right)$ кожної змінної S_r підставити $\frac{1}{1-x^2}$, то отримаємо нескінчений ряд

$$1+x+4x^2+7x^3+21x^4+37x^5+\ldots,$$

в якому коефіцієнт при x^t перелічує різні конфігурації, які виникають при розміщенні у вершинах куба цілих невід'ємних чисел з виконанням умови: сума всіх 8 чисел завжди дорівнює t.

Маємо наступні чотири конфігурації.

Якщо $Z(S)$ замість кожної змінної S_{2k} підставити 2, а замість кожної змінної підставити S_{2k+1} підставити 0, то будуть перелічені конфігурації, в яких можна міняти колір будь-якої вершини на протилежний, шляхом підходящого обертання куба. Знаходимо, що це число є

$$\frac{1}{24}\left(0+9\cdot 2^4+0+6\cdot 2^2\right)=7,$$

і, насправді, як легко побачити всі Z показаних вище конфігурацій мають описані властивості. В інших аналогічних випадках відмічений випадок не завжди має місце. Так, для 12 вершин ікосаедра існують 24 різні конфігурації з 6 вершинами кожного кольору і тільки 16 з них переставляють кольори за допомогою обертів.

Приклад 3.

Нехай X – множина, яка складається з усіх шести граней куба, Y - множина двох кольорів: червоного і блакитного. Цикловий індекс групи підстановок куба діє на множині граней:

$$Z(S)=\frac{1}{24}\left(S_1^6+3S_1^2S_2^2+6S_1^2S_4+6S_2^3+8S_3^2\right).$$

Число засобів фарбування може бути отримано шляхом підстановки числа 2замість кожної змінної S_r в $Z(S)$. Отримаємо:

$$Z(S)=\frac{1}{24}\left(2^6+3\cdot 2^4+6\cdot 2^3+6\cdot 2^3+8\cdot 2^2\right)=\frac{1}{24}\left(2^6+2^7+3\cdot 2^4\right)=10.$$

Скільки класів еквівалентності фарбувань дає 4 червоні грані і дві блакитні?

Для цього дамо вагу x червоному і y блакитному. Підставимо в $Z(S)$ замість кожної змінної S_r x^2+y^2. Отримаємо:

$$\frac{1}{24}[(x+y)^6+3(x+y)^2(x^2+y^2)^2+6(x+y)^2(x^4+y^4)^4+6\left(x^2+y^2\right)^3+8\left(x^3+y^3\right)^2].$$

Коефіцієнт при x^4y^2 дорівнює

$$\frac{1}{24}\left(15+9+6+18+0\right)=2.$$

Насправді, існують рівно два класи еквівалентності функції при яких чотири грані пофарбовані у червоний колір і дві – у блакитний. Для повного переліку класів еквівалентності ми легко отримуємо

$$x^6+x^5y+2x^4y^2+2x^3y^3+2x^2y^4+xy^5+y^6.$$

Представлені задачі на перелік розв'язані за одним і тим самим методом: кожного разу ми знаходили за умовами задачі кількість орбіт деякої індукованої групи підстановок. Зауважимо, що в усіх розглянутих прикладах потрібна нам інформація про групу підстановок містилася в цикловому індексі. При цьому можна помітити, що в багатьох випадках шукане число орбіт індукованої групи підстановок можна було знайти формально за цикловим індексом вихідної групи підстановок, підставляючи відповідні числа або вирази замість змінних, що входять до циклового індексу. Розглянутий метод для кожної з розв'язаних задач формулюється й обґрунтовується за допомогою теорії, початок якої було покладено в 1937 р. у роботі видатного математика Д. Пойа. В основі цієї теорії лежать розглянуті нами лема Бернсайда і поняття індукованої групи підстановок.

Література

1. *Redfield J. H.* The Theory of Group-Reduced Distributions // American Journal of Mathematics. — Vol. 49, No. 3 (Jul., 1927). — pp. 433–455.
2. *Polya G.* Kombinatorische Anzahlbestimmungen fur Gruppen, Graphen und chemische Verbindungen. Acta Mathematica, 1937, 68 (1): pp. 145–254.
3. *Сачков В.Н.* Комбинаторные методы дискретной математики / В.Н. Сачков. — М.: Наука, 1977. — 320 с.
4. *Харари Ф.* Перечисление графов: Пер. с англ. — / Ф. Харари, Э. Палмер. — М.: Мир, 1977. — 324 с.

Ryabukho O.M., Turka T.V.

Donbas State Pedagogical University, Sloviansk, Ukraine.

Application of the groups of substances for solving the tasks of enumeration

The tasks of enumeration are presented, which are solved using substitution group. Calculated the number of orbits of some induced group of substitutions. The number of orbits of the induced group of substitutions can be found by the cyclic index of the initial group of substitutions.

Keywords: *cyclic index, task of enumeration, substitution group, induced group, orbit, weight function.*

УДК 519.6

Рябухо О.М., Пащенко З.Д., Стьопкін А.В., Дегтярьов Я.А.

[1] *кандидат фізико-математичних наук, доцент, «КДМТУ»*

[2] *кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри методики навчання математики та методики навчання інформатики, ДВНЗ «ДДПУ»*

[3] *кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри методики навчання математики та методики навчання інформатики, ДВНЗ «ДДПУ»*

[4] *студент фізико-математичного факультету, ДВНЗ «ДДПУ»*

e-mail: rom.olena@gmail.com, pashchenko_zd@i.ua, stepkin.andrey@ukr.net

ГАУСОВІ ЧИСЛА КАРМАЙКЛА

Узагальнене поняття псевдопростого числа на кільце цілих гаусових чисел. Сформульовані вимоги до алгоритму знаходження гаусових чисел Кармайкла.

Ключові слова: *прості числа, псевдопрості числа, гаусові числа, числа Кармайкла.*

Вступ

В середині 70-х років минулого століття відбувся прорив в сучасній криптографії. В 1976 р. в роботі Вайтфілда Діффі та Мартіна Геллмена «Нові напрямки в криптографії» вперше були сформульовані принципи обміну зашифрованою інформацією без обміну таємним ключем. Невдовзі Рон Рівест, Аді Шамір і Леонард Адлеман побудували систему RSA, першу криптосистему з відкритим ключем, стійкість якої базувалась на проблемі факторизації великих простих чисел.

Для перевірки простоти найбільш широко використовуються так звані «ймовірнісні» алгоритми, які майже точно розпізнають прості числа, але мають певний недолік. Після позитивного проходження числом тесту, залишається імовірність того, що воно насправді складене. Такі складені натуральні числа, що мають деякі властивості простих чисел і успішно проходять тести на простоту називають псевдопростими числами. Існування псевдопростих чисел перешкоджає роботі алгоритмів, які використовують ті чи інші властивості простих чисел.

Майже всі відомі тести простоти базуються на наступній теоремі:

Теорема 1. (мала теорема Ферма) *Якщо $n \in N$, просте, то*

$$\forall x < n, \quad x^{n-1} \equiv 1 (mod\, n)$$

Якщо n не є простим, то умови теореми можуть виконуватись, хоча це малоймовірно.

Означення 1. *Якщо n — непарне число, і n не є простим, x ціле число, НСД$(n,x)=1$ і виконуються умови малої теореми Ферма, то n називається псевдопростим числом за основою b.*

Узагальнимо поняття псевдопростого числа на кільце цілих гаусових чисел. Для довільного $z \in Z[i]$ можна визначити множину остач r_i, яка будується таким чином: всі ці залишки знаходяться всередині квадрату, дві вершини якого — т. $(0,0)$ і т. (a,b). Якщо цілі точки попадають на сторони квадрата, то ми включаємо їх в множину, якщо вони попадають на «нижні» сторони квадрата. Кількість остач — a^2+b^2. За допомогою переносу квадрата (множення на гаусове число) можна отримати довільну точку площини, крім точок всередині квадрата.

Множина остач є областю цілості, порядок кожного елемента a^2+b^2. Тому малу теорему Ферма можна узагальнити:

Теорема 2. *Якщо $z \in Z[i]$ — просте в $Z[i]$, то $\forall r \in R(z)$ (множина остач)*

$$r^{a^2+b^2-1} \equiv 1 (mod\, a+bi)$$

Означення 2. *Якщо z — ціле гаусове число, яке не є простим, r — ціле гаусове число і виконуються умови теореми 5, то z називається гаусовим псевдопростим числом за основою r.*

Основна частина

Гаусовим числом Кармайкла називається таке не просте число $z = z_1 + z_2 i \neq 0$, $z_1, z_2 \in \mathbb{Z}$, що

$$(*) \qquad \forall a \in \mathbb{Z}[i] \quad a^{z_1^2+z_2^2-1} \equiv 1 (mod\, z).$$

Зрозуміло, що для перевірки виконання цієї умови достатньо розглянути всі числа a, що $|a| < |z|$, тобто ті, що на комплексній площині належать внутрішній частині кола з центром в початку координат з радіусом $t = |z| = \sqrt{z_1^2+z_2^2}$. Зауважимо, що найменші за модулем гаусові числа $2, 1+i, 1+2i, 2+i$ – прості. Тоді $z \neq 2, 1+i, 1+2i, 2+i \Rightarrow |z| > \sqrt{1^2+2^2} > 2$.

Задача полягає в побудові алгоритму знаходження гаусових чисел Кармайкла та його програмній реалізації, яка повинна містити процедури піднесення комплексного числа до натурального степеня та знаходження остачі від ділення на гаусові числа.

В результаті проведених досліджень були сформульовані вимоги до алгоритму знаходження гаусових чисел Кармайкла.

По-перше, достатньо перевіряти числа z, що знаходяться в першій чверті комплексної площини: $z_1 \geqslant 1, z_2 \geqslant 0$, оскільки всі інші числа мають вигляд $-z$, $\pm iz$ а остачі від ділення на них не змінюються:

$$\forall b = zq + r, |r| < |z| \quad \Rightarrow \quad b = (-z)(-q) + r, \quad b = (\pm zi)(\mp qi) + r.$$

Тобто, якщо $b \equiv 1(mod\, z)$, то $b \equiv 1(mod\ -z)$, $b \equiv 1(mod\ \pm iz)$. Маємо

Твердження 1. *Якщо $z \in \mathbb{Z}$ задовольняє умову (*), то $-z, \pm iz$ задовольняє умову (*).*

По-друге, достатньо розглянути всі гаусові числа a, що належать внутрішній частині вказаного кола і знаходяться в першій чверті комплексної площини: $a = a_1 + a_2 i, 0 < a_1 < t, 0 \leqslant a_2 < t$. Це пов'язано з тим, що решту чисел із інших чвертей ми можемо одержати множенням a на -1, $\pm i$. Тоді, якщо $a^{t^2-1} = a^{z_1^2+z_2^2-1} \equiv 1(mod\, z)$, то $(-a)^{t^2-1} \equiv (-1)^{t^2-1}(mod\, z)$, $(\pm ia)^{t^2-1} \equiv (\pm i)^{t^2-1}(mod\, z)$. Тому числа $-a, \pm ia$ задовольняють умову (*), якщо степінь $t^2 - 1 = z_1^2 + z_2^2 - 1$ ділиться на 4, а це можливо лише коли z_1 і z_2 мають різну парність:

$$t^2 - 1 = (2k_1)^2 + (2k_2 + 1)^2 - 1 = 4k_1^2 + 4k_2^2 + 4k_2 \equiv 0(mod\, 4).$$

Тоді $(-a)^{t^2-1} \equiv 1(mod\, z)$ і $(\pm ia)^{t^2-1} \equiv 1(mod\, z)$. В протилежному випадку числа $-a$, $\pm ia$ цю умову не задовольняють і число $z = z_1 + z_2 i$ не є числом Кармайкла, а, тим більше, не є простим числом. Отже, маємо також наступні твердження.

Твердження 2. *Число $z = z_1 + z_2 i$ може бути числом Кармайкла або простим, якщо z_1 і z_2 мають різну парність.*

Твердження 3. *Число $z = z_1 + z_2 i$ може бути простим або числом Кармайкла, якщо $z_1^2 + z_2^2 \equiv 1(mod\, 4)$.*

По-третє, неповна частка та остача в кільці цілих гаусових чисел визначається не однозначно. Тому умова $b \equiv 1(mod\, z)$ означає, що $b = zq + 1$ або $b = zq_1 + r$, $|r| < |z|$, де $q1 \neq q$, $r = 1 + pz \neq 1$. Проведемо дослідження, для яких p число r буде остачею, конгруентною 1. Зауважимо, що $|r| < |z| \Rightarrow |r|^2 < |z|^2$.

Модуль суми не перевищує різницю модулів: $|r| = |1 + pz| > |pz| - 1$. Так як $|p| \geqslant 1$, $|z| > 2$, то $|pz| > 2 \Rightarrow |pz| - 1 > 1 > 0 \Rightarrow |z| > |r| > |pz| - 1 \Rightarrow$ $\Rightarrow |p| \cdot |z| < |z| + 1 < 2 \cdot |z| \Rightarrow |p| < 2$. Цій умові можуть задовольняти $p = \pm 1, \pm i, \pm(1+i), \pm(1-i)$. Безпосередньою перевіркою перевіряємо можливі значення p в залежності від z.

Нехай $p = \pm 1$. Тоді

$$|1 \pm (z_1 + z_2 i)|^2 < |z|^2 \Rightarrow (1 \pm z_1)^2 + z_2^2 < z_1^2 + z_2^2 \Rightarrow 1 < \mp 2z_1$$

Так як $z_1 \geqslant 1$, то остання нерівність виконується при $p = -1$.

Нехай $p = \pm i$. Тоді

$$|1 \pm i(z_1 + z_2 i)|^2 < |z|^2 \Rightarrow (1 \mp z_2)^2 + z_2^2 < z_1^2 + z_2^2 \Rightarrow 1 < \pm 2z_2.$$

Так як $z_2 > 0$, то остання нерівність виконується при $p = i$.

Нехай $p = \pm(1+i)$. Тоді

$|1 \pm (1+i)(z_1 + z_2 i)|^2 < |z|^2 \Rightarrow (1 \pm (z_1 - z_2))^2 + (z_1 + z_2)^2 < z_1^2 + z_2^2 \Rightarrow$ $\Rightarrow (1 \pm (z_1 - z_2))^{2^2} < -2z_1 \cdot z_2 \leqslant 0$ – суперечність для довільного z.

Нехай $p = \pm(1-i)$. Тоді

$|1 \pm (1-i)(z_1 + z_2 i)|^2 < |z|^2 \Rightarrow (1 \pm (z_1 + z_2))^2 \mp (z_1 - z_2)^2 < z_1^2 + z_2^2 \Rightarrow$ $\Rightarrow (1 \pm (z_1 + z_2))^2 < \pm 2z_1 \cdot z_2$

З останньої нерівності $p \neq -(1-i)$, бо ліворуч додатне, а праворуч від'ємно число: $z_1 \geqslant 1, z_2 \geqslant 0 \Rightarrow -2z_1 z_2 < 0$. Отримаємо умови для z при $p = 1 - i$.

$$\Rightarrow (1 + (z_1 + z_2))^2 < 2z_1 \cdot z_2 \Rightarrow (z_1 + z_2) < 1 + (z_1 + z_2) < \sqrt{2z_1 \cdot z_2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{(z_1 + z_2)}{2} < \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{z_1 \cdot z_2} \leqslant \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{(z_1 + z_2)}{2}.$$

Остання нерівність враховує співвідношення середнього арифметичного та середнього геометричного, а з неї випливає $1 < \frac{1}{\sqrt{2}}$ – суперечність. Тому $p \neq 1 - i \ \ \forall z$.

Підсумовуючи викладене, маємо

Твердження 4. *Якщо число z задовольняє умову $z_1 \geqslant 1$ і $z_2 \geqslant 0$ і $b \equiv 1 (mod\ z)$, то остача від ділення b на z дорівнює $r = 1$, або $r = 1 - z = (1 - z_1) - iz_2$, або $r = 1 + iz = 1 - z_2 + iz_1$.*

Саме результат цього твердження необхідно врахувати при складанні алгоритму програми для знаходження чисел Кармайкла. Це викликано тим, що процедура знаходження частки від ділення використовує функцію «округлити», а тоді остача від ділення може знаходитись за межами першої чверті комплексної площини.

Висновки

Узагальнене поняття псевдопростого числа на кільце цілих гаусових чисел. Сформульовані вимоги до алгоритму знаходження гаусових чисел Кармайкла.

Література

1. *Alford W.R.* There are Infinitely Many Carmichael Numbers / W.R. Alford, A. Granville; C. Pomerance // Annals of Mathematics. — 1994. — №139. — P. 703–722.
2. *Agrawal M.* Primes is in P / M. Agrawal, N. Kayal, N. Saxena // Annals of Mathematics. — 2004. — №160. — P. 781–793.
3. *Василенко О.Н.* Современные способы проверки простоты чисел / О.Н. Василенко // Кибернетический сборник. — 1988. — №25. — С. 162–187.
4. *Василенко О.Н.* Теоретико-числовые алгоритмы в криптографии / О.Н. Василенко. — М.: МЦНМО, 2006. — 336 с.
5. *Дикарев С.С.* Исследование алгоритмов генерации простых чисел / С.С. Дикарев, Е.Н. Рябухо, Т.В. Турка // Молодой ученый, 2015. — №10. — С. 6–9.
6. *Ноден П.* Алгебраическая алгоритмика (с упражнениями и решениями): Пер. с франц. / П. Ноден, К. Китте. — М.: Мир, 1999. — 720 с.
7. *Рябухо О.М.* Дослідження імовірнісних алгоритмів тестування простоти чисел / О.М. Рябухо, Т.В. Турка // Збірник наукових праць фізико-математичного факультету ДДПУ. — 2013. — Випуск 3. — С. 60 – 67.

Ryabukho O.M., Pashchenko Z.D., Stopkin A.V., Dehtiarov Ya. A.
Donbas State Pedagogical University, Sloviansk, Ukraine.

GAUSSIAN CARMICHAEL NUMBER

A generalized notion of a pseudo-prime number on a ring of entire Gaussian numbers. The requirements for the algorithm for finding Carmichael Gaussian numbers are formulated.

Keywords: *prime numbers, pseudo-prime number, Gaussian numbers, Carmichael numbers.*

ФІЗИКА

УДК 539.4

Надточий В.А., Баранюкова И.С.

[1] *доктор физико-математических наук, заведующий кафедры физики, ГВУЗ «ДГПУ»*

[2] *студентка 2 курса (магистратура) физико-математического факультета, ГВУЗ «ДГПУ»*

e-mail: kaffizik@ukr.net

ЦЕНТРЫ РЕКОМБИНАЦИИ НА ПОВЕРХНОСТИ ПОЛУПРОВОДНИКА

Присутствие в полупроводниковом кристалле различных дефектов типа дислокаций, вакансий, малоугловых границ и примесных атомов значительно сокращает время жизни неосновных носителей заряда τ. В данной работе обращено внимание на подобное действие непосредственно самой поверхности, как естественного дефекта кристаллической структуры.

Ключевые слова: *скорость рекомбинации, равновесное состояние, дислокация, дефекты.*

Введение

Измерения τ в состоянии непосредственно после выращивания кристалла, а также в пластически деформированных образцах показали обратно пропорциональную зависимость τ от содержания дислокаций. При условии, что каждая дислокация действует как рекомбинационный центр, скорость рекомбинации R должна быть пропорциональна произведению избыточного количества неосновных носителей Δp над равновесным значением и числу дислокаций на 1 см^2. Необходимо было установить эту связь для поверхности.

Основная часть

Общая тенденция по миниатюризации различных полупроводниковых устройств, переход к нанометровым размерам элементов электронных схем приводит к тому, что определяющую роль в характеристиках приборов играют поверхностные свойства тонких слоев [1]. С поверхностью кристалла связана система дискретных или непрерывно распределенных энергетических уровней, происхождение которых может быть различным. Это могут быть таммовские уровни, возникающие на поверхности в результате обрыва кристаллической решетки и являющиеся следствием нарушения периодичности потенциала, вызванного этим обрывом. Это могут быть также энергетические уровни, связанные с примесями, локализованными на поверхности (аналогично локальным примесным уровням в объеме кристалла), или обусловленные поверхностными дефектами кристаллической решетки [2]. Наконец, поверхностные уровни могут быть связаны с адсорбцией на поверхности молекул окружающего газа. Природа поверхностных уровней должна выясняться в каждом случае для данного кристалла. В тонких образцах, толщина которых сравнима с длиной диффузионного смещения, имеет место, в основном, рекомбинация электронов и дырок на поверхности кристалла. Параметр s - скорость поверхностной рекомбинации впервые был введен Шокли [3] в виде стокового граничного условия

$$j_s = -s\Delta p_s, \tag{1}$$

где j_s — поток электронов и дырок на поверхность, Δp_s — избыточная концентрация неосновных носителей заряда на поверхности. В равновесном состоянии поток дырок, которые подходят к поверхности кристалла n–типа, должен равняться потоку дырок, которые перемещаются в обратном направлении. Но при отклонении от равновесного состояния эти потоки уже не компенсируют друг друга. Нарушение равновесия приводит к появлению направленного потока неравновесных носителей к поверхности. Тогда число дырок, падающих на единичную площадь поверхности за единицу времени равно $\frac{1}{4}(\nu_t p)$, где ν_t — средняя тепловая скорость дырок, p — концентрация дырок. Число дырок, что ушли с поверхности за единицу времени, будет равняться $\frac{1}{4}(r\nu_t p) + g$, где r — вероятность отражения дырки, g — скорость возникновения дырок на единице площади поверхности. В состоянии равновесия имеем соотношение $\frac{1}{4}\nu_t p_0 = \frac{1}{4}r\nu_t p_0 + g_0$ [3], так что

$$g_0 = \frac{1}{4}(1-r)\nu_t p_0. \tag{2}$$

При отсутствии равновесия, но в стационарных условиях аналогично $\frac{1}{4}\nu_t p = \frac{1}{4}r\nu_t p + g$. Отсюда

$$g = \frac{1}{4}(1-r)\nu_t p. \tag{3}$$

Результирующая скорость генерации неравновесных носителей тока у поверхности

$$(g - g_0) = \frac{1}{4}(1-r)\nu_t\Delta p = s\Delta p, \tag{4}$$

где $s = \frac{1}{4}(l-r)\nu_t$, имеет размерность скорости и называется скоростью поверхностной рекомбинации.

Если рассмотреть плоскую поверхность образца, по всему объему которого со скоростью R_g равномерно генерируются неравновесные носители заряда, тогда распределение концентрации избыточных дырок определяется уравнением

$$D\frac{d^2\Delta p}{dx^2} = \frac{\Delta p}{\tau_p} - R_g, \tag{5}$$

где x — расстояние от поверхности до некоторой точки в полупроводнике. Влияние поверхностной рекомбинации учтем через граничное условие при $x = 0$, где справедливо соотношение

$$D\frac{d\Delta p}{dx} = s\Delta p. \tag{6}$$

В качестве второго граничного условия примем, что $\Delta p \to R_g\tau_p$, если $x \to \infty$. Тогда решение, удовлетворяющее уравнению (5), будет иметь вид

$$\Delta p = \Delta p_1 \exp\left(-\frac{x}{L_p}\right) + R_g. \tag{7}$$

Используя граничное условие при $x = 0$, получим

$$-\frac{D\Delta p_1}{L_p} = s(\Delta p_1 + R_g\tau_p), \tag{8}$$

откуда

$$\Delta p_1 = -\frac{sR_g\tau_p^2}{L_p + s\tau_p}, \tag{9}$$

так как $D/L_p = L_p/\tau_p$. Таким образом, имеем

$$\Delta p = R_g\tau_p\left[1 - \frac{s\tau_p \exp\left(-\frac{x}{L_p}\right)}{L_p + s\tau_p}\right]. \tag{10}$$

Уменьшение величины Δp вблизи поверхности, обусловленное поверхностной рекомбинацией, сказывается только на расстояниях не более диффузионной длины L_p от поверхности. Степень уменьшения Δp зависит от соотношения s/ν_p, где ν_p — скорость, равная L_p/τ_p. Если $s >> \nu_p$, то Δp_0 очень мало и уменьшение концентрации избыточных дырок вблизи поверхности будет значительным.

Таким образом, введение дефектов структуры в приповерхностный слой кристаллов может значительно уменьшить время жизни τ и диффузионную длину пробега L_D неравновесных носителей заряда. Для многих полупроводниковых приборов (диодов, транзисторов, твердотельных инжекционных лазеров, оптоэлектронных приборов) эти параметры определяют рабочие характеристики и работоспособность. С другой стороны, контролируя изменение τ и L_D под действием внутренних и внешних факторов, можно исследовать процессы дефектообразования, отклонения электрофизических характеристик в кристаллах от первоначальных значений и явления деградации во времени. Поскольку внешнее действие на кристалл (облучение частицами высоких энергии, легирование примесями, деформация при низких температурах) возбуждает генерацию дефектов в приповерхностных слоях, то в процессе измерений τ и L_D необходимо учитывать влияние самой поверхности, где скорость рекомбинации s может быть значительной и близкой к скорости рекомбинации неравновесных электронов и дырок в приповерхностном слое. Поэтому определение s должно быть сопутствующим процессом при измерениях τ и L_D [4].

Выводы

Введение дефектов в поверхностные слои кристаллов при технологических обработках ухудшает качественные характеристики приборов на их основе. Кроме того, сама поверхность вносит дополнительные изменения в свойства приповерхностных слоев, снижая время жизни неравновесных носителей заряда и диффузионную длину пробега L_D. Поэтому для увеличения процента выхода готовой продукции высокого качества следует удалять приповерхностные дефектные слои химическим травлением и защищать поверхность диэлектрическими покрытиями.

Литература

1. *Снитко О.В. и др.* Проблемы физики поверхности полупроводников / О.В. Снитко, А.В. Саченко, В.Е. Примаченко [и др.]. — К.: Наукова думка. — 1981. — 304 с.
2. *Shockley W.* On the surface states associated with a periodic potential / W. Shockley // Physical Review. — 1939. — Vol. 56, №4. — P. 317–323.
3. *Смит Р.* Полупроводники / Р. Смит. — М.:Мир — 1982. — 560 с.
4. *Уколов А.И.* Распределение дефектов в тонких полупроводниковых пластинах при низкотемпературной деформации / А.И. Уколов, В.А. Надточий, Н.К. Нечволод // ФТВД. — 2013. — Т.23, №4. — С. 83–91.

Nadtochiy Viktor A., Baranyukova Irina S.
Donbas State Pedagogical University, Sloviansk, Ukraine.

Recombination centers on the surface of a semiconductor

The presence of various defects in the semiconductor crystal such as dislocations, vacancies, small-angle boundaries, and impurity atoms significantly reduces the lifetime of minority carriers of charge τ. In this paper attention is drawn to a similar action directly on the surface itself, as a natural defect in the crystal structure.

Keywords: *recombination rate, equilibrium state, dislocation, defects.*

УДК 577.32

Костиков А.П.

доктор физико-математических наук, ГВУЗ «ДГПУ»

e-mail: a.kostikov@hotmail.com

СВЕТОИНДУЦИРОВАННАЯ ДЕЗАКТИВАЦИЯ ФОСФОРЕСЦЕНЦИИ ТРИПТОФАНА, РОЛЬ КАРБОНИЛЬНОЙ ГРУППЫ В МЕХАНИЗМЕ ЭТОГО ЯВЛЕНИЯ.

Показано, что эффект световой дезактивации фосфоресценции триптофана и его аналогов связан с наличием в молекуле карбонильной группы. Эффект отсутствует для индола, но появляется у производных индола, имеющих в своем составе фрагменты с $C = O$, либо при добавлении в раствор индола молекул, не являющихся хромофорами, но содержащими группу $C = O$. Предполагается, что за эффект ответственны нефосфоресцентные эксиплексы индольного кольца с карбонильной группой.

Ключевые слова: *фотофизика триптофана, триплетное возбужденное состояние, Т-Т переходы, световая дезактивация триплетного состояния.*

Введение

В наших работах [1-2] эффект обратимого фототушения фосфоресценции при действии света в области полосы триплет-триплетного (Т-Т) поглощения был обнаружен и исследован для триптофана в водно-этиленгликолевом стекле при 77К. Было показано, что спектр действия эффекта в области 350-500 нм совпадает со спектром (Т-Т) поглощения. В настоящей работе эффект тушения фосфоресценции исследован для растворов индола и его производных при 77К в различных растворителях.

Материалы и методы

В работе использованы L-триптофан, дипептид Gly-D,L-Trp фирмы "Reanal", индол, индолил-3-карбоновая кислота, индолил-3-пропионовая и индолил-3-масляная кислоты фирмы "Реахим". В качестве растворителей использовались хроматографически чистый этанол, особо чистый этиленгликоль и дважды дистиллированная вода. В качестве соединений, содержащих карбонильную группу, использованы хроматографически чистый ацетон и особо чистая уксусная кислота. Для изменения pH растворов применяли химически чистые HCl и NaOH. Дополнительной очистки препаратов не производили. Измерения проводили на фосфороскопической установке, управляемой ЭВМ и описанной в работе [1], в одинаковых для всех образцов условиях. Растворы помещали в кварцевую трубку с внутренним диаметром 2 мм и замораживали. В случае измерения эффекта для индола в этаноле с введением в раствор уксусной кислоты или ацетона измерения проводились в тонком слое на кварцевой подложке. Во всех случаях оптическая плотность образца не превосходила 0,2.

Образец, помещенный в кварцевый криостат с жидким азотом, облучали светом с $\lambda = 280$ нм, переводящим молекулу в синглетное возбужденное состояние с последующей интеркомбинационной конверсией в нижнее триплетное состояние (T_1), из которого молекула может перейти в исходное основное состояние с излучением фосфоресценции. Одновременно через вращающийся диск с вырезанным сектором образец облучали светом с $\lambda > 370$ нм, соответствующим спектру триплет-триплетного ($T_1 \to T_2$)-поглощения. Фосфоресцению регистрировали в промежутки времени, когда свет с $\lambda > 370$ нм не попадал на образец.

Результаты и обсуждение

В работе [1] нами было обнаружено уменьшение стационарной заселенности фосфоресцентного T_1 - состояния триптофана в застеклованном водно-этиленгликолевом растворе (77К) при действии света в области триплет-триплетного ($T_1 \to T_2$)-поглощения. Эффект характеризовали степенью тушения фосфоресценции $\delta = (I - I^*)/I$, где I - стационарная интенсивность фосфоресценции при действии света с $\lambda = 280$ нм, а I^* - стационарная интенсивность фосфоресценции того же образца при одновременном облучении светом с $\lambda = 280$ нм и $\lambda > 370$ нм. В предварительных экспериментах было обнаружено, что эффект световой дезактивации фосфоресцентного состояния не обнаруживается для простейшего аналога триптофана - индола. Поскольку индольное кольцо триптофана собственно и является хромофорным фрагментом триптофана, ответственным за фосфоресценцию, необходимо было выяснить причины, по которым индольное кольцо в одних случаях участвует в процессах световой дезактивиции фосфоресценции, а в других - не может участвовать в таких процессах.

С этой целью мы измеряли значение δ для ряда производных индола в разных матрицах. При этом мы учитывали, что в молекуле триптофана имеются боковая группа в C_3 - положении индольного кольца. В этой боковой группе имеется два фрагмента, способных влиять на фотофизические процессы индольного хромофора. Это группа $-NH_2$ и группа $-COOH$.

Обе эти группы являются ионизируемыми, способными изменяться в растворах с разными значениями pH . Группа $-NH_2$ в щелочном диапазоне pH испытывает обратимую диссоциацию. Равновесное состояние такой диссоциации наблюдается для pK ионизации 9,4: $(-NH_2 + H^+ \Leftrightarrow -NH_3^+)$.

Карбоксильная группа $-COOH$ диссоциирует в кислотном диапазоне pH . Равновесное состояние такой диссоциации наблюдается для pK ионизации 2,8: $(-COOH \Leftrightarrow -COO^- + H^+)$.

Можно было ожидать изменения эффекта в областях pH раствора, соответствующих pK ионизации указанных групп. Оказалось, что в диапазоне значений pH от 1 до 10,4 эффект светового тушения фосфоресценции остается неизменным. Таким образом, наши результаты позволяют заключить, что ионизируемые группы молекулы практически не влияют на эффект светового тушения фосфоресценции триптофана и указывают на существенную роль в этом эффекте фрагмента $C = O$ карбоксильной группы. Этот вывод подтверждается и результатами наших измерений фосфоресценции производных индола с заместителями в C_3 положении индольного кольца: индолил-3-карбоновая кислота ($-COOH$), индолил-3-пропионовая кислота ($-CH_2{-}CH_2{-}COOH$) и индолил-3-масляная кислота ($-CH_2 - CH_2 - CH_2 - COOH$).

Из Таблицы видно, что для индолил-3-пропионовой и индолил-3-масляной кислот эффект светового тушения фосфоресценции наблюдался, причем его эффективность была близка к эффективности эффекта для триптофана.

Мы обнаружили, кроме того, интересный экспериментальный факт – отстутствие заметного эффекта для индолил-3-карбоновой кислоты. В этом соединении, как и в других исследованных производных индола имеется карбоксильная группа с соответствующим карбонильным фрагментом $C = O$. Важное отличие этого производного индола - минимальное расстояние между карбонильным фрагментом и индольным кольцом. При таком расстоянии, как оказалось, взаимодействие электронной π -системы индола с соответствующей системой карбонила отсутствует. На наш взгляд это однозначно свидетельствует о важной роли стерического фактора, т.е. важно не просто сближение фрагментов, но геометрическое расположение этих групп. Для индолил-3-карбоновой кислоты геометрические параметры группы $C = O$ и плоскости индольного кольца не позволяют взаимодействовать их π -системам. Увеличение длины цепочки $-CH_2{-}CH_2{-}$ в других исследованных соединениях приводит к возможности за счет вращения вокруг связей $C - C$ к стерически благоприятному для взаимодействия расположению.

Таблица. Параметр светового тушения фосфоресценции (δ) индола и его производных при 77K.

Образец	Растворитель	δ
Индол	Этанол	<0.01
Индолил-3-карбоновая кислота	Вода-этиленгликоль (1:1)	<0.01
Индолил-3-пропионовая кислота	Вода-этиленгликоль (1:1)	0.14
Индолил-3-масляная кислота	Вода-этиленгликоль (1:1)	0,18
Триптофан	Вода-этиленгликоль (1:1)	0,19
Глицил–Триптофан	Вода-этиленгликоль (1:1)	0.45
Триптофан + Гли $5 * 10^{-3}$	Вода	0,50
Триптофан + Гли $5 * 10^{-2}$	Вода	0,48
Триптофан + Ацетон $5 * 10^{-3}$	Вода	0,64

Интересный результат, хорошо согласующийся с нашей интерпретацией, получен для дипептида Глицил–Триптофан (таблица). Для этого дипептида эффект светового тушения был вдвое больше, чем для Триптофана. В этой молекуле имеется две карбонильные группы $C = O$, способных сближаться с индольным кольцом. Одна из них, группа Глицина, вторая - группа пептидной связи, причем группа $C = O$ пептидной связи сближена с индольным кольцом на расстояние, меньшее, чем для аналогичного фрагмента триптофанового аминокислотного остатка. Возможность такой ориентации пептидной связи подтверждается, например, данными Диллона [5].

В следующей серии измерений мы исследовали влияние на фосфоресценцию индола химических соединений типа ацетона и уксусной кислоты, а также глицина. Влияние акцепторов электрона на фосфоресценцию хромофоров различной природы была показана в работе [4]. Оказалось, что наши данные по измерению зависимости от концентрации ацетона или уксусной кислоты хорошо описываются законом Перрена. Радиус "черных сфер", соответствующий квантовому выходу тушения, равному единице, полученный из наших данных, равен 4.6 Å, т.е. сравним с Ван-дер-Ваальсовским радиусом индола. Это показывает, что за эффект светового тушения фосфоресценции ответственно короткодействующее взаимодействие. Можно говорить о возникновении сильного взаимодействия индольного кольца, возбужденного в высокое триплетное состояние, с карбонильными группами локализованных рядом молекул акцептора электрона. По-видимому, для такого комплекса уместен термин "триплетный эксиплекс". Уместность такого термина основана на важной роли триплетного состояния хромофора и на коротком времени жизни возбужденного комплекса *хромофор-акцептор электрона.*

В водном растворе триптофана при 77 K фосфоресценция не регистрируется из-за образования агрегатов молекул триптофана. Добавление в раствор триптофана других веществ в концентрации на два-три порядка большей, чем концентрация триптофана, приводит к тому, что в возникающих крупных агрегатах молекулы триптофана оказываются "растворенными"в добавленном веществе. Нами были исследованы бинарные водные растворы ($pH6$) триптофана с ацетоном и с глицином. В таких растворах триптофана при 77K наблюдается нормальная фосфоресценция. Эффективность светового тушения фосфоресценции в этих образцах в 2-3 раза выше, чем в растворе триптофана (таблица).

Это, видимо, связано с тем, что каждая молекула триптофана в бинарных растворах при 77K окружена молекулами, содержащими карбонильную группу. В растворе триптофана с ацетоном значение δ больше, чем в растворе с глицином. Это может быть связано с тем, что в сфере эффективного взаимодействия индольного кольца с карбонильной группой располагается больше молекул ацетона, чем молекул глицина.

Увеличение концентрации глицина на порядок не приводит к росту степени тушения (таблица). Это, по-видимому, связано с тем, что при формировании эвтектики, при концентрации глицина $5 \cdot 10^{-3}$ M сфера эффективного взаимодействия индольного ядра триптофана с C=O группами оказывается полностью занятой молекулами глицина. При увеличении концентрации глицина в исходном растворе, их число в сфере взаимодействия при 77 K не изменяется. В водно-этиленгликолевом растворе глицил-триптофана значение δ в 2,5 раза больше, чем в растворе триптофана при pH 6. Это связано с тем, что молекула Гли-Три содержит две карбонильные группы, причем расстояние от C=O группы пептидной связи до индольного ядра близко к такому расстоянию для карбонильной группы триптофана. Раствор Гли-Три был исследован при pH 6. В этом случае за счет электростатических взаимодействий возможно образование комплексов, что также приводит к возрастанию эффекта. Результаты нашей работы с дипептидом Глицил-Триптофан позволило нам предположить [6], а затем в ряде случаев и показать, что в молекулах белков эффект светового тушения фосфоресценции триптофаниловых остаков белка может проявляться с высокой эффективностью. Наблюдение деталей такого эффекта для разных молекул белка фактически означает еще один новый метод исследования фотофизики белков.

Выводы

Результаты, полученные в нашей работе, убедительно свидетельствуют о важной роли карбонильной группы в процессах дезактивации триплетного состояния исследованных молекул. Кроме того, результаты позволяют предположить, что за обратимое световое тушение фосфоресценции триптофана и его аналогов ответственны нефосфоресцентные эксиплексы индольного кольца с карбонильной группой, сближенной с ним на расстояние порядка 4-5Å.

Литература

1. *Львов К.М.* Обратимое снижение интенсивности фосфоресценции триптофана при действии света в области триплетного поглощения при 77K / К.М. Львов, С.В. Кузнецов, А.П. Костиков // Биофизика. — 1993. — Т.38. — С. 568–573.
2. *Львов К.М.* Кинетическая модель обратимого снижения заселенности триплетного состояния триптофана при действии света / К.М. Львов, С.В. Кузнецов, А.П. Костиков // Биофизика. — 1993. — Т.38. — С. 574–579.
3. *Santus R.* Nature, identification and proprtties of intermediates produced by UV exitation of indole derivatives at low and room temperatures / R. Santus, M. Bazin, M. Aubailly // Reviews Chem. Intermediates. — 1980. — V. 3. — P. 231–283.
4. *Скворцов В.И.* Тушение фосфоресценции ароматических молекул через высоковозбужденные триплетные состяния в растворах при 77K акцепторами электронов /В.И. Скворцов, М.В. Алфимов // Доклады АН СССР. — 1982. — Т. 263. — С. 652–655.
5. *Dillon J.* The anaerobic photolysis of tryptophan containing peptides / J. Dillon // Photochem. Photobiol. — 1983. — V. 38. — P. 37–39.
6. *Kostikov A.P.* Light induced deactivation of tryptophan phosphorescence in proteins / A.P. Kostikov // Biophysical Journal. — 2003. — V. 84. — P. 500A.

Kostikov Alexander P.
Donbas State Pedagogical University, Sloviansk, Ukraine.

Light-induced deactivation of tryptophan phosphorescence, the role of the carbonyl group in the mechanism of this phenomenon.

It is shown that the effect of light deactivation of phosphorescence of tryptophan and its analogs is due to the presence of a carbonyl group in the molecule. The effect is absent for indole, but it appear for indole derivatives with $C = O$, or when molecules that are not chromophors but contain the group $C = O$ are added to the indole solution. It is assumed that non-phosphorescent exciplexes of the indole ring with a carbonyl group are responsible for the effect.

Keywords: *photophysics of tryptophan; triplet excited state; T-T transitions; light deactivation of the triplet state.*

УДК 577.32

Костиков А.П.

доктор физико-математических наук, ГВУЗ «ДГПУ»

e-mail: a.kostikov@hotmail.com

СЕНСИБИЛИЗИРОВАННЫЕ ФОТОХИМИЧЕСКИЕ РЕАКЦИИ ТРИПТОФАНА С АЛИФАТИЧЕСКИМИ АМИНОКИСЛОТАМИ.

Исследованы фотохимические продукты, образующиеся в водном растворе триптофана с алифатическими аминокислотами при 77K. Показано, что вклад радикалов триптофана в спектры при больших концентрациях аминокислот отсутствует. Это объясняется сенсибилизированным характером фотореакций, при котором энергия возбуждения триптофана расходуется на диссоциацию молекул окружения без предварительной фотоионизации хромофора. Обсуждается механизм таких фотореакций.

Ключевые слова: *фотофизика, фотохимия, триптофан, аминокислоты, пептиды.*

Введение

В результате работ разных авторов [1] были сформулированы основные представления о механизме образования радикалов аминокислот при действии УФ–излучения. Основой для интерпретации данных по УФ индуцированному образованию радикалов в белках служат эксперименты с модельными системами. В качестве таких моделей, в частности, используются растворы аминокислот и пептидов, содержащие ароматическую аминокислоту, как правило, триптофан. Первичным фотохимическим актом считается фотоионизация триптофана с образованием его катион-радикала и эжектированного электрона. Все остальные продукты образуются в результате взаимодействия указанных первичных фотопродуктов с окружающими молекулами. Однако существуют данные, которые не согласуются с такими представления. В данной работе основное внимание было уделено именно таким результатам. В фотохимии известно представление о сенсибилизированных реакциях, в которых фотосенсибилизатор является посредником фотопревращений соседних молекул, при этом сам сенсибилизатор остается неповрежденным. По нашим предварительным результатам такие механизмы могут происходить и в растворах триптофана с другими аминокислотами. Целью данной работы было выполнить соответствующие эксперименты с использованием методов ЭПР и оптической спектроскопии, найти условия для регистрации продуктов фотосенсибилизированных превращений исследуемых молекул и получить характеристики таких продуктов.

Материалы и методы

В работе использованы *L*-триптофан, глицин и *D*,*L*-аланин фирмы “Reanal”. В качестве растворителей использовались дистиллированная вода и смесь вода-этиленгликоль. Для оптических измерений растворы наносили на кварцевую подложку (толщиной слоя 0,05-0,1 мм), замораживали до 77К и помещали кварцевый оптический криостат с жидким азотом. Для измерения спектров полощения использовали модифицированный спектрометр “Specord UV-VIS”, управляемый измерительно-вычислительным комплексом. Спектры фосфоресценции измеряли с помощью фосфороскопа, аналогичного описанному в [2]. Спектры Электронного Парамагнитного Резонанса (ЭПР) измеряли на 3-см радиоспектрометре отражательного типа. Образцы облучали фокусированным светом ртутной лампы высокого давления ДРШ-1000 через водный фильтр и систему светофильтров, выделяющих нужную спектральную область.

Результаты и обсуждение

На рисунке 1 представлены результаты, демонстрирующие характер изменения спектров поглощения образца в условиях, когда происходит фотоионизация триптофана, т.е. в растворах триптофана без примесей [3, 4]. На рисунке показаны разностные спектры (спектр после облучения *минус* спектр до облучения).

Кривая 1 на рисунке соответствует разности спектров поглощения образца после 60 с облучения светом 270-390 нм и спектра поглощения образца до облучения. Видно, что в результате облучения уменьшается полоса поглощения индольной группы триптофана в области 280 нм и появляются новые полосы поглощения в ближней УФ и видимой областях спектра. Широкая полоса поглощения с максимумом в области 550 нм соответствует поглощению гидратированного электрона [3, 4], а полосы в области 300 - 370 нм катион-радикалам триптофана [3]. Кривая 2 демонстрирует выцветание полосы поглощения гидратированных электронов после облучения образца светом видимого диапазона с $\lambda > 520$ нм. Представленные спектры хорошо согласуются с известными литературными данными о фотоионизации триптофана в щелочных растворах [3].

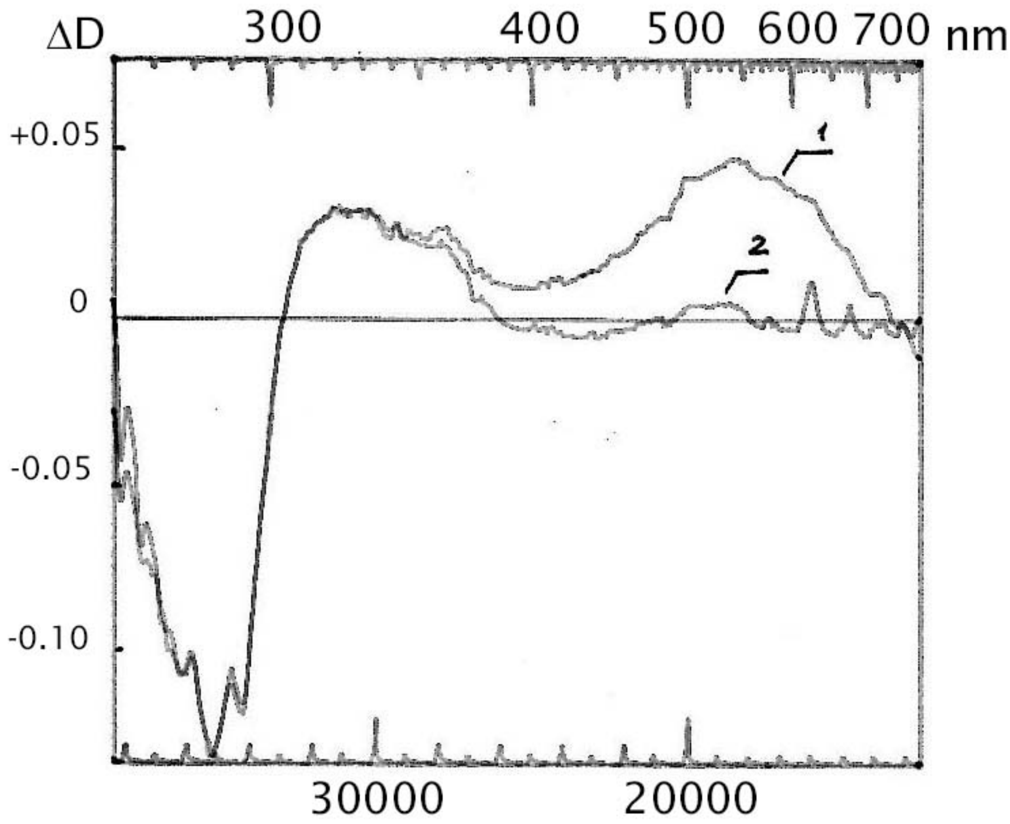


Рис. 1: Изменение спектра поглощения триптофана в стеклообразном растворе (вода-этиленгликоль) после 60 сек облучения УФ светом - кривая 1 и последующего облучения видимым светом - кривая 2. Внизу показаны волновые числа.

На рисунке 2 представлены результаты аналогичного эксперимента с водным щелочным раствором триптофана при 77К. Из-за низких оптических свойств замороженного водного раствора толщину слоя образца в этих экспериментах мы поддерживали не больше 0,1 мм. Результаты, полученные в таких условиях, позволяли уверенно регистрировать уменьшение поглощения триптофана (280 нм) и одновременное появление спектров радикалов триптофана (300 - 370 нм) и гидратированных электронов (широкая полоса с максимумом в области 550 нм).

На рисунке 3 демонстрируются наши результаты работы с образцами в водном растворе триптофана ($10^{-2}M$), содержащим алифатическую аминокислоту, глицин ($2M$). Сравнивая спектры на рис.2 и рис.3 можно видеть, что облучение такого образца УФ светом в диапазоне 270-390 нм привело к появлению в области 360 нм полосы поглощения на фоне широкого поглощения в дальней УФ области. Примечательно, что в области 280 нм не наблюдалось уменьшение поглощения трипофана. Это означает, что индоль-

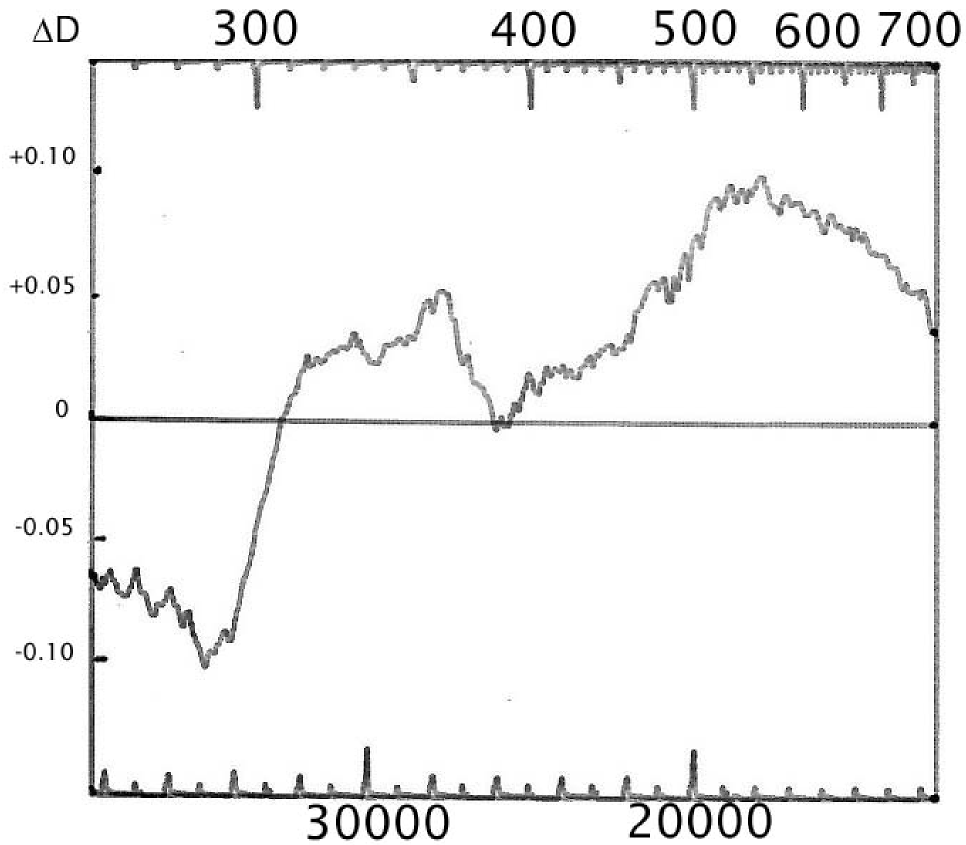


Рис. 2: Изменение спектра поглощения триптофана ($10^{-2}M$) в замороженном водном щелочном растворе после 20 сек облучения УФ светом. Внизу показаны волновые числа.

ная группа триптофана в процессе облучения УФ светом в данном образце не повреждалась. После размораживания образца до комнатной температуры и последующего повторного замораживания спектр поглощения образца полностью восстанавливался.

Увеличение полосы 360 нм по мере облучения полностью коррелировало с тушением фосфоресценции триптофана и накоплением радикалов, регистрируемых методом ЭПР. После досточно длительного облучения (до 20 мин) наблюдалось практически полное тушение фосфоресценции и выход концентрации радикалов на предельный уровень. Отсутствие изменений спектра поглощения индольной группы триптофана при полном тушении его фосфоресценции позволяет сделать вывод о том, что люминесценция тушиться появившимися в окрестности неповрежденной молекулы триптофана радикалами с максимумом поглощения 360 нм. В самом деле, спектр флуоресценции триптофана в водных растворах с глицином имеет максимум излучения около 325 нм [5], хорошо перекрывающийся с обнаруженной нами полосой поглощения радикалов с $\lambda_{max} = 360$ нм. Такое перекрывание обеспечивает высокую

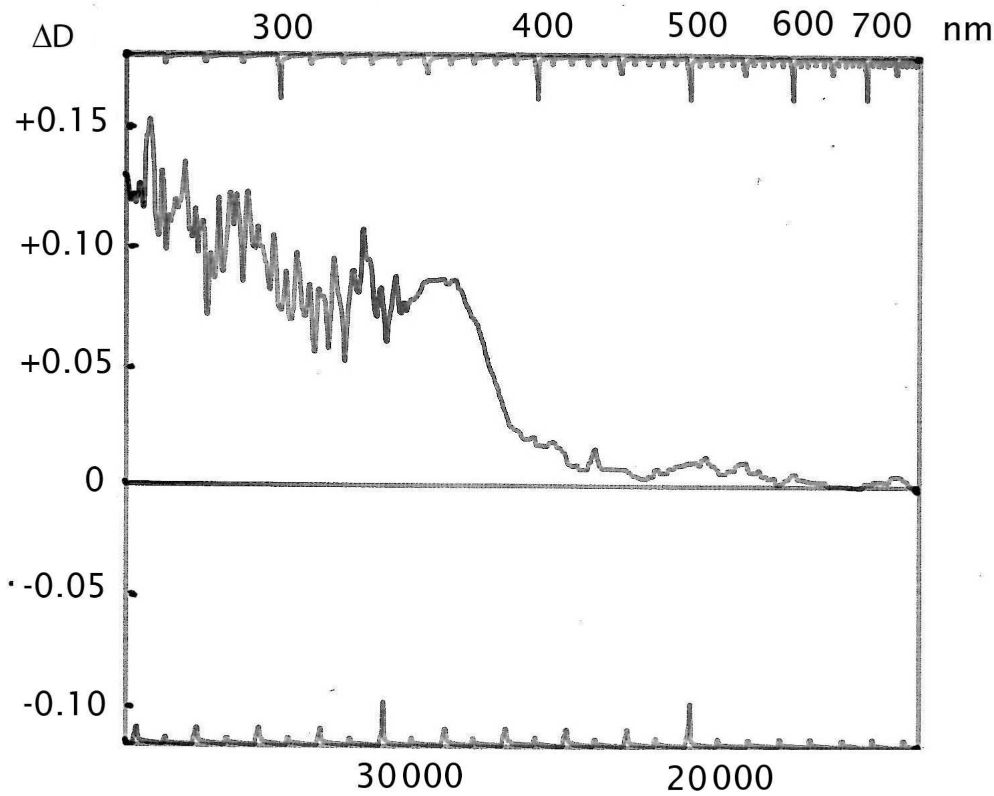


Рис. 3: Изменение спектра поглощения триптофана в замороженном водном растворе триптофана ($10^{-2}M$) с глицином ($2M$) после 100 сек облучения УФ светом. Внизу показаны волновые числа.

эффективность переноса энергии по индуктивно-резонансному механизму:

$$Trp^{*}+R_{360}\rightarrow Trp+R_{360}^{*}$$

с последующей безызлучательной дезактивацией возбужденного состояния радикала R^{360}. Полагая, что:

- все молекулы триптофана в нашем образце окружены молекулами алифатической аминокислоты [5]
- радикалы R^{360} возникают в результате фотохимического акта в эквимолярном с триптофаном количестве,
- каждый продукт R^{360} обеспечивает эффективную дезактивацию синглетного возбужденного состояния молекулы триптофана, в окрестности которой появился этот продукт.

можно оценить коэффициент экстинкции продукта R^{360}:

$$\varepsilon_{360}(R)=\frac{\triangle D_{360}}{D_{280}}\varepsilon_{280}(Trp)\simeq 2500M^{-1}cm^{-1}.$$

Здесь D_{280} – оптическая плотность образца при 280 нм ($D_{280} = 0.27$), $\triangle D_{360}$ - изменение оптической плотности при 360 нм после длительного облучения, приведшего к полному тушению люминесценции триптофана, $\varepsilon_{280}(Trp) = 5600 M^{-1} cm^{-1}$ для триптофана. Сопоставляя наши результаты, полученные методом ЭПР, и полученные при измерении спектров поглощения, можно предположить, что за полосу поглощения 360 нм ответственны радикалы дезаминирования алифатической аминокислоты. Нужно отметить, что полоса с $\lambda_{max} = 360$ нм наблюдалась нами в предварительных экспериментах, при облучении водных замороженных до 77К растворов триптофана с пептидами Ала-Гли и Ала-Гли-Гли. Аналогичную полосу в диапазоне длин волн 310 – 380 нм с коэффициентом экстинкции $\varepsilon = 1000 - 2500 M^{-1} cm^{-1}$ наблюдали авторы [6], которые приписали ее радикалам $CR_1R_2{-}CO{-}NH{-}R$.

Интересно, что спектр, представленный на рис.3 можно было наблюдать только для нейтральных растворов. Если к исследуемому раствору добавляли щелочь ($pH \geqslant 9$), вместо спектра, показанного на рис.3 регистрировались спектральные изменения, представленные на рис.2. Это свидетельствует о том, что происходила только фотоионизация триптофана, при этом гидратированные электроны не реагировали с молекулами алифатической аминокислоты, несмотря на ее очень высокую концентрацию (до 2 М). В спектре ЭПР также наблюдалась только синглетная линия, в которую давали вклад катион-радикалы триптофана и гидратированные электроны. Радикалы дезаминирования или декарбоксилирования алифатической аминокислоты в этих условиях не наблюдались. Если в исследуемый раствор триптофана с алифатической аминокислотой добавлялась кислота или даже соль типа KCl, в спектре электроного поглощение и спектре ЭПР наблюдалась смешанная картина: можно было обнаружить изменение спектра поглощения триптофана и появление спектра ЭПР его катион-радикалов, а также обнаруживалась полоса 360 нм и спектр ЭПР соответствующего продукта.

Таким образом, представленные в этой работе данные позволяют сделать вывод о том, что в щелочной и кислой среде происходит фотоионизация триптофана, а в слабокислых и особенно в нейтральных растворах при 77К может проявляться другой механизм фотоиндуцированного образования радикалов. Детали этого механизма пока не ясны, однако его существенной особенностью является отсутствие каких-либо продуктов повреждения индольного кольца триптофана. Это следует из рис.3 и из отсутствия спектра ЭПР радикалов триптофана. Здесь нужно отметить, что можно говорить об отсутствии спектра ЭПР любых радикалов триптофана, поскольку не только катион-радикал $TrpH^{+}\cdot$ и индолильный радикал $Trp\cdot$, а также и радикалы дезаминирования или декарбоксилирования. боковой группы триптофана должны давать синглетный спектр ЭПР. Но вклада такого спектра нет в обсуждаемых условиях.

Косвенным подтверждением альтернативного фотоионизации механизма фотопроцессов в образцах, содержащих триптофан и алифатическую аминокислоту являются результаты наших работ [2, 7], в которых сообщалось об обнаруженном эффекте обратимого светового тушения фосфоресценции при подсветке триптофана в триплетном возбужденном состоянии вторым источником света в области $T_2 \Leftarrow T_1$ поглощения. Как оказалось, существенную роль в этом эффекте играет карбонильная группа либо самой молекулы триптофана, либо посторонней молекулы с такой же группой, оказавшейся в окрестности триптофана [8]. В частности, в наших экспериментах по наблюдению обратимого светового тушения фосфоресценции в образцах триптофана с глицином, обнаружилось, что для них эффект светового тушения фосфоресценции существенно выше, чем в образцах, не содержащих алифатическую аминокислоту. Нужно заметить, что эффект светового тушения фосфоресценции наблюдается при возбуждении $T_2 \Leftarrow T_1$ переходов. В этих условиях радикалы в образце не появляются. Их появление удается наблюдать, если длина волны излучения второго источника < 313 нм, что соответствует либо переходу на более высокий триплетный уровень молекулы ($T_3 \Leftarrow T_1$), либо возбуждению высоких колебательных подуровней состояния T_2.

Заметим, что особая роль карбонильных групп в обратимом световом тушении фосфоресценции и в фотохимических реакциях представляет большой интерес для понимания генерации и гибели радикалов в белках.

Выводы

Полученные результаты убедительно свидетельствуют о нескольких механизмах фотохимических реакций триптофана с алифатическими аминокислотами. Кроме хорошо изученных реакций фотоионизации триптофана можно наблюдать сенсибилизированное триптофаном образование радикалов аминокислот. Показана важная роль карбонильных групп самого триптофана или соседних алифатических молекул в механизме фотопроцессов с участием триптофана. Обсуждается роль высоких возбужденных триплетных состояний индольного кольца в фотофизических и фотохимических реакциях.

Литература

1. *Каюшин Л.П., Грибова З.П., Азизова О.А.* Электронный парамагнитный резонанс фотопроцессов биологических соединений. — М.: Наука,

1973. — 304 с.

2. *Львов К.М.* Обратимое снижение интенсивности фосфоресценции триптофана при действии света в области триплетного поглощения при 77К / К.М. Львов, С.В. Кузнецов, А.П. Костиков // Биофизика. — 1993. — Т. 38. — С. 568–573.
3. *Hase H.* Electronic spectrum of photoinduced transients in solution of tryptophan at 77K / H. Hase, T. Higashimura, T. Sidei // J. Phys. Soc. Japan. — 1967. — V. 23. — P. 658.
4. *Пикаев А.К.* Сольватированный электрон в радиационной химии. — М.: Наука, 1989. — 457 с.
5. *Ильясова В.Б.* Исследование фотосенсибилизированного разрушения глицина методами электронного парамагнитного резонанса и люминесценции / В.Б. Ильясова, Е.П. Бусел, Э.А. Бурштейн, О.А. Азизова // Биофизика. — 1970. — Т. 15. — С. 265.
6. *Dillon J.* The anaerobic photolysis of tryptophan containing peptides / J. Dillon // Photochem. Photobiol. — 1983. — V. 38. — P. 37–39.
7. *Kostikov A.P.* Light induced deactivation of tryptophan phosphorescence in proteins / A.P. Kostikov // Biophysical Journal. — 2003. — V. 84. — P.500A.
8. *Костиков А.П.* Светоиндуцированная дезактивация фосфоресценции триптофана, роль карбонильной группы в механизме этого явления / А.П. Костиков// Збірник наукових праць фізико-математичного факультету ДДПУ. — 2018. — Випуск 8. — С. 65–70.

Kostikov Alexander P.
Donbas State Pedagogical University, Sloviansk, Ukraine.

Sensibilized photochemical reactions of tryptophane with aliphatic amino acids.

Photochemical products formed in an aqueous solution of tryptophan with aliphatic amino acids at 77K were studied. It is shown that the contribution of tryptophan radicals to the spectra at high concentrations of amino acids is absent. This is explained by the sensitized nature of photoreactions, in which the excitation energy of tryptophan is consumed by the dissociation of surrounding molecules without preliminary photoionization of the chromophore. The mechanism of such photoreactions is discussed.

Keywords: *photophysics; photochemistry; tryptophan; amino acids; peptides.*

ІНФОРМАТИКА ТА МЕТОДИКА ЇЇ ВИКЛАДАННЯ

УДК 519.7

Стёпкин А.В.

[1] *кандидат физико-математических наук, доцент кафедры методики обучения математики и методики обучения информатики, ГВУЗ «ДГПУ»*

e-mail: stepkin.andrey@rambler.ru

Распознавание конечных графов двумя агентами

В работе предложено решение задачи распознавания конечных графов при помощи двух агентов. Один агент-исследователь передвигается по графу, считывает и изменяет метки элементов графа и передает информацию о своих действиях агенту-экспериментатору, который строит представление исследуемого графа. Предложенный алгоритм имеет квадратическую (от числа вершин графа) временную, емкостную и коммуникационную сложности. Для распознавания графа используется две различные краски.

Ключевые слова: *распознавание графов, обход графа, коллектив агентов*

Вступ

Актуальной проблемой математической кибернетики является проблема взаимодействия управляющей и управляемой систем [1,2]. Ранее подобное взаимодействие было рассмотрено в [3,4], в предположении, что оно представлено передвижением агентов-исследователей (АИ) по неизвестному графу и обменом данными с агентом-экспериментатором (АЭ), который и производил распознавание графа по данным, полученным от АИ. Перемещение агента в операционной среде невозможно без построения полной модели выбранной среды. В вопросах такого моделирования определен ряд подходов, одним из которых является топологический. При котором блуждающему агенту доступна информация о связях между различными областями среды и недоступна метрическая и алгоритмическая информация о среде. Зачастую подобная ситуация возникает в роботике [5]. Топологическая модель представляет собой граф, оснащенный дополнительной информацией на ребрах, в вершинах и инциденторах.

Данная работа посвящена решению задачи, в предположении, что взаимодействие управляющей и управляемой систем представляется процессом перемещения одного АИ по конечному неориентированному графу. А суть взаимодействия заключается в обмене данными АИ с АЭ, на основе которого возможно распознавание графа.

Необходимые определения

Рассматриваются конечные, связные, неориентированные графы без петель и кратных ребер. Пусть $G=(V,E)$ — граф, у которого V — множество вершин, E — множество ребер. Ребром будем называть двухэлементное подмножество $\{u,v\}$ множества V, вершины u,v — смежными, а ребро $\{u,v\}$ — инцидентным вершинам u,v. Такое ребро обозначается (u,v) или (v,u). Тройку $((v,u),u)$ будем называть инцидентором [2,3] (точкой соединения) ребра (v,u) и вершины u. Под дальним инцидентором вершины v будем понимать инцидентор $((v,u),u)$, а под ближним — $((v,u),v)$.

Стратегия решения задачи

Предложенный метод распознавания графа основан на стратегии поиска в глубину. Предлагаемый алгоритм обладает рядом особенностей: 1) Граф G агентам не известен; 2) При обходе графа G, агенты создают неявную нумерацию пройденных вершин: при первом посещении вершины она окрашивается агентом в красный цвет и ей фактически ставится в соответствие номер, равный значению переменной *Сч_ А*. На основе построенной нумерации и происходит распознавание графа G путем построения графа H изоморфного G. В процессе обхода агент строит неявное дерево поиска в глубину. Относительно этого дерева все ребра разделяются на древесные (окрашиваются при первом прохождении по ним красным цветом) и обратные (не принадлежат дереву и окрашиваются при первом прохождении в черный цвет). Древесные ребра проходятся как минимум 2 раза и при последнем проходе окрашиваются агентами в черный цвет. Обратные ребра проходятся от одного до двух раз.

Красные вершины графа G, на каждом шаге алгоритма, образуют красный путь. При проходе в новую вершину красный путь удлиняется, при проходе назад — укорачивается, при распознавании обратного ребра — не изменяется. Вершина, у которой все инцидентные ребра распознаны, окрашивается в черный цвет. Алгоритм заканчивает работу, когда красный путь становятся пустым, а все вершины черными.

В работе АИ можно выделить 2 режима:

1) *Обычный режим.* АИ движется вперед по белым вершинам, окрашивая вершины, соединяющие их ребра и дальние инциденторы в красный цвет. Если нет возможных путей перемещения, то АИ возвращается назад, окрашивая пройденные вершины, ребра и ближние инциденторы в черный цвет. Вернувшись в начальную вершину, АИ завершает работу. На каждом шаге АИ обменивается данными с АЭ.

2) *Распознавание обратных ребер.* Если при движении вперед в вершине v было обнаружено обратное ребро, то АИ прекращает работу в обычном режиме и переключается в режим распознавания обратных ребер. АИ красит в красный цвет ближние инциденторы всех обратных ребер инцидентных вершине v. Завершив покраску инциденторов, АИ передвигается назад по своему пути, до обнаружения вершины инцидентной помеченному обратному ребру (под помеченным обратным ребром понимается белое ребро, у которого дальний инцидентор и дальняя вершина окрашены в красный цвет), переходит по этому ребру, окрашивая его в черный цвет. На этом этапе возможны случаи:

2.1) Распознаны не все, помеченные АИ, обратные ребра. В этом случае АИ возвращается назад по пройденному на предыдущем шаге ребру, окрашивая в черный цвет ближний инцидентор, и продолжает движение назад до обнаружения следующего помеченного обратного ребра.

2.2) Распознаны все, помеченные АИ, обратные ребра. В этом случае АИ окрашивает ближний инцидентор ребра, по которому он перешел на предыдущем шаге, в черный цвет и переключается в обычный режим работы.

Распознавание графа.

Работа АЭ представляет собой анализ, в результате которого будет построен граф H, изоморфный распознаваемому графу G с точностью до отметок на графе.

Теорема 1. *Два агента, выполнив предложенный алгоритм распознавания, распознают любой граф* G *с точностью до изоморфизма.*

Для анализа эффективности алгоритма исследуются временная и емкостная сложности [2-4]. Также исследуется коммуникационная сложность [3, 4], которая определяется объемом информации, которой необходимо обменяться агентам для распознавания графа.

Теорема 2. *Временная, емкостная, коммуникационная сложности алгоритма и число переходов АИ по ребрам, равны* $O\left(n^2\right)$ *, где* n *— число вершин графа. Для распознавания достаточно двух красок.*

Выводы

Предложен алгоритм распознавания графа среды временная, емкостная, коммуникационная сложности и число переходов по ребрам которой равны $O\left(n^2\right)$. Агент-исследователь имеет конечную память, независимую от n, и использует 2 краски. Алгоритм имеет меньшую временную сложность, чем известные [2].

Литература

1. *Летичевский А.А.* Математическая теория проектирования вычислительных систем / А.А. Летичевский, Ю.В. Капитонова. — М. : Наука, 1988. — 296 с.
2. *Грунский И.С.* Распознавание конечного графа блуждающим по нему агентом / И.С. Грунский, Е.А. Татаринов // Вестник Донецкого университета. Серия А. Естественные науки. — 2009. — Вып. 1. — С. 492–497.
3. *Стёпкин А.В.* Использование коллектива агентов для распознавания графов / А.В. Стёпкин // Компьютерные исследования и моделирование. — 2013. — Т.5, №4. — С. 525–532.
4. *Stepkin A.* Using a Collective of Agents for Exploration of Undirected Graphs / A. Stepkin // Cybernetics and Systems Analysis. — 2015. — V.51, №2. — PP. 223–233.
5. *Dudek G.* Computational principles of mobile robotics / G. Dudek // Cambridge Univ. press, Cambridge, 2000. — 280 p.

Stepkin A.V.
Donbas State Pedagogical University, Sloviansk, Ukraine.

Graph exploration by two agents.

A solution of the problem of finite graphs exploration by two agents is proposed in this work. One investigating agent moves through the graph, reads and changes the labels of the graph elements, and passes the information about his actions to the agent-experimenter, which constructs the representation of the graph, which study. The proposed algorithm has a quadratic (with respect to the number of nodes of the graph) time, space and communication complexity. For exploring a graph, needs two different colors.

Keywords: *graph exploration, graph traversal, collective of agents.*

УДК 378.147 : 004

Величко В.Є., Федоренко О.Г.

[1] *кандидат фізико-математичних наук, доцент, доцент кафедри МНМ та МНІ, ДВНЗ «ДДПУ»*

[2] *кандидат педагогічних наук, доцент кафедри МНМ та МНІ, ДВНЗ «ДДПУ»*

e-mail: velichko_v@ukr.net

ПІДГОТОВКА МАЙБУТНІХ УЧИТЕЛІВ ІНФОРМАТИКИ У ВІДПОВІДНОСТІ ДО СВІТОВИХ СТАНДАРТІВ

Вимоги до фахівців у сучасному суспільстві постійно зростають, а отже зростають й вимоги до їх підготовки в сучасному університеті. Науково-технічний розвиток суспільства сьогодні потребує широкого впровадження у повсякденну та освітню практику інформаційно-комунікаційних технологій, а також постійного їх оновлення та вдосконалення. Підготовка до існування в інформаційному суспільстві покладена на освіту та на учителів інформатики в особливості, а отже підготовка майбутніх учителів інформатики має відповідати світовим стандартам. Для вирішення останнього необхідно розглянути існуючі світові тенденції стандартизації та побудувати на їх основі відповідні вимоги для підготовки майбутніх учителів інформатики.

Ключові слова: *підготовка вчителів інформатики, нова українська школа, DigCompEdu*

Вступ

Викладання інформатичних дисциплін в українських закладах освіти історично не мало тісного зв'язку із всесвітніми тенденціями стандартизації отриманих знань, умінь та навичок. Поступове приєднання України до світового освітнього процесу, прискорена євроінтеграція та широке використання компетентнісного підходу у підготовці майбутніх учителів математики, фізики та інформатики спонукають до побудови освітнього простору у відповідності до міжнародних стандартів, але з урахуванням існуючого власного досвіду та наробок. Таким чином, постає питання можливості створення стандартизації підготовки майбутніх учителів інформатики ґрунтуючись на світових стандартах у відповідності до компетентнісного підходу.

Питання підготовки майбутніх учителів інформатики розглянуто в дослідженнях В. Бикова [1], Ю. Горошка [2], М. Жалдака [3], Н. Морзе [4], С. Ракова [5], С. Семерікова [6], О. Співаковського [7], О. Спіріна [8], Ю. Триуса [9] та інших. Однак, не достатньо вивченим залишається проблема створення стандарту підготовки майбутніх учителів інформатики на базі українського вишу та у відповідності до світових тенденцій.

Основна частина

Базуючись на інформатичних компетенція IT-фахівців сформулюємо вимоги визначення рівня інформатичної компетентності майбутніх учителів інформатики, які визначено в таких документах як:

- Information Technology Curricula 2017 (IT2017) [10]
- Computer Engineering Curricula 2016 (CE2016) [11]
- Software Engineering 2014 (SE2014) [12]
- Computer Science Curricula 2013 (CS2013) [13]

Враховуючи, що інформатична компетентність майбутніх учителів інформатики має відповідати принаймні базовим вимогам фахівців у IT-галузі розглянемо висунуті вимоги більш детально. Для фахівця з інформаційних технологій у 2017 році (IT2017) групою експертів було визначено технічні навички, що мають найбільший попит від роботодавців (рис. 1).

Рис. 1: Діаграма попиту на технічні та базові навички

Отже, найбільш затребуваними з боку роботодавців є навички здійснювати технічну підтримку працездатності програмного забезпечення (29%), обслуговувати клієнтів (16%) та використовувати в своїй професійній діяльності ОС Linux (15%). Однією з головних вимог роботодавців до навичок претендента на посаду є комунікативність (37%). Не менш важливими є навички усунення несправностей (33%) та вміння вести документацію (25%), навички вирішення проблем (22%).

Досягнення необхідної інформатичної компетентності, згідно документу IT2017, рекомендується шляхом вивчення таких предметних галузей як, принципи кібербезпеки, управління інформацією, інтегровані системі технології, мережеві технології, технології платформ, системні парадигми, основи програмного забезпечення, дизайн інтерфейсу користувача, веб- та мобільні системи, прикладні мережі, обчислювальні технології, масштабованість даних та аналітика, Інтернет речей, мобільні додатки, розробка програмного забезпечення, віртуальні системи та сервіси.

Документ Computer Engineering Curricula 2016 (CE2016) регламентує вивчення таких предметних галузей, як схеми та електроніка, обчислювальні алгоритми, комп'ютерна архітектура, цифровий дизайн, вбудовані системи, комп'ютерні мережі, підготовка до професійної практики, інформаційна безпека, обробка сигналів, системи та проектування, управління ресурсами систем, розробка програмного забезпечення.

У стандарті підготовки фахівців Software Engineering 2014 до вивчення запропоновані такі предметні галузі – обчислювальна техніка, дизайн програмного забезпечення, математичні та інженерні основи, перевірка програмного забезпечення та валідація, професійна практика, програмне забезпечення, моделювання програмного забезпечення та аналіз, якість програмного забезпечення, аналіз вимог та специфікація, безпека.

Стандарт Computer Science Curricula 2013 передбачає вивчення наступних предметних галузей: алгоритми та складність, архітектура обчислювальних систем, методи обчислень, дискретні структури, графіка та візуалізація, взаємодія між людьми та комп'ютерами, інформаційне забезпечення та безпека, управління інформацією, інтелектуальні системи, мережі та зв'язок, операційні системи, паралельні та розподілені обчислення, мови програмування, інженерія програмного забезпечення, основи інформаційних систем, соціальні проблеми та професійна практика.

У 2017-му році під егідою Європейської комісії з освіти та науки (European Commission's science and knowledge service) було опубліковано дослідження Об'єднаного дослідницького центру (Joint Research Centre) щодо цифрової компетентності в освіті [14]. Дослідниками було визначено три групи компетентностей: професійні компетентності викладача, педагогічні компетентності викладача, компетентності здатності до навчання.

До професійних компетентностей викладача дослідниками віднесено професійну взаємодію (організаційне спілкування; професійне співробітництво;

рефлексивна практика; безперервний професійний розвиток). Педагогічні компетентності викладача стосуються цифрових ресурсів (вибір цифрових ресурсів; створення та модифікація; управління, захист, спільне використання), викладання та навчання (викладання; керівництво; спільне навчання;організація персональної навчальної траєкторії для тих, хто навчається), оцінювання (використання цифрових технологій для оцінювання; моніторинг навчального процесу; організація зворотнього звязку, підтримка навчальної діяльності) та розширення можливостей для тих, хто навчається (доступність навчальних ресурсів для всих без виключення; диференціація та персоналізація; активне залучення тих, хто навчається). Компетентності здатності до навчання сприяють розвитку цифрової компетентності та включають в себе інформаційну та медіа грамотність; спілкування за допомогою цифрових технологій; створення навчального контенту; відповідальне використання технологій; вирішення навчальних та технічних проблем.

У 2016-му році Міністерство освіти та науки України започаткувало створення нової української школи. Основні концептуальні засади якої було викладено в документі „Нова Українська школа“ [15], серед ключових компетентностей для життя наведено інформаційно-цифрову компетентність, під якою розуміють впевнене та критичне застосування ІКТ для створення, пошуку, обробки, обміну інформацією на роботі, у публічному просторі та приватному спілкуванні. Зміст інформатичної компетентності визначається інформаційною та медіа-грамотністю, володіння основами програмування, алгоритмічне мислення, робота з базами даних, навички безпеки в Інтернеті та кібербезпеці, розуміння етики роботи з інформацією (авторське право, інтелектуальна власність тощо).

Також треба наголосити, що зміст інформатичних дисциплін було визначено у зазначеному документі за предметними галузями: архітектура обчислювальних систем, основи програмного забезпечення, операційні системи, управління інформацією, інформаційне забезпечення та безпека, мережеві технології, прикладні мережі, технології платформ, основи програмного забезпечення, дискретні структури, алгоритми та складність, мови програмування, розробка програмного забезпечення, основи інформаційних систем, соціальні проблеми та професійна практика. Усі ці галузі мають одне направлення — інформатична обізнаність.

Висновки

Отже, враховуючи глобальну інформатизацію суспільства, спираючись на те, що інформатична компетентність майбутніх учителів інформатики має відповідати базовим вимогам, які висуваються до ІТ-фахівців та беручи до уваги зміст інформатичних дисциплін робимо висновки, що випускники українських вишів мають отримувати освіту засновану на міжнародних стандартах освіти, які, у свою чергу, стосуються як галузі IT-компетентності, так і всіх галузей підготовки майбутніх учителів інформатики.

Література

1. *Биков В. Ю.* Моделі організаційних систем відкритої освіти : [монографія] / В. Ю. Биков. — К. : Атіка, 2009. — 684 с.
2. *Горошко Ю. В.* Система інформаційного моделювання у підготовці майбутніх учителів математики та інформатики: дис. ... д-ра пед. наук: 13.00.02 / Юрій Васильович Горошко; наук. консультант М.І. Жалдак; Чернігівський нац. пед. ун-т ім. Т.Г. Шевченка. — Чернігів, 2013. – 470 с.
3. *Жалдак М. І.* Система підготовки вчителя до використання інформаційно-комунікаційних технологій в навчальному процесі / М. І. Жалдак // Науковий часопис НПУ ім. М.П. Драгоманова. Серія 2: Комп'ютерно-орієнтовані системи навчання. — 2011. – №11. — С. 3–15.
4. *Морзе Н. В.* Основи методичної підготовки вчителя інформатики: монографія / Н. В. Морзе. — К.: Курс, 2003. — 372 с.
5. *Раков С. А.* Формування математичних компетентностей учителя математики на основі дослідницького підходу у навчанні з використанням інформаційних технологій : дис. докт. пед. наук : 13.00.02 / Раков Сергій Анатолійович. — Харків, 2005. — 503 с.
6. *Семеріков С. О.* Фундаменталізація навчання інформатичних дисциплін у вищій школі: монографія / Наук. ред. академік АПН України, д.пед.н., проф. М. І. Жалдак. — К.: НПУ ім. М.П. Драгоманова, 2009. — 340 с.
7. *Співаковсъкий О. В.* Теоретико-методологічні основи навчання вищої математики майбутніх учителів математики з використанням інформаційних технологій: дис. на здобуття наук. ступеня доктора пед. наук : 13.00.02 „Теорія та методика навчання математики“ / Співаковський Олександр Володимирович. — К., 2004. — 534 с.
8. *Спірін О. М.* Методична система базової підготовки вчителя інформатики за кредитно-модульною технологією: монографія / О. М. Спірін. — Житомир : Вид-во ЖДУ ім. І. Франка, 2013. — 182 с.
9. *Триус Ю. В.* Комп'ютерно-орієнтовані методичні системи навчання математичних дисциплін у вищих навчальних закладах : дис. ... доктора пед. наук : 13.00.02 / Триус Ю. В. ; Черкаський нац. ун-т ім. Б. Хмельницького. — Черкаси, 2005. — 649 с.
10. Information Technology Curricula 2017 [Електронний ресурс] // Association for Computing Machinery (ACM) & IEEE Computer Society

(IEEE-CS). – 2017. – Режим доступу до ресурсу: https://www.acm.org/binaries/content/assets/education/curricula-recommendations/it2017.pdf.
11. Computer Engineering Curricula 2016 [Електронний ресурс] // Association for Computing Machinery (ACM) & IEEE Computer Society. – 2016. – Режим доступу до ресурсу: https://www.acm.org/binaries/ content/assets/education/ce2016-final-report.pdf.
12. Software Engineering 2014 [Електронний ресурс] // IEEE Computer Society & Association for Computing Machinery. – 2014. – Режим доступу до ресурсу: https://www.acm.org/binaries/content/assets/education/se2014.pdf.
13. Computer Science Curricula 2013 [Електронний ресурс] // Association for Computing Machinery (ACM) & IEEE Computer Society. — 2013. – Режим доступу до ресурсу: https://www.acm.org/binaries/content/assets/education/cs2013_web_final.pdf.
14. European Framework for the Digital Competence of Educators: DigCompEdu [Електронний ресурс] // European Union. — 2017. — Режим доступу до ресурсу: https://ec.europa.eu/jrc/en/publication/eur-scientific-and-technical-research-reports/european-framework-digital-competence-educators-digcompedu.
15. Нова українська школа [Електронний ресурс] // МОН України. – 2016. – Режим доступу до ресурсу: https://mon.gov.ua/storage/app/media/zagalna%20serednya/nova-ukrainska-shkola-compressed.pdf.

Velychko V.Ye., Fedorenko E.G.
Donbas State Pedagogical University, Sloviansk, Ukraine.

Training future teachers of informatics in accordance with international standards

Requirements for specialists in modern society are constantly growing, and therefore the requirements for their training in the modern university are growing. The scientific and technical development of society today needs to be widely implemented in the everyday and educational practice of information and communication technologies, as well as continuous updating and improvement. Lifelong learning in the information society is entrusted to education and to teachers of computer science in particular, and therefore the training of future teachers of informatics should meet world standards. To solve the latter, it is necessary to consider the existing world standardization tendencies and build on them the appropriate requirements for the training of future teachers of informatics.

Keywords: *Training of teachers of informatics, New Ukrainian School, DigCompEdu.*

УДК 004.55

Козаченко Ю.О., Стьопкін А.В., Новіков О.О., Польська А.А.

[1] *студентка 4 курсу фізико-математичного факультету, ДВНЗ «ДДПУ»*

[2] *канд. фізико-математичних наук, доцент каф. МНМ та МНІ, ДВНЗ «ДДПУ»*

[3] *канд. фізико-математичних наук, доцент каф. математики та інформатики, ДВНЗ «ДДПУ»*

[4] *студентка 4 курсу факультету початкової, технологічної та професійної освіти, ДВНЗ «ДДПУ»*

e-mail: stepkin.andrey@rambler.ru

Створення анімації засобами CSS.

У статті розглядається проблема створення анімованих ефектів на розроблюваних web-сторінках. Проведено дослідження у напрямку алгоритмізації процесу створення анімації засобами каскадних таблиць стилів (CSS). Наведено основні інструменти, якими володіють CSS для створення анімацій різного рівня складності.

Ключові слова: *CSS, анімація, ключовий кадр.*

Вступ

Поняття Інтернету вже давно перестало бути чимось екзотичним. Щодня людство за допомогою різноманітних стаціонарних чи мобільних пристроїв, використовуючи браузери, переглядає мільйони web-сторінок. При цьому переважна більшість користувачів навіть не замислюється про те, яким чином браузер відображає цю інформацію. Однією з необхідних умов правильного відображення є написання web-сторінок спеціальною мовою розмітки гіпертексту HyperText Markup Language (HTML) [1]. HTML - це стандартна мова гіпертекстової розмітки web-документів, яка використовується у Всесвітній павутині. Розроблено HTML в кінці 80-х років минулого століття британським вченим Тімом Бернерс-Лі. За задумом це максимально проста і легка в освоєнні мова, якою змогли б користуватися люди, які не є фахівцями в області верстки та програмування. Простота мови досягалася за рахунок застосування невеликої кількості спеціальних елементів (тегів), які дозволяли без особливих зусиль отримати на виході спеціальним чином оформлений документ [2].

HTML-елементи можна поділити на категорії: 1. Метадані, призначені для повідомлення браузеру службової інформації (до цієї категорії відносяться: link; meta; script; style; title та ін.). 2. Елементи, які містяться в тілі документа і в основному призначені для обробки і форматування інформації, виведеної на екран користувача (до цієї категорії відносяться: div; form; img; input; table та ін.). 3. Інтерактивні елементи використовуються спеціально для взаємодії з користувачем, наприклад, кнопки, посилання або поля введення тексту (до цієї категорії відносяться: a; button; textarea; та ін.). 4. Кореневі елементи, призначені для розміщення в них інших секційних елементів. Одним з них є елемент «body», тобто тіло документа. Саме в ньому розташовуються секційні елементи і заголовки [3].

Сама HTML найчастіше використовується для написання змістовної частини web-сторінки, а для опису стильового оформлення цієї частини використовуються каскадні таблиці стилів.

CSS (англ. Cascading Style Sheets) – спеціальна мова, що використовується для опису зовнішнього вигляду сторінок, написаних мовами розмітки web-документу[4].

Найчастіше CSS використовують для візуального оформлення сторінок, написаних HTML та XHTML, але формат CSS може застосовуватися до інших видів XML-документів. Специфікації CSS були створені та розвиваються Консорціумом Всесвітньої мережі.

CSS використовується авторами web-сторінок, для визначення кольорів, шрифтів та інших аспектів вигляду сторінки. Одна з головних переваг — можливість відокремити зміст сторінки (зазвичай описаний мовою HTML, XML або подібною мовою розмітки) від оформлення документу (CSS).

Майже століття тому з'явилися перші анімовані мультфільми. З розвитком технологій анімації все більше проникають в інформаційний простір та вже стали одними з головних елементів мультимедіа проектів і презентацій, та дедалі більше використовуються на web-сторінках. У наш час сучасні web-інтерфейси вимагають високого рівня інтерактивності і простоти, чого можна досягти за допомогою грамотної CSS-анімації. Тому механізми створення таких анімацій є актуальною темою для дослідження, яке має практичне спрямування.

Основна частина

Говорячи про зовнішній вигляд документа, маємо на увазі фон, стилі тексту та інших елементів, а також їх взаємне розташування на сторінці. Так що, якщо HTML повідомляє браузеру, що це за елемент, то CSS вказує йому, як оформити зовнішній вигляд цього елемента. Такий поділ досить доречний і має низку переваг, що дозволяють більш ефективно здійснювати розробку сайтів та web-додатків. Існують в CSS і можливості для створення анімаційних ефектів й різних візуальних переходів елементів з одного стану в інший, які реалізуються за рахунок набору спеціальних властивостей, що відповідають за тривалість, напрямок, кількість повторень ефектів тощо. Для того, щоб вказати для яких саме властивостей елемента необхідно застосовувати анімаційні ефекти, використовується окреме правило @keyframes. Воно встановлює ключові кадри при анімації елемента, які представляють собою конкретні стильові властивості елемента в даний момент.

Таким чином, анімація в CSS представляє собою не що інше, як перехід від одного набору стильових властивостей елемента до іншого. У найпростішому випадку використовується два ключових кадри, тобто два набори стильових властивостей елемента, між якими і відбувається анімаційний перехід.Самі анімаційні властивості записуються окремо від @keyframes на загальних підставах з іншими правилами CSS. А для того, щоб прив'язати анімаційні властивості до конкретної анімації, тобто до правила @keyframes, використовується властивість animation-name, яка приймає в якості значень або список імен анімацій, які повинні бути застосовані до елементу, або ключове слово none, яке використовується за замовчуванням і скасовує анімацію. Імена в списку анімацій повинні перераховуватись через кому.

Перерахуємо всі доступні анімаційні властивості, які використовуються в CSS. Почнемо з animation-delay, яке встановлює час затримки перед запуском анімації. В якості значення властивість приймає час, вказаний в секундах (s) або мілісекундах (ms). Якщо вказано нульове значення часу (використовується браузером за замовчуванням), то анімація запускається без затримок. Також дозволяється використовувати від'ємні значення, але з ними потрібно бути обережним, тому що це може привести до зміни виду анімації в початковій стадії процесу. Щоб встановити тривалість одного циклу анімації, необхідно використовувати властивість animation-duration, яке також приймає в якості значення час, вказаний в секундах (s) або мілісекундах (ms). За замовчуванням використовується час рівний нулю, що означає відсутність анімації взагалі. Від'ємні значення не дозволяються.

Кількість повторень анімації можна задати за допомогою властивості animation-iteration-count, яка приймає в якості значень або позитивне число, яке вказує кількість повторень, або ключове слово infinite, що означає відтворення анімації нескінченне число разів. При цьому дозволяється використовувати не тільки цілі значення, але і дробові. Наприклад, якщо значення дорівнює 2.5, то анімація зробить два повних цикли і потім завершиться на половині третього циклу. За замовчуванням анімація відтворюється тільки один раз.

Крім кількості повторень анімації можна задати і її напрямок. Робиться це за допомогою властивості animation-direction, яка приймає значення в вигляді ключових слів:

1. *normal* – після завершення циклу, анімація скидається в початковий стан і стартує заново (використовується за замовчуванням);
2. *alternate* – після завершення циклу, анімація починає крок за кроком відтворюватися в зворотному напрямку;
3. *reverse* – анімація починається відразу з кінця циклу, виконуючи всі кроки в зворотному напрямку, а потім скидається знову в кінець циклу;
4. *alternate-reverse* – анімація починається відразу з кінця циклу, виконуючи всі кроки в зворотному напрямку, а потім починає крок за кроком відтворюватися в прямому напрямку, повертаючись в кінець циклу, який в даному випадку є стартовою точкою.

Управляти плавністю анімаціїї (швидкістю переходів від одного стану до іншого) дозволяє властивість animation-timing-function, яка використовує значення математичної функції Безьє, а також значення покрокової функції:

1. *cubic-bezier (n1, n2, n3, n4)* – поведінка анімації буде залежати від результату обчислення функції Безьє, в якості аргументів якої можна задавати чотири числа від нуля до одиниці включно;
2. *ease* – відповідає результату функції cubic-bezier (0.25,1,0.25,1); анімація прискорюється до середини, а потім сповільнюється до кінця;
3. *ease-in* – відповідає результату функції cubic-bezier (0.42,0,1,1); анімація починає повільно прискорюватися з самого початку і до кінця;
4. *ease-out* – відповідає результату функції cubic-bezier (0,0,0.58,1); анімація стартує прискорено і сповільнюється до кінця;
5. *ease-in-out* – відповідає результату функції cubic-bezier (0.42,0,0.58,1); анімація повільно стартує і повільно закінчується;
6. *linear* – відповідає результату функції cubic-bezier (0,0,1,1); постійна швидкість на всьому проміжку відтворення;
7. *steps (n, start / end)* – тут n являє собою позитивне ціле число, яке задає число кроків функції, а ключові слова визначають коли ці кроки будуть зроблені - на початку або в кінці зазначеного проміжку часу;
8. *step-start* – відповідає результату функції step (1, start); стильові властивості елемента відразу ж приймають кінцеві значення, при цьому анімація як би відсутня;
9. *step-end* – відповідає результату функції step (1, end); стильові властивості елемента знаходяться в початковому стані зазначений час, а потім стрибком приймають кінцеві значення, при цьому анімація як би відсутня.

Якщо в певний момент потрібно поставити анімацію на паузу, слід скористатися властивістю animation-play-state, яка визначає два стану анімації:

- running – анімація програється; - paused - анімація поставлена на паузу. Якщо необхідно задати відразу кілька параметрів анімації, можна використовувати універсальну властивість animation, в якій значення відповідних анімаційних властивостей перераховуються через пробіл в наступній послідовності: animation-name || animation-duration || animation-timing-function || animation-delay || animation-iteration-count || animation-direction || animation-fill-mode || animation-play-state. Якщо значення якої-небудь властивості не буде вказано, то браузер застосує значення за замовчуванням. При цьому потрібно пам'ятати, що дана універсальна властивість дозволяє прив'язати до стилю тільки одну анімацію. Вказувати через кому імена кількох анімацій не можна.

Для того, щоб створити анімацію в CSS спочатку необхідно підготувати матеріал, тобто зображення які будуть використовуватись в подальшій роботі. Для використання обраний матеріал повинен мати певний вигляд: по-перше, на картинці мають бути тільки потрібні елементи, по-друге, вже готове зображення повинно мати прозорий фон. Все це можна зробити майже в будь-якому безкоштовному графічному редакторі. В даному випадку достатньо використати редактор зображень Paint.NET. Після підготовки файлів, які будуть використані, можна приступити до основної роботи. Для роботи з HTML та CSS доречно використовувати безкоштовний спеціалізований текстовий редактор для web-розробників Adobe Brackets [5].

Необхідно створити і зберегти html-файл зі стандартною розміткою, яка відповідає стандарту HTML5. Все те, про що буде йти мова в подальшому, можна помістити в один файл CSS. Однак, щоб легше було орієнтуватися у фрагментах описуваних стилів, краще розбити його на три:

1. style.css - призначений для опису зовнішнього вигляду всіх прошарків;
2. keyframes.css - призначений для опису ключових кадрів;
3. animation.css - призначений для виклику і налаштування самих анімацій.

Банер звичайно являє собою прямокутник, в якому рухаються графічні елементи. Ефект рухомого об'єкту досягається не за рахунок руху самого об'єкту, а завдяки елементам рухомого фону. Такий підхід дозволяє домогтися нескінченної анімації. Для роботи треба підготувати набір зображень. Майже всі вони мають розширення png. Це досить зручний формат, який дозволяє використовувати різні варіанти прозорості або напівпрозорості. Кожна картинка буде розміщена в окремому прошарку, але не за допомогою тега <img>, а як фон. При верстці будемо використовувати метод вкладення прошарків. Такий стиль написання дає цілий ряд переваг: 1. Вкладені прошарки дозволяють домогтися точного позиціонування елементів один до одного. При цьому html-код виходить максимально компактний і зручний для сприйняття. 2. Вкладеність прошарків дозволяє більш повно використовувати властивості спадкування і каскадування CSS, дозволяючи уникнути непотрібного дублювання властивостей і правил.

Анімації в CSS3 описується за допомогою так званих ключових кадрів. Ключовим називають кадр, в якому задаються зміни анімації. До одного і того ж об'єкту може бути дано відразу кілька ключових кадрів, де кожен буде відрізнятися від собі подібного якимись властивостями. В CSS такий перелік описують за допомогою правила @keyframes. Його синтаксис такий: після ключового слова @keyframes через пробіл йде ім'я анімації. Надалі це ім'я буде використано для виклику даної анімації або, простіше кажучи, її застосування до того чи іншого елементу html-сторінки. Далі, всередині фігурних дужок описуємо перелік ключових кадрів. Опис кожного починається з селектора кадру. Його, як правило, задають у відсотках і з його допомогою, описують значення анімованих властивостей в даний момент часу, який відраховується в процентному відношенні від значення тривалості одного циклу анімації. Для будь-якої анімаційної послідовності знадобляться хоча б два ключових кадри: 1. Описує зовнішній вигляд зображення на початку анімації; 2. Як воно буде виглядати в кінці. Фактично, анімація це процес плавного переходу зображення з одного стану в інший в заданому проміжку часу. Саме в зв'язку з тим, що обидва ключових кадри зустрічаються всюди, замість їх процентного запису можна використовувати спеціалізовані селектори 1. From (замість 0% для початкового моменту анімації) 2. To (замість 100% для кінцевого моменту анімації) Після кожного селектора кадру йде своя пара фігурних дужок, усередині яких перераховуються властивості елемента сторінки, що підлягають змінам. Анімувати можна тільки ті властивості, значення яких прийнято виражати числом. Якщо точніше, – дробовим числом. Наприклад, властивість ширини блоку (width) або кольору (color, background-color) можна анімувати, а ось z-index, значенням якого може бути тільки ціле число – не можна.

Якщо необхідно, щоб ця дія повторювалося, то створений запис потрібно доповнити ще однією css-властивістю - animation-iteration-count, яка визначає кількість циклів анімації. За замовчуванням, його значення дорівнює одиниці. Щоб який-небудь рух повторювався нескінченно, то замість числа, використовуємо значення, що робить анімаційний цикл безперервним. Щоб спростити запис в CSS3 можна використовувати скорочену форму, користуючись властивістю animation, яка дозволяє задати ім'я анімації, її час, кількість циклів і багато інших властивостей в один рядок.

Таким чином, для опису руху необхідно створити послідовність ключових кадрів, в якій визначені координати фону в початковий і кінцевий моменти анімації, а потім викликати її і налаштувати. Необхідно звернути увагу, що в описі ключових кадрів йдеться тільки про те, що має відбуватися, але немає конкретних вказівок на об'єкт, з яким це відбувається. Так само не сказано, скільки часу відведено на весь цикл і скільки разів він повинен повторюватися. «Прив'язка» і налаштування ключової анімації до елементу сторінки здійснюється в css-правилі, що описує зовнішній вигляд конкретного селектора. Такий принцип, дуже практична річ, тому що одного разу описану послідовність ключових кадрів можна згодом неодноразово підключати до різних елементів сторінки.

Якщо анімація повинна повторюватися нескінченно, то протікати вона повинна рівномірно. За це в CSS відповідає властивість animation-timing-function, яка має цілий ряд значень, які забезпечують плавність перебігу анімації. Існують наступні функції пом'якшення:

1. *linear* анімація протікає рівномірно протягом усього часу виконання;
2. *ease* анімація відбувається спочатку повільно, потім починає прискорюватися і знову сповільнюється до кінця. (Ця функція якраз і є використовуваної за замовчуванням);
3. *ease-in* анімація протікає повільно на початку, а потім прискорюється;
4. *ease-out* анімація сповільнюється до кінця;
5. *ease-in-out* анімація протікає повільно на початку і в кінці;
6. *cubic-function (x, x, x, x)* універсальна функція, яка дозволяє задати різну швидкість виконання анімації за допомогою числових значень. Строго кажучи, перераховані вище функції, є окремими випадками cubic-function.

Це список лише тих значень, які використовуються найчастіше. Насправді, їх набагато більше. У конкретному випадку підходить перше значення, яке забезпечує рівномірність руху на протязі всього часу анімації.

В CSS3 є властивість animation-direction і з її допомогою можна встановити порядок виконання анімації. Воно може приймати одне з трьох значень:

1. *normal* - використовується за умовчанням і означає, що анімація відбувається в тому порядку, в якому вона описана в ключових кадрах;
2. *reverse* - анімація відбувається в зворотному порядку, тобто останній ключовий кадр вважається першим, а перший навпаки - останнім;
3. *alternate* - чергування анімації, тобто анімація повинна виконуватися в зворотному порядку в парні рази і в нормальному в непарні.

Висновки

Одним із способів пожвавити контент в HTML є використання так званих анімацій, створених засобами CSS. Принцип їх роботи досить простий. Вони надають можливість анімувати властивості CSS тих елементів, які знаходяться під їх впливом. Це дозволяє створювати різноманітні анімаційні ефекти, наприклад, змушувати об'єкти рухатися, зникати і з'являтися, змінювати колір тощо. Але для того, щоб створювати щось складне, подібне руху об'єктів, треба розвивати власне уявлення про анімаційні перетворення.

Як правило, стандартне використання анімації полягає в тому, щоб змінювати якісь елементів сайту плавно з плином часу. Але чим динамічніше і сучасніше анімація, тим більше уваги користувачів ви привернете до свого проекту. Крім того, важливу роль відіграє також і інтерактивність.

Література

1. *Шафер С.* HTML, XHTML и CSS. Библия пользователя / С. Шафер. — М.: Вильямс, 2010. — 656 с.
2. *Лабберс К.* HTML5 для профессионалов: мощные инструменты для разработки современных веб-приложений / К. Лабберс, Н. Олберс, К. Салим. — М.: Вильямс, 2011. — 272 с.
3. *Пасічнік О.Г.* Основи веб-дизайну / О.Г. Пасічнік, О.В. Пасічнік, І.В. Стеценко. — Вид. група BHV, 2009. — 336 с.
4. *Макфарланд Д.* Большая книга CSS3. 3-е изд. / Д. Макфарланд. — СПб.: Питер, 2014. — 608 с.
5. *Стьопкін А.В.* Використання редактору Brackets на уроках інформатики / А.В. Стьопкін, Т.В. Турка, М.С. Кузюра // Духовність особистості: методологія, теорія і практика : збірник наукових праць / гол. редактор Г.П. Шевченко. — Вип. 5 (80). — Сєвєродонецьк: вид-во СНУ ім. Даля, 2017. — С. 218–223.

Kozachenko Yu.O., Stopkin A.V., Novikov O.O., Polska A.A.
Donbas State Pedagogical University, Sloviansk, Ukraine.

Creating animations using CSS tools.

The article considers the problem of creating animated effects on the developed web pages. A study has been carried out in the direction of algorithmizing the process of creating animation using the means of cascading style sheets (CSS). The main tools that CSS has for creating animations of different levels of complexity are given.

Keywords: *CSS, animation, key frame.*

УДК 378.147.88:004.2

Кайдан Н.В., Кива Л.Г.

[1] *кандидат фізико-математичних наук, доцент, доцент кафедри методики навчання математики та методики навчання інформатики, ДВНЗ «ДДПУ»*

[2] *студентка 1 курсу (магістратура) факультету початкової, технологічної та професійної освіти, ДВНЗ «ДДПУ»*

e-mail: kaydannv@gmail.com, kivalarisa95@gmail.com

ВИКОРИСТАННЯ СИСТЕМИ КОМП'ЮТЕРНОЇ МАТЕМАТИКИ MATHCAD ПРИ РОЗВ'ЯЗАННІ ЗАДАЧ ЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ ПРАКТИЧНОГО СПРЯМУВАННЯ

У статті обговорюються особливості системи комп'ютерної математики MathCAD при розв'язанні задач лінійного програмування практичного спрямування. Наводиться загальна характеристика системи комп'ютерної математики MathCAD. Представлено розв'язки задачі, що відноситься до класу задач оптимального управління.

Ключові слова: *MathCAD, задачі лінійного програмування, системи комп'ютерної математики.*

Вступ

Сьогоденний стан розвитку суспільства вимагає від її членів бути більш інформованими, мобільними, вміти творчо і критично розмірковувати, а значить і більш вмотивованими до саморозвитку та самонавчання. Особистісна орієнтація освіти, впровадження освітніх інновацій, інформаційно-комунікаційних технологій, ґрунтовне використання окремих компонентів комп'ютерно-орієнтованих систем навчання у поєднанні з традиційними методами, формами та засобами навчання студентів, створення сучасних засобів навчання та виховання, забезпечення ними навчальних закладів є пріоритетними напрямами в навчально-виховному процесі. У контексті навчання інформатичних дисциплін важливою запорукою реалізації цієї освітньої парадигми є фундаменталізація навчання. Як інноваційна педагогічна технологія можуть бути використані системи комп'ютерної математики (СКМ), оскільки вони є середовищем для проектування та використання програмних засобів підтримки навчання фундаментальних дисциплін. [3], [4]

Проблема застосування в навчальному процесі комп'ютерних технологій та інформаційного методичного забезпечення ретельно досліджується вітчизняними й зарубіжними науковцями та методистами. Зокрема, питання впровадження комп'ютерних освітніх технологій розглядали у своїх роботах М. Жалдак, С. Рибак, В. Клочко, Ю. Рамський, М. Львов та інші дослідники. Поширення набувають різноманітні засоби комп'ютерної математики, зокрема програмні, які, на думку М. Жалдака, доцільно умовно поділити на дві великі групи: програмне забезпечення навчально-дослідницького призначення та програмне забезпечення науково-дослідницького призначення.[2]

Основна частина.

Характерною тенденцією в побудові сучасних систем управління є прагнення здобувати системи, які є найкращими. При цьому завдання управління зводяться до знаходження найкращого з безлічі можливих процесів, тобто відносяться до класу задач оптимального управління.

У багатьох випадках реалізація процесу управління вимагає витрат певних ресурсів: витрат часу, витрати матеріалів, палива, електроенергії. Отже, при виборі способу управління слід говорити не тільки про те, чи досягається поставлена мета, але й про те, які ресурси доведеться затратити для досягнення цієї мети. В цьому випадку задача управління полягає в тому, щоб з безлічі розв'язків, що забезпечують досягнення мети, вибрати один, який вимагає найменшої витрати ресурсів.

В деяких випадках підставою для переваги одного способу управління над іншими виступають вимоги, які накладаються на систему управління: вартість обслуговування, надійність, ступінь близькості одержуваного стану системи до необхідного, ступінь достовірності знань і т. п. Математичний вираз, що дає кількісну оцінку ступеня виконання накладених на спосіб управління вимог, називається, критерієм якості управління. Найбільш кращим або оптимальним способом управління буде такий, при якому критерій якості управління досягає мінімального (іноді максимального) значення.

Різні види завдань оптимального управління відрізняються один від одного способом і послідовністю виконання цих операцій. Для однокрокових завдань не розглядають методи реалізації ухваленого рішення, тобто визначаються не величина й характер керуючого впливу, а безпосередньо значення змінної стану системи, яке забезпечує найкраще досягнення мети управління. В однокрокових завданнях критерій якості зазвичай називають цільовою функцією або функцією виграшу (функцією втрат). Методи розв'язування однокрокової задачі називаються методами математичного програмування.

Таким чином математичне програмування являє собою не аналітичну, а числову форму розв'язку, тобто не дає формулу, що виражає кінцевий результат, а вказує лише обчислювальну процедуру, яка призводить до розв'язку завдання. Тому методи математичного програмування ефективні лише при використанні комп'ютера.[5]

Задачі лінійного програмування є найпростішим випадком задач математичного програмування. Задача лінійного програмування полягає в наступному:

Дана система m лінійно незалежних рівнянь з n невідомими, $x_1, x_2, \ldots, x_n$ називаються системою обмежень задачі лінійного програмування:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ &\ldots \\ a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned} \tag{1}$$

де $b_i \geqslant 0, \quad i = 1, \ldots, m.$

Характерною особливістю даної задачі є те, що число рівнянь менше числа невідомих, тобто $m < n$. Потрібно знайти невід'ємні значення змінних $(x_i \geqslant 0, \quad i = 1, \ldots, n.)$, які задовольняють рівнянням (1) і звертають до мінімуму (максимуму) критерій оптимальності, який в даному випадку називають цільовою функцією.

$$q = c_1x_1 + ... + c_nx_n \tag{2}$$

У зв'язку з цим справедливо очікувати можливості вирішення завдань лінійного програмування системами комп'ютерної математики. Вони являють собою спеціалізовані програмні пакети для розв'язування математичних завдань різного характеру. До числа найбільш популярних СКМ належать пакети Maxima, Matlab, Mathematica, Maple, MathCAD.

Розглянемо систему комп'ютерної математики MathCAD, яка орієнтована на побудову інтерактивних документів для проведення розрахунків з візуалізованим супроводом. У MathCAD є вбудована мова програмування. Це мова більш високого рівня, ніж Бейсік і Паскаль, вона дозволяє виробляти об'єктно-орієнтовані програми. Для чисельного розв'язку задач пошуку локального мінімуму або максимуму в MathCAD представлені вбудовані функції — Minner, Minimize і Maximize.[1]

На нашу думку розв'язування задач лінійного програмування, що мають практичне спрямування, є найпростішим засобом вивчення можливостей програмування СКМ MathCAD. Розглянемо розв'язок задачі, що відноситься до класу задач оптимального управління.

Умова: Для підтримки нормальної життєдіяльності людині необхідно споживати в день не менше 118 г білків, 56 г жирів, 500 г вуглеводів, 8 г мінеральних солей. Ці поживні речовини містяться в різних кількостях у різних харчових продуктах. У таблиці наведено кількість поживних речовин в різних продуктах і ціна цих продуктів за 1 кг. Необхідно скласти денний раціон, який містить мінімальну добову норму поживних речовин при мінімальній їх вартості.

Поживні речовини	Продукти						
	М'ясо	Риба	Молоко	Масло	Сир	Крупа	Картопля
Білки	180	190	30	10	260	130	21
Жири	20	3	40	865	310	310	2
Вуглеводи	–	–	50	6	20	650	200
Мінеральні солі	9	10	7	12	60	20	10
Ціна грн/кг	100	50	10	120	160	20	6

Розв'язання. Це завдання на знаходження оптимального рішення. Опишемо задачу математично.

Позначивши через x_1 – кількість м'яса, x_2 – кількість риби, x_3 – кількість молока, x_4 – кількість масла, x_5 – кількість сиру, x_6 – кількість крупи, x_7 – кількість картоплі, споживаних людиною в день, можемо скласти рівняння загальної вартості F харчування у день:

$$F = 100x_1 + 50x_2 + 10x_3 + 120x_4 + 160x_5 + 20x_6 + 6x_7$$

Нам потрібно знайти мінімум F.

Сумарна кількість білків у раціоні людини має бути не менше 118 г. Звідси

$$180x_1 + 190x_2 + 30x_3 + 10x_4 + 260x_5 + 130x_6 + 21x_7 \geqslant 118$$

Такі ж нерівності складаємо для жирів, вуглеводів і солей. Маємо:

$$20x_1 + 3x_2 + 40x_3 + 865x_4 + 310x_5 + 30x_6 + 2x_7 \geqslant 56$$

$$50x_3 + 6x_4 + 20x_5 + 650x_6 + 200x_7 \geqslant 500$$

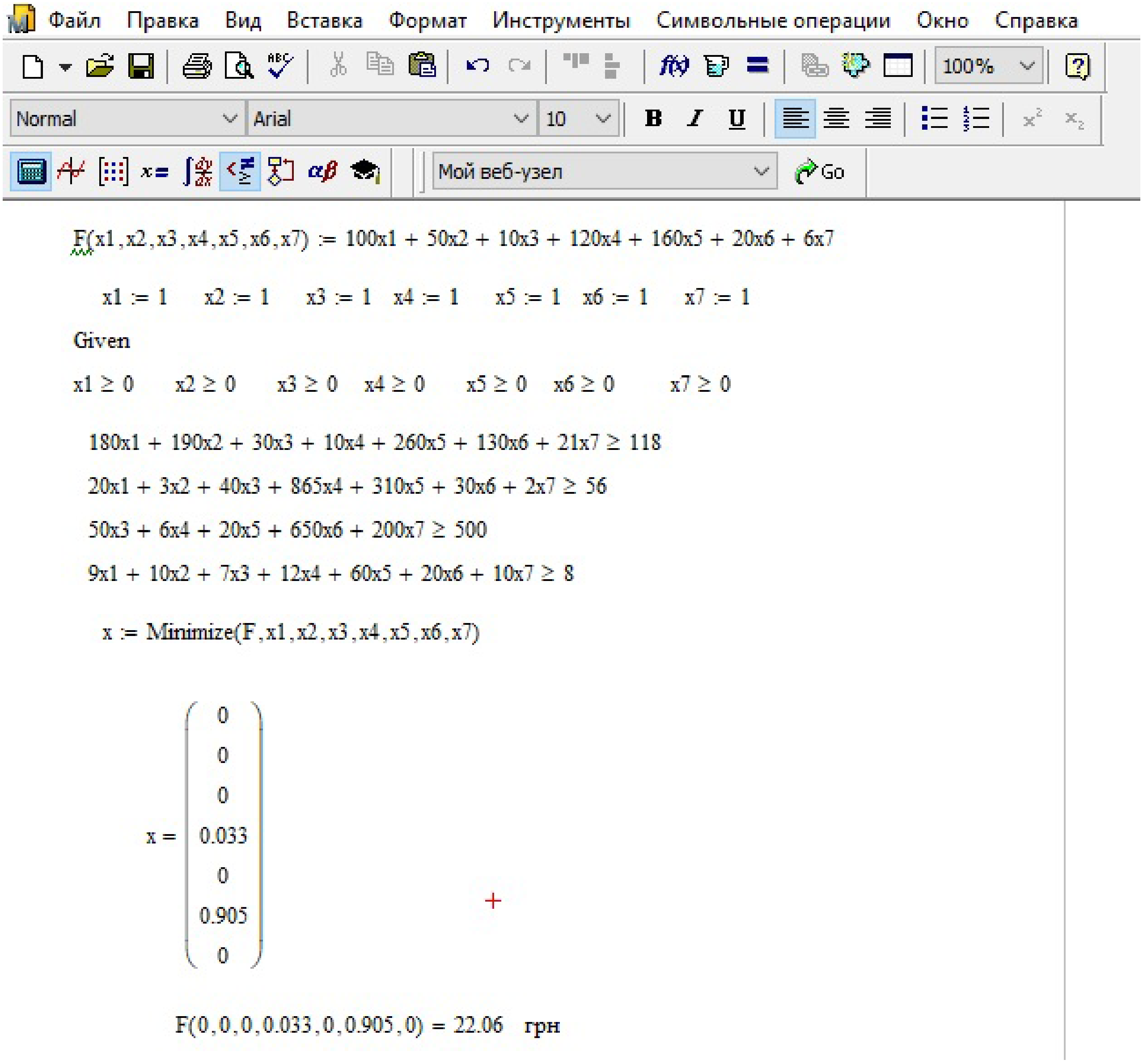
$$9x_1 + 10x_2 + 5x_3 + 12x_4 + 60x_5 + 20x_6 + 10x_7 \geqslant 8$$

Крім того, так як людина споживає, а не виділяє продукти, жоден з аргументів x_i не може бути від'ємним. Звідси:

$$x_1 \geqslant 0; x_2 \geqslant 0; x_3 \geqslant 0; x_4 \geqslant 0; x_5 \geqslant 0; x_6 \geqslant 0; x_7 \geqslant 0$$

Тепер ми маємо повний математичний опис завдання. Оскільки всі рівняння й нерівності у цій задачі лінійні, ми маємо завдання лінійного програмування.

Розглянемо розв'язання цієї задачі в MathCAD, що наочно проілюстровано на малюнку нижче



Орієнтовний відповідь така: Щоб отримати всі необхідні поживні речовини при мінімальній вартості продуктів людина не повинна їсти ні м'яса, ні риби, ні молока, ні сиру, ні картоплі. Але можна споживати близько 30-40 г масла в день і 900 г крупи. При цьому вартість денного раціону складає близько 22 гривень.

Висновки

Таким чином, актуальним завданням сьогодення є підвищення рівня навчально-виховного процесу, створення новітніх, а також удосконалення існуючих засобів навчання, високий рівень викладання практики та теорії. Для покращення рівня викладання використовують інноваційні технології при навчанні, а зокрема зростає роль використання комп'ютерів в навчальному процесі.

Розглянутий нами приклад доводить зручність використання СКМ MathCAD під час навчального процесу. Вбудовані функції дозволяють побудувати інтерактивний документ для проведення необхідних розрахунків з візуалізованим супроводом. Саме це й забезпечує наочність процесу пошуку необхідного розв'язку, що позитивно впливає на результати навчального процесу.

Література

1. *PTC User's Guide. Mathcad 14.0* [Электронный ресурс]. — Режим доступа: http://ru.scribd.com/doc/3239532/Mathcad-14-Users-Guide.
2. *Жалдак М.І.* Математика з комп'ютером: посібник для вчителів. — 2-ге вид. / М.І. Жалдак, Ю.В. Горошко, Є.Ф. Вінниченко — К.: НПУ імені М.П. Драгоманова, 2009. — 282 с.
3. *Львов М.С.* Концепція програмної системи підтримки математичної діяльності / М.С.Львов // Комп'ютерно-орієнтовані системи навчання: зб. наук. пр. — К.: НПУ ім. М.П. Драгоманова, 2003. — Вип. 7. — С. 36–48.
4. *Рамський Ю.С.* Місце і роль математичної освіти в інформаційному суспільстві / Ю.С. Рамський, К.І. Рамська // Інформатика та інформаційні технології в навчальних закладах. — 2008. — № 6 (18). — С. 53–59.
5. *Яньков В.Ю.* Лабораторный практикум по Маткаду. Модуль 3 Моделирование в Маткаде. Для преподавателей, аспирантов и студентов технических, технологических и экономических специальностей всех форм обучения. / В.Ю. Яньков — М.: МГУТУ, 2009. — 68 с.

Kaidan Nataliia V., Kiva Larisa G.

Donbas State Pedagogical University, Sloviansk, Ukraine.

The use of the computer mathematics system mathcad in solving linear programming problems of practical direction

The article discusses the peculiarities of computer mathematics system MATHCAD in solving linear programming problems of practical direction. The general description of computer mathematics system MATHCAD is presented. The solution of the problem, which belongs to the class of optimal control is presented.

Keywords: *MathCAD, linear programming problems, systems of computer mathematics.*

УДК 378.147.88

Мехтієва З.В.

викладач вищої кваліфікаційної категорії, Слов'янський енергобудівний технікум

e-mail: mehtievazv@gmail.com

ОРГАНІЗАЦІЯ ДОСЛІДНИЦЬКОЇ ДІЯЛЬНОСТІ СТУДЕНТІВ НА ЗАНЯТТЯХ З МАТЕМАТИКИ ЗАСОБАМИ ІНФОРМАЦІЙНИХ ТЕХНОЛОГІЙ

В статті описані переваги впровадження у навчальний процес елементів дослідницької діяльності, які автор використовує в своїй роботі. Висвітлено значення саморозвитку студента, створення позитивного емоційного забарвлення заняття. Піднімається питання ефективності застосування технологій, які сприяють творчості і викладача, і студента, їх співпраці. Звертається увага на доцільність використання ІКТ на заняттях з елементами дослідницької діяльності студентів.

Ключові слова: *дослідницька діяльність студентів, інформаційні технології навчання, прикладні комп'ютерні програми.*

Вступ

Одним з ефективних шляхів підвищення якості навчально-виховного процесу є організація навчально-виховної діяльності студентів. В процесі навчання студенти озброюються практичними навичками пошукової діяльності, створюються умови для формування творчої особистості, інтелектуального розвитку вихованця.

Актуальне питання про зниження навчального навантаження студентів у сучасних умовах, надає дещо іншого значення терміну «дослідницька діяльність студентів», вона розглядається як інструмент підвищення якості освіти.[3]

В освіті залучення студентів до методів професійної діяльності відбувається за рахунок впровадження в навчальний процес елементів дослідницької діяльності. Адже вона є одним з універсальних засобів пізнання дійсності, формує і розвиває особистість в сучасному мінливому світі. Результатом такої роботи має стати знання, отримане в результаті пошуку відповідно до поставленої мети та створених обставин.[4]

При цьому викладач має врівноважити частку використання класичної наукової традиції дослідження та інноваційної, неординарної постановки питання. Тому одним з вагомих факторів досягнення успіху реалізації дослідницької діяльності студентів є внутрішня мотивація та інтерес до проблеми дослідження самого викладача.

Основна частина.

Серед етапів алгоритму роботи студента над конкретною задачею слід виділити відокремлення предмету дослідження, формування гіпотези дослідження, проведення експерименту, перевірка отриманих результатів, формулювання висновків. Дотримання студентами певного алгоритму роботи над поставленою задачею дає можливість сформувати навички, що стануть у нагоді в майбутній професійній діяльності, а саме: вміння побачити проблему, сформулювати досліджувану задачу, провести пошук та обробку інформації, враховуючи особливості процесів, виконати аналіз результатів.

Навчання у формі дослідження створює творчу атмосферу, яка сприяє активізації пізнавальної діяльності та розвитку критичного мислення студентів, а головне — формує навички дослідження як засобу осмислення дійсності шляхом самостійного поглиблення знань.

В сучасних умовах інформаційного суспільства застосування засобів ІКТ безумовно підсилює ефект існуючих технологій навчання. Хоча через брак якісної техніки, доступу до мережі в багатьох навчальних закладах виникають певні проблеми щодо всебічного і раціонального впровадження комп'ютерів в навчальний процес. При застосуванні дослідницького методу для підвищення ефективності процесу, моделювання технічних об'єктів та створення яскравої наочності раціональним засобом є використання комп'ютера.[5]

З іншого боку, сучасний студент має бути вмотивований до саморозвитку та самовдосконалення, що досягається через використання в процесі навчання комп'ютерної техніки. Використання ІКТ на заняттях, це не тільки дань моді, але і ефективний чинник для розвитку мотивації молоді. В більшості випадків студентам дуже подобається працювати в комп'ютерному класі, їм надана велика свобода дій, і деякі з них можуть «блиснути» своїми пізнаннями у сфері технологій.

Однак однією зі складових ефективного використання сучасних інформаційних засобів і ресурсів є формування в студентів вміння адекватно оцінювати та проводити відбір потрібних даних серед величезного обсягу інформації, що є доступною в мережі Інтернет. Використання Інтернету в дослідницькій діяльності студентів опосередковується, в першу чергу, можливістю віддаленого доступу до інформаційних джерел.

Найпоширенішими прийомами організації комунікації та обміну інформацією між студентами в процесі роботи над дослідженням на сьогодні є засоби, що ґрунтуються на Інтернет-технологіях. Серед них — чати, відеоконференції, форуми, електронна пошта, веб-сайти, онлайн-бібліотеки. Важливою основою для набуття знань є інтерактивна взаємодія не тільки між студентом і викладачем, а і між студентами в групі, що працюють над проблемою. Ефективність цих методів пов'язана з проведенням навчальних комп'ютерних конференцій і дискусій, в процесі яких всі учасники мають можливість обмінюватись інформацією як у синхронному, так і в асинхронному режимі.

Незамінними є засоби комп'ютерної техніки при використанні активних методів навчання: мозкові атаки, ролеві ігри, дебати, моделювання, дискусійні групи.

Останнім часом дуже поширеним став обмін короткими повідомленнями. Таким чином, в обговоренні поставленої проблеми та в пошуку гіпотези можуть бути задіяні дослідники різних вікових груп, напрямів підготовки та місць проживання.

Однак слід мати на увазі і те, що шкідливим для правильного функціонування дослідницького методу при обговоренні та розв'язанні поставленої проблеми може бути надмірна кількість повідомлень або їх невчасність. Велика кількість отриманих висловлювань може дезорієнтувати дитину і звести нанівець весь попередньо досягнений результат. Тому важливою фінкцією викладача є також спостереження за чатом і його координування у разі необхідності.[1]

Крім використання в дослідницькій діяльності можливостей мережі Інтернет, ще одним з напрямків використання комп'ютера в практичних роботах з математики вважають обчислювальні експерименти.

Для формування у студентів навичок, необхідних в подальшій практичній професійній діяльності, для розвитку їх аналітичного мислення при проведенні обчислювальних експериментів при дослідженні поставленої задачі використовують відомі математичні пакети типу Mapple, MathCad і Mathematica, що, в свою чергу, дає можливість реалізовувати інтеграцію математики з іншими дисциплінами. Комп'ютерні програми, які використовуються для проведення практичних обчислень та побудов при дослідженні явища чи процесу, формують у студентів навички роботи з комп'ютером при проведенні чисельних експериментів, вдосконалюють зміст традиційного навчання, дають можливість поєднувати традиційні й комп'ютерні методи навчання, сполучають процес навчання і процес наукового дослідження, дозволяють використовувати в процесі навчання принцип евристики.

Найбільш практичними у використанні в процесі вивчення курсу математики виявилися пакети програм MathCad та AdvancedGrapher. Робота з цими додатками є повністю зрозумілою для студентів 1 та 2 курсів і не потребує від них значного об'єму спеціальних знань з інформатики або програмування, за винятком найпростіших понять.

При вивченні алгебраїчного матеріалу з програмою GRAN розкриваються можливості обчислення значень визначених інтегралів та похідних, розв'язування рівнянь графічним способом. Студенти створюють геометричні зображення за зразком, на відміну від традиційних побудов створене зображення динамічне.

AdvancedGrapher дає можливість не тільки побудови графіка, а і його дослідження. В одній системі координат можна будувати графіки кількох функцій, змінюючи при цьому колір графіків.

Так, наприклад, на занятті «Застосування похідної до дослідження реальних процесів і розв'язування оптимізаційних задач» викладач зауважує, що на попередніх заняттях студентами було засвоєне одне з фундаментальних понять алгебри і початків аналізу — похідну. За допомогою похідної студенти досліджували і будували графіки функції, знаходили найбільше і найменше значення функції на відрізку, складали рівняння дотичної. І, мабуть, у них виникало питання: «А навіщо?»

Викладач розподіляє студентів на групи, кожна з яких отримує своє проблемне питання, щоб відповісти на питання: «Навіщо?» Одна з них, група «Інформатики», отримує завдання проілюструвати на графіках функцій та їх похідних співвідношення точок екстремумів та нулів похідної, інтервалів монотонності функції та знаків першої похідної, інтервалів опуклості та знаків другої похідної.

Наприкінці заняття представник групи звітує, що було запропоновано побудувати за допомогою програми AdvancedGrapher в одній системі координат графіки заданої функції та її похідних першого та другого порядку. Графіки були побудовані, порівняні та досліджені. Проаналізувавши отримані результати, група сформулювала необхідну та достатню умови існування екстремуму та алгоритм дослідження функції на монотонність. Досить актуальним та ефективним в навчальному процесі залишається відеозаняття чи відеофрагмент заняття, який викладач може розмістити на сайті навчального закладу або на сторінках соціальних мереж, які студенти відвідують більш охоче. Це допомагає студентам краще засвоїти матеріал, що був розглянутий на занятті, та отримати допомогу в підготовці домашнього завдання.[2]

Також в процесі дослідження певної проблеми студенти і самі охоче знімають відеофрагменти, в яких демонструють результати своєї роботи. Такі відео, розміщенні в мережі Інтернет, можуть коментувати їхні друзі, надавати свої пропозиції або зауваження. Тому пошук інформації та її результативна презентація заохочує студентів до роботи та розвиває навчально-пізнавальний інтерес до вивчення математики.

Висновки

Сьогодення пропонує досить багатий спектр використання ІКТ та Інтернету в навчальному процесі. Їх спільною метою є створення принципово нового навчального середовища, яке допоможе підвищити рівень математичної освіти студентів, підготує їх до життя в сучасності, де опанування інформаційних технологій є однією з найважливіших компетенцій людини.

Однак разом з тим, навчальний процес залишається підпорядкованим викладачу, а широке застосування комп'ютерної техніки в ньому не зменшує ролі викладача в підготовці кваліфікованих фахівців.

Література

1. *Артемчук Г.* Методика організації науково-дослідницької роботи : навч. посіб / Г.Артемчук. — К: Форум, 2000. — 271 с.
2. *Колеснікова Л.В.* Інноваційні комп'ютерні технології в практичній діяльності вчителя математики / Л.В.Колеснікова // Математика в школах України. — № 1-2, 2012. — С.4-6
3. *Пінчук О.П.* Використання педагогічних програмних засобів на уроках математики / О.П. Пінчук // Математика в школах України, — № 19-20, 2006. — С.34
4. *Савенков А.І.* Психологія дослідного навчання: навч. посіб. / А.І. Савенков — М.: Академія розвитку, 2005.— 450 с.
5. *Шипілова І.Ю.* Використання комп'ютерних технологій на уроках математики: методичний посібник / І.Ю. Шипілова, 2009. — 40 с.

Mekhtyeva Zoia V.
Slovyansk power engineering technical school, Sloviansk, Ukraine.

Organization of students' research activities at mathematics lessons by means of information technologies

The article describes the advantages of introducing elements of research activity into the educational process that the author uses in his work. The significance of self-development of a student, creation of a positive emotional coloring of the lesson is highlighted. The question of the effectiveness of the use of technologies that promote creativity both the teacher and the student, their cooperation is raised.

Keywords: *research activity of students; information technology of training; applied computer programs.*

УДК 378.147.88

Щенсневич О.В., Щенсневич Ю.Ю.

[1] *викладач, відокремлений структурний підрозділ Національного авіаційного університету, Слов'янський коледж НАУ*

[2] *викладач, відокремлений структурний підрозділ Національного авіаційного університету, Слов'янський коледж НАУ*

e-mail: schensnevichov@gmail.com, yuraschensnevich@gmail.com

ПРОГРАМНА РЕАЛІЗАЦІЯ АЛГОРИТМУ ФЛОЙДА-ВОРШЕЛЛА, ДЛЯ ПОШУКУ НАЙКОРОТШИХ ШЛЯХІВ МІЖ УСІМА ПАРАМИ ВЕРШИН ГРАФУ

В статті наведено реалізацію алгоритму Флойда-Воршелла для виводу матриці, яка містить довжини найкоротших шляхів між усіма вершинами графа, з використанням матриці суміжності та псевдокоду. Також виводить шукану максимальну найкоротшу відстань між двома вершинами засобами мови програмування С++.

Ключові слова: *граф, алгоритм, найкоротший шлях, алгоритм Флойда-Воршелла.*

Вступ

Найбільш вражаючим прикладом графа в сучасному світі є Інтернет. Саме інтернет з усім його різноманіттям і складністю форм є типовим графом. Його вузли - це адреси сторінок файлів, що знаходяться в мережі, а ребра — гіперпосилання, що зв'язують їх в місці. З іншого боку, комп'ютери, зв'язані між собою та утворюють всесвітню павутину, також можна розглядати як граф. Та інтернетом дуже складно управляти, оскільки передбачити всі можливі дзвінки і зв'язки просто ніхто не в силах. Для того щоб браузер на вашому комп'ютері міг завантажити сторінку, яка фізично знаходиться в Австралії, дані повинні пройти через кілька серверів, тобто у них буде існувати своєрідний маршрут у мережі.[2] Він буде автоматично вибиратися серверами таким чином, щоб його довжина була мінімальною (з точки зору графа), а дані по можливості проходили через незавантажені сегменти мережі. Через те, що навантаження в різних ділянках мережі постійно та випадковим чином змінюється, навіть якщо ви завантажите з одного й того ж сайту сторінку два рази поспіль з інтервалом в декілька секунду, вона може прийти до вас двома різними шляхами. Якщо бути більш точними та згадати про те, що в мережі існують не сторінки в готовому вигляді, а пакети з даними, і навіть одна сторінка може складатися з декількох пакетів, то стає ясно: навіть фрагменти однієї сторінки можуть приходити в Інтернеті з одного комп'ютера на інший різними шляхами. Завдання доставки пакетів даних з одного вузла мережі (хоста) в інший називається завданням маршрутизації, і вона аж ніяк не є тривіальною.

Основна частина

Алгоритм Флойда-Воршелла – динамічний алгоритм для знаходження найкоротших відстаней між усіма вершинами зваженого орієнтованого графа. Розроблено в 1962 році Робертом Флойдом і Стівеном Воршеллом. При цьому алгоритм вперше розробив і опублікував Бернард Рой в 1959 році, але ця публікація пройшла повз увагу.[3]

Алгоритм

Нехай вершини графа $G = (V, E)$, $|V| = n$ пронумеровані від 1 до n і введено позначення d_{ij}^k для довжини найкоротшого шляху від i до j, який окрім самих вершин i, j проходить тільки через вершини $1 \ldots k$. Очевидно, що d_{ij}^0 – довжина (вага) ребра (i, j), якщо воно існує (в іншому разі його довжина може бути позначена як ∞). [5]

Існує два варіанти значення d_{ij}^k, $k \in 1, \ldots, n$:

1. Найкоротший шлях між i, j не проходить через вершину k, тоді $d_{ij}^k = d_{ij}^{k-1}$.
2. Існує більш короткий шлях між i, j, що проходить через k, тоді він спочатку йде від i до k, а потім від k до j. У цьому випадку, очевидно, $d_{ij}^k = d_{ik}^{k-1} + d_{kj}^{k-1}$.

Таким чином, для знаходження значення функції досить вибрати мінімум з двох позначених значень.

Тоді рекурентна формула для d_{ij}^k має вигляд: d_{ij}^0 — довжина ребра $d_{ij}^k = min(d_{ij}^{k-1}, d_{ik}^{k-1} + d_{kj}^{k-1}$ Алгоритм Флойда-Воршелла послідовно обчислює всі значення d_{ij}^k, $\forall i, i$ для k від 1 до n. Отримані значення d_{ij}^n є довжинами найкоротших шляхів між вершинами i, j. [4]

Псевдокод

На кожному кроці алгоритм генерує матрицю W, $w_{ij} = d_{ij}^n$. $W_{ij} = d_{ij}^n$. Матриця W містить довжини найкоротших шляхів між усіма вершинами графа. Перед роботою алгоритму матриця W заповнюється довжинами ребер графа.[1]

```
for k = 1 to n
  for i = 1 to n
    for j = 1 to n
      W[i] [j] = min (W [i] [j], W [i] [k] + W [k] [j])
```

Складність алгоритму

Три вкладених цикли містять операцію, яка виконується за константний час. $\sum\limits_{n,n,n} O(1) = O(n^3)$, тобто алгоритм має кубічну складність, при цьому простим розширенням можна отримати також інформацію про найкоротші шляхи, крім відстані між двома вузлами записувати в матрицю ідентифікатор першого вузла в дорозі.

Реалізація алгоритму Флойда-Воршелла мовою програмування C++.

Вхідними даними будуть кількість вершин графа n $(1 \leqslant n \leqslant 100)$ та в наступних n рядках знаходиться по n чисел, які задають матрицю суміжності графа. Де -1 – це відсутність ребра між вершинами, а будь-яке невід'ємне число – присутність ребра даної ваги. Всі числа по модулю не перевищують 100. На головній діагоналі матриці завжди розташовані нулі.

У вихідних даних отримаємо матрицю найкоротших відстаней між парами вершин, тобто n рядків по n чисел. j-е число в i-ому рядку повинно дорівнювати вазі найкоротшого шляху з вершини i у вершину j. Виводиться шукане максимальна найкоротша відстань.

```
#include <cstdlib>
#include <iostream>
 using namespace std;
int main(){
    int n;
    cout<<"n=";
    cin >> n;
    cout<<"Input matrix A \n";
    int a[n][n];
    long long maxr = 0;
    for( int i=0 ; i<n ; i++ ){
        for( int j=0 ; j<n ; j++ ){
            cin >> a[i][j];
        }
    }
```

```
    for( int k=0 ; k<n ; k++ ){
        for( int i=0 ; i<n ; i++ ){
            for( int j=0 ; j<n ; j++ ){
                if(i != j && a[i][k] != -1 && a[k][j] != -1){
                    if(a[i][j] == -1){
                        a[i][j] = a[i][k] + a[k][j];
                    }
                        else
                    {
                        a[i][j] = min(a[i][j], a[i][k] + a[k][j]);
                    }
                }
            }
        }
    }
       cout<< "matrix \n" ;
       for( int i=0 ; i<n ; i++ ){
        for( int j=0 ; j<n ; j++ ){
            cout << a[i][j] << " ";
        }
        cout<< endl;
    }
    for( int i=0 ; i<n ; i++ )
    {
        for( int j=0 ; j<n ; j++ )
        {
            if(a[i][j] > maxr) maxr = a[i][j];
        }
    }
    cout << "max rastoyanie = " <<maxr << endl;
}
```

Висновки

Алгоритм відшукання найкоротших шляхів Флойда-Воршелла використовують в мережах з централізованим управлінням інформаційними потоками, з метою автоматизації процесу та обліку трафіку. В реаліях сьогодення ми шукаємо найкоротший шлях для вирішення задач. Обираючи правильний алгоритм, можна скоротити витрати ресурсів та заощадити час.

Література

1. *Бондаренко М.Ф.* Комп'ютерна дискретна математика. / М.Ф. Бондаренко, Н.В. Білоус — Харків. «Компанія Сміт», 2004. — 480 с.
2. *Вишневский В.М.* Теоретические основы проектирования компьютерных сетей. / В.М. Вишневский — М.: Техносфера, 2003. — 512 с.
3. *Кормен Томас Х.* Алгоритмы: построение и анализ. / Томас Х. Кормен, Чарльз И. Лейзерсон, Рональд Л. Ривест, Клиффорд Штайн., — М.: «Вильямс», 2006. — 1296 с.
4. *Левитин А.В.* Алгоритмы. Введение в разработку и анализ. / А.В. Левитин. — М.: Вильямс, 2006. — 576 с.
5. *Нікольський Ю.В.* Дискретна математика. / Ю.В. Нікольський, В.В. Пасічник, Ю.М. Щербина, — Київ. Видавнича група BHV, 2007. — 368 с.

Shchensnevych Olga V., Shchensnevych Yurii Y.
Slavyansk College of National aviation university, Sloviansk, Ukraine.

Program implementation of the Floyd-Warshall algorithm, for searching the shortest paths between all pairs of the vertices of the graph

The article presents the implementation of the Floyd-Warshall algorithm for outputting a matrix, which contains the lengths of the shortest paths between all vertices of the graph, using the adjacency matrix and pseudo-code. It also displays the desired maximum shortest distance between the two vertices using the C ++ programming language.

Keywords: *graph, algorithm, shortest path, Floyd-Warshall algorithm.*

УДК 378

Стьопкін А.В., Турка Т.В., Чернякова Я.В.

[1] *кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри МНМ та МНІ, ДВНЗ «ДДПУ»*

[2] *кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри МНМ та МНІ, ДВНЗ «ДДПУ»*

[3] *студентка 4 курсу фізико-математичного факультету, ДВНЗ «ДДПУ»*

e-mail: stepkin.andrey@ukr.net, tvturka@gmail.com, chernyan20@gmail.com

ВИКОРИСТАННЯ ОФІСНИХ ДОДАТКІВ У ПІДГОТОВЦІ МАЙБУТНІХ УЧИТЕЛІВ

У статті розглянуто питання підготовки майбутніх вчителів до використання інформаційних технологій у професійній діяльності. Наведено приклад практичного застосування системи прикладного програмного забезпечення, запропонованого для діяльності вчителя.

Ключові слова: *офісні додатки, тестовий редактор, табличний процесор, комп'ютерні засоби навчання, сучасні інформаційні технології.*

Вступ

Постановка проблеми. Розвиток і впровадження інформаційних технологій в усі сфери життя суспільства, зокрема систему освіти безперечно впливають на методи та організацію роботи вчителя. У сучасному інформаційному суспільстві пред'являють нові вимоги до вчителів, такі як: постійне опанування нових ІКТ технологій та відстеження тенденцій їх розвитку, підвищення ефективності використання ІКТ у навчальному процесі. Серед сучасних тенденцій, що суттєво впливають на освіту, необхідно підкреслити активний розвиток мобільних технологій, створення відкритого електронного контенту, появу освітніх віртуальних та ігрових технологій, використання соціальних мереж для навчання та ін. Але не слід забувати і про прикладне програмне забезпечення, таке як текстові редактори, табличні процесори. Їх використання доцільно в роботі вчителя і як класного керівника.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Глобальні зрушення, що пов'язані зі становленням і розвитком інформаційного суспільства в Україні, зумовлюють поширення інформаційних технологій на всі сфери життєдіяльності сучасної людини. Як зазначає О.П. Дубас, у рамках інформаційного суспільства формується, так званий, соціальний інтелект, який реалізується через інформаційне поле, утворене засобами масової інформації та комунікації [3]. Дослідженням проблем, пов'язаних з використанням сучасних інформаційних технологій у навчальному процесі загальноосвітніх та вищих навчальних закладів присвячені роботи М.І. Жалдака [4], Г.К. Селевко [6] та ін. Питання, пов'язані із використанням інформаційних технологій у навчальному процесі ВНЗ, висвітлені у роботах Р. Гуревича [2].

Постановка завдання. Висвітлення значення і місця інформаційно-комунікаційних технологій, а саме вивчення офісних додатків у фаховій підготовці майбутніх вчителів. Обґрунтування застосування комп'ютерних програм в освіті як одного з перспективних засобів, розгляд програмних засобів, що використовуються в навчальних закладах.

Виклад основного матеріалу.

Інформаційні технології (ІТ), за М. Скопенем — це сукупність прийомів, методів та засобів послідовного якісного перетворення інформації на таких етапах інформаційних процесів, як збирання, передавання, зберігання, обробка, накопичення. ІТ — це алгоритм перетворення інформації з використанням відповідних методів і засобів [7]. Процес інформатизації освіти передбачає використання комп'ютерних технологій у навчальному процесі у двох напрямах: як об'єкт вивчення і як засіб навчання, виховання, розвитку й діагностики засвоєння змісту навчання. Комп'ютерні засоби навчання (КЗН) трактуємо як програмні продукти, які створені та працюють з використанням комп'ютерної, телекомунікаційної техніки й забезпечують творче й активне опанування майбутніми вчителями професійними знаннями, уміннями й навичками, а також надають ефективності подальшій професійно-педагогічній діяльності. На сьогоднішній день розроблено безліч програмних продуктів, що використовуються в інформаційних технологіях навчання (ІТН) на різних ступенях системи освіти.

Розглянемо детальніше програми, які використовуються як вчителями, так і студентами майже кожного дня.

Текстовий редактор — це автономна комп'ютерна програма або пакет програмного забезпечення, призначений для створення та зміни текстових даних в цілому та текстових файлів зокрема. Він має великі можливості створювати, управляти, редагувати та зберігати документи різних типів у різних форматах. Освітні можливості для створення та реалізації документів включають: набір текстів на будь-якій мові з будь-яким набором спеціальних символів; багатий вибір шрифтів, графіки та ефектів шрифтів; будь-який тип форматування абзацу використовуючи необмежену кількість стилів; створення списків, автоматичні списки та автоматична нумерація адрес; вставка ілюстрацій (ілюстрації, зберігаються в окремих файлах в одному файлі з основним документом), будь-який тип зображення і тексту макета; використання шаблону для створення документа.

Редагування документа є найважливішим завданням, для якої призначений текстовий редактор. Потреби редакторської роботи з документом обслуговуються цілим арсеналом засобів, серед яких ми б виділили як найважливіші: контекстний пошук і заміна; перехід до заданої позиції тексту і використання закладок; робота зі структурою документа; перевірка орфографії і граматики.

Текстовий редактор дозволяє завантажувати, переглядати, редагувати і зберігати документи самих різних форматів.

В роботі вчителя редактор може бути застосований для складання календарно-тематичного та поурочного планування, виготовлення карток, малювання схем і діаграм та ін.

Ще один не менш популярний додаток, це табличний процесор. Табличні процесори є спеціальним набором програмного забезпечення для керування електронними таблицями. Електронна таблиця (ЕТ) є еквівалентом комп'ютера для звичайної таблиці, в клітинах (комірках), якої записані дані, різних типів: тексту, дат, формули, чисел.

В роботі вчителя використовується для створення щоквартального журналу, навчально-методичних матеріалів (картки, кросворди), розробки засобів контролю навчальної діяльності (тести, задачі), побудови діаграм та графіків.

Часто дані електронної таблиці потрібно використовувати при складанні різних документів: звітів, листів, договорів та ін. У цьому випадку зручно використовувати злиття даних табличного процесора і текстового редактора.

Злиття застосовується, коли потрібно створити набір документів, наприклад, наклейки з адресами або листи на бланках, які розсилаються великому числу замовників. Кожен лист або наклейка містять як загальні, так і індивідуальні відомості. Наприклад, в листі повинно бути звернення до батьків за прізвищем, ім'ям та по- батькові. Індивідуальні відомості для кожного листа або наклейки надходять з джерела даних.

Покажемо таке злиття на прикладі роботи текстового редактора Word та табличного процесора Excel. Поставимо завдання підготувати розсилку запрошень батьків на класні збори своїх дітей. Процедура злиття складається з декількох етапів.

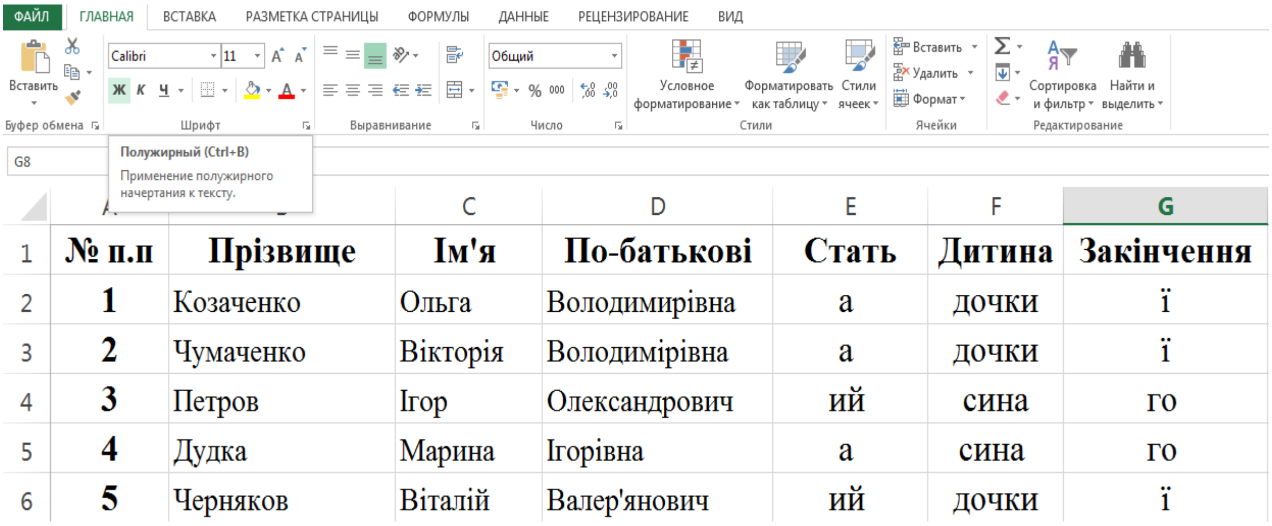
I ЕТАП. Підготовка даних електронної таблиці.

Таблиця, яка призначена для злиття, повинна задовольняти деяким вимогам:

1) В таблиці не повинно бути об'єднаних осередків. Вірніше сказати так:

якщо в таблиці є об'єднані осередки, то треба бути готовим до того, що при експорті об'єднання буде скасовано, і відповідно утворюються зайві порожні рядки і / або стовпці, що може порушити структуру таблиці. Загалом, об'єднані осередки — це зло :)

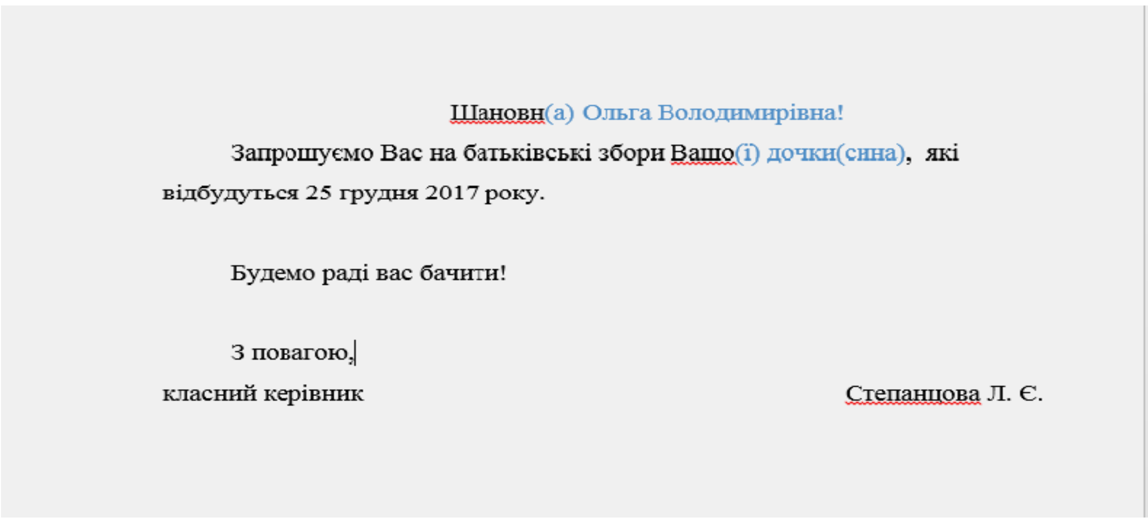
2) Всі стовпці повинні мати унікальні назви, які будуть використовуватися при злитті. Якщо в таблиці відсутній перший рядок з назвами стовпців, то її замінить перший рядок даних, а значить, вона в розсилці участі не братиме.



№ п.п	Прізвище	Ім'я	По-батькові	Стать	Дитина	Закінчення
1	Козаченко	Ольга	Володимирівна	а	дочки	ї
2	Чумаченко	Вікторія	Володимірівна	а	дочки	ї
3	Петров	Ігор	Олександрович	ий	сина	го
4	Дудка	Марина	Ігорівна	а	сина	го
5	Черняков	Віталій	Валер'янович	ий	дочки	ї

II ЕТАП. Підготовка шаблону документа Word. На цьому етапі в текстовому редакторі Word формується документ, в який в подальшому будуть впроваджуватися дані електронної таблиці.

Текст листа буде однаковим за винятком звернення, статі та дитини. Ці дані будуть імпортуватися з таблиці Excel (виділено синім).



Шановн(а) Ольга Володимирівна!

Запрошуємо Вас на батьківські збори Вашо(ї) дочки(сина), які відбудуться 25 грудня 2017 року.

Будемо раді вас бачити!

З повагою,

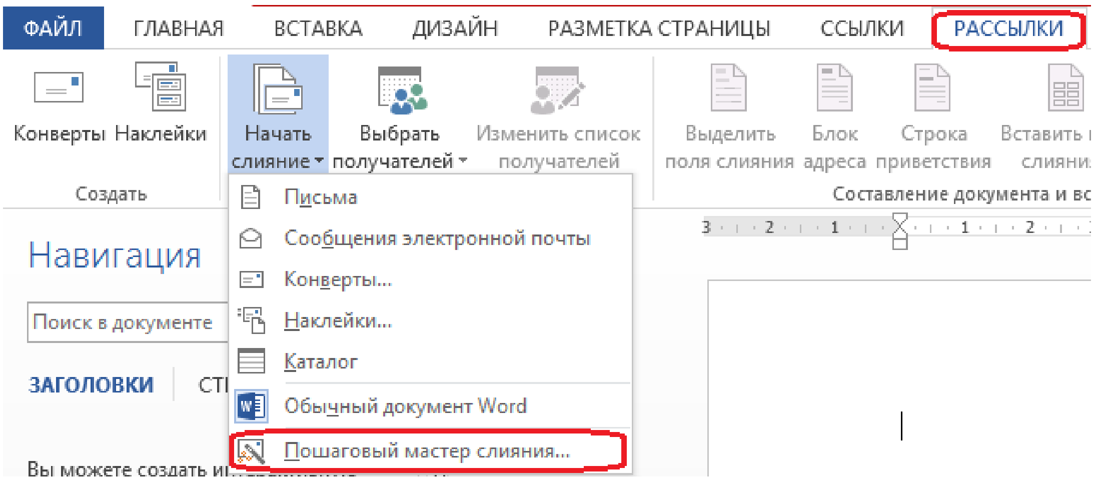
класний керівник Степанцова Л. Є.

Таким чином, на цьому етапі в документі Word друкується загальний для всіх листів текст.

III ЕТАП. Робота Майстра злиття MS Word

Відкриваємо файл з шаблоном листа в MS Word.

Найпростіше здійснити злиття даних, виконуючи вказівки Майстра злиття. У версіях після Word2003 Майстер злиття запускається за допомогою кнопки **Почати злиття** на вкладці **Розсилки.**



Робота Майстра злиття включає 6 кроків.

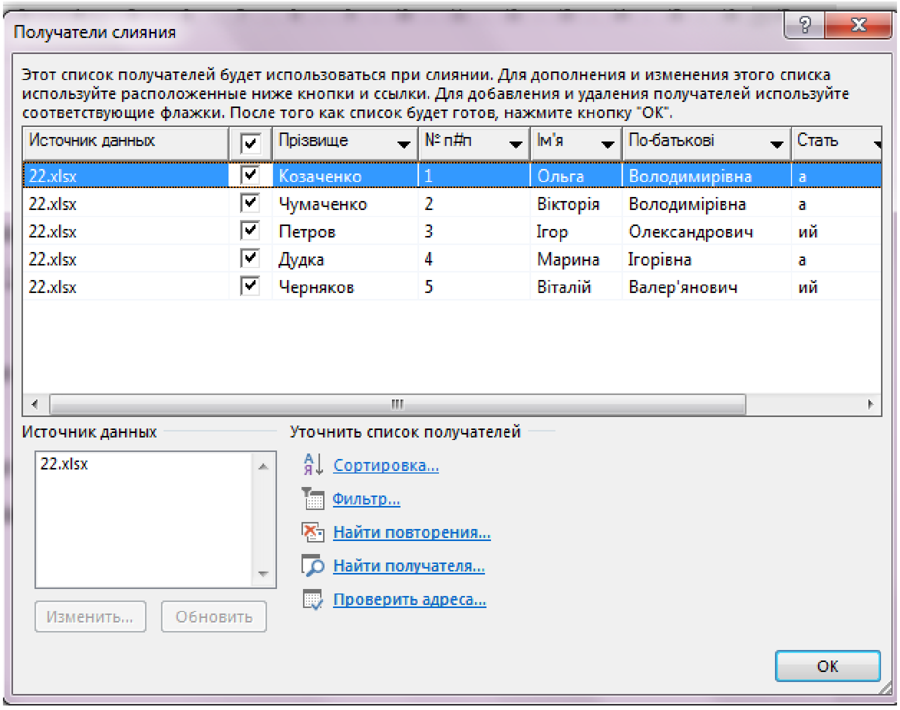
1 крок: вибираємо тип документа для розсилки, в нашому випадку — **Листи.**

2 крок: вибираємо документ, на основі якого буде створюватися розсилка, це може бути відкритий поточний документ, шаблон або існуючий документ. При виборі варіанту **Шаблон** або **Існуючий документ** з'являється можливість вказати потрібний файл в Провіднику. Ми вибираємо **Поточний документ.**

3 крок: вибираємо одержувачів. У нашому випадку джерелом даних буде таблиця Excel, значить відзначаємо варіант **Використання списку.** Потім за допомогою кнопки **Огляд** ... вибираємо потрібний файл в Провіднику.

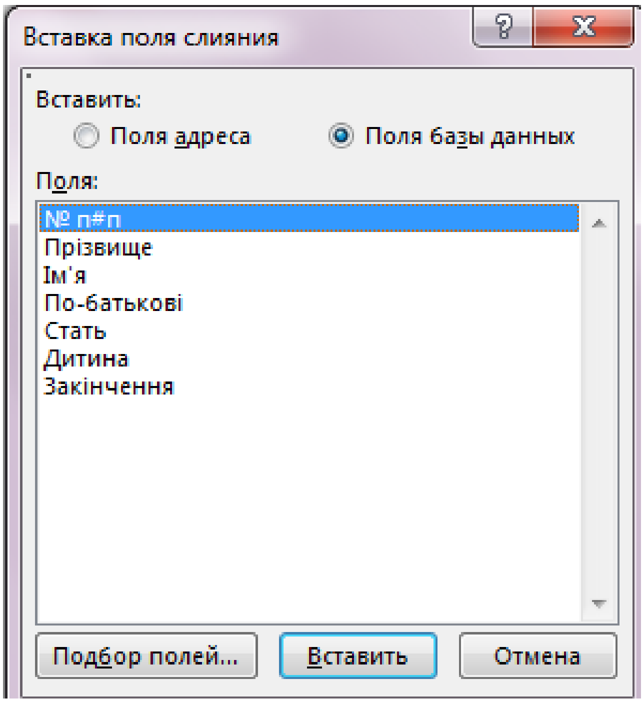
Після вибору файлу відкривається діалогове вікно з обраної таблицею. Якщо нам потрібні всі записи, то відразу натискаємо ОК. При необхідності можна список відсортувати, відфільтрувати потрібні записи, або знайти їх за допомогою відповідних команд. Можливості фільтрації і пошуку тут, звичайно, набагато біднішими, ніж в Excel, але зробити найпростішу вибірку по текстовим або числовим значенням можна. Крім того, можна вибрати записи для розсилки вручну за допомогою прапорців.

У нашому випадку потрібно встановити фільтр по полю Розсилка за значенням «так». Фільтр можна встановити, клацнувши мишкою по назві поля і вибравши «так», або скориставшись посиланням Фільтр в цьому ж діалоговому вікні.

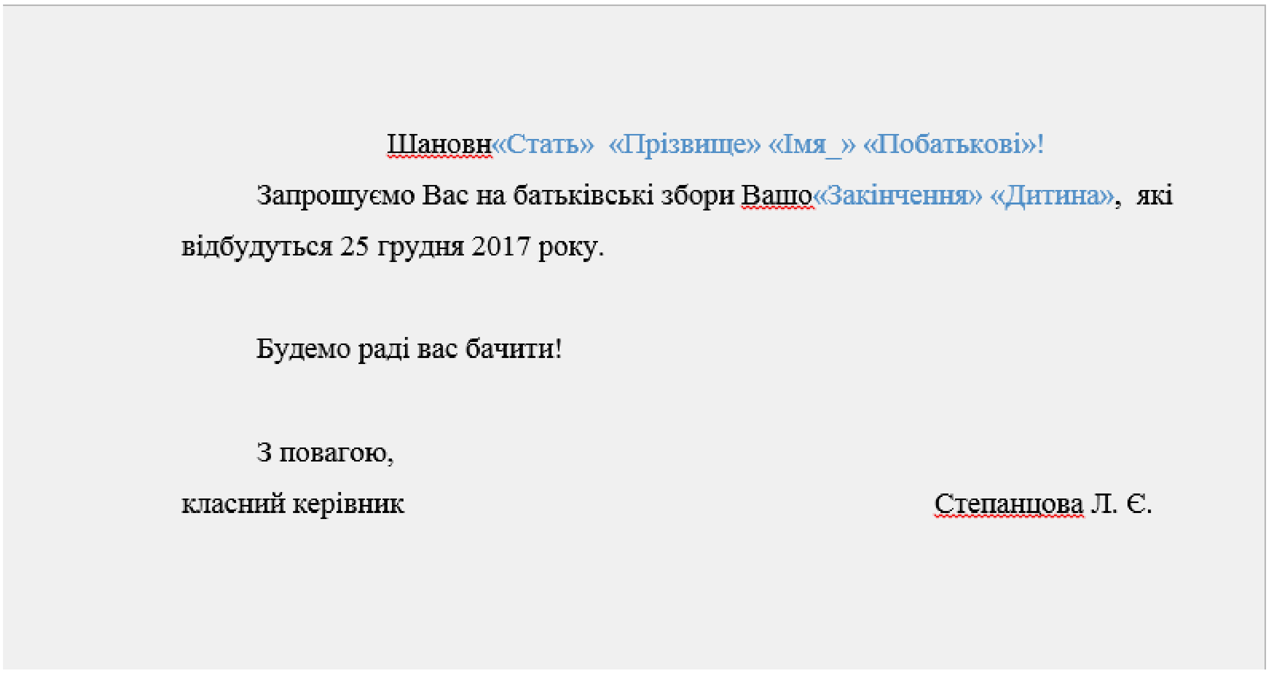


4 крок: вставляємо потрібні поля в документ. Перш, ніж вибрати один із запропонованих Майстром варіантів роботи, слід встановити курсор в тексті туди, куди Ви хочете вставити дані. Якщо Ви забули це зробити, теж нічого страшного, поля можна вставити в будь-яке місце документа, а потім перенести. У нашому випадку ставимо курсор після слова «Шановн ». Так як нам потрібні окремі поля, вибираємо **Інші елементи ...**

Розкривається діалогове вікно для вибору полів злиття.



Після того, як ви підставите кожен пункт в текст, повинно бути отримане наступне зображення.



Шановн«Стать» «Прізвище» «Імя_» «Побатькові»!

Запрошуємо Вас на батьківські збори Вашо«Закінчення» «Дитина», які відбудуться 25 грудня 2017 року.

Будемо раді вас бачити!

З повагою,
класний керівник Степанцова Л. Є.

5 крок: переглядаємо отримані листи, використовуючи кнопки навігації.

6 крок: вибираємо варіант **Змінити частину листів** і переглядаємо отриманий документ. При необхідності його можна відредагувати, зберегти як окремий файл або відправити на друк.

Шановна Козаченко Ольга Володимирівна!

Запрошуємо Вас на батьківські збори Вашої дочки, які відбудуться 25 грудня 2017 року.

Будемо раді вас бачити!

З повагою,
класний керівник Степанцова Л. Є.

Шановна Чумаченко Вікторія Володимірівна!

Запрошуємо Вас на батьківські збори Вашої дочки, які відбудуться 25 грудня 2017 року.

Будемо раді вас бачити!

З повагою,
класний керівник Степанцова Л. Є.

Висновки.

В процесі підготовки майбутніх учителів особлива увага повинна приділятися інформаційним технологіям, зокрема офісним додаткам, використанням їх і в навчальній роботі, і в роботі класного керівника.

Література

1. *Абдулова Л.Ш.* Особенности формирования исследовательской компетентности студентов / Л. Ш. Абдулова // Известия Южного федерального университета. Педагогические науки. — 2009. — № 1. — С. 157–162.
2. *Гуревич Р.С.* Інформаційно-комунікаційні технології в сучасній професійній освіті / Р.С. Гуревич, М.Ю. Кадемія // Теорія і методика професійної освіти. — 2011. — № 1. — С. 1–9.
3. *Дубас О.П.* Інформаційний розвиток сучасної України у світовому контексті: політологічний аналіз: автореф. дис. на здобуття наук. ступеня канд. політ. наук: спец. 23.00.02 — Методологія та методи соціологічних досліджень // О.П.Дубас. — К., 2004. — 23 с.

4. *Жалдак М.І.* Комп'ютерно-орієнтовані системи навчання – становлення і розвиток // Науковий часопис Національного педагогічного університету імені М.П. Драгоманова. Серія 2: комп'ютерно-орієнтовані системи навчання: Зб. наук. праць – К.: НПУ імені М.П. Драгоманова., 2010. — №9 (16) — С. 3–9.
5. *Крамаренко Т.А.* Метод. вказівки з підготовки та проходження обчислювал. практики для студ. спец. 7.04020101 Математика / Т.А. Крамаренко, С.В. Онопченко; Держ. заклад «Луганський нац. ун-т імені Тараса Шевченка». — Луганськ: Вид-во ДЗ «ЛНУ імені Тараса Шевченка», 2014.–75.
6. *Селевко Г.К.* Педагогические технологии на основе информационно- коммуникационных средств / Г. К. Селевко. — М.: НИИ школьных технологий, 2005. — 208 с. — (Серия «Энциклопедия образовательных технологий»).
7. *Скопень М.М.* Комп'ютерні інформаційні технології в туризмі / М. М. Скопень. — К. : Кондор, 2005. — 301 с.

Stopkin A.V., Turka T.V., Chernyakova Y.V.
Donbas State Pedagogical University, Sloviansk, Ukraine.

Use of official applications for future teachers training

The article deals with the issues of preparing future teachers for the use of information technologies in their professional activities. An example of a practical application of an application software system proposed for future teacher activity is given.

Keywords: *office applications, word processor, table processor, computer learning tools, modern information technology.*

УДК 37.016:512.13

Беседін Б.Б., Кадубовський О.А., Фролов К.О.

[1] *канд. педагогічних наук, доцент каф. МНМ та МНІ, ДВНЗ «ДДПУ»*

[2] *канд. фізико-математичних наук, доцент каф. математики та інформатики, ДВНЗ «ДДПУ»*

[3] *студент 1 курсу (магістратура) фізико-математичного факультету, ДВНЗ «ДДПУ»*

e-mail: besedin_boris@ukr.net, kadubovs@ukr.net, frolov.krl@gmail.com

ПРО АЛГОРИТМІЧНИЙ ПІДХІД ДО РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ ТА НЕРІВНОСТЕЙ (З ОДНІЄЮ ЗМІННОЮ) З ПАРАМЕТРОМ

В статті висвітлюється авторський досвід застосування алгоритмічного підходу під час навчання методам розв'язання лінійних рівнянь та нерівностей з параметром. В термінах, що не виходять за межі програмного змістового модуля «Множини та операції над ними» для учнів 8 класу з поглибленим вивченням математики, в статті запропоновано п'ять алгоритмів до розв'язання лінійних рівнянь та нерівностей з параметром та наведено два ілюстративні приклади.

Ключові слова: *лінійне рівняння з параметром, лінійна нерівність з параметром, алгоритми розв'язання.*

Вступ

Оволодіння вміннями та навичками розв'язання задач з параметрами є важливою складовою математичної підготовки випускників шкіл. Помилково було б вважати, що важливість таких задач обумовлена лише підготовкою учнів до успішного проходження зовнішнього незалежного оцінювання і тому починати вчитись розв'язувати задачі з параметром слід безпосередньо на завершальному етапі підготовки до ЗНО, тобто у випускному класі. Таким задачам потрібно приділяти увагу з самого початку вивчення систематичного курсу алгебри (7 клас). В процесі їх розв'язування збагачується математична культура учня, удосконалюються технічні навички. Задачі з параметром є потужним засобом систематизації знань учнів, активізації їх пізнавальної активності. Процес розв'язування таких задач носить, як правило, творчий характер, сприяє формуванню навичок дослідницької діяльності.

В роботах математиків та методистів [3; 4; 5; 6], в шкільних підручниках [1; 2] методи розв'язування вправ з параметром розподіляються на графічні та аналітичні.

Серед графічних виділяють два основні методи:
1) побудова геометричного образу заданого рівняння (нерівності чи системи) на координатній площині Oxy;
2) побудова геометричного образу заданого рівняння (нерівності чи системи) на координатній площині Oxa.

Із числа аналітичних методів виділяють наступні:
1) штучні, вони залежать від конкретної вправи і є досить різноманітними;
2) методи заміни змінної;
3) методи, при яких необхідно робити перевірку.

Першими задачами з параметрами, з якими зустрічаються учні, є лінійні рівняння (7 кл.) та лінійні нерівності (8 кл.). Учням пропонуються до застосування наступні граф-схеми алгоритмів розв'язання:

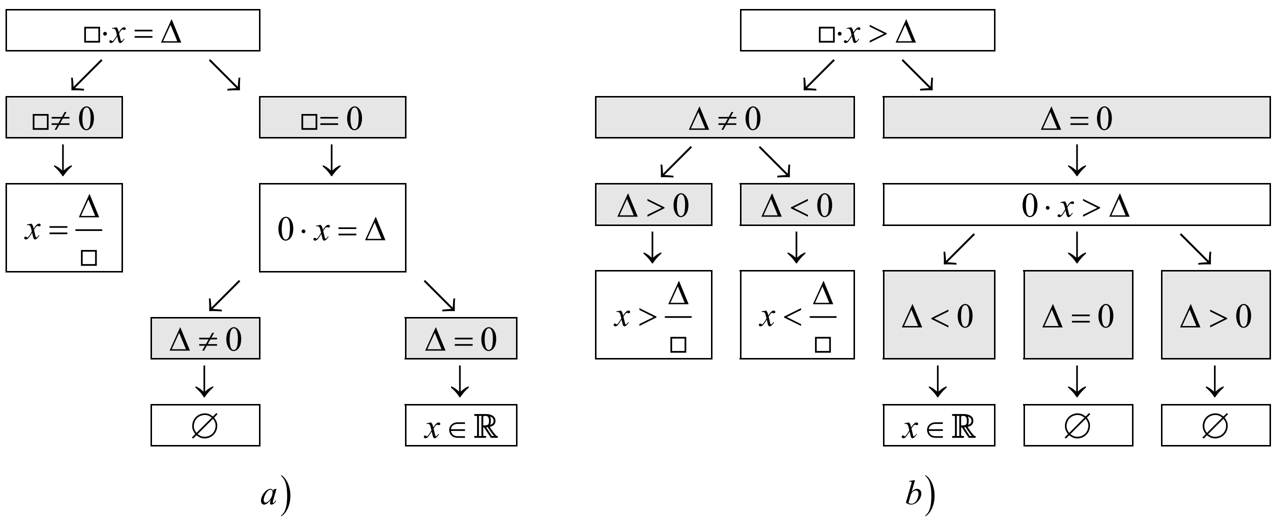


Рис. 1:
a) «граф-схема алгоритму розв'язання лінійного рівняння з параметром»;
b) «граф-схема алгоритму розв'язання лінійної нерівності з параметром»

Проте, не дивлячись на поради-застереження «щодо необхідності врахування області допустимих значень параметра», досить поширеними помилками при використанні зазначених алгоритмів є «сприймання» $\square$ і $\triangle$ як *двох незалежних одна від іншої величин-параметрів*, причому які *завжди існують* (тобто, *якщо* $\triangle \neq 0$, *то обов'язково* $\triangle > 0$ *або ж* $\triangle < 0$).

Автори даної статті вважають доцільним та можливим залучення задач з параметром до формування і розвинення алгоритмічної культури учнів. Тому **метою** статті є розробка алгоритмів розв'язання лінійних рівнянь та нерівностей із застосуванням понять та символів теорії множин.

1. Основна частина

1.1. Основні поняття та зауваження.

Означення 1. ([3], [4]) *Нехай $f(a)$ і $g(a)$ — аналітично задані функції параметра a, x — змінна. Тоді*

лінійним рівнянням із параметром будемо називати рівняння виду

$$f(a)\cdot x = g(a) \quad (\text{або ж} \quad f(a)\cdot x + g(a) = 0), \tag{1}$$

лінійною нерівністю із параметром — нерівності виду

$$f(a)\cdot x \asymp g(a), \tag{2}$$

де $\asymp$ — один із чотирьох знаків порівняння: $>$, $\geqslant$, $<$, $\leqslant$.

Очевидно, що як для рівняння (1), так і нерівності (2), областю допустимих значень (ОДЗ) змінної x є вся числова вісь, тобто $x \in (-\infty; +\infty)$.

Проте, оскільки (за визначенням) $f = f(a)$ і $g = g(a)$, тобто f і g є функціями від параметра (змінного) a, то в загальному випадку навіть для лінійних рівнянь та нерівностей, необхідно розглядати **область допустимих значень параметра** a.

Означення 2. *Областю $D(a)$ допустимих значень параметра a рівняння (1) (нерівності (2)) будемо називати перетин областей визначення $D_f(a)$ і $D_g(a)$ функцій $f(a)$ та $g(a)$ відповідно.*

Також очевидно, що якщо для функції $f = f(a)$ в загальному випадку розглядати «пряму параметра» ($a \in (-\infty; +\infty)$), то:
при певних значеннях параметра a функція $f(a)$ може взагалі не існувати;
при певних значеннях параметра a — може набувати додатних значень;
при певних значеннях параметра a — може набувати від'ємних значень;
при певних значеннях a — може виконуватися рівність $f(a) = 0$.

Зауваження 1. *Якщо ввести позначення для наступних множин $A = \{a|f(a) = 0\}$, $B = \{a|f(a) < 0\}$, $C = \{a|f(a) > 0\}$ і $D = \{a|f(a) - \nexists\}$,*
то доповнення $\overline{A}$ множини A до «прямої параметра» (як «універсальної множини») становить $\overline{A} = B \cup C \cup D$.

З урахуванням зазначеного, автори вважають незайвим наголосити, що значення параметра a, які є розв'язками системи $\begin{cases} f(a) = 0 \\ g(a) \neq 0, \end{cases}$ більш ніж доцільно частіше інтерпретувати, як елементи множини

$$(D_g(a) \bigcap \{a|f(a) = 0\}) \setminus \{a|g(a) = 0\}.$$

1.2. Лінійні рівняння 1-го степеня з параметром.

Розв'язання рівняння виду

$$f(a) \cdot x = g(a) \qquad (3)$$

Введемо наступні позначення:

$$D_{f,g}(a) = D_f(a) \bigcap D_g(a), \quad A_1 = R \backslash D_{f,g}(a),$$

де: $D_f(a)$ — область визначення функції $f = f(a)$;

$D_g(a)$ — область визначення функції $g = g(a)$.

1) Нехай $f(a) \neq 0$. Тоді при всіх a, що задовольняють умови

$$\begin{cases} a \in D_{f,g}(a) \\ f(a) \neq 0 \end{cases}$$

рівняння (3) має єдиний корінь $x = \dfrac{g(a)}{f(a)}$.

Таким чином, якщо $a \in A_2 \equiv D_{f,g}(a) \setminus \{a | f(a) = 0\}$, то дане рівняння має один зазначений корінь.

2) Нехай тепер $f(a) = 0$. Тоді можливими є два наступних випадки:

$$g(a) \neq 0 \quad \text{і} \quad g(a) = 0.$$

2.1) Якщо $g(a) \neq 0$, то при всіх a, що задовольняють умови

$$\begin{cases} a \in D_{f,g}(a) \\ g(a) \neq 0 \end{cases}$$

рівняння (3) не має коренів. Таким чином, якщо $a \in A_3 \equiv (D_g(a) \bigcap \{a | f(a) = 0\}) \setminus \{a | g(a) = 0\}$, то дане рівняння не має коренів.

2.2) Якщо ж $g(a) = 0$, то при всіх a, що задовольняють умови

$$\begin{cases} f(a) = 0 \\ g(a) = 0 \end{cases}$$

рівняння (3) набуває вид $0 \cdot x = 0$, і тому має безліч коренів, а саме — $x \in R$.

Таким чином, якщо $a \in A_4 \equiv \{a | f(a) = 0 = g(a)\}$, то будь-яке $x \in R$ є коренем даного рівняння.

Відповідь: якщо $a \in A_1$, то рівняння не має сенсу;
якщо $a \in A_2$, то рівняння має один корінь $x = \frac{g(a)}{f(a)}$;
якщо $a \in A_3$, то рівняння не має коренів;
якщо $a \in A_4$, то рівняння має безліч коренів – $x \in R$.

Зауваження 2. *Якщо одна із зазначених вище множин A_i є порожньою множиною ($\emptyset$), то відповідну складову у відповіді писати не потрібно.*

1.3. «Строгі» лінійні нерівності з параметром

Розв'язання нерівності виду

$$f(a) \cdot x > g(a) . \tag{4}$$

Введемо наступні позначення:

$$D_{f,g}(a) = D_f(a) \bigcap D_g(a) , \quad A_1 = R \backslash D_{f,g}(a) ,$$

де: $D_f(a)$ — область визначення функції $f = f(a)$;

$D_g(a)$ — область визначення функції $g = g(a)$.

1) Нехай $f(a) > 0$. Тоді (при відповідних значеннях параметра a) нерівність (4) є рівносильною до нерівності

$$x > \frac{g(a)}{f(a)} \tag{5}$$

Таким чином, якщо $a \in A_2 \equiv D_g(a) \bigcap \{a | f(a) > 0\}$, то розв'язками даної нерівності є $x \in \left(\frac{g(a)}{f(a)}; +\infty\right)$.

2) Нехай $f(a) < 0$. Тоді (при відповідних значеннях параметра a) нерівність (4) є рівносильною до нерівності

$$x < \frac{g(a)}{f(a)} \tag{6}$$

Таким чином, якщо $a \in A_3 \equiv D_g(a) \bigcap \{a | f(a) < 0\}$, то розв'язками даної нерівності є $x \in \left(-\infty; \frac{g(a)}{f(a)}\right)$.

3) Нехай $f(a) = 0$. Тоді (при відповідних значеннях параметра a) нерівність (4) набуває вид

$$0 \cdot x > g(a) \tag{7}$$

та можливими є два суттєво різні випадки: $g(a) \geqslant 0$ і $g(a) < 0$.

3.1) Якщо $g(a) \geqslant 0$, то нерівність (7) не має розв'язків.

3.2) Якщо ж $g(a) < 0$, то розв'язками нерівності (7) є множина всіх дійсних чисел.

Таким чином:

якщо $a \in A_4 \equiv \{a | f(a) = 0\} \bigcap \{a | g(a) \geqslant 0\}$, то нерівність не має розв'язків;

якщо $a \in A_5 \equiv \{a | f(a) = 0\} \bigcap \{a | g(a) < 0\}$, то $x \in (-\infty; +\infty)$.

Відповідь: якщо $a \in A_1$, то нерівність не має сенсу;
якщо $a \in A_2$, то розв'язками нерівності є $x \in \left(\frac{g(a)}{f(a)}; +\infty\right)$;
якщо $a \in A_3$, то розв'язками нерівності є $x \in \left(-\infty; \frac{g(a)}{f(a)}\right)$;
якщо $a \in A_4$, то нерівність не має розв'язків;
якщо $a \in A_5$, то розв'язками нерівності є $x \in (-\infty; +\infty)$.

1.4. «Нестрогі» лінійні нерівності з параметром

Розв'язання нерівності виду

$$f(a)\cdot x \geqslant g(a). \tag{8}$$

Нехай, як і в попередньому випадку, $D_{f,g}(a) = D_f(a) \bigcap D_g(a)$, $A_1 = R \backslash D_{f,g}(a)$, де $D_f(a)$, $D_g(a)$ — області визначення функцій $f = f(a)$ та $g = g(a)$ відповідно. Тоді, з очевидними змінами, маємо наступний алгоритм розв'язання нерівності (8).

1) Нехай $f(a) > 0$. Тоді (при відповідних значеннях параметра a) нерівність (8) є рівносильною до нерівності

$$x \geqslant \frac{g(a)}{f(a)}. \tag{9}$$

Таким чином, якщо $a \in A_2 \equiv D_g(a) \bigcap \{a | f(a) > 0\}$, то розв'язками нерівності (8) є $x \in \left[\frac{g(a)}{f(a)}; +\infty\right)$.

2) Нехай $f(a) < 0$. Тоді (при відповідних значеннях параметра a) нерівність (8) є рівносильною до нерівності

$$x \leqslant \frac{g(a)}{f(a)}. \tag{10}$$

Таким чином, якщо $a \in A_3 \equiv D_g(a) \bigcap \{a | f(a) < 0\}$, то розв'язками нерівності (8) є $x \in \left(-\infty; \frac{g(a)}{f(a)}\right]$.

3) Нехай $f(a) = 0$. Тоді (при відповідних значеннях параметра a) нерівність (8) набуває вид

$$0 \cdot x \geqslant g(a) \tag{11}$$

та можливими є два суттєво різні випадки: $g(a) > 0$ і $g(a) \leqslant 0$.

3.1) Якщо $g(a) > 0$, то нерівність (11) не має розв'язків.

3.2) Якщо ж $g(a) \leqslant 0$, то розв'язками нерівності (11) є множина всіх дійсних чисел.

Таким чином:
якщо $a \in A_4 \equiv \{a | f(a) = 0\} \bigcap \{a | g(a) > 0\}$, то нерівність не має розв'язків;
якщо $a \in A_5 \equiv \{a | f(a) = 0\} \bigcap \{a | g(a) \leqslant 0\}$, то $x \in (-\infty; +\infty)$.

Відповідь: якщо $a \in A_1$, то нерівність не має сенсу;
якщо $a \in A_2$, то розв'язками нерівності є $x \in \left[\frac{g(a)}{f(a)}; +\infty\right)$;
якщо $a \in A_3$, то розв'язками нерівності є $x \in \left(-\infty; \frac{g(a)}{f(a)}\right]$;
якщо $a \in A_4$, то нерівність не має розв'язків;
якщо $a \in A_5$, то розв'язками нерівності є $x \in (-\infty; +\infty)$.

Приклад 1. *Розв'язати рівняння*

$$x\sqrt{a+1} - \frac{a^2-1}{a-2} = 0. \tag{12}$$

Подамо рівняння (12) у вигляді

$$\sqrt{a+1}\cdot x = \frac{a^2-1}{a-2}. \tag{13}$$

Тоді:

$f = f(a) = \sqrt{a+1}\,, \quad D_f\,(a) = [-1;+\infty)\,;$
$g = g(a) = \frac{a^2-1}{a-2}\,, \quad D_g\,(a) = R\backslash\{2\}\,;$
$D_{f,g}\,(a) = D_f\,(a)\bigcap D_g\,(a) = [-1;2)\bigcup(2;+\infty)\,;$
$A_1 = R\backslash D_{f,g}\,(a) = (-\infty;-1)\bigcup\{2\}\,.$

1) *Нехай* $f\,(a) \neq 0$. *Оскільки* $f(a) = 0 \Leftrightarrow a = -1$, *то*
$A_2 \equiv D_{f,g}\,(a)\setminus\{a|f\,(a) = 0\} \equiv (-1;2)\bigcup(2;+\infty)\,.$

Таким чином, якщо $a \in (-1;2)\bigcup(2;+\infty)$, *то дане рівняння має єдиний корінь* $x = \dfrac{a^2-1}{(a-2)\sqrt{a+1}}\,.$

2) *Нехай тепер* $f\,(a) = 0 \Leftrightarrow a = -1$. *Тоді можливими є два наступних випадки:*

$$g\,(a) = \frac{a^2-1}{a-2} \neq 0 \quad i \quad g\,(a) = \frac{a^2-1}{a-2} = 0\,.$$

Оскільки $g\,(a) = \dfrac{a^2-1}{a-2} = 0 \Leftrightarrow a = \pm 1$, *то*

2.1) $A_3 \equiv (D_g\,(a)\bigcap\{a|f\,(a) = 0\})\setminus\{a|g\,(a) = 0\} \equiv \emptyset\,;$

2.2) $A_4 \equiv \{a|f\,(a) = 0 = g(a)\} = \{-1\}$, *звідки маємо: якщо* $a \in \{-1\}$ *(*$a = -1$*), то будь-яке* $x \in R$ *є коренем даного рівняння.*

Відповідь: *якщо* $a \in (-\infty;-1)\bigcup\{2\}$, *то рівняння не має сенсу;*
якщо $a \in (-1;2)\bigcup(2;+\infty)$, *то рівняння має*
один корінь $x = \dfrac{a^2-1}{(a-2)\sqrt{a+1}}$;
якщо $a = -1$, *то рівняння має*
безліч коренів – $x \in (-\infty;+\infty)$.

Задача 1. *Розв'яжіть рівняння*

$$x\cdot\frac{a^2-1}{a-2} - \sqrt{a+1} = 0. \tag{14}$$

Приклад 2. *Розв'язати нерівність*

$$x \cdot \frac{a^2-1}{a-2} \geqslant \sqrt{a+1}. \tag{15}$$

В нашому випадку:
$f = f(a) = \frac{a^2-1}{a-2}$, $D_f\,(a) = R \backslash \{2\}$ *;* $g = g(a) = \sqrt{a+1}$, $D_g\,(a) = [-1; +\infty)$ *;*
$D_{f,g}(a) = D_f(a) \bigcap D_g(a) = [-1;2) \cup (2;+\infty)$ *;* $A_1 = (-\infty; -1) \cup \{2\}$.
1) *Нехай* $f\,(a) > 0$ *. Тоді при відповідних значеннях параметра* a *(розв'язках нерівності* $\frac{a^2-1}{a-2} > 0$ *, що належать* $D_g\,(a) = [-1; +\infty)$ *) нерівність (15) є рівносильною до нерівності* $x \geqslant \frac{(a-2)\sqrt{a+1}}{a^2-1}$.

Оскільки $\frac{a^2-1}{a-2} > 0 \Leftrightarrow a \in (-1;1) \cup (2;+\infty)$ *, то*
$A_2 \equiv D_g(a) \cap \{a | f\,(a) > 0\} \equiv (-1;1) \cup (2;+\infty)$ *. І тому при значеннях* $a \in (-1;1) \cup (2;+\infty)$ *розв'язками нерівності (15) є* $x \in \left[\frac{(a-2)\sqrt{a+1}}{a^2-1}; +\infty\right)$.
2) *Нехай* $f\,(a) < 0$ *. Тоді при відповідних значеннях параметра* a *(розв'язках нерівності* $\frac{a^2-1}{a-2} < 0$ *, що належать* $D_g\,(a) = [-1; +\infty)$ *) нерівність (15) є рівносильною до нерівності* $x \leqslant \frac{(a-2)\sqrt{a+1}}{a^2-1}$.

Оскільки $\frac{a^2-1}{a-2} < 0 \Leftrightarrow a \in (-\infty;-1) \cup (1;2)$ *, то*
$A_3 \equiv D_g(a) \cap \{a | f\,(a) < 0\} \equiv (1;2)$ *. І тому при значеннях параметра* $a \in (1;2)$ *розв'язками нерівності (15) є* $x \in \left(-\infty; \frac{(a-2)\sqrt{a+1}}{a^2-1}\right]$.
3) *Нехай* $f\,(a) = 0$ *. Тоді при відповідних значеннях* a *(коренях рівняння* $\frac{a^2-1}{a-2} = 0$ *, що належать* $D_g\,(a) = [-1; +\infty)$ *) нерівність (15) набуває вид*

$$0 \cdot x \geqslant \sqrt{a+1} \tag{16}$$

та можливими є два суттєво різні випадки: $\sqrt{a+1} > 0$ *і* $\sqrt{a+1} \leqslant 0$.

3.1) *Якщо* $\sqrt{a+1} > 0 \Leftrightarrow a \in (-1; +\infty)$ *, то (16) не має розв'язків.*

3.2) *Якщо ж* $\sqrt{a+1} \leqslant 0 \Leftrightarrow \sqrt{a+1} = 0 \Leftrightarrow a = -1$ *, то розв'язками нерівності (16) є множина всіх дійсних чисел.*

Оскільки $f(a) = \frac{a^2-1}{a-2} = 0 \Leftrightarrow a = \pm 1$ *, то:*
якщо $a \in A_4 \equiv \{a | f\,(a) = 0\} \cap \{a | g\,(a) > 0\} \equiv \{1\}$ *, то нерівність (15) не має розв'язків;*
якщо ж $a \in A_5 \equiv \{a | f\,(a) = 0\} \cap \{a | g\,(a) \leqslant 0\} \equiv \{-1\}$ *, то* $x \in (-\infty; +\infty)$.

Відповідь: *якщо* $a \in (-\infty; -1) \cup \{2\}$*, то нерівність не має сенсу;*
якщо $a \in (-1;1) \cup (2;+\infty)$*, то* $x \in \left[\frac{(a-2)\sqrt{a+1}}{a^2-1}; +\infty\right)$*;*
якщо $a \in (1;2)$*, то* $x \in \left(-\infty; \frac{(a-2)\sqrt{a+1}}{a^2-1}\right]$*;*
якщо $a = 1$*, то нерівність не має розв'язків;*
якщо $a = -1$*, то* $x \in (-\infty; +\infty)$.

2. Алгоритми до розв'язування лінійних рівнянь та нерівностей з параметром

Кожен з пунктів (1), 2), 3), ...) в наведених нижче алгоритмах слід розглядати як **вимогу-завдання** до знаходження відповідних значень параметра a. Щоб не переобтяжувати алгоритми супровідною текстовою складовою, зазначені вимоги-завдання доцільно подавати у вигляді відповідних множин.

Алгоритми 1, 2 і 3 є безпосередніми наслідками пунктів 1.2, 1.3 та 1.4 відповідно. Алгоритми 4 і 5 доцільно запропонувати учням в якості завдання для самостійного «переодержання».

Крім того, якщо одна з множин A_i є порожньою множиною ($\emptyset$), то, як було зазначено раніше, відповідну складову у відповіді писати не потрібно.

Також хочемо наголосити, що запропоновані нижче алгоритми не є самоціллю та не повинні стати «зазубреним керівництвом» до розв'язання лінійних рівнянь та нерівностей з параметром. Навпаки, вони повинні бути результатом переосмислення класичних граф-схем та покликані наштовхнути на розуміння необхідності виконання відповідних кроків, пов'язаних зі знаходженням необхідних значень параметра.

З іншого боку, маємо надію, що запропонований підхід дозволить забезпечити належний рівень математичної строгості та посилить розуміння зв'язків між змістовими модулями у шкільному курсі математики.

Алгоритм 1 до розв'язання рівняння $f(a) \cdot x = g(a)$

1) $D_f(a)$ – область визначення $f = f(a)$;
2) $D_g(a)$ – область визначення $g = g(a)$;
3) $D_{f,g}(a) \equiv D_f(a) \bigcap D_g(a) \Leftrightarrow D_{f,g}(a) \equiv \left\{ a \,\middle|\, \begin{cases} a \in D_f(a) \\ a \in D_g(a) \end{cases} \right\}$;
4) $A_1 \equiv R \backslash D_{f,g}(a)$;
5) $F_0 \equiv \{a | f(a) = 0\}$;
6) $G_0 \equiv \{a | g(a) = 0\}$;
7) $A_2 \equiv D_{f,g}(a) \backslash F_0$;
8) $A_3 \equiv (D_g(a) \bigcap F_0) \backslash G_0$;
9) $A_4 \equiv F_0 \bigcap G_0$.

Відповідь:

якщо $a \in A_1$, то рівняння не має сенсу;
якщо $a \in A_2$, то рівняння має один корінь $x = \frac{g(a)}{f(a)}$;
якщо $a \in A_3$, то рівняння не має коренів;
якщо $a \in A_4$, то рівняння має безліч коренів – $x \in (-\infty; +\infty)$.

Алгоритм 2 до розв'язання нерівності $f(a) \cdot x > g(a)$

1) $D_f(a)$ – область визначення $f = f(a)$;
2) $D_g(a)$ – область визначення $g = g(a)$;
3) $D_{f,g}(a) \equiv D_f(a) \bigcap D_g(a)$;
4) $A_1 \equiv R \backslash D_{f,g}(a)$;
5) $F_0 \equiv \{a | f(a) = 0\}, F_+ \equiv \{a | f(a) > 0\}, F_- \equiv \{a | f(a) < 0\}$;
6) $A_2 \equiv D_g(a) \bigcap F_+$;
7) $A_3 \equiv D_g(a) \bigcap F_-$;
8) $G_{0+} \equiv \{a | g(a) \geqslant 0\}, G_- \equiv \{a | g(a) < 0\}$;
9) $A_4 \equiv F_0 \bigcap G_{0+}$;
10) $A_5 \equiv F_0 \bigcap G_-$.

Відповідь:

якщо $a \in A_1$, то нерівність не має сенсу;
якщо $a \in A_2$, то розв'язками нерівності є $x \in \left(\frac{g(a)}{f(a)}; +\infty \right)$;
якщо $a \in A_3$, то розв'язками нерівності є $x \in \left(-\infty; \frac{g(a)}{f(a)} \right)$;
якщо $a \in A_4$, то нерівність не має розв'язків;
якщо $a \in A_5$, то розв'язками нерівності є $x \in (-\infty; +\infty)$.

Алгоритм 3 до розв'язання нерівності $f(a) \cdot x \geqslant g(a)$

1) $D_f(a)$ – область визначення $f = f(a)$;
2) $D_g(a)$ – область визначення $g = g(a)$;
3) $D_{f,g}(a) \equiv D_f(a) \bigcap D_g(a)$;
4) $A_1 \equiv R \backslash D_{f,g}(a)$;
5) $F_0 \equiv \{a | f(a) = 0\}, F_+ \equiv \{a | f(a) > 0\}, F_- \equiv \{a | f(a) < 0\}$;
6) $A_2 \equiv D_g(a) \bigcap F_+$;
7) $A_3 \equiv D_g(a) \bigcap F_-$;
8) $G_+ \equiv \{a | g(a) > 0\}, G_{-0} \equiv \{a | g(a) \leqslant 0\}$;
9) $A_4 \equiv F_0 \bigcap G_+$;
10) $A_5 \equiv F_0 \bigcap G_{-0}$.

Відповідь:

якщо $a \in A_1$, то нерівність не має сенсу;
якщо $a \in A_2$, то розв'язками нерівності є $x \in \left[\frac{g(a)}{f(a)}; +\infty \right)$;
якщо $a \in A_3$, то розв'язками нерівності є $x \in \left(-\infty; \frac{g(a)}{f(a)} \right]$;
якщо $a \in A_4$, то нерівність не має розв'язків;
якщо $a \in A_5$, то розв'язками нерівності є $x \in (-\infty; +\infty)$.

Алгоритм 4 до розв'язання нерівності $f(a) \cdot x < g(a)$

1) $D_f(a)$ – область визначення $f = f(a)$;
2) $D_g(a)$ – область визначення $g = g(a)$;
3) $D_{f,g}(a) \equiv D_f(a) \bigcap D_g(a)$;
4) $A_1 \equiv R \backslash D_{f,g}(a)$;
5) $F_0 \equiv \{a | f(a) = 0\}, F_+ \equiv \{a | f(a) > 0\}, F_- \equiv \{a | f(a) < 0\}$;
6) $A_2 \equiv D_g(a) \bigcap F_+$;
7) $A_3 \equiv D_g(a) \bigcap F_-$;
8) $G_+ \equiv \{a | g(a) > 0\}, G_{-0} \equiv \{a | g(a) \leqslant 0\}$;
9) $A_4 \equiv F_0 \bigcap G_+$;
10) $A_5 \equiv F_0 \bigcap G_{-0}$.

Відповідь: якщо $a \in A_1$, то нерівність не має сенсу;
якщо $a \in A_2$, то розв'язками нерівності є $x \in \left(-\infty; \frac{g(a)}{f(a)}\right)$;
якщо $a \in A_3$, то розв'язками нерівності є $x \in \left(\frac{g(a)}{f(a)}; +\infty\right)$;
якщо $a \in A_4$, то розв'язками нерівності є $x \in (-\infty; +\infty)$;
якщо $a \in A_5$, то нерівність не має розв'язків.

Алгоритм 5 до розв'язання нерівності $f(a) \cdot x \leqslant g(a)$

1) $D_f(a)$ – область визначення $f = f(a)$;
2) $D_g(a)$ – область визначення $g = g(a)$;
3) $D_{f,g}(a) \equiv D_f(a) \bigcap D_g(a)$;
4) $A_1 \equiv R \backslash D_{f,g}(a)$;
5) $F_0 \equiv \{a | f(a) = 0\}, F_+ \equiv \{a | f(a) > 0\}, F_- \equiv \{a | f(a) < 0\}$;
6) $A_2 \equiv D_g(a) \bigcap F_+$;
7) $A_3 \equiv D_g(a) \bigcap F_-$;
8) $G_{0+} \equiv \{a | g(a) \geqslant 0\}, G_- \equiv \{a | g(a) < 0\}$;
9) $A_4 \equiv F_0 \bigcap G_{0+}$;
10) $A_5 \equiv F_0 \bigcap G_-$.

Відповідь: якщо $a \in A_1$, то нерівність не має сенсу;
якщо $a \in A_2$, то розв'язками нерівності є $x \in \left(-\infty; \frac{g(a)}{f(a)}\right]$;
якщо $a \in A_3$, то розв'язками нерівності є $x \in \left[\frac{g(a)}{f(a)}; +\infty\right)$;
якщо $a \in A_4$, то розв'язками нерівності є $x \in (-\infty; +\infty)$;
якщо $a \in A_5$, то нерівність не має розв'язків.

Висновки

Маємо щиру надію, що наведені алгоритми не призведуть до, так званого, «формалізму» під час розв'язування лінійних рівнянь та нерівностей з параметром, а, навпаки — доповнять граф-схеми добре відомих відповідних алгоритмів супровідним типом задач та забезпечуватимуть дотримання належного рівня математичної строгості.

Автори переконані, що запропонований підхід доцільно перенести на рівняння та нерівності (з однією змінною) другого степеня з параметром.

Література

1. Алгебра для загальноосвітніх навчальних закладів з поглибленим вивченням математики : підруч. для 8 кл. загальноосвіт. навч. закладів / А.Г. Мерзляк, В.Б. Полонський, М.С. Якір. — Х. : Гімназія, 2016. — 384 с.
2. Алгебра для загальноосвітніх навчальних закладів з поглибленим вивченням математики : підруч. для 9 кл. загальноосвіт. навч. закладів / А.Г. Мерзляк, В.Б. Полонський, М.С. Якір. — Х. : Гімназія, 2017. — 416 с.
3. *Прус А.В., Швець В.О.* Задачі з параметрами в шкільному курсі математики основної школи. Частина 1. — Х. : Вид. група «Основа», 2016. — 107, [5] с. (Б-ка журн. «Математика в школах України»; Вип. 10 (166)).
4. *Прус А.В., Швець В.О.* Задачі з параметрами в шкільному курсі математики основної школи. Частина 2. — Х. : Вид. група «Основа», 2016. — 137, [7] с. (Б-ка журн. «Математика в школах України»; Вип. 11 (167)).
5. *Прус А.В., Швець В.О.* Задачі з параметрами в шкільному курсі математики. Навчально-методичний посібник. — Житомир: Вид-во «Рута», 2016. — 468 с.
6. *Крамор С.В.* Задачі з параметрами і методи їх розв'язання. — Тернопіль: Навчальна книга – Богдан, 2011. — 416 с.

Besedin Boris B., Kadubovs'kyi Oleksandr A., Frolov Kyrylo O.
Donbas State Pedagogical University, Sloviansk, Ukraine.

On the algorithmic approach to solving linear equations and inequalities (with one variable) with a parameter

The article covers the author's experience in applying of the algorithmic approach during learning of methods for solving linear equations and inequalities with the parameter. In terms which are beyond the scope of the program content module "Sets and operations on them" for schoolchildren of the 8th form with advanced study of mathematics, five solution algorithms are of linear equations and inequalities with the parameter are proposed and two illustrative examples are given.

Keywords: *linear equations with a parameter, linear inequalities with a parameter, solution algorithm.*

УДК 373.5.016:51

Беседін Б.Б., Чечетенко В.О.

[1] *кандидат педагогічних наук, доцент кафедри МНМ та МНІ, ДВНЗ «ДДПУ»*

[2] *студентка 2 курсу (магістратура) фізико-математичного факультету, ДВНЗ «ДДПУ»*

e-mail: besedin_boris@ukr.net

АКТИВІЗАЦІЯ ПІЗНАВАЛЬНОЇ ДІЯЛЬНОСТІ НА УРОКАХ МАТЕМАТИКИ

Стаття присвячена проблемі активізації пізнавальної діяльності учнів на уроках математики, обґрунтуванню необхідності цілеспрямованої та систематичної відповідної роботи вчителя та розробці методичних рекомендацій щодо вирішення цієї проблеми. Автори спираються на власний досвід викладання математики в класах різних профілей навчання.

Ключові слова: *пізнавальна діяльність, процес навчання, активізація діяльності, інтегроване та проективне навчання.*

Вступ

Наша сучасна дійсність характеризується всебічним проникненням математики в різні сфери людської життєдіяльності. Вона являє собою потужний апарат, який сприяє розвитку логічного мислення учнів. Володіння математичними методами, знання їх особливого язика стає обов'язковим елементом загальнолюдської культури. Практичні вміння та навички математичного характеру необхідні для подальшої трудової та професійної підготовки учнів.

Одним з ключових аспектів діяльності вчителя є удосконалення, урізноманітнення, систематизація навчального процесу, спонукання учнів до свідомого та самостійного придбання знань, умінь та навичок.

На сучасному етапі розвитку суспільства інформаційний потік заповнює всі сфери людського життя, але перед нами постає проблема сприймання та фільтрування поданої інформації. Зникає прагнення до пошуку, пізнання, творчості тобто діяльності. Збільшення розумового навантаження на уроках змушує замислитись над тим, як підтримати інтерес учня до матеріалу, що вивчається, та його активність протягом усього уроку.

У психолого-педагогічній літературі переконливо показано, що правильно організована самостійна робота учнів на уроці сприяє значному підвищенню ефективності навчання, активізації навчально-пізнавальної діяльності, але прагнення учнів до самостійної роботи викликане розумінням значущості придбання та обробки поданої вчителем інформації прищеплюється з початкових класів. Тому при підготовці до уроку учитель має спочатку розв'язати принципове завдання, як найдоцільніше організувати передачу нового матеріалу — за допомогою повідомлення, евристичної бесіди або впровадити елементи відкриття, роздумів, розв'язання проблем, чи запропонувати самостійну роботу з матеріалом. Також є необхідним перетворити кожний урок на урок спілкування, мислення, де істина постає як суперечка про істину, як діалог.

Питанням організації навчально-пізнавальної діяльності учнів, методів та шляхів розвитку пізнавальної діяльності, займались на протязі багатьох років такі педагоги: А.М. Алексюк, Н.М. Бібік, М.О. Данілова, І.Я. Лернер, В.О. Онищук, В.О. Сухомлинський, О.Я. Савченко, Г.І. Щукіна та ін. Пошуки оптимальних шляхів розвитку пізнавальних інтересів, шляхів та методів розвитку пізнавальної діяльності представлені в працях: А.М. Алексюка, В.О. Онищука, Г.І. Щукіної, що розглядали пізнавальні інтереси як стимули до пересилення труднощів у навчанні, шляхи до отримання морального задоволення від роботи, намагання розширити знання, знайти нові джерела інформації, до активного мисленевого пошуку [1, С.3].

Основною ціллю даної статті є виявлення та обґрунтування можливості подальшого вдосконалення методики активізації пізнавальної діяльності учнів в процесі вивчення математики.

Основна частина

Зростаюча роль математики у вирішенні задач науково-технічного прогресу ставить перед школою задачу ефективної допомоги учням в оволодінні навчальним матеріалом і властивим цьому предмету стилем мислення, який є важливою компонентою загальної культури сучасної людини. Особливої уваги в цьому плані потребують учні старших класів, до рівня навчально-пізнавальної діяльності яких новий зміст математичної освіти ставить підвищені вимоги.

Основна задача навчання математиці в школі — міцне оволодіння учнями системою математичних знань та вмінь, необхідних у повсякденному житті та трудовій діяльності кожному члену сучасного суспільства, достатніх для вивчення сучасних дисциплін і продовження освіти. В останній час велика увага приділяється підвищенню ефективності процесу навчання в школі, оскільки традиційна організація не відповідає вимогам часу, не створює умов для покращення якості навчання та розвитку учнів.

Тому Міністерством освіти і науки України була запропонована реформа «Нова українська школа», згідно якій замість запам'ятовування фактів та визначень понять учні набуватимуть компетентностей (математична компетентність; інноваційність; підприємливість та фінансова грамотність; компетентності у галузі природничих наук, техніки і технологій та ін.). Все це сприяє динамічній комбінації знань, умінь, навичок, способів мислення, поглядів, цінностей, інших особистих якостей, та визначає здатність особи успішно соціалізуватися, провадити професійну та/або подальшу навчальну діяльність. Тобто формує ядро знань, на яке будуть накладатись уміння цими знаннями користуватися, цінності та навички, що знадобляться в професійному та приватному житті. Також Концепція НУШ пропонує впроваджувати інтегроване та проектне навчання [4], яке сприяє розвитку наукового стилю мислення учнів, формує комплексний підхід до навчальних предметів, навчає здобувати знання самостійно; користуватися дослідницькими методами: збирати інформацію, факти, уміти їх аналізувати з різних точок зору, висувати гіпотези, робити висновки; підвищує якість знань школярів та інтерес учнів до навчання; допомагає більш глибокому усвідомленню і засвоєнню програмного матеріалу; залучає школярів до науково-дослідницької діяльності та ін., тобто активізує учнів не тільки під час уроку, а й в вільний від навчання час.

Для досягнення кращих результатів в навчанні необхідне виконання таких умов:

— формувати в учня позитивне відношення до навчання;

— подача навчального матеріалу повинна бути у певній логічній послідовності;

— демонстрація і закріплення навчального матеріалу повинна супроводжуватись застосуванням різних методів та прийомів, які активізують розумову та творчу діяльність учнів з урахуванням її вікових особливостей;

— обов'язкове використання та закріплення знань на практиці.

Також для активізації пізнавальної діяльності учнів, розвитку їх мислення потрібно використовувати задачі, котрі демонструють зв'язок математики з життям. Прикладом таких задач є задачі з параметрами. Залучення їх до навчального процесу дозволяє природно й педагогічно доцільно імітувати повний процес прикладного математичного дослідження або окремих його етапів, що сприяє розвитку в учнів глибокого стійкого інтересу до дослідження. В процесі розв'язування задач із параметрами учні знайомляться з великою кількістю евристичних прийомів (методів) загального і спеціального характеру.

Їх можна віднести до задач підвищеної складності і тому їх розв'язання передбачає пошук нестандартних способів розв'язку, евристичних прийомів, методів, при цьому можуть бути використані відомості з інших розділів математики, тобто передбачене застосування внутрішньо-предметних зв'язків. Їх різноманітні дидактичні можливості роблять ці задачі потужним засобом активізації пізнавальної діяльності учнів на уроках математики.

Також при вивченні теоретичного матеріалу активізувати розумову діяльність допомагає продумана система питань, яка дозволяє спрямовувати думки учнів у правильному руслі, зробити їх активними учасниками бесіди та направити їх міркування для відкриття чогось нового, незвіданого. Велику роль відіграє запровадження інноваційних технологій, які сприяють розвитку мислення учнів уміння вислухати товариша і зробити свої висновки, вчитися поважати думку іншого і вміти аргументувати власну думку.

За Фрідріхом Діствергом — видатним педагогом-демократом, будь-який метод поганий, якщо привчає учня до пасивності, і гарний, якщо пробуджує в ньому самодіяльність [2, С. 154]. Яким би гарним та методично правильним не був виклад самого навчального матеріалу вчителем, він не гарантує успішного засвоєння учнями нових знань. Засвоєння відбувається лише тоді, коли учень власними зусиллями, власною роботою свого розуму, волі, заставить себе слухати, розуміти, запам'ятовувати. Тому навчально-пізнавальна діяльність учнів є і засобом і в той же час результатом навчання. І тому необхідність активізації навчально-пізнавальної діяльності учнів дуже велика. Якщо її не буде то не відбудеться і повноцінного процесу навчання.

Висновки

На основі аналізу психолого-педагогічної літератури, узагальнення та систематизація власного досвіду викладання математики в школі можна прийти до висновку, що реалізація принципу активності в навчанні має важливе значення, так як навчання й розвиток носять діяльнісний характер і від якості навчання як діяльності залежить результат освіти, розвитку та виховання школярів. На теперішній час ключовою проблемою в розв'язанні задачі підвищення ефективності та якості навчального процесу є саме активізація пізнавальної діяльності школярів. Її особливе значення в тому, що навчання спрямоване не тільки на сприйняття навчального матеріалу, а й на формування відношення учня до самої пізнавальної діяльності, активність є необхідною умовою формування розумових якостей особистості. Бо перетворюючий характер діяльності завжди пов'язаний з активністю суб'єкта. Тому дії вчителя, орієнтовані на активізацію пізнавальної діяльності його учнів, мають бути постійною складовою частиною навчального процесу.

Література

1. *Аніпонова М.* Активізація творчої діяльності учнів на уроках математики. // Математика. — 2009. — Червень. № 23. — С. 3–6
2. *Дистервег А.* Избранные педагогические сочинения. М.: Учпедгиз, 1956. — С. 136–203.
3. *Тягло О.В.* Критичне мислення. М.: Харків, 2008. — С. 187.
4. Міністерство освіти і науки України «Нова Українська школа» // https://mon.gov.ua/ua/tag/nova-ukrainska-shkola

---

Besedin B.B., Chechetenko V.O.
Donbas State Pedagogical University, Sloviansk, Ukraine.

Activation of citizenship activities in maternal materials

The article is devoted to the problem of activating cognitive activity of students at the lessons of mathematics, substantiation of the need for purposeful and systematic work of the teacher and the development of methodological recommendations for solving this problem. The authors rely on their own experience in teaching mathematics in the classes of different teaching profiles.

Keywords: *cognitive activity, learning process, activation of activity, integrated and projective learning.*

УДК 378.016:51:37.018.43

Глазова В.В., Садовський П.П.

[1] *кандидат педагогічних наук, доцент кафедри МНМ та МНІ, ДВНЗ «ДДПУ»*

[2] *студент 1 курсу (магістратура) фізико-математичного факультету, ДВНЗ «ДДПУ»*

e-mail: vvglazova@gmail.com, sadovskii321@gmail.com

ПІДГОТОВКА ВЧИТЕЛЯ МАТЕМАТИКИ ДО РОБОТИ В СИСТЕМІ ЕЛЕКТРОННОГО НАВЧАННЯ З ВИКОРИСТАННЯМ ДИСТАНЦІЙНИХ ТЕХНОЛОГІЙ

В статті розглянуто педагогічну проблеми підготовки вчителів математики до роботи в системі електронного навчання. Виокремлено компетентності вчителя необхідні для успішної професійної діяльності з використанням дистанційних технологій. Визначено рівні опанування вчителем математики інформаційно-комунікаційними технологіями для роботи в системі електронного навчання.

Ключові слова: *електронне навчання, дистанційне навчання, підготовка вчителя математики.*

Вступ

У сучасному суспільстві інформаційні процеси стали однією з найважливіших складових життєдіяльності людини. Зміни, що відбуваються висувають нові вимоги до якості підготовки та характеристик фахівців. У теперішніх умовах актуальними є здатність до пошуку, сприйняття і переробки великих обсягів інформації; вміння висувати гіпотезу і робити висновки; здатність оперативно приймати рішення в нестандартних ситуаціях; вміння бачити проблему в цілому й застосовувати інтегрований підхід до її вирішення; навички застосування нових ІКТ. Класична аудиторна система вже не влаштовує ні учня, ні вчителя.

Поряд з цим сучасне оснащення шкіл і закладів вищої освіти матеріально-технічними засобами дозволяє без особливих витрат збільшити час перебування учня в освітньому процесі за рахунок його часткової віртуалізації або прискорити цей процес.

Суб'єкти освітнього процесу сходяться на думці про необхідність активізації лінії індивідуалізації і диференціації навчання, підвищення ролі самоосвітньої діяльності, оновлення системи професійного розвитку особистості відповідно її потребами, мотивами, здібностями. Досягти цього дозволяють технології обміну інформацією між учасниками освітнього процесу за допомогою мережі Інтернет. Це зумовило необхідність пошуку нових, інтенсивних форм організації навчального процесу, що спричинило інтеграцію інформаційних технологій в освіту і виділення серед них електронних технологій навчання.

Питання використання ІКТ у підготовці фахівців, зокрема вчителів математики, розглянуто в наукових доробках В. Бикова, М. Жалдака, Т. Крамаренко, Н. В. Морзе, С. Ракова, Ю. Рамського, С. Семерікова, О. Скафи, О. Співаковського, Ю. Триуса. Проблеми використання дистанційних освітніх технологій у процесі навчання учнів загальноосвітньої школи досліджували Т. Колчук, В. Снєгурова, Є. Полат, А. Хуторський та ін. Науково-педагогічні засади дистанційного навчання висвітлювали О. Андрєєв, В. Биков, Д. Іванченко, В. Кухаренко, Є. Полат, П. Стефаненко, А. Хуторський та ін.

Метою статті є дослідження педагогічної проблеми підготовки учителів математики до роботи в системі електронного навчання.

Основна частина

Новий учитель, якого чекає сьогодні суспільство, може бути підготовлений тільки в новій інноваційній системі вищої педагогічної освіти. Специфіка діяльності учнів і вчителя в електронному навчальному процесі дозволяють говорити про те, що нові умови навчання вимагають формування нової моделі фахівця, який відповідає певним вимогам. Одним з напрямків використання ІКТ є розвиток системи електронного, зокрема дистанційного, навчання на всіх етапах освіти.

Електронне навчання це складний технологічний процес, в якому взаємодіють розробники курсів, вчителі, учні, фахівці.

Однак спроби створення систем електронного навчання на практиці стикаються з певними труднощами. Опитування й анкетування викладачів, вчителів свідчать про велику кількість помилок щодо електронного навчання. Основними труднощами, що виникають в процесі дистанційного навчання, є: проблеми у визначенні режиму взаємодії з учнями; управління самостійною діяльністю учнів; вибір форм, методів і засобів для проведення занять в режимі реального часу; розробка сценарію заняття в режимі реального часу; керівництво діяльністю учнів в режимі реального часу; підвищення ефективності проведення занять в режимі реального часу; визначення доцільності і форм організації взаємодії в асинхронному режимі; конструювання індивідуальної траєкторії освоєння учнями навчального змісту; керівництво дослідницької та проектної діяльністю учнів в процесі дистанційного навчання та ін. Основна частина труднощів пов'язана із здійсненням інформаційної взаємодії з іншими суб'єктами процесу дистанційного навчання математики, збільшення навантаження на викладача.

Під системою дистанційного навчання розуміють педагогічну систему, що включає проектування, організацію і проведення навчального процесу в контексті обраної концепції з урахуванням специфіки дистанційного навчання. Система дистанційного навчання передбачає проведення систематичних занять з учнями з використанням засобів комунікацій та освітніх ресурсів мережі Інтернет. В умовах швидкого розвитку електронних технологій викладач отримує можливість автоматизувати діяльність учня, використовуючи нові технології подання інформації, а також різні види тестів, інтерактивних форм, автоматичних опитувань [4].

До електронного навчання належить все, що допомагає вчитися в мережі: онлайн-курси, цифрові ресурси, веб-сервіси, мобільні додатки. Цифрова освіта, електронна освіта, digital-освіта, EdTech – ще це можна назвати мережевим навчанням або онлайн-навчанням. В основі цієї педагогічної парадигми лежить відкритість освітніх ресурсів, децентралізація навчальної діяльності та використання в цих цілях інформаційних технологій. Мережеве навчання передбачає створення масового загального цифрового середовища для освіти та самоосвіти.

Для ефективної роботи в системі електронного навчання, зокрема дистанційного, викладач повинен бути компетентний не тільки в області класичної педагогіки, але мати базову інформаційну грамотність роботи в мережі Інтернет та бути компетентним в методиці організації та проведення електронного навчання. Вчитель має бути підготовленим до реалізації масштабних технологічних проектів у сфері освіти України, для цього потрібно ретельно вивчити нові підходи, процедури, технології як зарубіжних країн, так і узагальнити вітчизняний досвід. Приміром, у форматі експерименту з 2018 до 2021 року, пропонується запроваджувати електронний підручник, а також допоміжні технічні засоби електронної платформи. На 2020-2021 навчальний рік заплановано упровадження електронних підручників з математики [1].

Для підготовки вчителів для роботи в нових умовах доцільно проводити дистанційний курс. При проектуванні дистанційного курсу з підготовки викладача для роботи в системі дистанційного навчання необхідно враховувати специфіку теми даного курсу, що поєднує в собі теорію і практику дистанційного навчання самим фактом його проведення – слухачі дистанційно навчаються дистанційному викладанню. Формування необхідних вчителю компетентностей може проходити максимально ефективно на курсах підвищення кваліфікації в режимі дистанційного навчання. Важливо опануванням користувачем не тільки певною сумою знань, а й навичками самостійної роботи з інформацією, способами пізнавальної діяльності, залученням слухача в активну пізнавальну діяльність для вирішення навчальних проблем. Саме дистанційний курс дозволяє педагогам відразу ж потрапити в нову навчальну середу і сприйняти теорію й практику одночасно. Після роботи в ролі того, хто навчається вчителю буде простіше організувати дистанційний навчальний процес з урахуванням особистого досвіду навчання.

Результати реалізації дистанційного навчання дозволяють зробити висновок про те, що для успішної діяльності у вчителя мають бути сформовані наступні компетентності. Дистанційний вчитель має знати: специфічні особливості процесу навчання предмету в дистанційному режимі; особливості інформаційно-освітнього середовища, в якому здійснюється процес дистанційного навчання, можливості його сервісів; зміст навчального дистанційного ресурсу; способи встановлення контакту з учнями; можливості для побудови індивідуальної плану опанування навчальним предметним змістом в умовах дистанційного навчання; типи проведення дистанційних занять в режимі реального часу, їх моделі; різні форми організації взаємодії учнів в асинхронному режимі; специфіку реалізації різних педагогічних технологій в умовах дистанційного навчання [3].

Дистанційний вчитель повинен розуміти: необхідність виконання вимог до рівня підготовки учнів в умовах дистанційного навчання відповідно до державного освітнього стандарту[2]; можливість використання предметного змісту для задоволення індивідуальних освітніх потреб учнів; допустимі межі конструювання індивідуальної траєкторії освоєння предметного змісту різними учнями; особливості проведення мережевих занять в режимі реального часу; особливості асинхронної взаємодії різних груп учнів під час дистанційного навчання; особливості різних методів, засобів і технологій в реалізації процесу дистанційного навчання.

Дистанційний вчитель повинен вміти: аналізувати зміст мережевого ресурсу з метою визначення його можливостей для досягнення цілей навчання кожним з учнів; встановлювати контакт з мережевими учнями; відбирати навчальні матеріали, що доповнюють матеріали навчального дистанційного ресурсу для досягнення цілей навчання; визначати стратегію навчання в групи на основі врахування її специфічних особливостей; конструювати індивідуальну для кожного учня траєкторію освоєння навчального предметного змісту; здійснювати управління самостійною діяльністю кожного учня і групи; здійснювати керівництво проектної та дослідницькою діяльністю учнів в умовах дистанційного навчання.

Для того щоб електронне навчання було досить ефективним і комфортним для всіх учасників процесу, необхідно, щоб у всіх суб'єктів були сформовані навички взаємодії в специфічних умовах середовища такого навчання. Формування навичок роботи в системі пов'язано: з певним рівнем опанування інформаційно-комунікаційними технологіями, зокрема, з рівнем сформованості умінь діяти в інформаційно-освітньому середовищі (технологічний аспект); умінь організації діяльності учнів і управління нею в інформаційно-освітньому середовищі дистанційного навчання (педагогічний аспект); вміння організувати процес навчання предмету з урахуванням його специфіки (методичний аспект); вміння організувати процес навчання з урахуванням особливостей учнів: групових та індивідуальних (психолого-педагогічний аспект).

Висновок

До переваг електронного навчання відносяться: більш висока адаптивність до рівня базової підготовки та здібностей учнів, здоров'я, місця проживання тощо, і відповідно, кращі можливості для прискорення процесу отримання освіти та підвищення якості навчання; підвищення якості освітнього процесу за рахунок орієнтації на використання автоматизованих навчальних і тестувальних систем, завдань для самоконтролю та ін.; оперативне оновлення методичного забезпечення навчального процесу, тому що зміст методичних матеріалів на електронних носіях легше підтримувати в актуальному стані; доступність для учнів перехресної інформації, оскільки у них з'являється можливість, використовуючи комп'ютерні мережі, звертатися до альтернативних джерел; підвищення творчого та інтелектуального потенціалу учнів за рахунок самоорганізації, прагнення до знань, уміння взаємодіяти з комп'ютерною технікою й самостійно приймати відповідальні рішення.

Використання різних моделей електронного навчання сприяє формуванню необхідних в сучасному суспільстві компетентностей, як в учнів, так і у батьків та вчителів. Безумовно, електронне навчання не повинно замінювати традиційне навчання, але має стати невід'ємним його доповненням.

Література

1. Експеримент з впровадження електронного підручника і електронної платформи. — Режим доступу : https://mon.gov.ua/ua/osvita/zagalna-serednya-osvita/pidruchniki/elektronni-pidruchniki
2. Загальна середня освіта. Державні стандарти. — Режим доступу : — https://mon.gov.ua/ua/osvita/zagalna-serednya-osvita/derzhavni-standarti.
3. *Крамаренко Т.Г.* Про формування методичних компетентностей майбутніх вчителів математики у галузі дистанційного навчання / Т. Крама-

ренко, Т. Колчук // Науковий часопис НПУ імені М. П. Драгоманова. Серія № 2. Комп'ютерно-орієнтовані системи навчання : зб. наук. праць / Редрада. — К. : НПУ імені М. П. Драгоманова, 2010. — № 8 (15). — С. 115–119.

4. Педагогічні аспекти відкритого дистанційного навчання / [Андрєєв О.О., Бугайчук К.Л., Каліненко Н.О. та ін.]; за ред. О.О. Андрєєва, В.М. Кухаренка. — ХНАДУ, Харків: «Міськдрук», 2013. — 212 с.

Hlazova Vira V, Sadovskyi Pavel P.
Donbas State Pedagogical University, Sloviansk, Ukraine

Preparing of the mathematics teacher for the work in the electronic education system with using distance technologies

The article deals with the pedagogical problem of preparing mathematics teachers for work in the system of e-learning. The teacher's competencies, which are necessary for a successful professional activity using remote technology, are separated. The levels of mastering by a mathematics teacher of information and communication technologies for work in the system of electronic learning are determined.

Keywords: *e-learning, distance learning, preparation of a mathematics teacher.*

УДК 37.016:514.112.4

Лавренюк А.Ф., Кадубовська В.М., Кадубовський О.А.

[1] *студентка 2 курсу (магістратура) фізико-математичного факультету, ДВНЗ «ДДПУ»*

[2] *вчитель математики вищої категорії, вчитель-методист, Олександрівська ЗОШ І-ІІІ ступенів*

[3] *канд. фізико-математичних наук, доцент каф. математики та інформатики, ДВНЗ «ДДПУ»*

e-mail: lavrenuk313@ukr.net, kadubovs@ukr.net

ПРО ОДИН ВИД ПАРАЛЕЛОГРАМІВ ТА ДЕЯКІ СУМІЖНІ ПИТАННЯ

В статті розглядаються паралелограми, у яких кут між сторонами дорівнює куту між діагоналями. Запропоновано один з можливих підходів до ознайомлення учнів із зазначеним видом паралелограмів у шкільному курсі геометрії. Крім низки суміжних методичних аспектів, наведено класифікації паралелограмів за різними основами, зокрема авторський підхід до поетапної класифікації паралелограмів за п'ятьма основами.

Ключові слова: *паралелограми, навчання геометрії, класифікації паралелограмів*

Вступ

Однією з важливих складових фахової підготовки студентів педагогічних закладів вищої освіти (ПЗВО) є саме методична підготовка, результатом якої повинна стати сформованість комплексу компетентностей — «готовність до самостійної методичної діяльності».

Не можна не погодитися із Сарвановою Є.А., яка зазначає, що найбільш складним моментом напочатку методичної діяльності студентів є перехід від теоретичної підготовки до виконання методичних дій вчителя. Причому цей перехід відбувається успішно лише за умов, коли в навчальній діяльності студентів створюються умови для формування методичних вмінь безпосередньо на матеріалі шкільного курсу [13]. Одним з можливих підходів до вирішення зазначеного завдання є підвищення методичної спрямованості «практикумів з розв'язування математичних задач» шляхом наближення їх змісту до вимог майбутньої педагогічної діяльності.

У зв'язку з цим актуальним постає питання щодо розробки таких блоків задач (пов'язаних спільним змістом), аналіз методів розв'язування (з урахуванням хронології вивчення навчального матеріалу за діючими програмами з математики для закладів загальної середньої освіти) та результати яких, давали би можливість з'ясовувати істотні властивості понять, що розглядаються, та їх зв'язок з досліджуваним теоретичним матеріалом.

За діючими програмами змістова лінія «Паралелограми» передбачає вивчення основних властивостей і ознак паралелограма, основних властивостей і ознак окремих його видів (прямокутника, ромба, квадрата) та їх застосування до розв'язування задач, зокрема на доведення.

Співвідношення (зв'язок) між окремими видами паралелограмів зазвичай супроводжують наочними рисунками, в яких перетином множини прямокутників та множини ромбів є множина квадратів [4], [6].

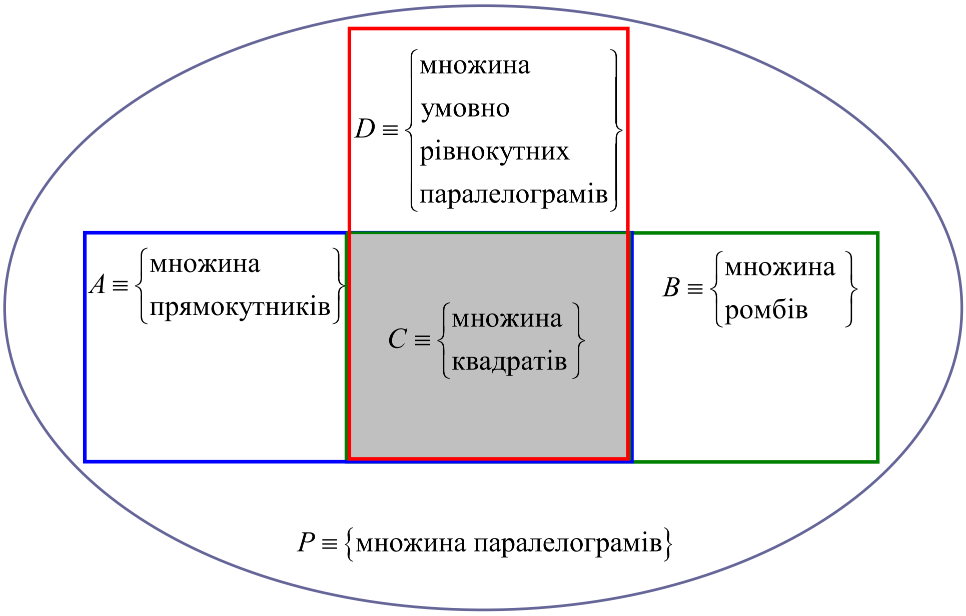
При класифікації ж паралелограмів зазвичай дотримуються одного з двох поширених підходів, суть яких не змінилися з часів їх викладу в [1], [15].

Проте, незважаючи на добре висвітлені в методичній літературі вимоги та рекомендації щодо класифікації математичних понять, зокрема геометричних об'єктів (напр., [2], [16]), навіть деякі студенти математичних спеціальностей педагогічних закладів вищої освіти, а інколи й молоді вчителі математики, «класифікуючі» паралелограми дозволяють собі наступну «класифікацію: *прямокутники, ромби, квадрати та інші*». Звісно ж, що такий стан справ не може не викликати занепокоєння. Зазначена плутанина між «класифікацією» та «співвідношення між окремими видами», відбувається можливо через те, що в навчально-методичній літературі класифікаціям об'єктів певної множини A за різними основами та зв'язку між окремими їх видами (підмножинами множини A) приділяється досить поверхнева увага.

Друге питання (в контексті вивчення паралелограмів), яке автори не можуть залишити поза увагою, пов'язано з тим, що: серед метричних задач на паралелограми загального виду (що не є ромбами або ж прямокутниками), в діючих підручниках пропонують паралелограми, гострий кут між сторонами (або ж діагоналями) яких переважно становить $30^0, 45^0$ і 60^0, або ж паралелограми з додатковою формальною «умовою – метричним співвідношенням», яке, зазвичай, не носить геометричної цінності. І хоча розгляд паралелограмів саме з такими кутами є однозначно виправданим, *проте, нажаль, в діючих підручниках з геометрії для 8 і 9 класів (навіть з поглибленим вивченням математики) не пропонується до розгляду* ***паралелограм, (нетупий) кут між сторонами якого дорівнює куту між його діагоналями***.

З урахуванням задач №10.044 з [14], №83 з [3], №46 з [12], зазначений вид паралелограмів існує та коректно визначений.

Першим з аспектів, який привернув увагу авторів до зазначеного виду паралелограмів (надалі називатимемо їх умовно рівнокутними) є те, що множина таких паралелограмів не співпадає з множиною прямокутників, не співпадає з множиною ромбів, а її перетином з кожною із зазначених множин є множина квадратів.



Другий з аспектів пов'язано з ознаками окремих видів паралелограма. Відомо, що паралелограм є прямокутником (ромбом) тоді і лише тоді, коли його паралелограм Варіньона є ромбом (відповідно прямокутником); паралелограм є *квадратом* тоді і лише тоді, коли його паралелограм Варіньона є *квадратом.* Як з'ясувалося, паралелограм є *умовно рівнокутним* тоді і лише тоді, коли його паралелограм Варіньона є *умовно рівнокутним.*

Третій аспект пов'язано із «природою появи числа $\sqrt{2}$» для квадрату: добре відомо, що діагональ d квадрата зі стороною a становить $d = a\sqrt{2}$; також відомо, що ця залежність є безпосереднім наслідком з теореми Піфагора та, зазвичай, цю рівність відносять до властивостей саме квадрата. Проте, як з'ясувалося, поява зазначеної залежності повинна завдячувати відповідній властивості паралелограма, яка має місце лише у випадку, коли кут між сторонами паралелограма дорівнює куту між його діагоналями.

Четвертий аспект. Добре відомо, що характеристичною властивістю-ознакою, яка вирізняє паралелограми з решти чотирикутників, є, так звана, рівність паралелограма — «сума квадратів діагоналей паралелограма дорівнює сумі квадратів всіх його сторін», яку можна переформулювати в еквівалентній формі — «сума квадратів діагоналей паралелограма дорівнює подвоєній сумі квадратів непаралельних його сторін». Як з'ясувалося, характеристичною властивістю-ознакою, яка вирізняє умовно рівнокутні паралелограми з решти паралелограмів, є рівність умовно рівнокутного паралелограма — «різниця квадратів діагоналей паралелограма дорівнює подвоєній різниці квадратів непаралельних його сторін».

Середини сторін довільного (в тому числі неопуклого та просторового) чотирикутника є вершинами паралелограма (який називають паралелограмом Варіньона)

Третє питання (до якого природно призводить друге), пов'язано з тим, що при вивченні геометричних об'єктів

> крім задач, які складають основу обов'язкового теоретичного матеріалу, результати яких використовуються в подальшому навчальному матеріалі та знаходять застосування при розв'язувані більш складних задач

досить важливі відомості про об'єкти (що вивчаються) містяться серед цілої низки задач, але їх розв'язання (а тому й ознайомлення з відповідними фактами) *не може проходити паралельно з вивченням певного об'єкту, оскільки для цього необхідними є нові факти і методи, які за програмою розглядаються значно пізніше*. Ось чому уроки «узагальнення та систематизації знань», особливо в кінці навчального року, є вкрай важливими для вивчення геометричних об'єктів (зокрема паралелограмів) в шкільному курсі геометрії.

В контексті зазначеного, вважаємо доцільним звернути увагу на роботи [11] і [8], які присвячено систематизації та узагальненню фактів про трапеції.

Серед статей, присвячених систематизації та узагальненню фактів про паралелограми, слід виділити [9] і [10]. Зокрема в [9] наведено низку джерел: присвячених дидактичному забезпеченню вивчення теми «паралелограми»; навчальних посібників з елементарної геометрії, в яких наведено яскраві геометричні факти, що не ввійшли до шкільних підручників; збірників задач, які містять доволі широке коло задач (на паралелограми) різного рівня складності, зокрема теоретичного характеру.

Представлену статтю можна вважати певним доповненням та логічним продовженням статті [9]. Однак основною **метою** статті є спроба вирішення завдання щодо розробки одного з блоків задач (про які зазначалося вище) на прикладі рівнокутного паралелограма та виклад можливого підходу до ознайомлення учнів в шкільному курсі геометрії з умовно рівнокутними паралелограмами.

Одним із **завдань** статті — привернути увагу вчителів математики до зазначеного виду паралелограмів, як сировини для нових цікавих задач, зокрема для проведення олімпіад.

Саму ж статтю умовно можна розбити на три частини: *в першій* — для зазначеного виду паралелограмів наведено відповідне визначення, приклад, найпростішу властивість та найпростішу ознаку; *в другій* — викладена авторська розробка щодо можливого впровадження зазначеного виду паралелограмів до шкільного курсу геометрії, зокрема найпростіші метричні співвідношення та 12 властивостей-ознак; *в третій* — можливі класифікації паралелограмів за різними основами, зокрема авторський підхід до поетапної класифікації паралелограмів за п'ятьма основами.

1. Основні поняття та попередні відомості

Означення 1. ([6]) ***Паралелограмом*** *називають чотирикутник, у якого кожні дві протилежні сторони паралельні.* ***Прямокутником*** *— паралелограм, у якого всі кути прямі.* ***Ромбом*** *— паралелограм, у якого всі сторони рівні.* ***Квадратом*** *— прямокутник, у якого всі сторони рівні.*

Як вже зазначалося у вступі, мають місце наступні твердження

Твердження 1. (задача №10.044 з [14]; задача №83 з [3]) *«Длины диагоналей параллелограмма пропорциональны длинам его непараллельных сторон. Доказать, что углы между диагоналями такого параллелограмма равны его углам.»*

Твердження 2. (задача №46 з [12]) *«В параллелограмме* $ABCD$ $AC = AB\sqrt{2}$*. Докажите, что угол между диагоналями равен углу между его сторонами.»*

Тому цілком коректно можна визначити наступний вид паралелограмів

Означення 2. *Паралелограм будемо називати* ***умовно рівнокутним****, якщо (нетупий) кут між сторонами дорівнює куту між його діагоналями.*

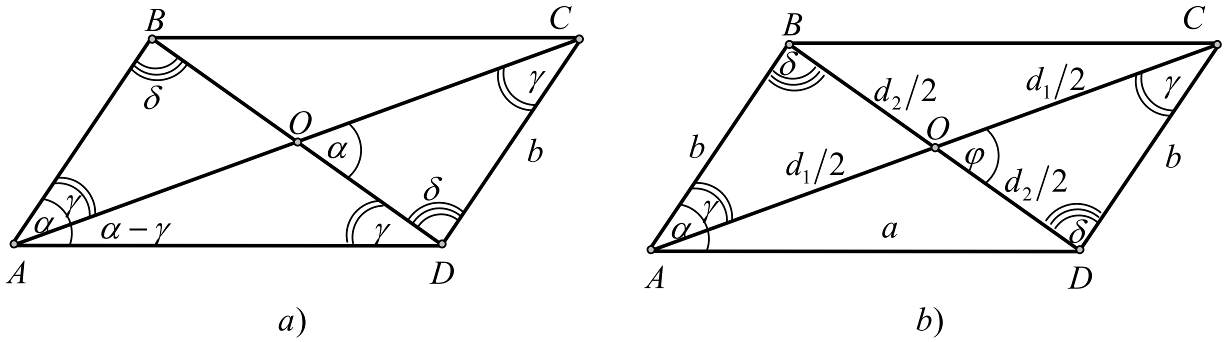


Рис. 1:

Приклад 1. *Оскільки у квадрата кут між (непаралельними) сторонами та кут між діагоналями становить* 90^0*, то квадрат є прикладом умовно рівнокутного паралелограма.*

Властивість 1. *В умовно рівнокутному паралелограмі кут між більшою діагоналлю та меншою стороною дорівнює куту між меншою діагоналлю та більшою стороною (рис. 1 a)).*

Вправа 1. (ознака) *Покажіть, що якщо в паралелограмі кут між більшою діагоналлю та меншою стороною дорівнює куту між меншою діагоналлю та більшою стороною, то такий паралелограм є умовно рівнокутним.*

2. Основна частина.

2.1. Допоміжні позначення та домовленості

Нехай в паралелограмі $ABCD$ (рис. 1 b)): $O = AC \cap BD$, $AD = a$, $AB = b$, $AC = d_1$, $BD = d_2$, $\angle ABD = \delta$, $\angle ACD = \gamma$, $\angle BAD = \alpha$, $\angle COD = \varphi$; h_a, h_b — довжини висот, опущених на сторони довжин a і b відповідно; h_1, h_2 — довжини перпендикулярів, опущених з вершин паралелограма на діагоналі довжин d_1 і d_2 відповідно.

В подальшому, заради визначеності (та без втрати загальності), будемо вважати, що: 1) φ — нетупий кут між діагоналями ($0^\circ < \varphi \leqslant 90^\circ$); 2) α — нетупий кут між сторонами ($0^\circ < \alpha \leqslant 90^\circ$); 3) $a \geqslant b$.

Зауважимо, що за наведених умов, справджуються нерівності: $d_1 \geqslant d_2$, $h_1 \leqslant h_2$, $h_a \leqslant h_b$ (їх легко встановити після вивчення відповідних питань).

2.2. Один з підходів до реалізації ідеї щодо ознайомлення учнів з «умовно рівнокутними» паралелограмами

2.2.1. У 8 класі під час (після) вивчення теми «Подібність трикутників» можна запропонувати довести наступні твердження

Властивість 2. («пропедевтична») *Нехай O — точка перетину діагоналей AC і BD умовно рівнокутного паралелограма $ABCD$ з нетупим кутом $\angle A$, Q — середина сторони AD. Тоді:*

1) *трикутники DAB і COD є подібними;*
2) *довжини діагоналей пропорційні довжинам непаралельних сторін (а саме справджується пропорція $AC : AD = BD : AB$);*
3) *трикутники COD і DQO є подібними;*
4) $BD^2 = 2CD^2$, $AC \cdot BD = 2AD \cdot CD$, $AC^2 = 2AD^2$;
5) $AC = AD\sqrt{2}$, $BD = CD\sqrt{2}$, $AC^2 - BD^2 = 2\left(AD^2 - CD^2\right)$.

Наслідок 1. *В умовно рівнокутному паралелограмі відношення довжини більшої (меншої) діагоналі до довжини більшої (відповідно меншої) сторони становить $\sqrt{2}$.*

Задача 1. (ознака «з надлишковою умовою») *В паралелограмі $ABCD$ $AC = AD\sqrt{2}$, $BD = AB\sqrt{2}$. Доведіть, що $ABCD$ є умовно рівнокутним.*

Розв'язання. Нехай $AD = a$, $AB = b$, тоді $AC = a\sqrt{2}$, $BD = b\sqrt{2}$.
1) В трикутнику DAB: $DA = a$, $AB = b$, $BD = b\sqrt{2}$.
2) В трикутнику COD: $CO = \frac{AC}{2} = \frac{a}{\sqrt{2}}$, $OD = \frac{BD}{2} = \frac{b}{\sqrt{2}}$, $DC = b$.

Оскільки
$$\frac{DA}{CO} = \frac{AB}{OD} = \frac{BD}{DC} = \sqrt{2},$$

то за III ознакою подібності трикутники DAB і COD є подібними. Звідки $\alpha = \angle DAB = \angle COD = \varphi$. $\square$

2.2.2. У 8 класі під час (після) вивчення теми «Розв'язування прямокутних трикутників» можна запропонувати (ключову) задачу

Задача 2. (ознака) *Якщо у паралелограма довжини діагоналей пропорційні довжинам його непараллельних висот, то він є умовно рівнокутним.*

Розв'язання. Нехай h_a, h_b – довжини непаралельних висот (причому $h_b \geqslant h_a$), а d_1, d_2 – довжини діагоналей ($d_1 \geqslant d_2$) паралелограма, нетупі кути між сторонами та діагоналями якого становлять α і β відповідно.

Оскільки $d_1 \geqslant d_2 \Leftrightarrow \frac{d_1}{d_2} \geqslant 1$ і $h_b \geqslant h_a \Leftrightarrow \frac{h_b}{h_a} \geqslant 1 \Leftrightarrow \frac{h_a}{h_b} \leqslant 1$, то, з урахуванням умови, має місце одна з можливих пропорцій:

$$1)\ \frac{d_1}{d_2} = \frac{h_b}{h_a} \quad \text{або ж} \quad 2)\ \frac{d_1}{d_2} = \frac{h_a}{h_b}.$$

1) Друга пропорція має місце лише за умов, коли $\dfrac{d_1}{d_2} = 1 = \dfrac{h_a}{h_b}$. Звідки $h_a = h_b$ і $d_1 = d_2$, тобто, паралелограм одночасно є і ромбом, і прямокутником, а тому — квадратом (умовно рівнокутним паралелограмом).

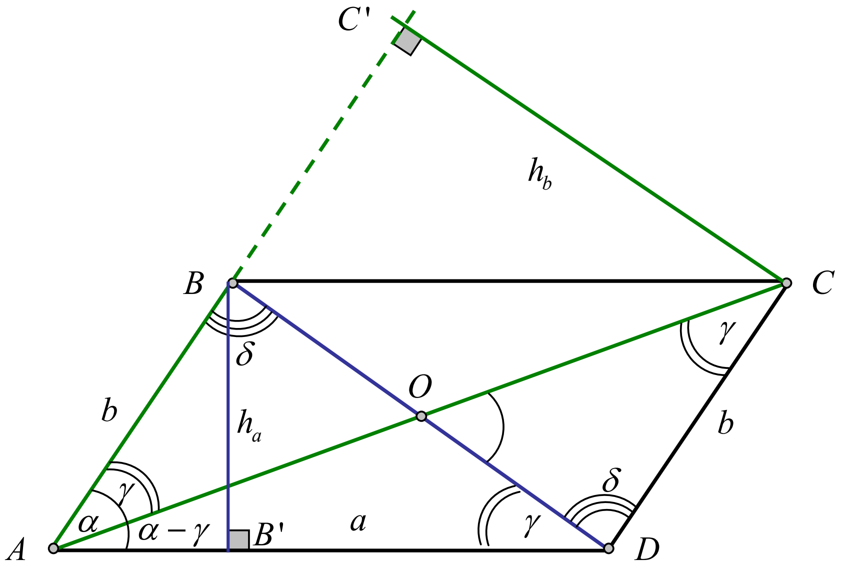


Рис. 2: до задачі 2.

2) З вершин B і C опустимо висоти BB' та CC' на сторони $AD = a$ і $AB = b$ відповідно. Тоді першу пропорцію можна подати у вигляді

$$\frac{BB'}{BD} = \frac{CC'}{AC}.$$

І тому прямокутні трикутники $DB'B$ і $AC'C$ є подібними. Звідки $\angle BDA = \angle BAC$. Але ж тоді за **вправою 1** паралелограм є умовно рівнокутним. $\square$

2.2.3. У 8 класі під час (після) вивчення теми «Многокутники та їх площі» можна запропонувати довести наступні твердження

Задача 3. (ознака) *Якщо у паралелограма добуток діагоналей вдвічі більший за добуток двох непаралельних сторін, то він є умовно рівнокутним.*
Розв'язання. Оскільки $\frac{1}{2}d_1d_2 = ab$ (за умовою), а площу пралалелограма можна обчислити за формулами $S = \frac{1}{2}d_1d_2\sin\varphi = ab\sin\alpha$, то маємо рівність $\sin\varphi = \sin\alpha$. З урахуванням зроблених раніше домовленостей ($0^0 < \alpha \leqslant 90^0$, $0^0 < \varphi \leqslant 90^0$), остання рівність можлива лише коли $\varphi = \alpha$. Звідки й випливає, що (нетупий) кут між сторонами дорівнює (нетупому) куту між діагоналями такого паралелограма. □

Задача 4. (ознака) *Якщо у паралелограма довжини діагоналей пропорційні довжинам непаралельних сторін, то він є умовно рівнокутним.*
Розв'язання. Нехай a, b — довжини непаралельних сторін ($a \geqslant b$), а d_1, d_2 — довжини діагоналей (причому $d_1 \geqslant d_2$) паралелограма, нетупі кути між сторонами та діагоналями якого становлять α і φ відповідно.

Оскільки $d_1 \geqslant d_2 \Leftrightarrow \frac{d_1}{d_2} \geqslant 1$ і $a \geqslant b \Leftrightarrow \frac{a}{b} \geqslant 1 \Leftrightarrow \frac{b}{a} \leqslant 1$, то, з урахуванням умови, має місце одна з можливих пропорцій:

$$1)\ \frac{d_1}{d_2} = \frac{a}{b} \quad \text{або ж} \quad 2)\ \frac{d_1}{d_2} = \frac{b}{a}\,.$$

1) Друга пропорція має місце лише за умов, коли $\dfrac{d_1}{d_2} = 1 = \dfrac{b}{a}$. Звідки $a = b$ і $d_1 = d_2$, тобто, паралелограм одночасно є і ромбом, і прямокутником, а тому — квадратом (умовно рівнокутним паралелограмом).

2) Оскільки $S = ah_a = bh_b$, то першу пропорцію $\dfrac{d_1}{d_2} = \dfrac{a}{b}$ можна подати у вигляді $\dfrac{d_1}{d_2} = \dfrac{a/S}{b/S} = \dfrac{h_b}{h_a}$ або ж $\dfrac{h_a}{d_2} = \dfrac{h_b}{d_1}$. І тому, з урахуванням **задачі 2**, такий паралелограм є також умовно рівнокутним. □

Вправа 2. (ознака) *Покажіть, що якщо у паралелограма довжини сторін пропорційні довжинам непаралельних перпендикулярів, опущених з вершин на діагоналі, то він є умовно рівнокутним.*

Зауваження 1. *Нехай α — нетупий кут між (непаралельними) сторонами (довжин a і b), φ — нетупий кут між діагоналями (довжин d_1 і d_2) паралелограма. Тоді справджуються умови:*

1) $\alpha < \varphi \Leftrightarrow 2ab > d_1d_2$;
2) $\alpha = \varphi \Leftrightarrow 2ab = d_1d_2$;
3) $\alpha > \varphi \Leftrightarrow 2ab < d_1d_2$.

2.2.4. У 9 класі після вивчення теореми косинусів ...

Як добре відомо, одним з наслідків теореми косинусів є «**рівність паралелограма**», яка полягає у тому, що «сума квадратів діагоналей паралелограма дорівнює сумі квадратів всіх його сторін». Тобто, згідно введених позначень, має місце рівність

$$d_1^2 + d_2^2 = 2\left(a^2 + b^2\right). \tag{1}$$

В якості наслідків з (1), можна запропонувати наступні завдання

Вправа 3. *Перевірити, що* $d_1 = a\sqrt{2}$ *тоді і лише тоді, коли* $d_2 = b\sqrt{2}$.

Задача 5. (ознака «без надлишкової умови») *Якщо у паралелограма відношення довжини діагоналі до довжини сторони становить* $\sqrt{2}$, *то такий паралелограм є умовно рівнокутним.*

Вказівка. Справедливість твердження є наслідком **вправи 3 та задачі 4**.

Задача 6. *Якщо у паралелограма довжини діагоналей пропорційні довжинам непаралельних сторін, то коефіцієнт пропорційності становить* $\sqrt{2}$.

Розв'язання. Нехай a, b — довжини непаралельних сторін, а d_1, d_2 — довжини діагоналей паралелограма, причому $a \geqslant b$, $d_1 \geqslant d_2$.

Оскільки $d_1 \geqslant d_2 \Leftrightarrow \frac{d_1}{d_2} \geqslant 1$ і $a \geqslant b \Leftrightarrow \frac{a}{b} \geqslant 1 \Leftrightarrow \frac{b}{a} \leqslant 1$, то, з урахуванням умови, має місце одна з можливих пропорцій:

$$1)\ \frac{d_1}{d_2} = \frac{a}{b} \quad \text{або ж} \quad 2)\ \frac{d_1}{d_2} = \frac{b}{a}.$$

1) Друга пропорція має місце лише за умов, коли $d_1 : d_2 = 1 = b : a$. Звідки $a = b$ і $d_1 = d_2 = d$, тобто, паралелограм одночасно є і ромбом, і прямокутником, а тому — квадратом. Звідки й маємо, що $d = a\sqrt{2}$.

2) Першу пропорцію можна подати у вигляді $\frac{d_1}{a} = \frac{d_2}{b} = k$, звідки $d_1 = ka$, $d_2 = kb$. І тому, з урахуванням (1), маємо рівність

$$d_1^2 + d_2^2 = k^2a^2 + k^2b^2 = k^2\left(a^2 + b^2\right) = 2\left(a^2 + b^2\right) \Leftrightarrow k^2 = 2,$$

звідки й випливає, що $k = \sqrt{2}$. □

Наслідком із формули (1) та **задачі 1** (або ж **задачі 5**) є ознака

Задача 7. *Якщо різниця квадратів довжин діагоналей паралелограма дорівнює подвоєній різниці квадратів довжин двох його непаралельних сторін, то такий паралелограм є умовно рівнокутним.*

Таким чином характеристичною властивістю-ознакою умовно рівнокутного паралелограма є «**рівність умовно рівнокутного паралелограма**», яку (з урахуванням введених позначень) можна подати у вигляді

$$d_1^2 - d_2^2 = 2\left(a^2 - b^2\right). \tag{2}$$

2.3. Деякі метричні співвідношення для «умовно рівнокутних» паралелограмів

З урахуванням *рівності паралелограма* та *рівності умовно рівнокутного паралелограма*, мають місце наступні «формули-близнюки»:

1. $d_1 = a\sqrt{2}\,;$
2. $d_2 = b\sqrt{2}\,;$
3. $d_1 d_2 = 2ab\,;$
4. $d_1^2 - d_2^2 = 2(a^2 - b^2)\,;$
5. $\frac{1}{b^2} - \frac{1}{a^2} = 2\left(\frac{1}{d_2^2} - \frac{1}{d_1^2}\right);$
6. $d_1^4 - d_2^4 = 4(a^4 - b^4)\,;$
7. $\cos\alpha = \dfrac{a^2 - b^2}{2ab}\,;$
8. $\sin\alpha = \frac{1}{2ab}\sqrt{4a^2b^2 - \left(a^2 - b^2\right)^2}\,;$
9. $h_a = h_1\sqrt{2}\,;$
10. $h_b = h_2\sqrt{2}\,;$
11. $h_a h_b = 2h_1 h_2\,;$
12. $h_b^2 - h_a^2 = 2(h_2^2 - h_1^2)\,;$
13. $\frac{1}{h_1^2} - \frac{1}{h_2^2} = 2\left(\frac{1}{h_a^2} - \frac{1}{h_b^2}\right);$
14. $h_b^4 - h_a^4 = 4(h_2^4 - h_1^4)\,;$
15. $\cos\alpha = \dfrac{d_1^2 - d_2^2}{2d_1 d_2}\,;$
16. $\sin\alpha = \frac{1}{2d_1 d_2}\sqrt{4d_1^2d_2^2 - \left(d_1^2 - d_2^2\right)^2}\,,$

з яких не важко одержати наступні формули

1. $S = \frac{1}{2}\sqrt{4a^2b^2 - \left(a^2 - b^2\right)^2}\,;$
2. $h_a = \frac{1}{2a}\sqrt{4a^2b^2 - \left(a^2 - b^2\right)^2}\,;$
3. $h_b = \frac{1}{2b}\sqrt{4a^2b^2 - \left(a^2 - b^2\right)^2}\,;$
4. $S = \frac{1}{4}\sqrt{4d_1^2d_2^2 - \left(d_1^2 - d_2^2\right)^2}\,;$
5. $h_1 = \frac{1}{4d_1}\sqrt{4d_1^2d_2^2 - \left(d_1^2 - d_2^2\right)^2}\,;$
6. $h_2 = \frac{1}{4d_2}\sqrt{4d_1^2d_2^2 - \left(d_1^2 - d_2^2\right)^2}\,;$

Твердження 3. (властивості-ознаки) *Паралелограм є* ***умовно рівнокутним*** *тоді і лише тоді, коли виконується одна з наступних умов:*

1) *кут між більшою діагоналлю та меншою стороною дорівнює куту між меншою діагоналлю та більшою стороною;*

2) *кут між висотами, опущеними з вершини негострого кута, дорівнює куту між діагоналями;*

3) *паралелограм Варіньона є умовно рівнокутним;*

4) *довжини діагоналей пропорційні довжинам непаралельних сторін;*

5) *довжини діагоналей пропорційні довжинам непаралельних висот;*

6) *довжини непаралельних сторін пропорційні довжинам непаралельних перпендикулярів, опущених з вершин на діагоналі;*

7) *довжини непаралельних висот пропорційні довжинам непаралельних перпендикулярів, опущених з вершин на діагоналі;*

8) $d_1 = a\sqrt{2}$ *(*$\Leftrightarrow h_a = h_1\sqrt{2}$*);* $d_2 = b\sqrt{2}$ *(*$\Leftrightarrow h_b = h_2\sqrt{2}$*);*

9) $2ab = d_1 d_2$ *(*$\Leftrightarrow 2h_1h_2 = h_a h_b$*);*

10) $d_1^2 - d_2^2 = 2\left(a^2 - b^2\right)$ *(*$\Leftrightarrow h_b^2 - h_a^2 = 2\left(h_2^2 - h_1^2\right)$*);*

11) $d_1^4 - d_2^4 = 4\left(a^4 - b^4\right)$ *(*$\Leftrightarrow h_b^4 - h_a^4 = 4\left(h_2^4 - h_1^4\right)$*);*

12) $P = \sqrt{2}\,(d_1 + d_2)\,.$

Заради порівняння з умовно рівнокутним паралелограмом автори вважають доцільним навести й деякі **властивості-ознаки** прямокутника та ромба.

Твердження 4. *Паралелограм є* ***ромбом*** *тоді і лише тоді, коли виконується одна з наступних (еквівалентних) умов:*
1) *дві непаралельні сторони є рівні;*
2) *діагоналі є бісектрисами його кутів;*
3) *діагоналі є взаємно перпендикулярними;*
4) *можна вписати коло;*
5) *(непаралельні) висоти є рівними;*
6) *площа дорівнює півдобутку діагоналей;*
7) *перпендикуляри, опущені з точки перетину діагоналей на непаралельні сторони, є рівними;*
8) *квадрат сторони дорівнює сумі квадратів половин діагоналей;*
9) *пряма, що проходить через основи висот, опущених з однієї вершини, паралельна до відповідної діагоналі;*
10) *паралелограм Varіньона є прямокутником;*
11) *пряма, що містить діагональ, є віссю його симетрії;*
12) *сума квадратів діагоналей у чотири рази більша за добуток двох його непаралельних сторін.*

Твердження 5. *Паралелограм є* ***прямокутником*** *тоді і лише тоді, коли виконується одна з наступних (еквівалентних) умов:*
1) *один з кутів є прямим;*
2) *діагоналі є рівними;*
3) *(не тупий) кут між діагоналями вдвічі більший за (не тупий) кут між діагоналлю та стороною;*
4) *можна описати коло;*
5) *перпендикуляри, опущені з вершин на діагоналі є рівними;*
6) *площа дорівнює добутку (непаралельних) сторін (висот);*
7) *(непаралельні) бісектриси є рівними;*
8) *квадрат діагоналі дорівнює сумі квадратів непаралельних сторін;*
9) *пряма, що проходить через основи непаралельних перпендикулярів, опущених з вершин на діагоналі, паралельна до відповідної сторони;*
10) *паралелограм Варіньона є ромбом;*
11) *середня лінія (пряма, що сполучає середини двох протилежних сторін) є віссю його симетрії;*
12) *сума квадратів двох непаралельних сторін дорівнює добутку його діагоналей.*

3. Класифікації паралелограмів

За Л.М. Фрідманом ділення об'єму деякого поняття на частини і є класифікацією цього поняття. Якщо ж більш точно, то під класифікацією слід розуміти розподіл об'єктів деякого поняття на взаємозв'язані класи (види, типи) за найбільш суттєвими властивостями (ознаками). Ознаку (властивість), за якою відбувається класифікація (ділення) поняття на класи (види), і називають основою класифікації. Класифікація поняття відбувається за однією або декількома найбільш суттєвими основами. [16]

3.1. Найбільш поширені підходи до класифікації паралелограмів

Крім двох основних підходів до класифікації паралелограмів, про які вже було зазначено у вступі (проілюстровано нижче на рис. 3 і 4), досить поширеними у навчальній літературі також є підходи, проілюстровані за допомогою блок-схем на рис. 5 і 6 відповідно.

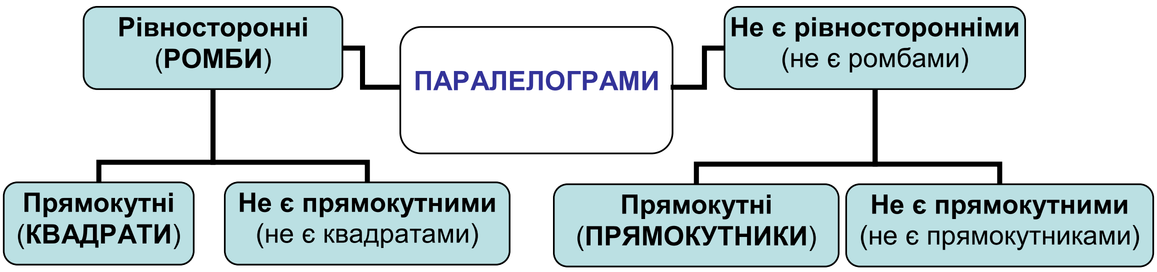


Рис. 3: Класифікація паралелограмів «за мірами сторін та кутів»

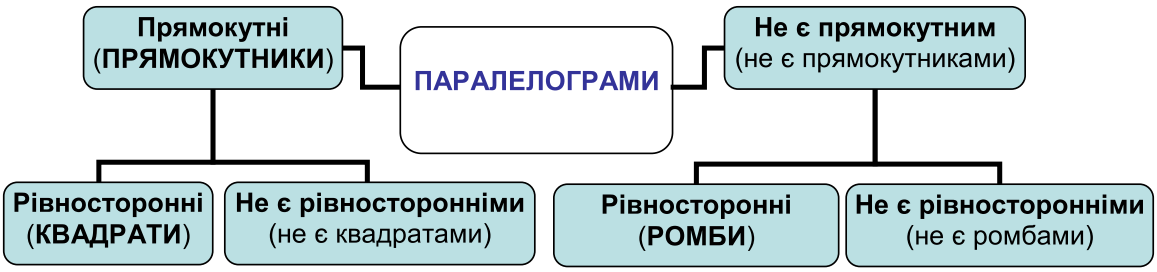


Рис. 4: Класифікація паралелограмів «за мірами кутів та сторін»

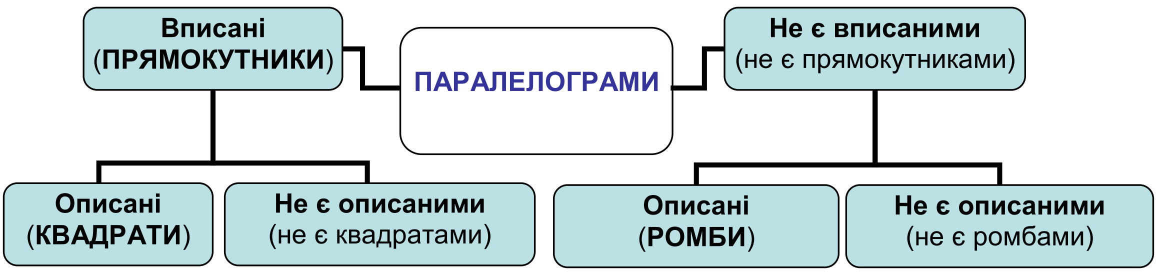


Рис. 5: Класифікація паралелограмів за ознаками «вписаності та описаності»

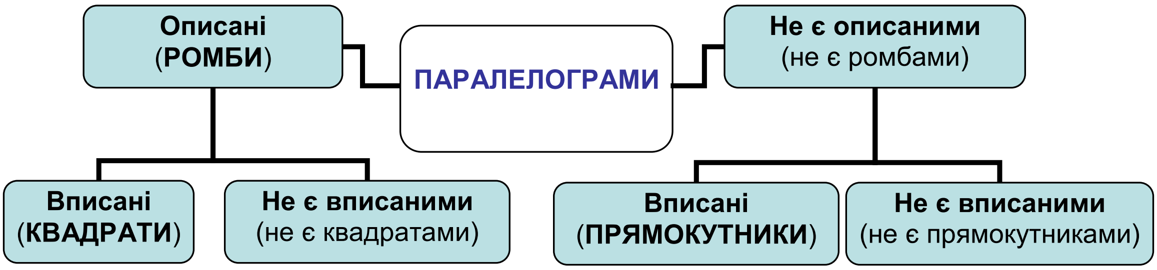


Рис. 6: Класифікація паралелограмів за ознаками «описаності та вписаності»

Слід також відзначити, що в літературі зустрічаються й інші підходи, пов'язані з вибором альтернативних (або ж еквівалентних) основ-ознак для проведення класифікації паралелограмів. Наприклад: «діагоналі перпендикулярні» («діагоналі не є перпендикулярними»); «діагоналі ріні» («діагоналі не є рівними») і т.п.. Спільним для всіх них є те, що класифікацію проводять у два етапи: спочатку за однією основою-ознакою, потім кожен з одержаних (двох) класів (видів) ділять на підкласи (підвиди) за іншою основою.

З огляду на обставини, про які зазначалося у вступі, автори вважають за доцільне та своїм приємним обов'язком навести загальні рекомендації та вимоги до класифікації математичних понять, які більш повно висвітлено Львом Моїсейовичем Фрідманом в [16].

Правильно побудована класифікація поняття повинна відображати найбільш суттєві ознаки і зв'язки між об'єктами поняття, допомагати краще орієнтуватися в множині цих об'єктів, давати можливість встановлювати такі ознаки цих об'єктів, які є найбільш важливими для застосування цього поняття в інших науках та практичній діяльності. Частіше доводиться класифікувати поняття за декількома основами. Тоді класифікацію поняття слід проводити поетапно: спочатку за однією основою, потім деякі види ділити на підвиди за іншою основою і т. д.

При класифікації необхідно дотримуватися наступних правил:

1. В якості основи класифікації можна обирати лише спільну ознаку усіх об'єктів даного поняття.
2. Основою для класифікації слід обирати найбільш суттєві властивості (ознаки) понять.
3. На кожному етапі класифікації можна застосовувати **лише одну певну основу** (в результаті класифікації на кожному етапі одержувані класи (види) не повинні перетинатися!).
4. Класифікація за певною основою повинна бути вичерпною, а кожен об'єкт поняття повинен потрапити в результаті класифікації в один і тільки один клас.

Не можна не погодитися із тим, що в кожній з наведених у підпункті 3.1. класифікацій поза увагою залишаються паралелограми «загального виду» (що не є прямокутниками або ромбами). Більше того, з урахуванням, принаймні 2 частини представленої статті (існуванням доволі широкого класу умовно рівнокутних паралелограмів), жодну з наведених у підпункті 3.1. класифікацій за Л.М. Фрідманом аж ніяк не можна вважати **повною**.

3.2. Класифікація паралелограмів за мірами кутів між сторонами і діагоналями та довжинами сторін і діагоналей

Якісний аналіз задач на паралелограми (що не прямокутниками або ж ромбами), які пропонуються в діючих підручниках, надихнув авторів додатково виділити наступні види паралелограмів

Означення 3. *Паралелограм будемо називати*

умовно гострокутним (умовно прямокутним, умовно тупокутним)*, якщо менша діагональ утворює з меншою стороною гострий кут (прямий і тупий кут відповідно);*

умовно рівнобедреним*, якщо менша діагональ дорівнює одній з його сторін;*

умовно правильним*, якщо менша діагональ утворює з його сторонами два правильні трикутники.*

Зауваження 2. *Умовно* гострокутні, прямокутні *та* тупокутні *паралелограми характеризуються тим, що основа однієї з висот, опущених з вершини тупого кута, належить одній зі сторін, а основа другої з висот —* іншій стороні, співпадає з вершиною паралелограма *(в цьому випадку висота співпадає з діагоналлю), належить продовженню іншої сторони відповідно.*

Очевидно також, що зазначену властивість впевнено можна обрати в якості основи для класифікації паралелограмів, зокрема й на певному етапі будь-якої з можливих класифікацій.

На рисунку 7 нижче проілюстровано авторський підхід до поетапної класифікації паралелограмів за п'ятьма основами. Її особливістю, на наш погляд, є те, що на відміну від існуючих класифікацій, паралелограмам, які не є прямокутниками або ромбами, приділено значно більшої уваги.

Також мусимо відзначити, що запропонована класифікація паралелограмів в жодному разі не претендує на загальну визнаність або ж впровадження. Пропонована або схожі класифікації не повинні стати самоціллю. Навпаки, вони повинні бути результатом проведення досліджень щодо виокремлення певних видів паралелограмів (зокрема доцільності їх виокремлення) та встановлення зв'язків між ними.

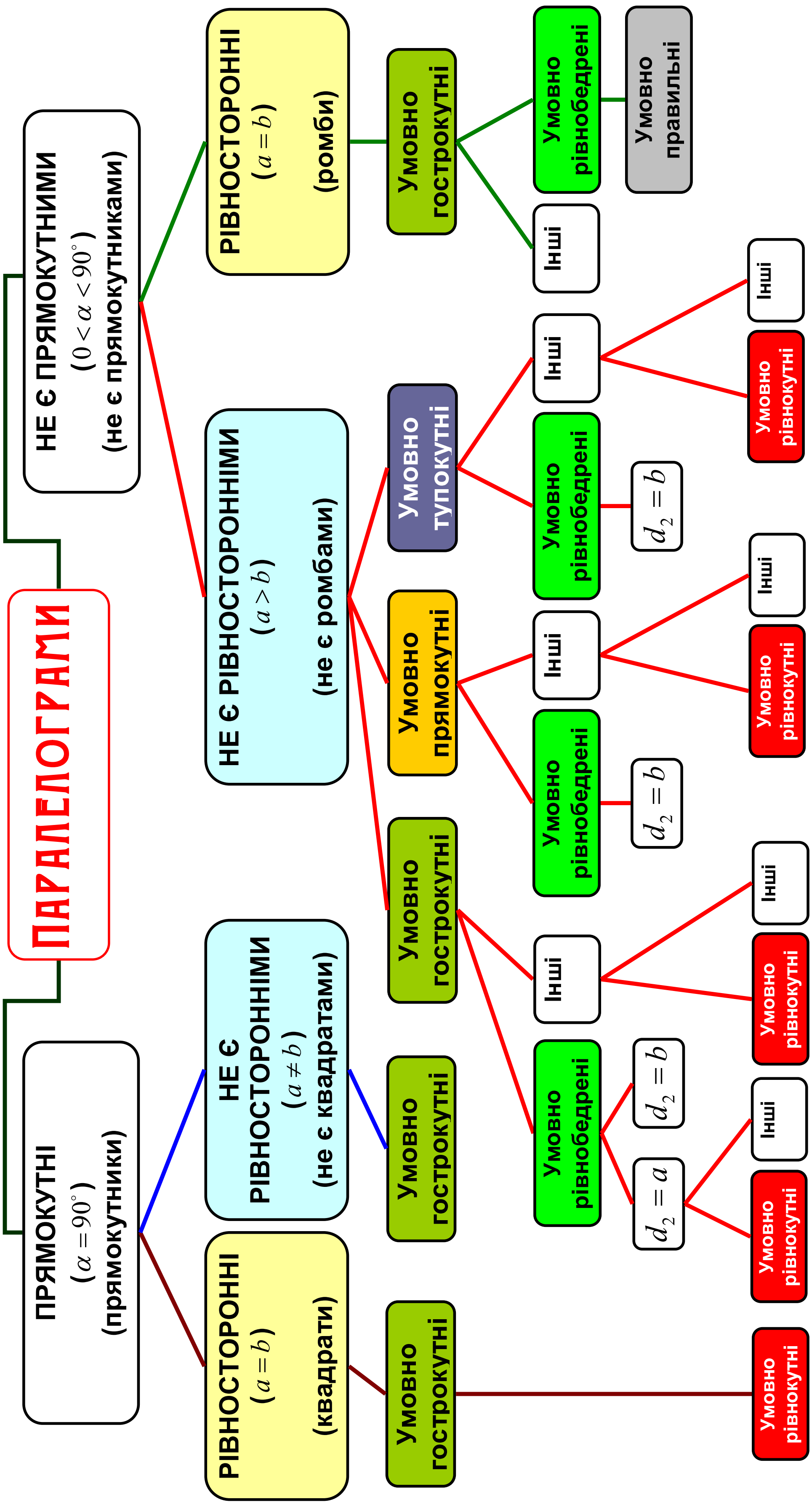


Рис. 7: Блок-схема до **класифікації паралелограмів**

Висновки

Автори мають надію, що для шанувальників елементарної геометрії ознайомлення з фактами для умовно рівнокутного паралелограма буде дійсно цікавим. Бо навіть поверхневе ознайомлення з ними, на нашу думку, є яскравим прикладом задач, як джерела естетичної привабливості. Крім того вважаємо, що наведений теоретичний матеріал може стати поштовхом для подальшого вивчення властивостей умовно рівнокутного паралелограма та «гарною сировиною» при відборі задач для 8–10 класів на Всеукраїнську учнівську олімпіаду з математики.

Також маємо сподівання, що запропонований матеріал допоможе студентам математичних спеціальностей ПЗВО і молодим вчителям математики при опануванні практичними навичками видового розмежування та проведення класифікацій геометричних об'єктів за декількома основами.

Література

1. *Бескин Н.М.* Методика геометрии : учебник для педагогичских институтов. — М.: Учпедгиз, 1947. — 276 с.
2. *Болтянский В.Г.* Четырехугольники // Квант. — 1974, №9. — С. 53–56.
3. *Гусев В.А.* Практикум по элементарной математике: Геометрия: Учеб. пособие для студентов физ.-мат. спец. пед. ин-тов и учителей / В.А. Гусев, В.Н. Литвиненко, А.Г Мордкович. — 2-е изд., перераб. и доп. — М.: Просвещение, 1992. — 352 с.
4. Геометрія : підруч. для 8 кл. загальноосвіт. навч. закл. / М.І. Бурда, Н.А. Тарасенкова. — К. : УОВЦ «Оріон», 2016. — 224 с.
5. Геометрія : підруч. для 9 кл. загальноосвіт. навч. закл. / М.І. Бурда, Н.А. Тарасенкова. — К. : УОВЦ «Оріон», 2017. — 224 с.
6. Геометрія для загальноосвітніх навчальних закладів з поглибленим вивченням математики : підруч. для 8 кл. загальноосвіт. навч. закладів / А.Г. Мерзляк, В.Б. Полонський, М.С. Якір. — Х. : Гімназія, 2016. — 224 с.
7. Геометрія для загальноосвітніх навчальних закладів з поглибленим вивченням математики : підруч. для 9 кл. загальноосвіт. навч. закладів / А.Г. Мерзляк, В.Б. Полонський, М.С. Якір. — Х. : Гімназія, 2017. — 304 с.
8. *Кадубовський О.А.* До питань про систематизацію фактів геометрії трапецій та їх класифікацію / О.А. Кадубовський, О.І. Цвєткова, М.І. Полюга // Збірник наукових праць фізико-математичного факультету ДДПУ. — 2015. — Випуск 5. — С. 114–140.
9. *Кадубовський О.А.* Систематизація та узагальнення фактів геометрії паралелограмів / В.М. Кадубовська, О.А. Кадубовський // Збірник нау-

кових праць фізико-математичного факультету ДДПУ. — 2017. — Вип. 7. — С. 136–170.

10. *Кадубовський О.А.* Про одну чудову властивість паралелограма // Збірник наукових праць за матеріалами дистанційної всеукраїнської наукової конференції «Математика у технічному університеті XXI сторіччя», 15 — 16 травня, 2017 р., Донбаська державна машинобудівна академія, м. Краматорськ. — Краматорськ : ДДМА, 2017. — С. 229–231. — 350 с.
11. *Кушнір І.А.* Геометрія трапеції в задачах. — Х. : Вид. Группа «Основа» 2009. — 80 с. (Зб. журн. «Математика в школах України»; Вип. 9 (81)).
12. *Понарин Я.П.* Элементарная геометрия: В 2 т. — Т. 1: Планиметрия, преобразования плоскости. — М.: МЦНМО, 2004. — 312 с.
13. *Сарванова Ж.А.* Методическая направленность обучения элементарной математике студентов педагогического ВУЗа // Интеграция образования. — 2007, №3–4. — С. 169-172.
14. *Сканави М.И.* Сборник конкурсных задач по математике для поступающих во втузы. 3-е изд., доп. — М.: Высшая школа, 1978. — 519 с.
15. *Чичигин В.Г.* Методика преподавания геометрии. Планиметрия // Пособие для учителей средней школы. — М.: Гос.-ное учебно-педагогическое издательство Министерства просвещения РСФСР, 1959. — 391 с.
16. *Фридман Л.Н.* Учитесь учиться математике: книга для учащихся. — М.: Просвещение, 1985. — 114 с.

Lavreniuk A.F., Kadubovska V.M., Kadubovskyi O.A.
Donbas State Pedagogical University, Sloviansk, Ukraine.

About the one kind of parallelograms and some related questions

In this article we consider parallelograms in which the angle between the sides is equal to the angle between the diagonals. One of the possible approaches to acquaintance of students with the specified type of parallelograms in the school course of geometry is offered. Except a number of related methodological aspects, the article presents classification of parallelograms based on various bases, in particular the author's approach to the gradual classification of parallelograms by five bases.

Keywords: *parallelograms, learning process of geometry, classification of parallelograms.*

УДК 373.5:51

Шулик Т.В., Козаченко Ю.О.

[1] *канд. педагогічних наук, ст. викл. каф. математики та інформатики, ДВНЗ «ДДПУ»*

[2] *студентка 4 курсу фізико-математичного факультету, ДВНЗ «ДДПУ»*

e-mail: schulik111@gmail.com

РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ ПРАКТИЧНОГО ЗМІСТУ ЯК ЕФЕКТИВНИЙ СПОСІБ РЕАЛІЗАЦІЇ ПРИКЛАДНОЇ СПРЯМОВАНОСТІ ШКІЛЬНОГО КУРСУ МАТЕМАТИКИ В СУЧАСНІЙ ШКОЛІ

У статті наголошено на актуалізації прикладної спрямованості шкільного курсу математики, і відповідно, на доцільності формування в учнів умінь застосовувати математику в реальному житті, що пов'язано з реформуванням системи освіти в Україні; висвітлено основні етапи дослідження, під час якого було експериментально перевірено схильність учнів до розв'язування задач практичного змісту.

Ключові слова: *задача практичного змісту, шкільний курс математики, математична модель, експеримент, учитель, учень.*

Вступ

Сучасний етап розвитку суспільства характеризується стрімким зростанням обсягу наукової інформації і високоінтелектуальними технологіями виробництва, а це вимагає від закладів середньої освіти значних змін у підготовці учнів до життя. Для успішного розвитку суспільства необхідні люди, які здатні застосовувати отримані знання на практиці, швидко адаптувалися до нестандартних ситуацій. У теперішніх умовах освіта повинна давати випускникові не тільки суму базових знань, набір корисних і необхідних навичок, а й сформувати вміння самостійно здобувати потрібну інформацію, застосовувати на практиці нові знання, аналізувати їх, приймати виважені рішення, тобто сформувати в ньому особистість, інноватора, патріота. Це, у свою чергу, вимагає істотних змін як у цілому в системі освіти, так і в оновленні сучасного змісту нової української школи.

Математика є не лише допоміжним інструментом для розв'язання окремих проблем, а й загальнокультурною базою для засвоєння системи принципів і структур дисциплін, що вивчаються. Тому шкільна математична освіта має бути орієнтована на виховання предметного мислення, яке в своєму розвинутому вигляді означає здатність створювати математичні структури, уміння аналізувати їх властивості, а також інтерпретувати результати аналізу. Цього можна досягти тільки через формування в учнів уміння бачити й застосовувати математику в реальному житті; розуміти зміст і метод математичного моделювання; уміти будувати математичну модель, досліджувати її методами математики; інтерпретувати отримані результати; мати високий рівень математичної грамотності.

Головні положення щодо розвитку освітніх процесів в Україні викладені в Законах України «Про освіту», «Про загальну середню освіту», Концептуальних засадах реформування середньої школи «Нова українська школа», Державному стандарті базової та повної середньої освіти, Концепції профільного навчання в старшій школі та ін.

Проект Нової української школи насичений великою кількістю інновацій, які в подальшому мають якісно вплинути на організацію та ефективність навчального процесу середньої школи. Зокрема, акцентується увага на новому змісті освіти, у якому максимально має бути врахована прикладна спрямованість освітнього процесу [2].

Мета статті — висвітлити результати експерименту з перевірки схильності учнів до розв'язання задач практичного змісту.

Основна частина

В основу дослідження було покладено гіпотезу, яка полягає в наступному. Якщо учню сучасної української школи, запропонувати виконати на вибір одне з двох завдань із математики, перше з яких є задача практичного спрямування, а друге — математична модель цієї задачі, але з іншими даними (рівняння, нерівність тощо), то він обере виконання другого завдання. Проте, якщо вчитель математики в навчальний та позанавчальний час систематично проводитиме роботу, спрямовану на підвищення інтересу учнів до розв'язування задач практичного змісту, і відповідно до дисципліни «Математика» в цілому, то рівень зацікавленості учнів у розв'язуванні задач практичного спрямування вдасться підвищити.

Дослідження проводилось на базі Іванівської загальноосвітньої школи І-ІІІ ступенів Артемівської районної ради Донецької області та Званівської загальноосвітньої школи І-ІІІ ступенів Бахмутської районної ради Донецької області. Експериментальну вибірку склали 40 учнів 9-х класів.

Експеримент проводився в п'ять етапів:

1. Підготовчий — планування експерименту (визначення мети, висунення гіпотези, обрання об'єктів в якості експериментальних і контрольних груп, розроблення двох анкет опитування тощо).

2. Проведення констатувального експерименту, який частково підтвердив гіпотезу про обрання більшістю учнів другого завдання.

3. Проведення позакласного заходу в експериментальній групі, у план якого було включено такі види робіт: розв'язування задач практичного змісту, у яких учень мав уявити себе безпосереднім учасником; складання задач практичного змісту за картинками; складання задач учнями, пов'язаними з їх життєдіяльністю тощо.

4. Проведення контрольного експерименту, який дозволив виявити кількісні та якісні зміни в експериментальній і контрольній групах.

5. Підведення підсумків експериментальної роботи.

Анкета опитування №1

<table>
<tr><td>1</td><td>Дідусь вирішив побудувати огорожу завдовжки 20 м. Допоможіть йому обчислити скільки стовпів для цього потрібно, якщо ставити їх на відстані 2 м один від одного (розмірами стовпів знехтувати).</td><td>Обчисліть:
$\frac{135}{15} + 91$</td></tr>
<tr><td>2</td><td>Запишіть координати точок, що знаходяться на відстані 8 од. від т. $K(8)$.</td><td>Кінцеві пункти автобусного маршруту – A і B. Якщо їхати від A до B, то зупинка «Школа» – четверта, а якщо їхати від B до A, то зупинка «Школа» – дев'ята. Скільки всього зупинок на автобусному маршруті?</td></tr>
<tr><td>3</td><td>У класі навчаються a дівчат і b хлопців. Сьогодні, у зв'язку із хворобою, на заняття не прийшли c дівчат і d хлопців. Скільки всього учнів прийшло на заняття?</td><td>Запишіть у вигляді виразу: сума чисел a і 4, поділена на c.</td></tr>
<tr><td>4</td><td>Розставте значення виразів у порядку зростання:
$123456 + 89$,
$34956 - 583$,
$80076 - 115 + 336$,
$99999 - 543 - 109$.</td><td>Відстань від Харкова до Києва дорівнює 483 км. Вона на 294 км більша, ніж відстань від Києва до Черкас, і на 142 км більша за відстань від Черкас до Вінниці. Яку відстань подолав турист маршрутом Харків – Київ – Черкаси – Вінниця?</td></tr>
<tr><td>5</td><td>Садок має форму прямокутника зі сторонами 6 м і 10 м. Чи вистачить 30 м паркану для того, щоб огородити сад?</td><td>Знайдіть невідомі величини прямокутника за таблицею<table><tr><td>Довжина</td><td>20 см</td><td></td></tr><tr><td>Ширина</td><td>15 см</td><td>10 см</td></tr><tr><td>Периметр</td><td></td><td>60 см</td></tr></table></td></tr>
<tr><td>6</td><td>За 24 днів на фабриці планували пошити 300 костюмів. Проте кожного дня шили на 3 костюми більше, ніж планували. За скільки днів на фабриці виконають план?</td><td>Виконайте ділення:
12180 : 42.</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td>7</td><td>Два автомобілі виїхали одночасно назустріч один одному із двох пунктів, відстань між якими дорівнює 260 км і зустрілися через 2 год. Знайдіть швидкість кожного автомобіля, якщо швидкість одного з них на 10 км/год більша за швидкість другого.</td><td>Розв'яжіть рівняння:
$(99 - 9y) \cdot 8 + 14 = 86$.</td></tr>
<tr><td>8</td><td>1 м^2 лінолеуму коштує 90 грн. Скільки треба заплатити за лінолеум для зали у твоїй домівці?</td><td>Знайдіть площу квадрата, якщо його периметр дорівнює 64 м.</td></tr>
<tr><td>9</td><td>Аркуш паперу має форму прямокутника розміром 210×297 мм. Чи вистачить одного аркуша, щоб обклеїти куб із ребром 6 см?</td><td>Дано куб. За даними таблиці знайдіть невідомі величини
<table>
<tr><td>Ребро куба</td><td>4 см</td><td></td><td>3 см</td></tr>
<tr><td>Сума довжин усіх ребер куба</td><td></td><td>48 м</td><td></td></tr>
<tr><td>Сума площ усіх граней куба</td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table></td></tr>
<tr><td>10</td><td>Випишіть усі можливі комбінації цифр 1, 2, 3, 4.</td><td>Ви вирішили відвідати музей, театр і виставку. Скільки варіантів вашої культурної програми ви можете розробити?</td></tr>
<tr><td>11</td><td>Обчисліть 40% від числа 32.</td><td>Ялпуг – найбільше природне озеро в Україні, його довжина – 25 км, а ширина становить 28% довжини.
Яка ширина озера Ялпуг?</td></tr>
<tr><td>12</td><td>Кінозал на денному сеансі був заповнений на 84%. Скільки людей прийшло в кіно, якщо 3 з них становлять 2% кількості місць в залі?</td><td>Знайдіть число, 20% від якого – це число 10.</td></tr>
<tr><td>13</td><td>Обчисліть середнє арифметичне чисел:
2,5; 1,8; 14,9; 3,6; 7,8; 6,3; 9,5; 2,6; 1,7; 4,3.</td><td>Визначте свій середній бал успішності за перший семестр.</td></tr>
<tr><td>14</td><td>Дерев'яний брусок завдовжки 48 см, завширшки 30 см і заввишки 24 см потрібно розрізати без відходів на найменшу кількість рівних кубів. Скільки кубів одержимо?</td><td>Знайдіть найбільший спільний дільник чисел 130 і 78.</td></tr>
<tr><td>15</td><td>За перший день заасфальтували $\frac{3}{15}$ км дороги, а за другий – на $\frac{1}{10}$ км менше. Скільки кілометрів дороги заасфальтували за два дні?</td><td>Виконайте дії:
$7\frac{9}{10} - 2\frac{3}{5} - 2\frac{1}{2} + \frac{3}{4}$.</td></tr>
<tr><td>16</td><td>Знайдіть $\frac{2}{3}$ від $1\frac{1}{6}$.</td><td>Висота гори Говерли дорівнює 2060 м, а висота гори Ай-Петрі становить $\frac{3}{5}$ висоти Говерли. Яка висота Ай-Петрі?</td></tr>
<tr><td>17</td><td>Цукор-пісок у процесі переробки на рафінад втрачає $\frac{2}{15}$ своєї маси. Скільки потрібно взяти цукру-піску, щоб одержати 52 ц рафінаду?</td><td>Знайдіть число, $\frac{7}{8}$ якого дорівнює $2\frac{3}{4}$.</td></tr>
</table>

18	Знайдіть невідомий член пропорції: $1,5 : 0,3 = 9 : x$.	Пасажир метро, стоячи на ескалаторі завдовжки 150 м, піднімається вгору за 3 хв. За який час пасажир піднімається ескалатором завдовжки 180 м, якщо швидкості ескалаторів однакові?
19	Знайдіть відсоткове відношення чисел 24 і 408.	У місті А з 20000 повнолітніх проголосували 17500 виборців, а в місті Б з 32000 – проголосувало 25800. У якому місті виборці були активнішими?
20	Ціна 1 кг товару – 2,5 грн. Як залежить вартість z цього товару від йог маси m? Яка вартість товару, маса якого дорівнює 18 кг?	Функцію задано формулою $y = 2x + 5$. Знайдіть значення функції, якщо $x = -3,7$.
21	На годівлю 10 коней і 16 корів щодня відпускали 160 кг сіна, причому 5 коней одержували на 5 кг сіна більше ніж 7 корів. Скільки кілограмів сіна давали щодня коневі й корові?	Розв'яжіть систему рівнянь: $\begin{cases} 3x + 8z = 59, \\ 6x + 5z = 107 \end{cases}$
22	Батькові 42 роки, а сину 10. Коли батько був старше сина в 5 разів?	Розв'яжіть рівняння: $5 \cdot (z + 3) = 8 \cdot (10 - z)$.
23	Розв'яжіть систему рівнянь: $\begin{cases} 6x + 5y = 2,3, \\ 3x - 4y = 0,5 \end{cases}$	Якщо розсадити дітей по два за стіл, то не вистачить трьох столів. Якщо розсадити їх по три, то один стіл опиниться зайвим. Скільки було дітей і скільки столів?
24	Периметр поля прямокутної форми дорівнює 6 км, а його площа 200 га. Знайдіть довжину і ширину поля.	Розв'яжіть рівняння: $25c^2 + 15c - 4 = 0$.
25	Турист проплив моторним човном вверх за течією річки 25 км, а назад спустився плотом. Човном він плив на 10 год менше, ніж плотом. Знайдіть швидкість течії, якщо швидкість човна в стоячій воді – 12 км/год.	Розв'яжіть рівняння: $\frac{z+2}{z} = \frac{5z+1}{z+1}$
26	За підрахунками екологів одна пальчикова батарейка, яка потрапила у смітник, забруднює 20 м^2 землі. Яку частину площі своєї області збережуть від забруднення учні вашої школи, якщо віднесуть по одній використаній батарейці у спеціальний бокс?	Знайдіть відношення чисел 356 і 21716.

Анкета опитування №2

1	Шматок дроту завдовжки 102 см потрібно розрізати на частини завдовжки 15 см і 12 см, але так, що обрізків не було. Як це зробити? Скільки розв'язків має задача?	Серед чисел 93, 105, 172, 308, 400, 1511, 2005, 31510 назвіть ті, що діляться на 2; на 5; на 10.
2	На координатному промені позначено числа 1 і a. Позначте на цьому промені точки, які відповідають числам $a + 2$; $a - 1$; $2a$ 	На поличці 15 книг. Якщо рахувати зліва направо, то підручник з математики стоїть на 10 місці. Яким буде по порядку цей підручник, якщо книжки рахувати справа наліво?

<table>
<tr><td>3</td><td>У школі №1 навчається p учнів, у школі №2 – на n учнів більше, а в школі №3 – на m учнів більше, ніж у школі №2. Скільки учнів навчається в трьох школах?</td><td>Запишіть у вигляді виразу: добуток числа 56 і суми чисел m і n</td></tr>
<tr><td>4</td><td>Розставте значення виразів у порядку спадання:
$123456 - 89$,
$4435 + 10745 - 45$,
$45610 - 12105$,
$459873 - 10003 - 5$.</td><td>45 мг вітаміну C на день – добова норма для дітей 10 років. У 100 грамах чорної смородини міститься 200 мг вітаміну C, а в апельсинах і лимонах – відповідно на 140 мг і 160 мг менше. Скільки вітаміну C у 100 г апельсинів?</td></tr>
<tr><td>5</td><td>Ширина лінолеуму 2 м. Скільки метрів лінолеуму буде потрібно, щоб покрити підлогу, розміром 5×4 м?</td><td>Знайдіть невідомі величини прямокутника за таблицею<table><tr><td>Довжина</td><td>8 см</td><td></td></tr><tr><td>Ширина</td><td>23 см</td><td>32 см</td></tr><tr><td>Периметр</td><td></td><td>124 см</td></tr></table></td></tr>
<tr><td>6</td><td>Під час весняних канікул Сергійко планував розв'язати 40 задач з математики за 5 днів. Проте він кожного дня розв'язував на 2 задачі більше, ніж планував. За скільки днів Сергійко розв'язав усі задачі?</td><td>Виконайте ділення:
91656 : 456.</td></tr>
<tr><td>7</td><td>Відстань між пунктами A і B дорівнює 435 км. Одночасно назустріч один одному із двох пунктів виїхали два автомобілі і зустрілися через 3 години. Знайдіть швидкість кожного автомобіля, якщо швидкість одного з них на 5 км/год менша від швидкості другого.</td><td>Розв'яжіть рівняння:
$144 - (x : 11 + 21) \cdot 5 = 14$.</td></tr>
<tr><td>8</td><td>1 м^2 лінолеуму коштує 90 грн. Скільки треба заплатити за лінолеум для зали у твоїй домівці?</td><td>Знайдіть площу квадрата, якщо його периметр 144 см.</td></tr>
<tr><td>9</td><td>Для фарбування кубика з ребром 4 см потрібно 1 г фарби. Скільки фарби потрібно для фарбування кубика з ребром 12 см?</td><td>Дано куб. За даними таблиці знайдіть невідомі величини<table><tr><td>Ребро куба</td><td></td><td>6 см</td><td></td></tr><tr><td>Сума довжин усіх ребер куба</td><td>60 дм</td><td></td><td>120 м</td></tr><tr><td>Сума площ усіх граней куба</td><td></td><td></td><td></td></tr></table></td></tr>
<tr><td>10</td><td>Скільки наборів букв можна скласти з букв I, K, T, M?</td><td>Марійка забула дві останні цифри номера мобільного телефону подруги. Скільки комбінацій їй доведеться перебрати?</td></tr>
<tr><td>11</td><td>Обчисліть 15% від числа 5,4.</td><td>Синевир – національний парк в Українських Карпатах. Його площа – 40400 га, з них – 14,4% відведено під заповідну зону. Яка площа заповідної зони Синевиру?</td></tr>
</table>

12	Скільки потрібно зібрати ромашки, щоб отримати 7 кг сушеної, якщо під час сушіння вона втрачає 86% своєї маси?	Знайдіть число, 25% від якого – це число 75.
13	Обчисліть середнє арифметичне чисел: 11,8; 2; 4,3; 7,8; 10,8; 9,1; 3,5; 7,8; 8,8; 1,1.	Виміряйте довжину десяти своїх кроків і визначте середню довжину кроку.
14	Прямокутний аркуш паперу завдовжки 56 см і завширшки 48 см потрібно розрізати без відходів на найменшу кількість рівних квадратів. Скільки квадратів одержимо?	Знайдіть найбільший спільний дільник чисел 210 і 330.
15	За перший день Ігор прочитав 2/7 кількості сторінок книжки, за другий – 1/3, а за третій – решту. Яку частину книжки прочитав Ігор за третій день?	Виконайте дії: $3\frac{1}{2}+5\frac{5}{6}-\frac{1}{3}-3\frac{1}{2}-6\frac{5}{12}$.
16	Знайдіть 24% від 1,5.	Маса білого ведмедя дорівнює 700 кг, а маса бурого ведмедя становить 43% маси білого. Знайдіть масу бурого ведмедя.
17	Український транспортний літак АН-225 («Мрія») увійшов до книги рекордів Гіннеса, піднявши в повітря вантаж, маса якого дорівнює 250 т і становить $\frac{5}{6}$ маси літака з вантажем. Якою була маса завантаженого літака?	Знайдіть число, $\frac{2}{3}$ якого дорівнює 30.
18	Знайдіть невідомий член пропорції: $\frac{5}{0,5}=\frac{90}{x}$.	Водій помітив, що, проїхавши 140 км на автомобілі «Таврія», він витратив 7 л бензину, а проїхавши 150 км на автомобілі «Нива», – 18 л. Який з автомобілів витрачає на 100 км шляху більше бензину і на скільки літрів?
19	Знайдіть відсоткове відношення чисел 24 і 300.	У списках виборчої дільниці налічується 1280 виборців. У день виборів проголосували 1120 виборців. Який відсоток виборців взяли участь у голосуванні?
20	Нафта проходить трубою зі швидкістю 12 т/год. Скільки нафти проходить такою трубою за 3 год; за t год?	Функцію задано формулою $y = 7x + 11$. Знайдіть значення функції, якщо $x = -18$.
21	У двох сьомих класах – 72 учні. Якби із 7-А класу 2 учні перейшли в 7-Б, то в обох класах учнів стало б порівну. Скільки учнів у кожному класі?	Розв'яжіть систему рівнянь: $\begin{cases} x-y=0, \\ 3x-y=4 \end{cases}$
22	Матусі 35 років, а доньці – 12. Через скільки років дочка буде молодше матусі вдвічі?	Розв'яжіть рівняння: $8\cdot(9-2x)=5\cdot(2-3x)$.
23	Розв'яжіть систему рівнянь: $\begin{cases} 3x+7y=31, \\ 2x+9y=12 \end{cases}$	Дівчата з 8-Б займають місця у класі. Якщо вони сядуть по одній за парту, то двом не вистачить вільних парт. Якщо ж дівчата сядуть по двоє, то дві парти опиняться вільними. Скільки дівчат було і скільки парт вони зайняли?

24	Знайдіть довжину і ширину ділянки прямокутної форми, якщо її площа дорівнює 800 м^2, а довжина на 20 м довше ширини.	Розв'яжіть рівняння: $5m^2 + 31m - 28 = 0$.
25	Теплохід пройшов униз річкою 150 км і повернувся назад, затративши на весь шлях 5,5 год. Знайдіть швидкість течії річки, якщо швидкість теплохода в стоячій воді становить 55 км/год.	Розв'яжіть рівняння: $\frac{2x-2}{x+3} - \frac{3x-x}{3-x} = 5$.
26	За підрахунками екологів одна пальчикова батарейка, яка потрапила у смітник, забруднює 20 м^2 землі. Яку частину площі своєї області збережуть від забруднення учні вашої школи, якщо віднесуть по одній використаній батарейці у спеціальний бокс?	Знайдіть відношення чисел 420 і 21000

Зауважимо, що анкети опитування розроблено із використанням шкільних підручників [1], [3], [4].

Результати констатувального експерименту:

Експериментальна група

Контрольна група

Результати контрольного експерименту:

Експериментальна група

Контрольна група

На діаграмах під «прикладною» задачею розуміємо задачу практичного змісту, а під «практичною» — математичну модель цієї задачі.

Висновки

Отже, отримані результати експерименту дозволяють зробити такі висновки. Якщо проводити з учнями систематичну роботу, спрямовану на демонстрацію зв'язку математики з життям та формування в них умінь застосовувати математику в реальному житті (позакласні заходи, упровадження елементів прикладної спрямованості на уроках математики тощо), то це сприятиме, по-перше, зламу установки більшості учнів «Я не вмію розв'язувати задачі практичного змісту і тому не хочу їх розв'язувати», і по-друге, підвищить інтерес учнів до математики.

Гіпотезу дослідження підтверджено і тому подальші дослідження потрібно присвятити розробленню та вдосконаленню наявних методичних розробок, спрямованих на реалізацію прикладної спрямованості шкільного курсу математики.

Література

1. *Бевз Г.П.* Алгебра : підручник для 7-9 класів середніх шкіл / Г. П. Бевз. — К. : Освіта, 1998. — 319 с.
2. Концептуальні засади реформування середньої школи «Нова українська школа» [Електронний ресурс] / [Л. Гриневич, О. Елькін, С. Калашнікова та ін.; Міністерство освіти і науки України]. — Режим доступу : http://mon.gov.ua/activity/education/zagalna-serednya/ua-sch-2016/. – 2016 р.

3. Математика : підручник для 5 класу / [Н. А. Тарасенкова, І. М. Богатирьова, О. П. Бочко, О. М. Коломієць, З. О. Сердюк]. — К. : Освіта, 2013. — 352 с.
4. *Янченко Г.М.* Математика : підручник для 6 класу / Г. М. Янченко, В. Р. Кавчук. — м. Тернопіль : Вид-во «Підручники і посібники», 2006. — 273 с.

Shulik T. V., Kozachenko Y. O.
Donbas State Pedagogical University, Sloviansk, Ukraine.

Solution of the Tasks of the Practical Content as an Effective Method for Implementation of the Applied Direction of the School Course of Mathematics in the Modern School

The article emphasizes the actualization of the applied direction of the school course of mathematics, and, accordingly, the expediency of forming students' abilities to apply mathematics in real life, which is connected with the reformation of the education system in Ukraine; the main stages of the study, during which the pupils' inclination to solve tasks of practical content was experimentally checked.

Keywords: *task of practical content, school mathematics course, mathematical model, experiment, teacher, student.*

УДК 378.147.88

Кайдан Н.В., Кайдан В.П., Тураненко Х.О.

[1] *кандидат фізико-математичних наук, доцент, доцент кафедри методики навчання математики та методики навчання інформатики, ДВНЗ «ДДПУ»*

[2] *викладач вищої кваліфікаційної категорії, Слов'янський енергобудівний технікум*

[3] *студентка 2 курсу (магістратура) фізико-математичного факультету, ДВНЗ «ДДПУ»*

e-mail: kaydannv@gmail.com, kajtan.kt@gmail.com, tina-turanenko@ukr.net

ОСОБЛИВОСТІ УТВОРЕННЯ СВІТОГЛЯДУ МАЙБУТНЬОГО ФАХІВЦЯ ЯК РЕЗУЛЬТАТ ОСВІТНЬОГО ПРОЦЕСУ

В статті висвітлюються проблеми пов'язані з утворенням світогляду майбутнього фахівця. Особливості процесу утворення світогляду розглядаються як варіативна частина навчального процесу. Аналізується яким чином зміст цієї частини залежить не тільки від індивідуальних особливостей здобувача освіти, але й від вимог щодо майбутньої професійної діяльності.

Ключові слова: *світогляд, навчальний процес, самоосвіта, особистість, творчий пошук.*

Вступ

Значна кількість елементів розвитку вітчизняної системи освіти, що застосовуються упродовж останніх двох десятків років, можна об'єднати та охарактеризувати єдиним терміном «гуманізація». З точки зору ефективного стимулювання розвитку позитивних індивідуальних особливостей з метою розвитку творчих здібностей окремого індивіда, такий підхід є найбільш ефективним. Проте, постає актуальне питання не лише про здатність особистості до адаптації в умовах суспільного життя, але й про ефективне співіснування та співпрацю з іншими особистостями, що є представниками конкретного соціуму на рівні окремої сім'ї, громади, країни або, як граничний випадок, людського суспільства в цілому. [2]

Фактично, існують необхідність та потреба спрямовувати розвиток окремих здібностей в певному напрямку. Здебільшого, визначення пріоритетних здібностей зумовлюється майбутніми потребами професійної діяльності. Головне протиріччя в цьому випадку, на нашу думку, полягає в тому, що збільшення віку конкретного індивідуума набагато збільшує шанси на правильну визначеність професійних уподобань, але дуже зменшує шанси на ефективний розвиток необхідних здібностей.

Основна частина.

Розв'язання протиріччя, пов'язаного з низькою ефективністю прогнозування здібностей особи з урахуванням реально обраних в майбутньому професійних уподобань, на нашу думку, можна вирішити за допомогою створення уніфікованих умов навчально-виховного процесу. Необхідні для цього умови можуть бути створені у вигляді поступового розвитку всіх творчих здібностей особи, що здобуває освіту. В даному випадку буде відбуватись лише корегування навчального процесу за допомогою використання окремих методик навчання, що мають, в першу чергу, професійне спрямування.

Найбільш ефективним буде підхід поступового розвитку вмінь, пов'язаних із творчою роботою. Цей підхід розуміє під собою наявність одночасного створення певної структури вмінь, знань та навичок кожної окремої особистості. Практична реалізація такого підходу до навчально-виховного процесу буде являти собою розробку, теоретизовано обґрунтоване формування та створення структурованого світогляду. Цей світогляд має містити в собі певну теоретичну базу, базу практичних вмінь та навичок, необхідні знання щодо практичних елементів саморозвитку, основи знань та вмінь про комунікаційні процеси з оточуючим світом.

Загальні аспекти, що будуть спільними для здобувачів освіти усіх напрямків, як гуманітарного, так й технічного, й природничо-математичного профілю, полягають в наявності елементів саморозвитку та основах знань про комунікацію з оточуючим світом. Наявність таких вмінь та навичок повинне забезпечити гармонійне «входження» кожної окремої особистості до суспільства. Вказані раніше «теоретична» та «практична» бази мають бути варіативною частиною, склад якої та функціональність визначається як уподобаннями певного індивідууму так/або професійними інтересами.

Слід зауважити, що в даному випадку не слід розділяти та відокремлювати окремі елементи, що мають належати, наприклад, лише до гуманітарного професійного спрямування. В даному випадку, є необхідність створення сторонньої бази, що має за мету вивчити та визначити ефективність певних вмінь та навичок щодо конкретної професійної діяльності. Наявність такої бази має забезпечити аналіз та свідомий вибір кожною окремою особистістю певних вмінь та навичок, що в майбутньому стануть базою для створення унікального професійного профілю здобувача освіти.

На ранніх етапах освіти здебільшого більш корисними будуть вправи, які спрямовані не на творчий пошук, а на накопичення знань з окремих методів розв'язання проблеми.

Наприклад, в курсі шкільної математики, не слід одразу ставити учням питання про визначення градусної міри кута. Не слід, вимагати від них розв'язку проблеми, ґрунтуючись лише на означенні. Більш доцільно повідомити декілька розповсюджених способів (за допомогою циркуля, транспортира) з обов'язковим порівняльним аналізом щодо їх складності, затрат часу, умов використання.

У випадку курсу фізики, аналогічним прикладом є розгляд та вивчення методів визначення опору провідника. Розгляд методів пов'язаних з геометричними параметрами, характеристиками електричного кола, залежності опору провідника від температури та їх особливостей, більш ефективно створить теоретичну базу та дозволить краще опанувати відповідним навчальним матеріалом.

Аналогічний приклад можна розглянути й при вивченні відповідної теми курсу інформатики. Можливість створення таблиці в текстовому редакторі декількома способами дає змогу аналізувати ефективність виконання певного завдання та відповідну наявність творчого пошуку для практичної реалізації.

Лише потім пропонують проблему, для розв'язання якої необхідно визначити конкретний спосіб. А згодом, ставлять питання про «розробку» власного способу вирішення проблеми. У даному випадку, порівняльний аналіз виконує функцію наповнення «теоретичної» бази, а розв'язування завдань відповідає за «практичну» частину та саморозвиток. Намагання учнем «створити» свій власний спосіб та донесення його принципів до оточуючих якнайкраще забезпечить розвиток його комунікаційних навичок.

Під час процесу навчання в ВНЗ за технічними спеціальностями також існує потреба в розвитку творчого підходу. [1] Здебільшого це формується за допомогою вивчення окремих типових способів розв'язування проблеми («теоретична» та «практична» частини). Основною відмінністю у здобутті знань є те, що «практична» частина представлена спеціальними дисциплінами, що реалізують процес навчання на базі «теоретичної», представленої фундаментальними дисциплінами та предметами. Головною реалізацією можливостей саморозвитку в цій системі постає дипломний проект, оскільки завдання індивідуальні, а саме наявність «нового» здебільшого впливає на результати оцінювання. А здатність особистості взаємодіяти з оточуючим світом та якісні характеристики цієї здатності аналізуються під час захисту дипломного проекту. Здебільшого, вищевказане стосується й навчання за педагогічними спеціальностями.

Однак, на нашу думку, головна відмінність між двома напрямами підготовки фахівців, полягає в тому, що «технічна» проблема полягає в ефективному використанні ресурсів, що є в наявності, а реалізація «педагогічної» проблеми полягає саме в створенні необхідних ресурсів, що мають забезпечити певний результат процесу навчання. Як приклад такої реалізації, є поурочне планування, яке реалізується як відповідною документацією, так й засобами проведення заняття. Саме процес підготовки до проведення заняття спонукає педагога використовувати, тобто й розвивати, творчі здібності. Слід зауважити, що дуже цікавим для вивчення є процес підготовки інженерів-викладачів, що повинен поєднувати обидва напрямки освітньої діяльності.

Висновки

Навчально-виховний процес має бути базою для створення процесу самоосвіти. На ранніх етапах необхідно проводити накопичення знань з окремих методів розв'язання проблем та опанування відповідними навичками. На більш пізніх етапах головний пріоритет повинен належати творчому пошуку.

Фахівець, що отримав освіту, має вміти розв'язувати проблему творчим шляхом, але лише у випадку, якщо проведений ним аналіз не показав наявності стандартного або широковідомого шляху.

Література

1. *Лузік Е.* Креативність як критерій якості в системі підготовки фахівців профільних ВНЗ України / Е.Лузік // Вища освіта України, 2006. — № 3. — С. 77-82.
2. *Часова К.С.* Гуманізація освіти в Україні: теоретичний аналіз / К.С. Часова // Педагогічний процес: теорія і практика, 2013. — Вип. 4. — С. 194–201.

Kaidan Nataliia V., Kaidan Vadym P., Turanenko Khrystyna O.
Donbas State Pedagogical University, Sloviansk, Ukraine,
Slovyansk power engineering technical school, Sloviansk, Ukraine,
Donbas State Pedagogical University, Sloviansk, Ukraine.

Features of the process of the future specialist's worldview formation as a result of the educational process

The article deals with the problems connected with the formation of a future specialist's worldview. Features of the process of worldview formation are considered as a variational part of the educational process. It is analyzed how the content of this part depends not only on the individual characteristics of the student, but also on the requirements for future professional activities.

Keywords: *worldview, educational process, self-education, personality, creative search.*

УДК 372.853

Лимарєва Ю.М., Кекін М.О.

[1] *кандидат педагогічних наук, доцент кафедри фізики ДВНЗ «ДДПУ»*

[2] *студент 2 курсу (магістратура) фізико-математичного факультету ДВНЗ «ДДПУ»*

e-mail: zet.80@bk.ru

ДИСТАНЦІЙНИЙ ЕКСПЕРИМЕНТ ЯК ЗАСІБ СВІДОМОГО ЗАСВОЄННЯ НАВЧАЛЬНОГО МАТЕРІАЛУ СТАРШОКЛАСНИКАМИ

У статті висвітлено можливі підходи до використання дистанційного експерименту під час організації навчального процесу з фізики у старшій школі. Наведена класифікація домашнього дистанційного експерименту побудована на основі урахування поставленої мети його використання. Експеримент розкрито у новому технологічному аспекті, доведено доцільність його використання як різновиду домашнього завдання.

Ключові слова: *експеримент, навчальний процес, дистанційна освіта, свідоме навчання, мотивація.*

Вступ

Особливістю старшокласників є їхня вибірковість до оволодіння навчальними дисциплінами. Багато в чому причиною тому є попередня визначеність подальшої професійної освіти, що не завжди виправдовується. Зважаючи, що цей вибір може докорінно змінитися принципово важливо для вчителя фізики є як найширше розкриття практичного застосування фізичних знань у різних сферах та формування свідомого ставлення учнів до отримання фізичної освіти. Беручи до уваги, що фізику старшокласники вивчають як частину загальної цілісної науки, то дистанційний експеримент повинен мати науко-практичну спрямованість. Мотиваційна ж складова при цьому має змінити орієнтир на професійність освіти.

З метою допомоги учителю в нагоді стає використання у навчальному процесі елементів дистанційної освіти, а саме домашнього експерименту. Тому, за **мету** дослідження ставимо дослідження доцільності та варіативності використання дистанційних експериментів у навчальному процесі з фізики старшої школи.

Основна частина

Використання елементів дистанційного навчання в сучасній школі виступає важливою умовою підтримки інтересів учнів та їх професійної орієнтації. Єдине, що повинно бути чітко визначеним — це час роботи учня за комп'ютером. Таке обмеження має бути враховано учителем фізики.

Зазначимо, що ні в якому разі не намагаємося замінити навчання у закладах освіти дистанційним та виправдати таку заміну. У нашому дослідженні: дистанційне навчання виступає елементом загальної освіти школяра або відбувається використання елементів дистанційного навчання під час вивчення фізики. Тому авторська позиція така, що максимально корисним його використання є у підготовці домашніх завдань учнями.

Беручи до уваги те, що саме навчання на основі спостережень та дослідів забезпечує усвідомлення практичної значущості навчального матеріалу, дистанційний експеримент за його метою можна поділити на кілька видів: мотиваційний, додатковий, тренувальний, контрольний.

Мотиваційний експеримент — досліди для спостереження, що мотивують учнів до подальшого вивчення матеріалу. Впродовж попереднього домашнього перегляду запропонованих експериментів учні мають відповісти на запитання типу: «Що спільного ...? / Чим відрізняються ...?» (якщо дослідів кілька) або «Що відбувається ...? / Чому відбувається ...?» (якщо дослід один).

Додатковий експеримент для спостереження: націлений на підтвердження вивченого на уроці теоретичного матеріалу та розширення уявлень школярів про спектр його практичного застосування або відбиття у природі, що не підкорена впливу людини.

Тренувальний експеримент передбачає:

- вивчення матеріалів (текстових та аудіо-візуальних) для підготовки до лабораторних робіт, виконання допоміжних експериментів для попередньої домашньої підготовки;
- набуття практичних навичок застосування навчального матеріалу під час виконання експериментів за детальною інструкцією в домашніх умовах,
- підготовки до різних видів перевірочних робіт.

Контрольний експеримент може бути представлений як:

- запитання-експерименти;
- експерименти-помилки;
- незавершені експерименти, що передбачають подальшу експериментальну діяльність учня;

- експериментальні тестові завдання для самоперевірки (обрання відповідної дії);
- віртуальні експерименти;
- дослідницькі «шаради»;
- віртуальні дослідницькі ланцюжки: лише правильне виконання кожного із експериментів, що виступає складовим у ланцюжку, призводить до отримання кінцевого результату (при цьому, оцінювання відбувається на основі кількості «сходинок» пройдених учнем).

На основі виконаного домашнього експерименту доцільно також запропонувати учням творчі завдання зі створення «допоміжних навчальних матеріалів» для використання однокласниками:

- добір матеріалів з використання отриманих знань у подальшій професійній освіті та діяльності,
- підготовка презентацій за темами виконуваних навчальних проектів,
- завдання на встановлення міжпредметних зав'язків,
- створення описів експериментів («інструкцій»), які учень має самостійно виконати та відповісти на запропоновані контрольні запитання до них.

Окрім того, виконувана у зазначений вище спосіб система домашнього експерименту забезпечує учнів матеріалом для підготовки рефератів, презентацій та міні-доповідей. Систематична підтримка активності школярів створює умови для підвищення рівня засвоєння навчального матеріалу, розуміння його практичної значущості та усвідомлення меж застосування.

Висновки

На основі вище сказаного можемо стверджувати, що в аспекті підтримки систематичної вмотивованої діяльності школярів та формування у них свідомого ставлення до навчання дистанційний домашній експеримент дозволяє:

- підтримати зацікавленість,
- урізноманітнити діяльність,
- формувати навички свідомого встановлення причинно-наслідкових зав'язків явищ навколишнього світу,
- організовувати вмотивовану самоосвітню діяльність школярів,
- відтворити експерименти, що небезпечні для життя та здоров'я учня,
- розкрити практичне застосування вивченого явища у різних сферах життєдіяльності людини,
- проводити активну профорієнтаційну діяльність засобами фізики.

Використання у навчальному процесі елементів дистанційної освіти дозволяє підтримувати активність учня шляхом його професійної орієнтації.

Урізноманітнення завдань з урахуванням напрямку подальшої освіти розширює їх спектр, надає учню можливість вибору, передбачає розширення кругозору школяра. У такий спосіб зацікавленість фізикою як навчальним предметом підтримується на необхідному рівні.

Проблема, що розглядається не є завершеним дослідженням. Перспективи подальших розвідок полягають у створенні дидактичних матеріалів та рекомендацій щодо їх використання у навчальному процесі.

Література

1. *Горбачева А.В.* Дистанционное образование – технология обучения XXI века. // Nastoleni moderni vedy – 2007 // Materialy VI mezinarodni vedecko-prakticka conference «Nastoleni moderni vedy – 2007» (1 - 15 zari 2007 roku) - Dil 4. Pedagogika. Filologicke vedy. Psychologie a sociologie / Publishing House Education and Science s.r.o — Praha. : 2007. — С. 3–5.
2. *Горденко Т.* Елементи технології навчання як дослідження на уроках фізики / Т. Горденко // Наукові записки. — Випуск 4. — Кіровоград: РВВ КДПУ ім. В. Винниченка, 2013. — С. 133–138.
3. *Дементьєва Н.П.* Використання онлайнових симуляцій з фізики для проведення навчального експерименту / Н.П. Дементьєва // Засоби і технології сучасного навчального середовища: Матеріали конференції, м. Кіровоград, 17–18 травня 2013 р. / Відповідальний редактор: С.П. Величко — Кіровоград: ПП «Ексклюзив-Система», 2013. — С. 90–92.
4. *Дмитренко П.В.* Дистанционное образование / П.В. Дмитренко, Ю.А. Пасичник. — К.: НПУ, 1999. — 25 с.
5. *Забара О.* Віртуальний експеримент як основний елемент запровадження синергетичного підходу до фізичного практикуму. // Наукові записки. — Вип. 4. — Кіровоград: РВВ КДПУ ім. В. Винниченка, 2013. — С. 144–147.
6. *Лазарев В.С.* Опытно-экспериментальная работа в образовательном учреждении: Практическое пособие для руководителей — М.: Центр педагогического образования, 2008. — 48 с.
7. *Удовиченко С.М.* Інформаційні технології в школі / С.М. Удовиченко // Воздействие социальной среды на воспитание и формирование личности: классические и инновационные подходы к изучению проблематики: материалы междунар. науч.-практ. конф. (г. Донецк, 20–21 декабря 2012 г.) / Научный журнал «Аспект» — Донецк: Изд-во «Ноулидж», 2012. — С. 136–137.
8. *Ясулайтис В.А.* Дистанционное обучение : метод. рекомендации / В.А. Ясулайтис. — К.: МАУП, 2005. — 72 с.

Lymareva Yuliya M., Kekin Maxim A.
Donbas State Pedagogical University, Sloviansk, Ukraine.

Remote experiment as a means of conscious learning of the educational material by senior pupils

The article outlines possible approaches to the use of a remote experiment during the organization of an educational process in physics at an elementary school. The given classification of a home remote experiment is based on the consideration of the purpose of its use. The experiment is disclosed in a new technological aspect, proved the feasibility of using it as a kind of homework.

Keywords: *experiment, learning process, distance education, conscious learning, motivation.*

УДК 372.853

Лимарєва Ю.М., Хатулева В.О.

[1] *кандидат педагогічних наук, доцент кафедри фізики ДВНЗ «ДДПУ»*

[2] *студентка 2 курсу (магістратура) фізико-математичного факультету ДВНЗ «ДДПУ»*

e-mail: zet.80@bk.ru

ОРГАНІЗАЦІЯ СВІДОМОГО ПІДХОДУ ДО ВИВЧЕННЯ ФІЗИКИ У СТАРШІЙ ШКОЛІ

Стаття присвячена дослідженню проблем формування навичок свідомого навчання в курсі фізики старшої школи. Розглянуто можливі прийоми їх вирішення на сучасному етапі розвитку шкільної освіти. Зазначений діяльнісний підхід до набуття знань формує впевненість особистості у цілісності та пізнаваності науки. Визначені підходи дозволяють засобами фізики розвивати в учнів стійкі навички до самоосвіти та подальшого навчання впродовж життя.

Ключові слова: *навчальний процес, фізичний експеримент, експериментальна задача, дослід, свідомість, самостійність, мотивація.*

Вступ

Вікові особливості учнів старшої школи та вимоги й структура програми докорінно змінюють дидактичні й методичні підходи до організації навчального процесу. В основі побудови програми з фізики для старшої школи —

науковий підхід. Учні мають навчитися розглядати оточуючий світ крізь призму науки, в тому числі використовуючи її елементи для організації самонавчання.

Переломний у шкільній фізичній освіті є 10 клас, коли школярі вважають себе достатньо дорослими і «казка» йде в минуле втрачаючи свою цінність, а пропедевтичність поступається місцем науковості. Проблемою програми з фізики 10 класу є те, що починається вона із занадто математизованого розділу «Кінематика», що значною мірою послаблює рівень зацікавленості особистості фізикою, від чого уповільнюється її активність.

Окрім того, дехто з учнів уже визначається з подальшим вибором напрямку освіти, в той час коли інші - потребують активної допомоги оточуючих (в тому числі і учителя) для здійснення такого вибору. Таким чином, рівень зацікавленості фізикою та свідомий підхід до набуття знань різко знижуються, що стає все більшою проблемою з часом.

Тому, **метою** статті ставимо встановлення ефективних підходів до мотивації свідомого навчання учнів 10-х класів загальноосвітніх шкіл засобами фізики.

Основна частина

Вивчення розділів фізики «Механіка» та «Молекулярна фізика і термодинаміка», які розглядаються саме у програмі 10 класу надають значні можливості для широкого використання домашнього фізичного експерименту у навчальному процесі. Теми зазначених розділів не вимагають складного обладнання для організації на проведення домашнього експерименту. У такому випадку експеримент дозволяє підтримати зацікавленість, свідомо встановити причинно-наслідкові зв'язки явищ навколишнього світу і у такий спосіб значною мірою сприяти формуванню свідомого підходу особистості до вивчення фізики.

Будь-яка активність особистості забезпечує підвищення рівня оволодіння навчальним матеріалом, розуміння його практичної значущості та усвідомлення меж застосування. За таких умов у нагоді стає підготовка рефератів та презентацій які охоплюють історичні відомості та/або сучасне практичне застосування. Така інформація розширює кругозір, відволікає від «сухої» математики, розкриває практичну цінність матеріалу та створює основу для подальшого розкриття індивідуальних схильностей особистості й організації її відповідної професійної орієнтації.

Домашній та додатковий експеримент забезпечують також формування практичних навичок роботи. Простота обладнання дозволяє в домашніх умовах спостерігати явища, робити необхідні вимірювання та у такий спосіб самостійно переконуватися у практичній потребі математичного апарату. До того ж, покрокова інструкція (яка може бути надана) забезпечує усвідомлення загального алгоритму проведення будь-якого наукового експерименту з будь-якої теми.

Добровільність вибору додаткового експерименту сприяє підвищенню інтересу та мотивації оцінювання самостійної домашньої практичної діяльності. Якщо учень підготував додатковий експеримент, то відтворення його в класі конче необхідне по-перше — для підтримки зацікавленості, мотивації та оцінювання особистості, по-друге — для зацікавлення та залучення інших школярів до такої діяльності.

Власна ініціатива учня в цьому випадку має обов'язково заохочуватися та за необхідності методично підтримуватися. Додатковий фізичний експеримент з обраної теми може бути цілком запозичений із Internet-ресурсу (при цьому посилання на ресурс є обов'язковим) або змінений чи розширений (при цьому обсяг змін має бути зазначений при його відтворенні).

Важливим при організації навчання на основі експерименту є те, що ідея наступності має бути реалізована у межах теми стовідсотково аби не був втрачений інтерес, а також простежуватися на межі тем з метою підтвердження практичної значущості та цілісного сприйняття фізики як науки. Запропоновані домашні експерименти мають відображати зв'язок між собою. А саме: у наступному експерименті - використані знання, вміння чи результати попереднього, або кожний наступний із експериментів бути частиною експериментальної задачі. У такий спосіб підтримується впевненість школяра-дослідника у практичній доцільності окремих виконуваних дій, як елементів навчальної діяльності та комплексного підходу до отримання освіти в цілому.

З огляду на проблему, що досліджується, окремо вважаємо за доцільне акцентувати увагу на експериментальних задачах. Вони одночасно відображають рівень сформованості знань, вмінь та навичок, ступінь готовності особистості до самостійних практичних дій, здатність до взаємодії з іншими учасниками навчального процесу і, безумовно, рівень сформованості свідомого підходу дотримання освіти.

Експериментальні задачі можуть проводитися як на уроці так і в домашніх умовах. За кількістю дослідницьких етапів експериментальні задачі можуть бути однокомпонентними або багатокомпонентними. З метою поєднання діяльності учня на уроці та дома: більш складні етапи (досліди) мають виконуватися в класі, а для домашнього виконання мають залишитися простіші.

Особливої уваги заслуговують експериментальні задачі, що складаються із череди взаємопов'язаних експериментів, виконання яких передбачає отримання конкретного практичного результату. Цінність такої задачі полягає ще й у тому, що учні знайомляться із реальними практичними результатами виконання експерименту.

Організоване у такий спосіб навчання створює підстави для реалізації наступності навчання, що в свою чергу забезпечує усвідомлення єдності і послідовності знань та їх практичну значущість.

Перевагою експерименту у розділі «Кінематика» є те, що надпросте обладнання, якого зазвичай він вимагає, в домашніх умовах замінюється на підручні пристрої і дозволяє у такий спосіб відтворити (переробити, повторити) та виконати заплановане експериментальне завдання.

Розділ «Динаміка» є більш цікавим незважаючи на математизованість «Механіки» в цілому. Аналіз програми дозволяє стверджувати, що експеримент з динаміки є більш широкий, чисельний та цікавий, тому принципово важливо забезпечити його єдність із попередніми знаннями учнів. Так наприклад, при вивченні «Динаміки» у задачах доцільно на практиці показати як додаються сили та результат дії кількох сил співпадає з результатом дії результуючої сили. Для цього кілька учнів докладають сили, що вимірюються динамометрами, у різних напрямках, а у іншому випадку докладають лише одну (результуючу) силу та переконуються у рівності результату. У більш складному випадку етапом вирішення експериментальної задачі з динаміки є виконання експерименту з кінематики. Таким чином забезпечується не лише повторення вивченого раніше матеріалу, але, що важливіше, усвідомлення реальності практичного застосування набутих раніше знань.

Завданням підвищеної складності для учнів може бути творче завдання із самостійного складання експериментальної задачі на основі життєвого досвіду та її вирішення. Наприклад, за темами 10 класу можна запропонувати такі напрямки індивідуальних експериментальних задач для домашнього використання:

1. Визначення залежності сили тертя ковзання від різних характеристик.
2. Визначення залежності коефіцієнта поверхневого натягу рідин від різних характеристик.
3. Визначення сили натягу підвісу (перевантаження) під час руху по колу у вертикальній площині.
4. Дослідження залежності періоду коливань математичного маятника від різних характеристик.
5. Визначення центрів тяжіння пласких тіл різної форми.

6. Дослідження пружних властивостей речовини — перевірка кривої навантаження.
7. Дослідження швидкості спливання зануреного тіла.
8. Визначення / порівняння коефіцієнтів лінійного розширення твердих тіл.
9. Визначення та порівняння коефіцієнтів об'ємного розширення рідин.
10. Визначення / порівняння швидкості поширення тепла у твердому тілі (теплопровідності речовини).

Заслуговує на увагу інтегроване завдання «фізика – інформатика»: створення комплексної комп'ютерної програми (наприклад, в Excel) для обчислення середньої швидкості руху тіла. Така програма має передбачати наявність введення різних даних (швидкість, час, шлях) на різних ділянках траєкторії. У такий спосіб вчитель зацікавлює учнів, яких приваблює обчислювальна техніка, як подальший професійний напрямок; переконує практичність та доцільність створення аналогічних «помічників». Окрім того, така програма шляхом багаторазового використання дозволить учням переконатися у єдиній правильній формулі для обчислення середньої швидкості $V_{\text{сер}} = S_{\text{весь}}/t_{\text{все}}$, яка нажаль зазвичай не дуже здається зручною для учнів, а також доведе хибність обчислення середньої швидкості як середнього арифметичного швидкостей на різних ділянках шляху.

Висновки

Підводячи підсумки слід зазначити що фізичний експеримент усіх видів на всіх етапах навчання можна вважати головним інструментом у свідомому формуванні практичних навичок та осмисленого підходу особистості до отримання освіти в цілому.

Особливості програми фізики старшої школи в цілому та 10 класу зокрема дають підстави стверджувати, що підтримка та стимулювання вмотивованої самоосвітньої діяльності школярів має посідати одне з основних місць у навчальному процесі. За таких умов значною мірою зростає важливість використання експериментальних задач та їх елементів для усвідомлення особистістю практичного призначення вивченого матеріалу, його поглиблення та набуття свідомих навичок подальшої самомотивації та самоосвіти.

Перспективи подальших розвідок вбачаємо у розробці дидактичних матеріалів для організації вивчення фізики 10 класу на експериментальній основі та методичних рекомендацій щодо такої організації навчання.

Література

1. *Горденко Т.* Елементи технології навчання як дослідження на уроках фізики / Т. Горденко // Наукові записки. — Випуск 4. — Кіровоград:

РВВ КДПУ ім. В. Винниченка, 2013. — С. 133–138.

2. *Дудник А.* Учбова мотивація та пізнавальні інтереси старшокласників ліцею та ЗОШ / А. Дудник // Гуманізація навчально-виховного процесу: Збірник наукових праць — Вип. 40 / За заг. ред. проф. В.І. Сипченка. — Слов'янськ: Видавничий центр СДПУ, 2008. — С. 76–79.
3. *Подалов М.* Использование принципа наглядности в формировании исследовательской компетенции / М. Подалов // Наукові записки. — Випуск 4. — Кіровоград: РВВ КДПУ ім. В. Винниченка, 2013. — С. 78–81.
4. *Шарко В.Д.* Сучасний урок фізики: технологічний аспект: посіб. для для вчителів і студ. / В.Д. Шарко. — К.: Есе, 2005. — 220 с.
5. *Шаталов В.Ф.* Куда и как исчезли тройки / В.Ф. Шаталов. — М.: Педагогика, 1979. — 134 с.

Lymareva Yuliya M., Khatuleva Victoria A.
Donbas State Pedagogical University, Sloviansk, Ukraine.

Organization of a conscious approach to the study of physics in high school

The article is devoted to research of problems of formation of skills of conscious learning in the course of physics of high school. Possible methods of their solution at the present stage of school education development are considered. This activity approach to the acquisition of knowledge forms the confidence of the individual in the integrity and knowledge of science. The identified approaches allow physics to develop students with sustainable skills for self-education and further lifelong learning.

Keywords: *educational process, physical experiment, experimental task, experiment, consciousness, autonomy, motivation.*

УДК 372.853

Лимарєва Ю.М., Луцюк О.А.

[1] *кандидат педагогічних наук, доцент кафедри фізики ДВНЗ «ДДПУ»*

[2] *студентка 2 курсу (магістратура) фізико-математичного факультету ДВНЗ «ДДПУ»*

e-mail: zet.80@bk.ru

ЯКІСНІ ЗАДАЧІ З ФІЗИКИ ЯК ЗАСІБ ПРОФЕСІЙНОГО ЗРОСТАННЯ УЧНІВ СІЛЬСЬКОГОСПОДАРСЬКИХ УЧИЛИЩ

У статті розкрито проблему використання якісних задач професійного спрямування на уроках фізики. Запропоновано одну із можливих класифікацій якісних задач з фізики, що використовуються у навчальному процесі в закладах сільськогосподарського спрямування. Визначено важливі вимоги до подання та вирішення якісної фізичної задачі професійного спрямування.

Ключові слова: *навчальний процес, запитання, якісна задача, практична спрямованість, практична значущість.*

Вступ

Досвід роботи викладачем фізики дозволяє стверджувати, що якісна задача є унікальним засобом зацікавлення («немає математики» та «нетреба нічого писати»), заохочення, можливості вільно висловити та обґрунтувати власну думку, вивчення фізики. Вона проектує теоретичну математизовану фізику на її практичну результативність, тобто дозволяє зрозуміти яким чином відбувається застосування математичного відображення фізичних законів у практиці. Тим більше, цінність якісної задачі відзначається у навчальних закладах професійного спрямування. Нажаль, останнє недостатньо враховується викладачами-предметниками. Окремі аспекти зазначеної проблеми відображені в роботах В. Лазарєва, М. Подалова, О. Плігіна, однак як свідчить практика, цього недостатньо для активного використання якісної задачі у професійних училищах.

Тому, за **мету** дослідження ставимо встановлення місця якісної задачі в системі професійної освіти так виділити основні види якісних задач сільськогосподарського змісту, що використовуються у навчальному процесі.

Основна частина

Якісна задача — це запитання, в основу якого покладено практичне відображення або застосування фізичного явища.

Якісні задачі при вивченні фізики можуть бути використані на різних етапах уроку:

- Для мотивації до вивчення матеріалу, для пошуку вирішення розрахункової чи експериментальної задачі, для встановлення ходу проведення навчального експерименту;
- Під час вивчення навчального матеріалу та проведення бесіди;
- Для закріплення вивченого матеріалу з метою висвітлення його практичної значущості у професійній діяльності майбутніх фахівців;
- Для контролю знань: встановлення рівня обізнаності та засвоєння учнем навчального матеріалу.

Якісні задачі, що використовуються учителем можуть бути:

- *незалежними* — використовуються самостійно,
- *взаємопов'язаними*, результат однієї впливає відповідь наступної,
- *з помилками*: передбачають винайдення та виправлення помилок у запропонованому судженні, висунення пропозицій щодо можливих варіантів виправлення описаної ситуації,
- *на передбачення результату*: вимагають вказати можливі результати вказаних дій та пояснити їх доцільність (в основі таких задач запитання «Що відбуватиметься якщо (припустити, що) …?»).

Навчальна активність особистості забезпечує підвищення рівня оволодіння навчальним матеріалом, розуміння його практичної значущості та усвідомлення меж застосування. Отримані у такий спосіб знання розширюють кругозір, відволікають від «сухої» математики, розкривають практичну цінність матеріалу та створюють основу для подальшого розкриття індивідуальних схильностей особистості й організації її відповідної професійної орієнтації.

Будь яка якісна сільськогосподарська задача націлена або на вивчення спостережуваного явища, або на застосування характеристик явища для пояснення змін, що відбуваються у навколишньому середовищі. Аналіз якісних задач сільськогосподарського змісту дозволяє виділити такі їх основні групи:

- **Пряме запитання** вимагає пояснити правильну відповідь, що вже сформульована у запитанні:

1. Чому в парниках температура помітно вище, ніж у навколишнього повітря, навіть за відсутності опалення?

2. Чому городні культури поливають надвечір?
3. Чому агрономи сильно переживають за озимі посіви, коли в грудні довго не випадає сніг і панують люті морози?
4. Для чого у косарки, соломорізки та інших сільськогосподарських машин різальні частини мають бути гостро наточені?
5. Чому весняні приморозки завдають більше шкоди тим рослинам, що розміщені на темних грантах?

- **Непряме запитання** передбачає встановлення правильної відповіді та її пояснення.

1. Яка волога довше зберігається в ґрунті - після танення снігу чи після випадання теплого дощу? Чому так важливо провести снігозатримання на полях?
2. Як впливає зміна вологості повітря на вологість ґрунту (за умови, що опадів не було)?
3. Яким явищем зумовлено переміщення мінеральних та органічних добрив у ґрунтах?
4. Коли інтенсивніше висихає ґрунт, що не прикритий шаром снігу, в мороз чи у відлигу?
5. Для чого до кузова автомобіля, який перевозить бензин, прикріплюють металевий ланцюжок, що торкається землі? Чим його можна замінити?

- Задачі на **основі професійних висловів**:

1. Говорять, що дощ охолоджує повітря. Чи так це? Поясніть.
2. Чому культивація чи прополка сільськогосподарських культур іноді називається «сухим поливом»?
3. Що означає вираз «закриття вологи в ґрунті»? Як це здійснюється на практиці?
4. Часто можна почути вислів: «Грунт дихає». Що це означає? Як пояснити таке явище?

- **Задачі професійно-економічного** спрямування:

1. Чому кількість молока, зданого на молокозавод, облічують не в одиницях об'єму, а в одиницях маси (кілограмах або центнерах)?
2. Коли автомобіль витрачає більше палива — під час їзди із зупинками чи без зупинок?

- **Запитання-протиріччя**:

1. Відомо, що для збереження дерев від весняних приморозків у садах спалюють хмиз, бур'ян тощо. Дим, що огортає дерева, оберігає їх від замерзання. А щоб зберегти молоду розсаду, її перед настанням приморозку слід побризкати водою (причому якщо розсада має низьку температуру, то не можна оббризкувати її надто теплою або гарячою водою і навпаки). Як ви можете пояснити такі способи збереження рослин від вимерзання?
2. Якби температуру повітря влітку раптово можна було б знизити до кількох градусів нижче нуля, то значна частина дерев загинула б від вимерзання. Ці самі рослини взимку можуть переносити значно більші морози. Як це пояснити? Коли настають морози, зволожений ґрунт промерзає на меншу глибину, ніж сухий, а вологі предмети на морозі замерзають і руйнуються більше, ніж сухі. Як пояснити цю уявну суперечність?

- **Задачі, що вимагають аналізу формул:**

1. Чому ККД теплових двигунів влітку трохи менший, ніж узимку?
2. У системі освітлення трактора увімкнені чотири лампочки, розраховані на певну напругу. Як зміниться розжарення лампочок, якщо одну з них вимкнути?
3. Яку з полімерних плівок — поліетиленову чи полівінілхлориду вигідніше використовувати в умовах холодного клімату для утеплення, коли відомо, що перша пропускає 80 % інфрачервоних променів, а друга 20 %?

Висновки

Підводячи підсумки, слід зазначити що якісна задача у навчальних закладах сільськогосподарського напрямку може і має використовуватися на всіх етапах навчання, як інструмент з формування цілісної особистості майбутнього фахівця та свідомого її ставлення до отримання професійної освіти.

Беручи до уваги особливості якісних задач профільного спрямування, варто акцентувати увагу на вимогах до їх подання учням та використання у навчальному процесі взагалі:

1. Мати сільськогосподарський зміст.
2. Спиратися на профільні дисципліни.
3. Передбачати можливість практичної перевірки.
4. Не поступатися місцем розрахунковій задачі.
5. Мотивувати подальше самостійне розширення спеціальних знань.
6. Формувати уяву про комплексність професійних навичок.

Проблема є актуальною та вимагає подальшого дослідження. Тому перспективи подальших розвідок вбачаємо у створенні комплексу якісних задач сільськогосподарського змісту з метою їх активного впровадження у навчальний процес закладів освіти зазначеного профілю під час вивчення відповідних тем курсу фізики.

Література

1. *Лазарев В.С.* Опытно-экспериментальная работа в образовательном учреждении: Практическое пособие для руководителей — М.: Центр педагогического образования, 2008. — 48 с.
2. Педагогіка і психологія професійної освіти: результати досліджень і перспективи: Збірник наукових праць / За ред. І.А. Зязюна та Н.Г. Ничкало. — Київ, 2003. — 680 с.
3. *Плигин А.А.* Познавательные стратегии школьников: Монография. — М.: Профит Стайл, 2007. — 528 с.
4. *Подалов М.* Использование принципа наглядности в формировании исследовательской компетенции / М. Подалов // Наукові записки. — Випуск 4. — Кіровоград: РВВ КДПУ ім. В. Винниченка, 2013. — С. 78–81.
5. *Шарко В.Д.* Сучасний урок фізики: технологічний аспект: посіб. для для вчителів і студ. / В.Д. Шарко. — К.: Есе, 2005. — 220 с.
6. *Шаталов В.Ф.* Куда и как исчезли тройки / В.Ф. Шаталов. — М.: Педагогика, 1979. — 134 с.

Lymareva Yuliya M., Lutsuk Oksana A.
Donbas State Pedagogical University, Sloviansk, Ukraine.

Qualitative tasks as a means of professional growth of students of agricultural schools

The article deals with the problem of the use of qualitative tasks of professional guidance in physics classes. One of the possible classifications of qualitative problems in physics, which are used in the educational process in the institutions of agricultural direction, is proposed. The important requirements for the presentation and solving of a qualitative physical task of professional direction are determined.

Keywords: *educational process, question, qualitative problem, practical orientation, practical significance.*

УДК 372.853

Лимарєва Ю.М., Шарап Р.А.

[1] *кандидат педагогічних наук, доцент кафедри фізики ДВНЗ «ДДПУ»*

[2] *студент 2 курсу (магістратура) фізико-математичного факультету ДВНЗ «ДДПУ»*

e-mail: zet.80@bk.ru

ДОСЛІДНИЦЬКІ ЛАНЦЮЖКИ В КУРСІ ОПТИКИ ЗАГАЛЬНООСВІТНЬОЇ ШКОЛИ

Стаття присвячена дослідженню проблеми використання навчальних дослідницьких ланцюжків при вивченні курсу «Оптики» у старшій школі. Розглянуто можливості підвищення рівня зацікавленості учнів, значної економії навчального часу та поступового переходу вивчення фізики на експериментальній основі. Наведено можливі класифікації дослідницьких ланцюжків залежно від мети їх використання. Обґрунтовано доцільність використання домашнього експерименту для забезпечення формування стійкої уяви про практичність матеріалу, що вивчається.

Ключові слова: *навчальний процес, спостереження, дослід, експериментальна задача, діяльнісний підхід.*

Вступ

Досвід роботи свідчить про те, що «Оптика» піддається вивченню школярами досить складно незважаючи на її яскравість та кольоровість. Тому, викладачі зайвий раз переконуються, що «Світло — найтемніша тема фізики». Обумовлений такий результат її щільним поєднанням з різними розділами математики та необхідністю абстрактного мислення. Виходячи із цього, для уникнення зазначеної проблеми, є необхідність знайти методи та прийоми вивчення «Оптики» засобами конкретного, предметного мислення.

Тому, за **мету** ставимо розгляд дослідницьких ланцюжків в аспекті ефективності вивчення школярами світлових явищ, наведення систем послідовних домашніх експериментів з «Оптики» та визначення практичної доцільності такого підходу до організації вивчення фізики школярами.

Основна частина

Розвиток дослідницьких навичок школярів виступає фундаментом формування в учнів логічно-практичного мислення. Діяльнісний підхід, що лежить в його основі, забезпечує наочність навчання та самоосвіти.

У широкому сенсі, дослідницький ланцюжок являє собою логічно завершену послідовність дослідів з фізики, що складається із:

- попередніх спостережень та нескладних мотиваційних дослідів із чіткою інструкцією та зрозумілі для виконання.
- демонстраційних дослідів зі спеціальним обладнанням, що відтворюють етап наукового відкриття, надають можливість практичної перевірки теоретичних фізичних знань.
- додаткового експерименту для зацікавлення, розширення кругозору, демонстрація практичної значущості навчального матеріалу.
- домашнього експерименту з відтворення вивченого матеріалу (для актуалізації вивченого на уроці), експериментальних задач та дослідницьких ланцюжків у вузькому сенсі слова.

Дослідницький ланцюжок (у вузькому сенсі) являє собою чітко визначену послідовність виконуваних експериментів, що призводить до встановлення фізичних закономірностей чи законів, виявлення спільних чи відмінних характерних ознак явищ або логічного зв'язку між темами, що вивчаються. Він є логічно завершеним та обмеженим у часі. Експерименти, що його складають є максимально наближеними за змістом.

Дослідницький ланцюжок може бути:

<u>за кількістю учасників:</u>

- індивідуальний — виконується самостійно окремим учнем;
- груповий — пропонується для групи учнів, кожний учасник при цьому виконує один із експериментів, що виступає складовим елементом дослідницького ланцюжка;
- колективний — виконуються всіма учнями в класі (окремий дослід виконується різними учнями та згодом поєднується відповідними поясненнями);

<u>за тривалістю виконання:</u>

- короткочасні — обмежені темою (уроку), або кількома темами,
- довготривалі — охоплюють один або кілька розділів,
- незалежний — виступає окремим варіантом: можуть бути попередні незалежні досліди, що лише в процесі вивчення теми поєднаються у логічний дослідницький ланцюжок.

Окремо наголосимо на використанні контрольного дослідницького ланцюжка. Він може бути:

- **Теоретичний** — є кілька описаних дослідів, які учень має поставити у певній послідовності, обґрунтовуючи свій вибір теоретичними знаннями з теми або учень робить опис експериментів, що складатимуть зазначений в умові ланцюжок.

Наприклад: як змінюється зона видності у дзеркалі із зміною радіуса кривизни дзеркальної поверхні? (при цьому є кілька зображень предметів у межах зони видності або словесний опис спостережень у різних дзеркалах). Учень, аналізуючи надану інформацію, розташовує її в певній послідовності і робить висновок. У іншому випадку, він сам описує послідовність виконуваних дій та очікуваний результат, аргументуючи його знаннями з фізики та математики.

- **Практичний** — учень особисто виконує череду знайомих поодинці експериментів з метою досягнення поставленої у завданні мети (встановити . . . , дослідити . . . , визначити . . .).

Наприклад: визначити оптичну силу системи лінз. Учень добирає відповідне обладнання, проводить необхідні дії та розрахунки, визначає фокусні відстані кожної з обраних лінз та їх системи.

- **Комбінований** — учень поєднує теоретичні розрахунки та практичні досліди.

Наприклад: визначити оптичну силу системи лінз. Учень здійснює теоретичний розрахунок формули для визначення оптичної сили системи лінз, добирає відповідне обладнання, проводить необхідні досліди та розрахунки (визначає фокусні відстані кожної з обраних лінз та їх системи), проводить перевірку теоретичної формули на достовірність, робить відповідний висновок.

Дослідницькі ланцюжки з «Оптики» дуже схожі на експериментальні задачі. Визначити чіткі межу між ними неможливо. Головною відмінністю є те, що експериментальна задача завжди передбачає виконання обмеженої кількості експериментів для отримання кінцевого результату, а дослідницький ланцюжок може виступати прийомом, який пов'язує теми що вивчаються та у такий спосіб мотивувати учнів до подальшої діяльності. На основі вище зазначеного доходимо висновку, що при вивченні «Оптики» зі старшокласниками можна запропонувати кілька варіантів логічно завершених та методично обґрунтованих навчальних дослідницьких ланцюжків.

При вивченні **прямолінійного поширення світла** можна запропонувати таку послідовність домашніх експериментів:

- провести якісний аналіз зміни розмірів власної тіні залежно від часу доби,

- дослідити, як має рухатися людина відносно плаского дзеркала, щоб відстань між нею та її зображенням залишалася незмінною,
- переконатися у існуванні або відсутності зображення людини у дзеркалі, якщо сама людина не бачить себе у дзеркалі,
- дослідити як зміниться зображення люстри у дзеркалі якщо закрити його половину,
- дослідити як зміниться зона видності люстри у дзеркалі якщо закрити його половину,
- визначити які друковані літери не змінюються при відображенні у дзеркалі, встановити спільні їх характеристики та довести, що відповідь є однозначною або неоднозначною,
- з'ясувати в якому випадку зображення предмета не відрізняється від предмета,
- дослідити в якому випадку при дзеркальному відображенні ліве та праве не міняються місцями в той час, коли верх і низ міняються,
- провести моделювання спостережуваного явища та довести правильність чи хибність висновків, зроблених при виконанні попереднього завдання,
- встановити залежність розмірів тіні та півтіні залежно від розміру освітлювача,
- встановити залежність розмірів тіні та півтіні залежно від відстані освітлювача до предмета.

При вивченні **законів відбивання світла** від дзеркал:

- встановлення зон видності та/або кута бачення і їх накладання,
- розширення і звужування зони видності та/або кута бачення і їх практичне значення,
- пошуки максимальної зони видності та/або кута бачення залежно від положення дзеркала (точки розташування та кута повороту відносно вертикальної чи горизонтальної осі),
- визначення кількості зображень, що дають кілька пласких дзеркал, залежно від кута їх відносного розташування,
- визначення мінімального розміру плаского дзеркала у якому людина може бачити себе у повний зріст,
- перевірка твердження «вночі калюжі виглядають світлими плямами на темному фоні», «вдень вікна будинків ззовні здаються темними». Чи є відповідь однозначною?
- перевірка, що перед вами фотографія вулиці, а не її дзеркальне відображення.

При вивченні **дисперсії світла** та основних складових кольорів світла:

- довести, що людина бачить у відбитому світлі,
- дослідити змішування кольорів та можливості отримання заданого кольору,
- дослідити кольорові надписи на кольоровому фоні при освітленні монохроматичним світлом.

Наведена у прикладах система дослідів може виступати дослідницьким ланцюжком для домашнього виконання (це значною мірою економить час уроку). В той же час окремі його етапи можуть бути визначені як самостійний дослідницький ланцюжок.

Творчі завдання також можуть являти собою дослідницькі ланцюжки. Так, наприклад, завдання на дослідження руху Землі та Місяця навколо Сонця і встановлення моментів відсутності тіні або півтіні небесних тіл залежно від їх взаємного розташування вимагає використання знань з астрономії, вмінь якісного проведення спостережень та навичок пошуку і теоретичної обробки інформації розміщеної в Internet-ресурсах. Такі завдання можуть бути індивідуальними та довготривалими у виконанні.

Висновки

Підводячи підсумки слід зазначити, що дослідницький ланцюжок як метод навчання повністю себе виправдовує з методичної та дидактичної точок зору. Опанування та використання його у навчальному процесі допоможе вчителю значно підвищити активність школярів та згодом організувати вивчення фізики на основі експериментального підходу. Варто зазначити, що він вимагає від учителя не аби якої далекоглядності: цілісне бачення не лише теми, але й всього навчального процесу та урахування здібностей школярів. Особливості програми фізики старшої школи дають підстави стверджувати, що використання діяльнісного підходу до вивчення дисципліни сприятиме підтримці та стимулюванню вмотивованої самоосвітньої діяльності школярів. За таких умов перспективи подальших розвідок бачимо у створенні варіативних дослідницьких ланцюжків з усіх тем «Оптики» та методичних рекомендацій щодо їх використання у навчальному процесі з фізики в сучасній загальноосвітній школі.

Література

1. *Вихорева О.А.* Исследовательская деятельность старшеклассников в условиях дополнительного образования детей: теоретико-методологический аспект: Монография. — Челябинск: Изд. центр «Уральская академия», 2008. — 188 с.

2. *Горденко Т.* Елементи технології навчання як дослідження на уроках фізики / Т. Горденко // Наукові записки. — Випуск 4. — Кіровоград: РВВ КДПУ ім. В. Винниченка, 2013. — С. 133–138.
3. *Дудник А.* Учбова мотивація та пізнавальні інтереси старшокласників ліцею та ЗОШ / А. Дудник // Гуманізація навчально-виховного процесу: Збірник наукових праць — Вип. 40 / За заг. ред. проф. В.І. Сипченка. — Слов'янськ: Видавничий центр СДПУ, 2008. — С. 76–79.
4. *Коваленко О.М.* Формування в учнів відповідального ставлення до навчання в процесі самостійної роботи (на матеріалах середніх спеціальних учбових закладів): дис. ... канд. пед. наук: 13.00.01 / О.М. Коваленко — Кривий Ріг, 1993. — 194 с.
5. *Лазарев В.С.* Опытно-экспериментальная работа в образовательном учреждении: Практическое пособие для руководителей — М.: Центр педагогического образования, 2008. — 48 с.
6. *Подалов М.* Использование принципа наглядности в формировании исследовательской компетенции / М. Подалов // Наукові записки. — Випуск 4. — Кіровоград: РВВ КДПУ ім. В. Винниченка, 2013. — С. 78–81.
7. *Шалоха Н.В.* Аналіз умов формування творчої активності особистості / Н.В. Шалоха // Педагогіка і психологія формування творчої особистості: проблеми і пошуки: зб. наук. пр. / редкол.: Т.І. Сущенко та ін. — Запоріжжя. — 2008. — Вип. 50. — С. 408–414.

Lymareva Yuliya M., Sharap Roman A.
Donbas State Pedagogical University, Sloviansk, Ukraine.

Research chains in the course of general education optics

The article is devoted to the research of the problem of the use of educational research chains in the study of the course "Optics" in the senior school. Possibilities of raising the level of interest of students, considerable saving of educational time and gradual transition of the study of physics on an experimental basis are considered. Possible classifications of research chains depending on the purpose of their use are given. The expediency of using a home experiment is substantiated to provide a stable idea of the practicality of the studied material.

Keywords: *educational process, observation, research, experimental task, activity approach.*

УДК 373.5.016:[52+53]

Баранюкова І.С., Бєлошапка О.Я.

[1] *студентка 2 курсу (магістратура) фізико-математичного факультету, ДВНЗ «ДДПУ»*

[2] *старший викладач кафедри фізики, ДВНЗ «ДДПУ»*

e-mail: baraniukova22@gmail.com

ВИКОРИСТАННЯ РІЗНОРІВНЕВИХ ЗАДАЧ НА УРОКАХ ФІЗИКИ ТА АСТРОНОМІЇ

У статті розкрито проблему необхідності використання різнорівневих задач на уроках фізики та астрономії. Запропоновано одну з можливих класифікацій різнорівневих завдань, які можна використовувати у освітньому процесі. Визначено цілі та особливості використання різнорівневого підходу до вирішення задач та особливості викладання фізики і астрономії на основі диференціації рівня навчальних досягнень учнів.

Ключові слова: *активні методи навчання, професійно-орієнтовані завдання, різнорівневі задачі, диференціальний підхід.*

Вступ

Сучасний світ з кожним днем крокує вперед до нових технологій та комунікацій. Освіта та розвиток людини не може стояти на місці під час цих процесів. Сучасна модернізація освіти спрямована не тільки вивчення та засвоєння знань, але й на розвиток індивідуальних здібностей та пізнавальної діяльності особистості. Провідні фахівці в галузі освіти все частіше наполягають на тому, що використання різнорівневого методу навчання формуватиме в учнів самостійність, логічну послідовність дій, відповідальність та комунікабельність, яку можна використати в реальному житті.

Мета: визначити основні вимоги та умови для використання різнорівневих задач у навчальному процесі з фізики та астрономії, довести необхідність диференційованого підходу до організації навчання школярів.

Основна частина

Активні методи навчання в процесі вивчення або закріплення нового матеріалу, доцільно використовувати в навчальному процесі. Це підвищує рівень розвивального мислення, створює атмосферу напруженого пошуку, дає учням позитивно мислити та цікавитись предметом.

Активні методи навчання — це сукупність способів та прийомів, які спрямовані на розвивальні процеси мислення, враховуючи вікові особливості та середовище, а також використання власного досвіду учня для організації навчальної діяльності. Активні методи навчання спрямовують та систематизують розумовий розвиток учня, сприяють усвідомленню та закріпленню знань.

На основі даних німецьких вчених людина запам'ятовує 10% під час читання, 20% — на слух, 30% — під час демонстрацій, 50–70% — при участі в дискусіях, 80% — при самостійному виявленні проблеми. Лише під час самостійних досліджень, формування проблеми та знаходженні шляхів вирішення її, людина запам'ятовує матеріал на 90% [1].

Тому постає задача для вчителя, як допомогти направити учня на розвиток та удосконалення своїх особистих вмінь та навичок, індивідуального підходу та духовного сприйняття. Спрямувати свою роботу на розвиток творчого мислення учнів, їх саморозвиток та індивідуальну роботу, вміння використовувати свої знання на практиці, вміти будувати план дії та вирішувати проблеми, має можливість кожен вчитель. Бажано щоб більшість наставників молоді цю можливість використовували у своїй роботі з дітьми.

Сучасна модернізація навчального процесу спрямована на ряд особистісних характеристик школяра таких, як: зацікавленість до пізнання, вміння орієнтуватись, професійна компетентність, інтерес до розвитку суспільства та природи [2]. Тому найважливішими вимогами суспільства до підготовки учнів стає формування в них наукового світогляду, практичних знань та досвід, вміння використовувати їх на практиці та в процесі життєдіяльності.

Технологія практико-орієнтованого навчання спрямована на здобування знань та формування практичного досвіду при вирішенні життєвих перешкод.

Цілі практико-орієнтованих завдань:

1. Формування вмінь та навичок під час під час вирішення завдань.
2. Використання міжпредметних знань.
3. Розвиток практичних вмінь вирішення задач.
4. Прагнення до саморозвитку, самовдосконалення та самореалізації.
5. Засвоєння самостійної діяльності.
6. Пізнавальна діяльність під час навчального процесу.
7. Використання отриманих знань у житті.

Одним із головних напрямків практико-орієнтованих технологій під час вивчення фізики та астрономії сформовані таким чином, щоб вирішувати життєві задачі, які зустрічаються в побуті та природі, з якими людина стикається кожен день [3] .

Виходячи з важливості означеної проблеми, під час педагогічної практики, нами була поставлена мета організувати різнорівневі групи для активізації роботи по виконанню посильних для них завдань. Це було зроблено за аналізом результатів виконаних робіт з математики, фізики та астрономії (завдання для цих самостійних робіт мати три рівня).

Учні кожної групи в подальшому отримували посильні для них завдання відповідно першого, другого і третього рівнів. Вони отримали можливість самостійно виконувати завдання, проявляти свою індивідуальність – підвищилась якість засвоєння вивченого матеріалу. При роботі з такими групами зріс інтерес до освітнього процесу, вмотивованість та творчість.

З часом, вчитель керуючи різнорівневими групами, спрямовує успішно працюючих учнів самостійно обирати завдання за складністю, а також підвищувати свій рівень. Отже, задача вчителя вміти направити учнів на роботу, сформувати навички робити вибір та самостійність у вирішення питань.

Диференціація навчального процесу — це спосіб зацікавлення учнів до навчання, який дає змогу розвиватись кожному, з елементами індивідуального підходу.

Диференційний метод навчання враховує навчальний процес учнів які виконують посильні завдання, приділяючи їм достатню кількість часу, не втрачати з поля зору кращих учнів, давати змогу їм розвиватись та навчатись з урахуванням їх можливостей. Таким чином створювати умови для розвитку кожного учня у відповідності їх психічного розвитку, характеру та здібностей [4]. Різнорівнева система навчання дозволяє раціонально працювати і відпочивати.

Приклади різнорівневих завдань:[5].

Астрономія 11 клас

1. Чому в дні рівнодення 21 березня та 23 вересня справжня тривалість дня на 10 хвилин більша, ніж тривалість ночі? (2 бали)
2. Скільки має тривати доба на Землі для того, щоб на екваторі нашої планети всі тіла були в стані невагомості? (3 бали)
3. Що яскравіше освітлює Землю: Сіріус ($-1,5^m$) чи всі зорі від 5^m до 6^m, яких на півсфері нічного неба біля 1600? (4 бали)
4. Мала планета Веста обертається навколо Сонця по орбіті з великою піввіссю $= 2,362$ а.о. і ексцентриситетом $= 0,089$. Визначити сидеричний і синодичний періоди обертання Вести, її середню швидкість орбітального руху, перигелійну і афелійну відстані та відношення швидкостей в перигелії і афелії орбіти. (5 балів)

Висновки

Метод різнорівневих задач можна використовувати на всіх етапах освітнього процесу, як спосіб активізації всіх учнів у навчанні.

Різнорівневі завдання можна використовувати не тільки при перевірці домашніх завдань, але й при вивчення та засвоєнні нового матеріалу.

При успішній роботі учнів, кожен зможе обрати для себе характер, зміст і рівень складності завдання.

Література

1. Концепція астрономічної освіти (12-річна школа) / Ю.В. Александров, І.П. Крячко, М.П. Пришляк, О.В. Хоменко. — Київ, 2006.
2. *Крячко І.П.* Про структуру і зміст курсу «Астрономія» для середніх навчальних закладів України /Всеукраїнська науково-практична конференція «Стратегічні проблеми формування змісту курсів фізики та астрономії в системі загальної середньої освіти», Львів, 25—27 лютого 2002 р.
3. *Гладушина Н.О., Косенко В.В.* Рабочая тетрадь по астрономии / Н.О. Гладушина, В.В. Косенко. — Луганск: Учебная книга, 2004. – 82 с.
4. *Климишин І.А.* Астрономія: Підручник для 11 класу загальноосвітніх навчальних закладів / І.А. Климишин, І.П. Крячко. — К.: Знання України, 2002. — 192 с.
5. *Чепрасов В.Г.* Завдання, запитання і задачі з астрономії: Навч. посібник для учнів 11 кл. серед. шк. / Чепрасов В.Г. — К.: Освіта, 1992. – 94 с.

Baranjukova I.S, Beloshapko O.Ya.
Donbas State Pedagogical University, Sloviansk, Ukraine.

Use multilevel problem on the lessons of physics and astronomy

In the article the problem of the need for different levels of problems at lessons of physics and astronomy. One of the possible classifications of multilevel tasks that can be used in the educational process is proposed. The purposes and features using multilevel approach to solving problems and peculiarities of teaching physics and astronomy based on the difference in student achievement.

Keywords: *active teaching methods, professionally-oriented tasks, multi-level tasks, differential approach.*

ЗМІСТ

Наукове видання

Збірник наукових праць фізико-математичного факультету ДДПУ

Випуск №8

Для студентів, аспірантів та науковців в галузі фізико-математичних наук; вчителів та викладачів фізико-математичних дисциплін в ЗОШ та ВНЗ.

Комп'ютерна верстка та підготовка оригінал-макету О.А. Кадубовський
Відповідальні за випуск О.А. Кадубовський, В.Є. Величко

Підписано до друку 30.05.2018 р.
Формат 60×84 1/16. Ум. др. арк. 12,75.
Тираж 100 прим. Зам. № 1221.

Підприємець Маторін Б.І.
84116, м. Слов'янськ, вул. Г. Батюка, 19.
Тел./факс +38 06262 3-20-99. Email: matorinb@ukr.net

Свідоцтво про внесення суб'єкта видавничої справи до Державного реєстру видавців, виготівників і розповсюджувачів видавничої продукції ДК №3141, видане Державним комітетом телебачення та радіомовлення України від 24.03.2008 р.