

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ДЕРЖАВНИЙ ВИЩИЙ НАВЧАЛЬНИЙ ЗАКЛАД
«ДОНБАСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ ПЕДАГОГІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ»

**ЗБІРНИК
НАУКОВИХ ПРАЦЬ
фізико-математичного факультету
ДДПУ**

Заснований у 2010 році

Випуск №5

*Рекомендовано вченою радою
Донбаського державного педагогічного університету*

Слов'янськ – 2015

УДК 51+53+37.016:[51+53+004].

ББК 22.1+22.3+74.262.21+74.262.22.

З – 414

Збірник наукових праць фізико-математичного факультету ДДПУ. — Слов'янськ : ДДПУ, 2015. — Випуск № 5 — 156 с.

Для студентів, аспірантів та науковців в галузі фізико-математичних наук; вчителів та викладачів фізико-математичних дисциплін в ЗОШ та ВНЗ.

РЕДАКЦІЙНА КОЛЕГІЯ

доктор фіз.-мат. наук, професор Надточій В.О. – головний редактор (ДДПУ);

доктор фіз.-мат. наук, доцент Костіков О.П. – заст. гол. ред. (ДДПУ);

кандидат фіз.-мат. наук, доцент Чайченко С.О. – заст. гол. ред. (ДДПУ);

доктор фіз.-мат. наук, професор Нечволод М.К. (ДДПУ);

кандидат фіз.-мат. наук, доцент Новіков О.О. (ДДПУ);

кандидат фіз.-мат. наук, доцент Божко В.О. (ДДПУ);

кандидат фіз.-мат. наук, доцент Чуйко О.В. (ДДПУ);

кандидат фіз.-мат. наук, доцент Рябухо О.М. (ДДПУ);

кандидат педагогічних наук, доцент Труш Н.І. (ДДПУ);

кандидат педагогічних наук, доцент Олійник Р.В. (ДДПУ);

кандидат фіз.-мат. наук, доцент Величко В.Є. (ДДПУ);

кандидат фіз.-мат. наук, доцент Кадубовський О.А. (ДДПУ).

РЕЦЕНЗЕНТИ

АВРАМЕНКО О.В. — доктор фізико-математичних наук, професор, завідувач кафедри прикладної математики, статистики та економіки Кіровоградського державного педагогічного університету ім. В. Винниченка

САВЧЕНКО А.С. — кандидат фізико-математичних наук, старший науковий співробітник Донецького фізико-технічного інституту ім. О.О. Галкіна НАН України;

РЕКОМЕНДОВАНО ДО ДРУКУ

вченою радою державного вищого навчального закладу «Донбаський державний педагогічний університет», протокол № 9 від 30.04.2015р.

За достовірність посилань, цитат і результатів експериментів відповідальність несуть автори.

ISBN 978-966-1554-82-4

© Слов'янськ, ДДПУ, 2015

Від редакційної колегії

Шановні читачі!

Ви тримаєте в руках п'ятий випуск «Збірника наукових праць фізико-математичного факультету» державного вищого навчального закладу «Донбаський державний педагогічний університет». Видання наукових праць викладачів, студентів та молодих науковців фізико-математичного факультету ДДПУ започатковано у 2010 році, коли результати наукових досліджень було опубліковано окремою серією «Фізико-математичні науки» в збірнику наукових праць «Пошуки і знахідки» за матеріалами науково-практичної конференції СДПУ «Актуальні питання науки і освіти» (СДПУ, 20-22 квітня 2010р.).

Метою збірника є підтримка наукової активності як серед студентів, так і серед молодих викладачів ДДПУ та інших ВНЗ.

Основу збірника складають повнотекстові статті доповідей на щорічній Всеукраїнській науково-практичній конференції «Перспективні напрямки сучасної науки та освіти» (Слов'янськ, ДДПУ, **22-24 квітня 2015р.**). Основні результати доповідались на секційних засіданнях та були рекомендовані до друку головами секцій, завідувачами випускових кафедр та науковими керівниками випускових робіт.

Засновники збірника мають намір зробити його максимально відкритим як для авторів, так і для читачів. Він виходить один раз на рік у друкованому та електронному вигляді. Електронна версія журналу та інформація щодо співпраці з авторами є доступною на офіційному сайті збірника за адресою <http://ddpu.edu.ua/fizmatzbirnyk/begin.htm>.

Запрошуємо до співпраці. Наснаги та творчих успіхів!
Члени редакційної колегії.

ПАМ'ЯТІ ВОЛОДИМИРА ІВАНОВИЧА РУКАСОВА



(05.03.1953 — 09.03.2009)

9 березня 2009 року на 56 році пішов із життя відомий український учений, видатний педагог, ректор Слов'янського державного педагогічного університету (нині — Державний вищий навчальний заклад «Донбаський державний педагогічний університет»), доктор фізико-математичних наук, професор **Володимир Іванович Рукасов**.

Народився Володимир Іванович в місті Костянтинівка Донецької області.

Його значний вклад у розбудову саме математичної школи університету створив сприятливі умови для розвитку науки на фізико-математичному факультеті, а його ідеї без сумніву будуть зберігати свій вплив і в майбутньому.

©, 2015

Основні дати трудової діяльності

- 1975–1978 р.** — вчитель математики і фізики
Іллічівської середньої школи
Костянтинівського району Донецької області;
- 1978–1980 р.** — асистент кафедри математичного аналізу СДПІ;
- 1984–1986 рр.** — старший викладач кафедри математичного аналізу,
завідувач кафедри математичного аналізу СДПІ;
- 1986–1998 р.** — проректор з науково-дослідної роботи СДПІ;
- 1998–2003 р.** — проректор з навчальної роботи СДПІ (СДПУ);
- 2003–2009 р.** — ректор СДПУ.

Основні дати навчання та науково-педагогічні здобутки

- 1970-1975 р.** — навчання у Слов'янському державному педагогічному
Інституті на фізико-математичному факультеті;
- 1975 р.** — закінчив з відзнакою фізико-математичний факультет
СДПІ за фахом «математика і фізика»;
- 1980-1984 р.** — навчання в аспірантурі
Інституту математики АН УРСР;
- 1984 р.** — захистив дисертацію на здобуття наукового ступеня
кандидата фізико-математичних наук за спеціальністю
«Математичний аналіз» (тема — «Исследование
верхних граней отклонений линейных средних рядов
Фурье на классах периодических функций»);
- 1988 р.** — присвоєно вчене звання доцента
кафедри математичного аналізу СДПІ;
- 2002 р.** — обраний Академіком Міжнародної Академії наук
педагогічної освіти;
- 2003 р.** — захистив дисертацію на здобуття наукового ступеня
доктора фізико-математичних наук за спеціальністю
«Математичний аналіз» (тема — «Дослідження
екстремальних задач теорії наближення функцій»);
- 2003 р.** — присвоєно вчене звання професора
за кафедрою математичного аналізу СДПУ;
- 2005 р.** — обраний членом Президії
Українського математичного товариства.

-
- Володимир Іванович Рукасов був нагороджений
- 1989 р. — Почесною грамотою Міністерства освіти УРСР;
 - 1999 р. — знаком «Відмінник освіти України»;
 - 1989, 99, 2004 р. — Почесною грамотою Академії Педагогічних наук України;
 - 2004 р., 2006 р. — Почесною грамотою Донецької обласної державної адміністрації;
 - 2004 р. — Почесною грамотою Кабінету Міністрів України;
 - 2006 р. — медаллю «Будівничий України» Всеукраїнського об'єднання «Просвіта» ім. Т. Шевченка;
 - 2007 р. — нагрудним знаком «За наукові досягнення».

Наукова діяльність та наукові здобутки

У коло наукових інтересів Володимира Івановича Рукасова входили проблеми теорії наближення функцій і теорії лінійних методів підсумовування рядів Фур'є, а також питання методики викладання математичних дисциплін і проблеми педагогіки вищої школи. В університеті ним створена наукова школа з теорії функцій, в межах якої підготовлено п'ять кандидатів фізико-математичних наук. Володимир Іванович Рукасов — автор однієї монографії, шести підручників і посібників, понад 100-а наукових праць із теорії функцій.

Дослідження школи пов'язані із знаходженням асимптотичних формул для верхніх граней відхилень тригонометричних поліномів, які породжуються лінійними методами підсумовування рядів Фур'є, на різних класах періодичних функцій однієї та багатьох дійсних змінних, що мають узагальнені (ψ, β) -похідні у розумінні О.І. Степанця, у рівномірній і інтегральній метриках. Одержані представниками школи результати охоплюють широкий спектр функцій, що включає функції малої та скінченної гладкості, нескінченно диференційовні, в тому числі аналітичні і цілі функції, а серед методів наближення — класичні методи Фур'є, Валле-Пуссена, Фейєра, Зигмунда, Фавара, Рогозинського, Стеклова. Досліджуються також аналогічні задачі наближення класів локально інтегровних функцій, заданих на дійсній осі (і необов'язково періодичних) за допомогою цілих функцій експоненціального типу. Отримані асимптотичні формули в більшості випадків забезпечують розв'язки відомої задачі Колмогорова-Нікольського. Досліджувались також апроксимативні властивості введених О.І. Степанцем і В.І. Рукасовим просторів з анізотропною метрикою. Ці дослідження розвивалися під впливом всесвітньо відомої Київської наукової школи з теорії функцій видатного українського математика, члена-кореспондента НАН України, доктора фізико-математичних наук, професора, Заслуженого діяча науки і техніки України

О.І. Степанця.

Серед численних учнів Олександра Івановича 8 випускників СДПУ, в тому числі Рукасов В.І. Загальна кількість публікацій представників школи становить понад 120 наукових праць. Із них 1 монографія (видання Інституту математики НАН України), 3 навчальні посібники з грифом Міністерства освіти і науки, близько 40 статей у фахових виданнях.

У рамках наукової школи з теорії наближення функцій пройшли підготовку випускники фізико-математичного факультету: Новіков О.О., Чайченко С.О., Федоренко О.С., Сілін Є.С., Бодра В.І., Овсій Є.Ю., Ровенська О.Г., які підготували кандидатські дисертації і успішно працюють як в нашому університеті, так в інших наукових і освітніх центрах України.

Володимир Іванович завжди був наполегливим у досягненні поставленої мети і, водночас, порядною, доброзичливою, урівноваженою людиною із щирим ставленням до тих, хто поруч.

Світла пам'ять про Володимира Івановича Рукасова завжди буде жити в наших серцях!

С.М. Чуйко, С.О. Чайченко, О.О. Новіков,
В.О. Надточій, О.М. Рябухо, О.В. Чуйко,
В.І. Бодра, Є.С. Сілін, О.Г. Ровенська,
В.Є. Величко, О.А. Кадубовський

Основні наукові праці В.І. Рукасова

1. Рукасов В.И. Приближение непрерывных периодических функций многих переменных интерполяционными тригонометрическими полиномами с равноотстоящими узлами // Доклады АН УССР. Сер. А. — 1982. — № 12. — С. 17–19.
2. Рукасов В.И. Исследование верхних граней отклонений линейных средних рядов Фурье на классах периодических функций: автореф. дис. канд. физико-мат. наук: (01. 01. 01) / АН УССР, Институт математики. — К., 1983. — 14 с.
3. Степанец А.И., Рукасов В.И. О приближении суммами Фурье треугольного вида на классах непрерывных периодических функций двух переменных // Укр. мат. журн. — 1983. — Т. 35, № 2. — С. 249–255.
4. Рукасов В.И. Оценки отклонений интерполяционных тригонометрических полиномов с равноотстоящими узлами на классах непрерывных периодических функций многих переменных // Укр. мат. журн. — 1983. — Т. 35, № 1. — С. 70–76.
5. Рукасов В.И. Приближение непрерывных периодических функций многих переменных полиномами Рогозинского интерполяционного типа. — Киев. 1983. — С. 3–41. — (Препринт / АН УССР. Институт математики; 83.34).
6. Рукасов В.И. Приближение периодических функций линейными средними их рядов Фурье. — Киев. 1983. — 56 с. — (Препринт / АН УССР. Институт математики; 83.62).
7. Rukasov V.I. Estimates of deviations of interpolation trigonometric polynomials with equidistant nodes on classes of continuous periodic functions of several variables // Ukrain. Mat. J. — 1983. — Vol. 35, No. 1. — P. 70–75, 135.
8. Stepanets A.I., Rukasov V.I. Approximation by Fourier sums of triangular type on classes of continuous periodic functions of two variables // Ukrain. Mat. J. — 1983. — Vol. 35, No. 2. — P. 249–254.
9. Рукасов В.И. Приближение непрерывных периодических функций многих переменных полиномами Бернштейна интерполяционного типа. — Киев. 1987. — С. 51–59. — (Препринт / АН УССР. Ин-т математики; 87.40).
10. Рукасов В.И. Приближение непрерывных периодических функций линейными средними их рядов Фурье // Труды Математического Ин-та АН СССР. Теория функций и смежные вопросы анализа. — 1987. — 180. — С. 187–189.

11. Рукасов В.И. Приближение функций класса $C_{\beta, \infty}^{\psi}$ линейными средними их рядов Фурье // Укр. мат. журн. — 1987. — Т. 39, № 4. — С. 478–483.
12. Rukasov V.I. Approximation of functions of the class $C_{\beta, \infty}^{\psi}$ by the linear means of their Fourier series // Ukrain. Mat. J. — 1987. — Vol. 39, No. 4. — P. 478–483, 542.
13. Новиков О.А., Рукасов В.И. Приближение классов непрерывных периодических функций аналогами сумм Валле-Пуссена // Ряды Фурье: теория и приложения. — Киев: Ин-т математики АН Украины, 1992. — С. 57–63.
14. Рукасов В.И. Приближение операторами Валле-Пуссена функций, заданных на действительной оси // Укр. мат. журн. — 1992. — Т. 44, № 5. — С. 682–691.
15. Rukasov V.I. Approximation by de la Vallee-Poussin operators of functions defined on the real axis // Ukrain. Mat. J. — 1993. — Vol. 44, No. 5. — P. 615–623.
16. Новиков О.А., Рукасов В.И. Приближение непрерывных периодических функций обобщенными суммами Валле-Пуссена // Укр. мат. журн. — 1995. — Т. 47, № 8. — С. 1069–1079.
17. Rukasov V.I., Novikov O.A. Approximation of classes of continuous functions by generalized de la Vallee-Poussin // Ukrain. Mat. J. — 1995. — Vol. 47, No. 8. — P. 1222–1233.
18. Пивоваров Л.В., Рукасов В.И., Ягупец Ю.И. Управление параметрами устройств и систем с электропроводными контурами. Оценка погрешности методами Фурье: монография / НАН Украины, Ин-т электродинамики. — К. ; Славянск: СГПИ, 1996. — 482 с.
19. Рукасов В.И., Новиков О.А. Приближение классов $C_{\beta}^{\psi}H_{\omega}$ обобщенными суммами Валле-Пуссена // Укр. мат. журн. — 1997. — Т. 49, № 4. — С. 606–610.
20. Rukasov V.I., Novikov O.A. Approximation of the classes $C_{\beta}^{\psi}H_{\omega}$ by generalized de la Vallee-Poussin sums // Uklrain. Math. J. — 1997. — Vol. 49, No. 4. — P. 672–677.
21. Рукасов В.И., Новиков О.А. Приближение аналитических функций суммами Валле-Пуссена // Ряди Фур'є: теорія і застосування. — Київ, 1998. — С. 228–241. — (Праці Ін-ту математики НАН України; Т. 20).
22. Рукасов В.И., Чайченко С.О. Приближение $\overline{\psi}$ -интегралов 2π -периодических функций суммами Валле-Пуссена // Ряди Фур'є: теорія і застосування: Зб. наук. пр. — Київ: Ін-т математики НАН України, 1998. — С. 242–254.

23. Рукасов В.И., Новиков О.А., Чайченко С.О. Приближение классов $C_{\infty}^{\bar{\psi}}$ методами Валле-Пуссена // Теорія наближення функцій та її застосування: Зб. наук. пр. — Київ: Ін-т математики НАН України, 2000. — С. 396–406.
24. Рукасов В.И., Чайченко С.О. Наближення класів $C^{\bar{\psi}}H_{\omega}$ сумами Валле-Пуссена // Укр. мат. конгрес, присвячений 200-річчю від дня народження М.В. Остроградського (Київ, 21–25 серп. 2001 р.): Тез. доп. — С. 52–53.
25. Рукасов В.И., Новиков О.А., Чайченко С.О. Приближение классов $C_{\infty}^{\bar{\psi}}$ методами Валле-Пуссена (небольшая гладкость) // Укр. мат. конгрес, присвячений 200-річчю від дня народження М.В. Остроградського (Київ, 21–25 серп. 2001 р.): Тез. доп. — С. 51–52.
26. Рукасов В.И., Чайченко С.О. Приближение ψ -интегралов периодических функций суммами Валле-Пуссена (небольшая гладкость) // Укр. мат. журн. — 2001. — Т. 53, № 12. — С. 1641–1653.
27. Рукасов В.И., Новиков О.А. Приближение функций с небольшой гладкостью из классов $C_{\infty}^{\bar{\psi}}$ линейными методами // Теорія наближень та гармонічний аналіз: Пр. Укр. мат. конгресу — 2001. — Київ: Ін-т математики НАН України, 2002. — С. 184–193.
28. Rukasov V.I., Chaichenko S.O. Approximation of ψ -integrals of periodic functions by de la Vallee Poussin sums (low smoothness) // Ukrain. Math. J. — 2001. — Vol. 53, No. 12. — P. 1998–2013.
29. Степанец А.И., Рукасов В.И. Аппроксимативные свойства метода Валле-Пуссена // Укр. мат. журн. — 2002. — Т. 54, № 8. — С. 1100–1125.
30. Рукасов В.И. Вступ до аналізу: навч. посібник для фіз.-мат. ф-тів. пед. ун-тів / М-во освіти і науки України, Слов. держ. пед. ун-т. — Слов'янськ: СДПУ, 2002. — 163 с.
31. Рукасов В.И., Чуйко С.М. Лекции по эконометрии: учеб. пособие для вузов / М-во образования и науки Украины, Слов. гос. пед. ун-т. — Славянск: СГПУ, 2002. — 133 с.
32. Рукасов В.И., Чайченко С.О. Наближення аналітичних періодичних функцій сумами Валле-Пуссена // Укр. мат. журн. — 2002. — Т. 54, № 12. — С. 1653–1668.
33. Рукасов В.И., Новиков О.А., Чайченко С.О. Приближение классов периодических функций с малой гладкостью суммами Валле-Пуссена // Теорія наближення функцій та суміжні питання. — Київ, 2002. — С. 119–133. — (Праці Ін-ту математики НАН України; Т. 35).
34. Рукасов В.И., Чайченко С.О. Приближение классов $C_{\beta}^{\psi}H_{\omega}$ суммами Валле-Пуссена // Укр. мат. журн. — 2002. — Т. 54, № 5. — С. 681–691.

35. Рукасов В.И., Чайченко С.О. Приближение непрерывных периодических функций суммами Валле-Пуссена (небольшая гладкость) // Теорія наближення функцій та суміжні питання. — Київ, 2002. — С. 134–150. — (Праці Ін-ту математики НАН України; Т. 35).
36. Рукасов В.И., Чайченко С.О. Про наближення неперервних періодичних функцій сумами Валле-Пуссена // Доповіді НАН України. — 2002. — Т. 54, № 3. — С. 35–39.
37. Rukasov V.I., Chaichenko S.O. Approximation of the classes $C_\beta^\psi H_\omega$ by de la Vallee-Poussin sums // Ukr. Math. J. — 2002. — Vol. 54, No. 5. — P. 839–851.
38. Rukasov V.I. Approximation of the classes of analitical functions by de la Vallee Poussin sums // Ukr. Math. J. — 2002. — Vol. 54, No. 8. — P. 993–2007.
39. Stepanets A.I., Rukasov V.I. Approximation properties of the by de la Vallee Poussin method // Ukr. Math. J. — Vol. 54, No. 8. — P. 345–370.
40. Rukasov V.I. Approximation of analitic periodic fuctions by de la Vallee Poussin sums // Ukr. Math. J. — 2002. — Vol. 54, No. 12. — P. 2033–2051.
41. Рукасов В.И. Дослідження екстремальних задач теорії наближення функцій: автореф. дис. д-ра фіз.-мат. наук (01. 01. 01.) / НАН України, Ін-т математики. — К., 2003. — 34 с.
42. Рукасов В.И. Оценки отклонений полиномов Бернштейна интерполяционного типа на классах непрерывных периодических функций многих переменных // Екстремальні задачі теорії функцій та суміжні питання. — Київ, 2003. — С. 136–155. — (Праці Ін-ту математики НАН України, Т. 36).
43. Рукасов В.И., Силин Е.С. Приближение непрерывных функций операторами Валле Пуссена // Екстремальні задачі теорії функцій та суміжні питання. — К., 2003. — С. 192–208. — (Праці Ін-ту математики НАН України; Т. 46)
44. Рукасов В.И., Чайченко С.О. Приближение $\overline{\psi}$ -интегралов периодических функций в равномерной и интегральной метриках // Екстремальні задачі теорії функцій та суміжні питання. — Київ, 2003. — С. 156–191. — (Праці Ін-ту математики НАН України; Т. 36).
45. Степанец А.И., Рукасов В.И. Пространства S_p^φ с несимметричной метрикой // Укр. мат. журн. — 2003. — Т. 55, № 2. — С. 264–277.
46. Рукасов В.И. Приближение непрерывных функций операторами Валле-Пуссена // Укр. мат. журн. — 2003. — Т. 55, № 3. — С. 414–424.
47. Рукасов В.И. Наилучшие n -членные приближения в пространствах с несимметричной метрикой // Укр. мат. журн. — 2003. — Т. 55, № 4. —

-
- С. 500–509.
48. Степанец А.И., Рукасов В.И. Наилучшие «сплошные» n -членные приближения в пространствах S_p^φ // Укр. мат. журн. — 2003. — Т. 55, № 5. — С. 663–670.
49. Рукасов В.И. Приближение суммами Валле-Пуссена классов аналитических функций // Укр. мат. журн. — 2003. — Т. 55, № 6. — С. 806–816.
50. Рукасов В.И. Про наближення операторами Валле-Пуссена функцій, заданих на дійсній осі // Доповіді НАН України. — 2003. — № 6. — С. 26–28.
51. Stepanets A.I., Rukasov V.I. Spaces S_p^φ with nonsymmetric metric // Ukrain. Math. J. — 2003. — Vol. 55, No. 2. — P. 322–338.
52. Rukasov V.I. Approximation of continuous functions by de la Vallee Poussin operators // Ukrain. Math. J. — 2003. — Vol. 55, No. 3. — P. 498–511.
53. Rukasov V.I. Best n -tern approximation in spaces with nonsymmetric metric // Ukrain. Math. J. — 2003. — Vol. 55, No. 4. — P. 378–397.
54. Stepanets A.I., Rukasov V.I. Best «continuos» n -term approximation in spaces S_p^φ // Ukrain. Math. J. — 2003. — Vol. 55, No. 5. — P. 801–811.
55. Rukasov V.I. Approximation of the classes of analitycal functions by de la Vallee Poussin sums // Ukrain. Math. J. — 2003. — № 6. — P. 575–590.
56. Rukasov V.I., Chaichenko S.O. Approximation of analytical periodical functions by de La Vallee-Poussin sums // Ukrain. Math. J. — 2003. — Vol. 54, No. 12. — P. 2033–2051.
57. Рукасов В.И., Демченко І.А. Вступ до математичного аналізу. Практичні заняття: навч. посібник / М-во освіти і науки України, Слов'янський держ. пед. ун-т. — Слов'янськ: СДПУ, 2004. — 140 с.
58. Рукасов В.И., Голоденко М. М., Глазова В. В. Інформатика. Практикум.: навч. посібник для студ. вищ.навч. закладів: у 3 т. / М-во освіти і науки України, Слов'янський держ. пед. ун-т. — Слов'янськ: СДПУ, 2004. — Т. 1. — 296 с. ; Т. 2. — 363 с.; Т. 3. — 284 с.
59. Рукасов В.И., Новиков О.А., Бодрая В.И. Приближение классов $\bar{\psi}$ -интегралов периодических функций двух переменных линейными методами // Проблеми теорії наближення функцій та суміжні питання. — К., 2004. — С. 250–269. — (Праці Ін-ту матем. НАН України; Т. 1, № 1).
60. Рукасов В.И., Чайченко С.О. Приближение периодических функций малой гладкости суммами Валле-Пуссена в интегральной метрике // Проблеми теорії наближення функцій та суміжні питання / Відп. ред. О.І. Степанець // Зб. праць Ін-ту математики НАН України. — Т. 1, № 1. — Київ: Ін-ту математики НАН України, 2004. — С. 270–281.

61. Рукасов В.І., Чайченко С.О. Наближення операторами Валле Пуассена інтегралів Пуассона функцій, заданих на дійсній осі // Проблеми теорії наближення функцій та суміжні питання / Відп. ред. О.І. Степанець // Зб. праць Ін-ту математики НАН України.— Т. 2, № 2. — Київ: Ін-т математики НАН України, 2005. — С. 228–237.
62. Рукасов В.І., Чайченко С.О. Наближення періодичних функцій сумами Валле Пуассена в просторі L // Доповіді НАН України. — 2005. — № 4. — С. 36–38.
63. Рукасов В.И., Силин Е.С. Приближение непрерывных функций операторами Валле Пуассена // Укр. мат. журн. — 2005. — Т. 57, № 2. — С. 230–239.
64. Рукасов В.И., Силин Е.С. Приближение непрерывных функций небольшой гладкости операторами Валле Пуассена // Укр. мат. журн. — 2005. — Т. 57, № 3. — С. 394–399.
65. Рукасов В.И., Новиков О.А., Бодрая В.И. Приближение классов $\bar{\psi}$ -интегралов периодических функций многих переменных прямоугольными линейными средними их рядов Фурье // Укр. мат. журн. — 2005. — Т. 57, № 4. — С. 564–570.
66. Рукасов В.И., Новиков О.А., Бодрая В.И. Приближение классов $\bar{\psi}$ -интегралов периодических функций двух переменных прямоугольными линейными средними их рядов Фурье // Проблеми теорії наближення функцій та суміжні питання. — К., 2005. — С. 228–237. — (Праці Ін-ту математики НАН України; Т. 2, №2).
67. Rukasov V.I., Silin E.S. Approximation of continuous functions by de la Vallee Poussin operators // Ukr. Math. J. — 2005. — Vol. 57, No. 2. — P. 435–443.
68. Rukasov V.I., Silin E.S. Approximation of continuous functions of low smoothness by de la Vallee Poussin operators // Ukrain. Math. J. — 2005. — Vol. 57, No. 3. — P. 761–766.
69. Rukasov V.I., Novikov O.A., Bodraja V.I. Approximation of classes of $\bar{\psi}$ -integrals of periodic functions of many variables by rectangular linear of their fourier series // Ukr. Math. J. — 2005. — Vol. 57, No. 4. — P. 678–685.
70. Рукасов В.І., Голоденко М. М., Глазова В. В. Інформатика. Практикум: навч. посібник для студ.вищих навч. закладів: у 3 т. / МОН України. — Слов'янськ: СДПУ, 2006. — Т. 1 — 295 с. ; Т. 2 — 363 с. ; Т. 3. — 283 с.
71. Рукасов В.І., Чайченко С.О. Аппроксимационные свойства операторов Валле Пуассена на классах L_{β}^{α} // Проблеми теорії наближення функцій та суміжні питання / Відп. ред. О.І. Степанець // Зб. праць Ін-ту математики НАН України. — Т. 4, № 1. — Київ: Ін-т математики НАН

-
- України, 2007. — С. 284–301.
72. Рукасов В.И., Новиков О.А., Бодрая В.И. Приближение периодических функций высокой гладкости двух переменных прямоугольными линейными средними их рядов Фурье // Проблемы теорії наближення функцій та суміжні питання. — 2007. — С. 270–283. — (Праці Ін-ту математики НАН України; Т.4, №1).
73. Степанец А.И., Рукасов В.И., Чайченко С.О. Приближения суммами Валле Пуссена / НАН України, Ін-т математики. — К. : Ін-т математики НАН України, 2007. — 385 с. — (Праці Ін-ту математики НАН України. Т. 68: Математика та її застосування).
74. В.И. Рукасов, О.А. Новиков, В.Е. Величко, О.Г. Ровенская, В.И. Бодрая Приближение периодических функций многих переменных с высокой гладкостью прямоугольными суммами Фурье // Труды института прикладной математики и механики НАН Украины. — Донецк, 2008. — Т. 16. — С. 163–170.
75. Рукасов В.І. Наближення операторами Фур'є на класах функцій, локально інтегровних на дійсній осі / В.І. Рукасов, С.О. Чайченко // Теорія наближення функцій та суміжні питання / Відп. ред.: А.С. Романюк // Збірник праць Інституту математики НАН України. — Т. 5, № 1. — Київ: Ін-т математики НАН України, 2008. — С. 297–308.
76. Рукасов В.И. Приближение периодических функций многих переменных с высокой гладкостью прямоугольными суммами Валле Пуссена / В.И. Рукасов, О.Г. Ровенская, О.А. Новиков, В.И. Бодрая. // Вісник Одеського національного університету. Математика і механіка. — 2008. — Т. 13, вип. 18. — С. 87–96.
77. Рукасов В.І., Чайченко С.О. Наближення операторами Валле Пуссена на класах функцій, локально інтегровних на дійсній осі / В.І. Рукасов, С.О. Чайченко // Укр. мат. журн. — 2010. — Т. 62, № 7. — С. 968–978.
78. Рукасов В.І. Наближення $\bar{\psi}$ -інтегралів локально сумовних на дійсній осі функцій за допомогою операторів Валле Пуссена в інтегральній метриці / В.І. Рукасов, С.О. Чайченко, Д.С. Волковницький // Теорія наближення функцій та суміжні питання / Відп. ред.: А.С. Романюк // Збірник праць Інституту математики НАН України. — Т. 7, № 1. — Київ: Ін-т математики НАН України, 2010. — С. 221–234.
79. Рукасов В.И. Приближение аналитических функций повторными суммами Валле Пуссена / В.И. Рукасов, О.А. Новиков, О.Г. Ровенская, В.Е. Величко // Труды института прикладной математики и механики. — 2011. — Т.22. — С. 33–42.

МАТЕМАТИКА

УДК 517.5

Новіков О.О., Ровенська О.Г., Чабанова Є.О., Бикова Н.І.,
Волік С.В.

¹ кандидат фізико-математичних наук, декан фізико-математичного факультету, ДДПУ

² кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри вищої математики, ДДМА

³⁻⁴ студенти 5 курсу фізико-математичного факультету, ДДПУ

⁵ студентка 2 курсу фізико-математичного факультету, ДДПУ

e-mail: sgpi@slav.dn.ua

ЗАДАЧА КОЛМОГорова-НІКОЛЬСЬКОГО ДЛЯ ПОДВІЙНИХ ОПЕРАТОРІВ ФЕЙЄРА НА КЛАСАХ ІНТЕГРАЛІВ ПУАСОНА

Отримані асимптотичні формули для верхніх граней відхилень подвійних операторів Фейєра на класах інтегралів Пуасона, які забезпечують розв'язки відповідної задачі Колмогорова-Нікольського.

Keywords: *Fourier series, sums*

Нехай L — множина сумовних 2π -періодичних функцій і

$$S[f] = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k(f) \cos kx + b_k(f) \sin kx) \equiv \sum_{k=0}^{\infty} A_k(f; x)$$

— ряд Фур'є функції $f \in L$. Позначимо через $S_n(f; x)$ часткові суми ряду Фур'є порядку n . Суми Валле Пуссена функції $f \in L$ задаються співвідношенням

$$V_{n,p}(f, x) = \frac{1}{p} \sum_{k=n-p}^{n-1} S_k(f, x).$$

Застосовуючи метод підсумовування Валле Пуссена двічі, отримуємо наступний метод побудови тригонометричних поліномів. Нехай p_1, p_2 — довільні натуральні числа такі, що $p_1 + p_2 \leq n + 1$. Функції $f \in L$ поставимо у відповідність послідовність подвійних середніх Валле Пуссена

$$V_{n,p_1,p_2}(f, x) = V_{n,\bar{p}}^{(2)}(f, x) = \frac{1}{p_1} \sum_{k=n-p_1}^{n-1} V_{k+1,p_2}(f, x) =$$

$$= \frac{1}{p_1} \sum_{k=n-p_1}^{n-1} \frac{1}{p_2} \sum_{m=k-p_2+1}^k S_m(f, x).$$

Наслідуючи О.І. Степанця [1], позначимо через S_M^0 множину функцій істотно обмежених і таких, що мають нульове середнє значення на періоді, і через $C_{\beta, \infty}^q$ – класи неперервних 2π –періодичних функцій $f(x)$, які можна подати у вигляді згортки

$$f(x) = A_0 + \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(x+t) P_{\beta}^q(t) dt,$$

в якій $P_{\beta}^q(t) = \sum_{k=1}^{\infty} q^k \cos(kt + \frac{\beta\pi}{2})$ – ядро Пуасона, а $\varphi \in S_M^0$.

Питанням наближення класів $C_{\beta, \infty}^q$ лінійними методами присвячено ряд робіт спеціалістів з теорії функцій.

С.М. Нікольський [2] показав, що для верхніх граней відхилень часткових сум Фур'є на цих класах має місце асимптотична формула

$$\mathcal{E} \left(C_{\beta, \infty}^q; S_n \right) = \frac{8q^n}{\pi^2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{du}{\sqrt{1 - q^2 \sin^2 u}} + O(1) \frac{q^n}{n},$$

де величина $O(1)$ не залежить від $n \in \mathbb{N}$. С.Б. Стечкин в роботі [3] показав, що залишковий член цієї формули можна подати у вигляді $O(1) \frac{q^n}{n(1-q)}$, де величина $O(1)$ рівномірно обмежена відносно $n \in \mathbb{N}$ та $q \in (0; 1)$.

В роботі [1] О.І. Степанець отримав аналогічну асимптотичну формулу для класів $C_{\beta}^q H_{\omega}$. В.І. Рукасов та С.О. Чайченко [4] для верхніх граней відхилень сум Валле Пуссена на класах $C_{\beta, \infty}^q$ і $C_{\beta}^q H_{\omega}$ отримали аналогічні асимптотичні формули. Зокрема, у цій роботі показано, що

$$\mathcal{E} \left(C_{\beta, \infty}^q; V_{n,p} \right) = \frac{4q^{n-p+1}}{\pi p(1-q^2)} + O(1) \left(\frac{q^{n-p+1}}{p(n-p)(1-q)^3} + \frac{q^n}{p(1-q^2)} \right). \quad (1)$$

А.С. Сердюк [5] показав, що має місце більш загальна рівність ніж (1):

$$\mathcal{E} \left(C_{\beta, \infty}^q; V_{n,p} \right) = \frac{q^{n-p+1}}{p} \left(\frac{4}{\pi^2} K_{p,q} + O(1) \left(\frac{q}{(n-p+1)(1-q)^s} \right) \right),$$

де

$$K_{p,q} = \int_0^{\pi} \frac{\sqrt{1 - 2q^p \cos pt + q^{2p}}}{1 - 2q \cos pt + q^2} dt, \quad s = s(p) = \begin{cases} 1, & p = 1 \\ 3, & p = 2, 3, \dots \end{cases}$$

Позначимо у випадку $p_1 + p_2 + r = n$, $r = -1; 0; 1; 2; \dots$; $p_1 = p$, $p_2 = n - p - r$,

$$V_{n,p_1,p_2}(f, x) = \sigma_{n,p}^{(2,r)}(f, x) = \sigma_n^{(2,r)}(f, x); \delta_n^{(2,r)}(f, x) = f(x) - \sigma_n^{(2,r)}(f, x).$$

Домовимося многочлени $\sigma_n^{(2,r)}(f, x)$ називати подвійними сумами Фейєра функції $f(x)$.

В даній роботі отримані асимптотичні формули для верхніх граней відхилень тригонометричних поліномів $\sigma_n^{(2,r)}(f, x)$ для $r = -1$ на класах $C_{\beta,\infty}^q$ для $\beta = 1$

$$\mathcal{E}(C_{1,\infty}^q, \sigma_n^{(2,-1)}) \stackrel{df}{=} \sup_{f \in C_{1,\infty}^q} \|f(x) - \sigma_n^{(2,-1)}(f, x)\|_C.$$

Теорема 1. Нехай $q \in (0; 1)$, $p_1 + p_2 = n + 1$. Тоді для $n \rightarrow \infty$ має місце асимптотична формула

$$\mathcal{E}(C_{1,\infty}^q, \sigma_n^{(2,-1)}) = \begin{cases} \frac{4q^2}{\pi p_1 p_2 (1-q^2)^2} + O(1) \frac{q^{n-p_1} + q^{n-p_2}}{p_1 p_2 (1-q)^5}, & \text{якщо } q \in (0; 1/2); \\ \frac{(4q^2+1)q}{\pi p_1 p_2 (1-q^2)^2} + O(1) \frac{q^{n-p_1} + q^{n-p_2}}{p_1 p_2 (1-q)^5}, & \text{якщо } q \in [1/2; 1). \end{cases} \quad (2)$$

Доведення. Застосовуючи міркування роботи [6, с.123], отримуємо для $q \in (0; 1)$, $\beta = 1$, $p_1 + p_2 = n + 1$

$$\begin{aligned} \delta_n^{(2,-1)}(f, x) &\stackrel{df}{=} f(x) - \sigma_n^{(2,-1)}(f, x) = \\ &= \frac{-q}{\pi n} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{f_{\beta}^q(x+t)}{(1-2q \cos t + q^2)^3} (\sin t - 3q^2 \sin t + q^3 \sin 2t) dt + O(1) \frac{q^{n-p_1} + q^{n-p_2}}{p_1 p_2 (1-q)^5}. \end{aligned}$$

Тоді в силу інваріантності класу $C_{1,\infty}^q$ відносно зсуву за аргументом

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(C_{1,\infty}^q, \sigma_n^{(2,-1)}) &\leq \\ &\leq \frac{q}{\pi p_1 p_2} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\varphi(t) (\sin t - 3q^2 \sin t + q^3 \sin 2t)}{(1-2q \cos t + q^2)^3} dt + O(1) \frac{q^{n-p_1} + q^{n-p_2}}{p_1 p_2 (1-q)^5}. \end{aligned} \quad (3)$$

де $\varphi(t) = \text{sign}(\sin t - 3q^2 \sin t + q^3 \sin 2t)$. Оскільки функція $\varphi(t)$ непарна, то $\varphi(t) \in S_M^0$.

Для $q \in (0; 1/2)$ виконується $\sin t - 3q^2 \sin t + q^3 \sin 2t = 0$ лише для $t = 0; \pm\pi$. Це означає, що у випадку $q \in (0; 1/2)$ функція

$$\varphi(t) = \text{sign}(\sin 2t - 3q \sin t + q^3 \sin t) = \begin{cases} 1, & -\pi \leq t < 0; \\ -1, & 0 \leq t \leq \pi, \end{cases}$$

належить до S_M^0 . Напроти, для $q \in [1/2; 1)$ умова $\sin t - 3q^2 \sin t + q^3 \sin 2t = 0$ виконується для $t = 0; \pm\pi; t_q = \pm \arccos \frac{3q^2-1}{2q^3}$. Отже для $q \in [1/2; 1)$ функція

$$\varphi(t) = \text{sign}(\sin t - 3q^2 \sin t + q^3 \sin 2t) = \begin{cases} 1, & -\pi \leq t < -\arccos \frac{3q^2-1}{2q^3}; \\ -1, & -\arccos \frac{3q^2-1}{2q^3} \leq t < 0; \\ 1, & 0 \leq t < \arccos \frac{3q^2-1}{2q^3}; \\ -1, & \arccos \frac{(3q-q^3)}{2} \leq t \leq \pi, \end{cases}$$

належить до S_M^0 . Це означає, що для зазначених функцій $\varphi(t)$ у співвідношенні (3) має місце рівність.

Тоді для $q \in (0; 1/2)$ виконується

$$\begin{aligned} & \|\delta_n^{(2,-1)}(\varphi; 0)\|_C = \\ & = \frac{4q^5}{\pi p_1 p_2} [J_1(\pi) - J_1(0)] + \frac{2q^2(1-3q^2)}{\pi p_1 p_2} [J_2(\pi) - J_2(0)] + O(1) \frac{q^{n-p_1} + q^{n-p_2}}{p_1 p_2 (1-q)^5}, \end{aligned}$$

де

$$J_1(t) = \int \frac{\cos t \sin t dt}{(1-2q \cos t + q^2)^3}; J_2(t) = \int \frac{\sin t dt}{(1-2q \cos t + q^2)^3},$$

а для $q \in [1/2; 1)$ маємо

$$\begin{aligned} & \|\delta_n^{(2,-1)}(\varphi; 0)\|_C = \frac{4q^5}{\pi p_1 p_2} \left[2J_1(\arccos \frac{3q^2-1}{2q^3}) - J_1(0) - J_1(\pi) \right] + \\ & + \frac{2q^2(1-3q^2)}{\pi p_1 p_2} \left[2J_2(\arccos \frac{3q^2-1}{2q^3}) - J_2(0) - J_2(\pi) \right] + O(1) \frac{q^{n-p_1} + q^{n-p_2}}{p_1 p_2 (1-q)^5}. \end{aligned}$$

Оскільки

$$J_1(t) = \frac{1}{4q^2} (1-2q \cos t + q^2)^{-1} - \frac{1+q^2}{8q^2} (1-2q \cos t + q^2)^{-2} + C;$$

$$J_2(t) = -\frac{1}{4q} (1-2q \cos t + q^2)^{-2} + C,$$

то, виконуючи перетворення, отримуємо для $q \in (0; 1/2)$

$$\|\delta_n^{(2,-1)}(\varphi; 0)\|_C = \frac{4q^2}{\pi p_1 p_2 (1-q^2)^2} + O(1) \frac{q^{n-p_1} + q^{n-p_2}}{p_1 p_2 (1-q)^5},$$

а для $q \in [1/2; 1)$

$$\|\delta_n^{(2,-1)}(\varphi; 0)\|_C = \frac{(4q^2+1)q}{\pi p_1 p_2 (1-q^2)^2} + O(1) \frac{q^{n-p_1} + q^{n-p_2}}{p_1 p_2 (1-q)^5}.$$

Таким чином мають місце асимптотичні формули (2).

Зауважимо, що для $q = 1/2$ значення головних членів цих формул співпадають. Теорема доведена.

Література

1. *Степанец А.И.* Решение задачи Колмогорова-Никольского для интегралов Пуассона непрерывных функций // Математический сборник. — 2001. — Т. 192, № 1. — С. 113–138.
2. *Никольский С.М.* Приближение функций тригонометрическими полиномами в среднем // Известия АН СССР. Сер. математика. — 1946. — Т. 10, № 3. — С. 207–256.
3. *Стечкин С.Б.* Оценка остатка ряда Фурье для дифференцируемых функций // Труды Математического института им. В.А. Стеклова АН СССР. — 1980. — Т. 145. — С. 126–151.
4. *Рукасов В.І.* Наближення аналітичних періодичних функцій сумами Валле-Пуссена / В.І. Рукасов, С.О. Чайченко // Український математичний журнал. — 2002. — Т. 54, № 12. — С. 1653–1668.
5. *Сердюк А.С.* Наближення інтегралів Пуассона сумами Валле Пуссена / А.С. Сердюк // Український математичний журнал. — 2004. — Т. 56, № 1. — С. 97–107.
6. *Новіков О.О.* Наближення класів інтегралів Пуассона операторами Фейєра / О.О. Новіков, О.Г. Ровенська, Ю.М. Воронцова [та ін.] // Збірник наукових праць фізико-математичного факультету ДДПУ. — 2014. — №4. — С. 17–22.
7. *Степанец А.И.* Классификация и приближение периодических функций. — Киев: Наук. думка, 1987. — 268 с.

Бодра В.І., Безсмертна К.В., Єгорова О.В., Лашина О.С.,
Рудь А.М.

¹ асистент каф. вищої математики, Київський національний університет технологій і дизайну

²⁻⁵ студенти 5 курсу фізико-математичного факультету, ДДПУ

e-mail: sgpi@slav.dn.ua

ЕКСТРЕМАЛЬНА ЗАДАЧА ДЛЯ ПОДВІЙНИХ ОПЕРАТОРІВ ФЕЙЄРА НА КЛАСАХ ІНТЕГРАЛІВ ПУАСОНА

Отримані розв'язки екстремальної задачі для верхніх граней відхилень подвійних операторів Фейєра на класах інтегралів Пуасона.

Keywords: *Fourier series, sums, the asymptotic equations*

Нехай L — множина сумовних 2π -періодичних функцій і

$$S[f] = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k(f) \cos kx + b_k(f) \sin kx)$$

— ряд Фур'є функції $f \in L$. Позначимо через $S_n(f; x)$ часткові суми ряду Фур'є функції $f \in L$. Нехай p_1, p_2 — довільні натуральні числа такі, що $p_1 + p_2 = n$. Функції $f \in L$ поставимо у відповідність послідовність подвійних сум Фейєра

$$\sigma_{n,p_1,p_2}^{(2,0)}(f, x) = \sigma_n^{(2,0)}(f, x) = \frac{1}{p_1} \sum_{k=n-p_1}^{n-1} \frac{1}{p_2} \sum_{m=k-p_2+1}^k S_m(f, x).$$

Наслідуючи О.І. Степанця [1], позначимо через S_M^0 множину функцій істотно обмежених і таких, що мають нульове середнє значення на періоді, а через $C_{\beta,\infty}^q$ — класи неперервних 2π -періодичних функцій $f(x)$, які можна подати у вигляді згортки

$$f(x) = A_0 + \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(x+t) P_{\beta}^q(t) dt,$$

в якій $P_{\beta}^q(t) = \sum_{k=1}^{\infty} q^k \cos(kt + \frac{\beta\pi}{2})$ — ядро Пуасона, а $\varphi \in S_M^0$.

Питанням наближення класів $C_{\beta,\infty}^q$ лінійними методами присвячено ряд робіт спеціалістів з теорії функцій. З бібліографією до цих питань можна ознайомитися у роботах [1]-[3]

В даній роботі отримані асимптотичні формули для верхніх граней відхилень тригонометричних поліномів $\sigma_{n,p_1,p_2}^{(2,0)}(f, x)$ на класах $C_{\beta,\infty}^q$

$$\mathcal{E}(C_{1,\infty}^q, \sigma_n^{(2,0)}) \stackrel{df}{=} \sup_{f \in C_{1,\infty}^q} \|f(x) - \sigma_n^{(2,0)}(f, x)\|_C.$$

Теорема 1. Нехай $q \in (0; 1)$, $p_1 + p_2 = n$. Тоді для $n \rightarrow \infty$ має місце асимптотична формула

$$\mathcal{E}(C_{1,\infty}^q; \sigma_{n,p}^{(2,0)}) = \frac{q^4 + 4q^2}{\pi p_1 p_2 (1 - q^2)^2} + O(1) \frac{q^{n-p_1} + q^{n-p_2}}{p_1 p_2 (1 - q)^5}. \quad (2)$$

Доведення. Застосовуючи міркування робіт [4], [5, с.123], отримуємо для $\beta = 1$,

$$\begin{aligned} \delta_n^{(2,0)}(f, x) &\stackrel{df}{=} f(x) - \sigma_n^{(2,0)}(f; x) = \\ &= \frac{-q}{\pi n} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{f_1^q(x+t)}{(1 - 2q \cos t + q^2)^3} ((3q - q^3) \sin t - \sin 2t) dt + O(1) \frac{q^{n-p_1} + q^{n-p_2}}{p_1 p_2 (1 - q)^5}. \end{aligned}$$

Тоді

$$\mathcal{E}(C_{1,\infty}^q, \sigma_n^{(2,0)}) \leq \frac{q}{\pi p_1 p_2} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\varphi(t) ((3q - q^3) \sin t - \sin 2t)}{(1 - 2q \cos t + q^2)^3} dt + O(1) \frac{q^{n-p_1} + q^{n-p_2}}{p_1 p_2 (1 - q)^5}. \quad (3)$$

де $\varphi(t) = \text{sign}((3q - q^3) \sin t - \sin 2t)$.

Оскільки для будь-якого $q \in (0; 1)$ умова $(3q - q^3) \sin t - \sin 2t = 0$ виконується тільки для $t = 0; \pm\pi; t_q = \pm \arccos \frac{3q - q^3}{2}$, то функція

$$\varphi(t) = \text{sign}((3q - q^3) \sin t - \sin 2t) = \begin{cases} -1, & -\pi \leq t < -\arccos \frac{3q - q^3}{2}; \\ 1, & -\arccos \frac{3q - q^3}{2} \leq t < 0; \\ -1, & 0 \leq t < \arccos \frac{3q - q^3}{2}; \\ 1, & \arccos \frac{3q - q^3}{2} \leq t \leq \pi, \end{cases}$$

міститься у множині S_M^0 . Це означає, що у співвідношенні (3) має місце асимптотична рівність.

Тоді для $q \in (0; 1)$ виконується

$$\begin{aligned} \|\delta_n^{(2,-1)}(\varphi; 0)\|_C &= \frac{2q^2(3q - q^3)}{\pi p_1 p_2} [J_2(0) + J_2(\pi) - 2J_2(\arccos \frac{3q - q^3}{2})] + \\ &+ \frac{4q^2}{\pi p_1 p_2} [2J_1(\arccos \frac{3q - q^3}{2}) - J_1(0) + J_1(\pi)], \end{aligned}$$

де

$$J_1(t) = \int \frac{\cos t \sin t dt}{(1 - 2q \cos t + q^2)^3}; J_2(t) = \int \frac{\sin t dt}{(1 - 2q \cos t + q^2)^3}.$$

Оскільки

$$J_1(t) = \frac{1}{4q^2}(1 - 2q \cos t + q^2)^{-1} - \frac{1 + q^2}{8q^2}(1 - 2q \cos t + q^2)^{-2} + C;$$

$$J_2(t) = -\frac{1}{4q}(1 - 2q \cos t + q^2)^{-2} + C,$$

то, виконуючи перетворення, отримуємо для $q \in (0; 1)$

$$\mathcal{E}(C_{1,\infty}^q; \sigma_{n,p}^{(2,0)}) = \frac{q^4 + 4q^2}{\pi p_1 p_2 (1 - q^2)^2} + O(1) \frac{q^{n-p_1} + q^{n-p_2}}{p_1 p_2 (1 - q)^5}.$$

Теорема доведена.

Література

1. *Степанец А.И.* Решение задачи Колмогорова-Никольского для интегралов Пуассона непрерывных функций // Математический сборник. — 2001. — Т. 192, № 1. — С. 113—138.
2. *Степанец А.И.* Приближения суммами Валле Пуссена / Степанец А.И., Рукасов В.И., Чайченко С.О. — К. : Ін-т математики НАН України, — 2007. — 386 с. — (Праці Ін-ту математики НАН України ; т. 68).
3. *Степанец А.И.* Методы теории приближений: В 2 ч. / Степанец А.И. — К. : Ін-т математики НАН України, 2002. — Ч. 1. — 427 с. — (Праці Ін-ту математики НАН України ; т. 40).
4. *Новіков О.О.* Наближення класів інтегралів Пуассона операторами Фейєра / О.О. Новіков, О.Г. Ровенська, Ю.М. Воронцова [та ін.] // Збірник наукових праць фізико-математичного факультету ДДПУ. — 2014. — №4. — С. 17–22.
5. *Степанец А.И.* Классификация и приближение периодических функций. — Киев: Наук. думка, 1987. — 268 с.

Новіков О.О., Шумякіна А.В., Ліпкіна В.Ю., Давиденко М.А.,
Вагнер Г.В.

¹ кандидат фізико-математичних наук, декан фізико-математичного факультету, ДДПУ

²⁻⁴ студенти 5 курсу фізико-математичного факультету, ДДПУ

⁵ студентка 2 курсу фізико-математичного факультету, ДДПУ

e-mail: sgpi@slav.dn.ua

АСИМПТОТИЧНІ ФОРМУЛИ ДЛЯ ВІДХИЛЕНЬ ПОДВІЙНИХ ОПЕРАТОРІВ ФЕЙЄРА

Отримані асимптотичні формули для верхніх граней відхилень подвійних операторів Фейєра на класах періодичних функцій.

Keywords: *Fourier series, sums, the asymptotic equations*

В роботі [1] подвійні оператори наближення запроваджені наступним чином. Нехай L — множина сумовних 2π -періодичних функцій і

$$S_n(f; x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k(f) \cos kx + b_k(f) \sin kx)$$

— часткові суми ряду Фур'є функції $f \in L$. Нехай p_1, p_2 — довільні натуральні числа такі, що $p_1 + p_2 = n - 1$. Функції $f \in L$ поставимо у відповідність послідовність тригонометричних поліномів

$$\sigma_{n,p_1,p_2}^{(2,1)}(f, x) = \sigma_n^{(2,1)}(f, x) = \frac{1}{p_1} \sum_{k=n-p_1}^{n-1} \frac{1}{p_2} \sum_{m=k-p_2+1}^k S_m(f, x),$$

які домовимося називати подвійними сумами Фейєра. Наслідуючи [2], позначимо через S_M^0 множину функцій істотно обмежених і таких, що мають нульове середнє значення на періоді, і через $C_{\beta,\infty}^q$ — класи неперервних 2π -періодичних функцій $f(x)$, які можна подати у вигляді згортки

$$f(x) = A_0 + \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(x+t) P_{\beta}^q(t) dt,$$

в якій $P_{\beta}^q(t) = \sum_{k=1}^{\infty} q^k \cos(kt + \frac{\beta\pi}{2})$ — ядро Пуасона, а $\varphi \in S_M^0$.

Питанням наближення класів $C_{\beta,\infty}^q$ лінійними методами присвячено ряд робіт С.М. Нікольського [3], С.Б. Стечкина [4], О.І. Степанця [2], В.І. Рукасова, С.О. Чайченко [5], А.С. Сердюка [6].

В даній роботі отримані асимптотичні формули для верхніх граней відхилень тригонометричних поліномів $\sigma_n^{(2,1)}(f, x)$ на класах $C_{\beta,\infty}^q$

$$\mathcal{E}(C_{1,\infty}^q, \sigma_n^{(2,1)}) \stackrel{df}{=} \sup_{f \in C_{1,\infty}^q} \|f(x) - \sigma_n^{(2,1)}(f, x)\|_C.$$

Теорема 1. *Нехай $q \in (0; 1)$, $p_1 + p_2 = n - 1$. Тоді для $n \rightarrow \infty$ має місце асимптотична формула*

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(C_{1,\infty}^q; \sigma_n^{(2,1)}) &= \frac{2\pi^{-1}}{p_1 p_2} \left[\ln \frac{16(1-q)(1+q)^3}{(q + \sqrt{4-3q^2})^4} + q \frac{(8q^2 - 4) - (q^2 - 2)\sqrt{4-3q^2}}{2(1-q^2)^2} \right] + \\ &+ O(1) \frac{q^{n-p_1} + q^{n-p_2}}{p_1 p_2 (1-q)^5}. \end{aligned} \quad (1)$$

Доведення. Застосовуючи міркування робіт [7], [8, с.123], отримуємо для $\beta = 1$,

$$\begin{aligned} \delta_n^{(2,1)}(f, x) &\stackrel{df}{=} f(x) - \sigma_n^{(2,1)}(f; x) = \\ &= \frac{-q}{\pi n} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{f_1^q(x+t)}{(1-2q \cos t + q^2)^3} (\sin 3t - 3q \sin 2t + 3q^2 \sin t) dt + O(1) \frac{q^{n-p_1} + q^{n-p_2}}{p_1 p_2 (1-q)^5}. \end{aligned}$$

Тоді

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(C_{1,\infty}^q, \sigma_n^{(2,1)}) &\leq \\ &\leq \frac{q}{\pi p_1 p_2} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\varphi(t) (\sin 3t - 3q \sin 2t + 3q^2 \sin t)}{(1-2q \cos t + q^2)^3} dt + O(1) \frac{q^{n-p_1} + q^{n-p_2}}{p_1 p_2 (1-q)^5}, \end{aligned} \quad (2)$$

де $\varphi(t) = \text{sign}(\sin 3t - 3q \sin 2t + 3q^2 \sin t)$.

Оскільки для будь-якого $q \in (0; 1)$ умова $(3q - q^3) \sin t - \sin 2t = 0$ виконується тільки для $t = 0; \pm\pi; t_{-q} = \arccos \frac{3q - \sqrt{4-3q^2}}{4}, t_{+q} = \arccos \frac{3q + \sqrt{4-3q^2}}{4}$,

то функція

$$\varphi(t) = \begin{cases} 1, & -\pi \leq t < -\arccos \frac{3q - \sqrt{4-3q^2}}{4}; \\ -1, & -\arccos \frac{3q - \sqrt{4-3q^2}}{4} \leq t < -\arccos \frac{3q + \sqrt{4-3q^2}}{4}; \\ 1, & -\arccos \frac{3q - \sqrt{4-3q^2}}{4} \leq t < 0; \\ 1, & 0 \leq t < \arccos \frac{3q + \sqrt{4-3q^2}}{4}; \\ -1, & \arccos \frac{3q + \sqrt{4-3q^2}}{4} \leq t < \arccos \frac{3q - \sqrt{4-3q^2}}{4}; \\ 1, & \arccos \frac{3q - \sqrt{4-3q^2}}{4} \leq t < \pi; \end{cases}$$

належить до S_M^0 . Отже співвідношення (2) є асимптотичною рівністю.

Тоді для $q \in (0; 1)$ виконується

$$\begin{aligned} \|\delta_n^{(2,1)}(\varphi; 0)\|_C &= \frac{2q^3}{\pi p_1 p_2} \left[8J_1(t_{+q}) - 4J_1(0) - 12qJ_2(t_{+q}) + 6qJ_2(0) + \right. \\ &\quad + 2(-1 + 3q^2)J_3(t_{+q}) - (3q^2 - 1)J_3(0) - 8J_1(t_{-q}) + 12qJ_2(t_{-q}) - \\ &\quad \left. - 2(3q^2 - 1)J_3(t_{-q}) + 4J_1(\pi) - 6qJ_2(\pi) + (3q^2 - 1)J_3(\pi) \right] + O(1) \frac{q^{n-p_1} + q^{n-p_2}}{p_1 p_2 (1-q)^5}, \end{aligned}$$

де

$$\begin{aligned} J_1(t) &= \int \frac{\sin t \cos^2 t}{(1 - 2q \cos t + q^2)^3} dt; \quad J_2(t) = \int \frac{\sin t \cos t}{(1 - 2q \cos t + q^2)^3} dt; \\ J_3(t) &= \int \frac{\sin t}{(1 - 2q \cos t + q^2)^3} dt. \end{aligned}$$

Оскільки

$$\begin{aligned} J_1(t) &= \frac{1}{8q^3} \ln(1 - 2q \cos t + q^2) - \frac{(1 + q^2)^2}{16q^3} (1 - 2q \cos t + q^2)^{-2} + \\ &\quad + \frac{(1 + q^2)}{4q^3} (1 - 2q \cos t + q^2)^{-1}; \quad J_3(t) = -\frac{1}{4q} (1 - 2q \cos t + q^2)^{-2}; \\ J_2(t) &= \frac{1}{4q^2} (1 - 2q \cos t + q^2)^{-1} - \frac{1 + q^2}{8q^2} (1 - 2q \cos t + q^2)^{-2}, \end{aligned}$$

то, виконуючи перетворення, отримуємо співвідношення (1). Теорема доведена.

Література

1. *Кадубовский А.А.* Приближение интегралов Пуассона r -повторными суммами Валле Пуссена / А.А. Кадубовский, О.А. Новиков, О.Г. Ровенская [та ін.] // Збірник наукових праць фізико-математичного факультету СДПУ. — 2012. — №2. — С. 23–27.
2. *Степанец А.И.* Решение задачи Колмогорова-Никольского для интегралов Пуассона непрерывных функций // Математический сборник. — 2001. — Т. 192, № 1. — С. 113–138.
3. *Никольский С.М.* Приближение функций тригонометрическими полиномами в среднем // Известия АН СССР. Сер. мат. — 1946. — Т. 10, № 3. — С. 207–256.
4. *Стечкин С.Б.* Оценка остатка ряда Фурье для дифференцируемых функций // Труды Математического института им. В.А. Стеклова АН СССР. — 1980. — Т. 145. — С. 126–151.
5. *Степанец А.И.* Приближения суммами Валле Пуссена / Степанец А.И., Рукасов В.И., Чайченко С.О. — К. : Ін-т математики НАН України, — 2007. — 386 с. — (Праці Ін-ту математики НАН України ; т. 68).
6. *Сердюк А.С.* Наближення інтегралів Пуассона сумами Валле Пуссена / А.С. Сердюк // Український математичний журнал. — 2004. — Т. 56, № 1. — С. 97–107.
7. *Новіков О.О.* Наближення класів інтегралів Пуассона операторами Фейєра / О.О. Новіков, О.Г. Ровенська, Ю.М. Воронцова [та ін.] // Збірник наукових праць фізико-математичного факультету ДДПУ. — 2014. — №4. — С. 17–22.
8. *Степанец А.И.* Классификация и приближение периодических функций. — Киев: Наук. думка, 1987. — 268 с.

¹ кандидат фізико-математичних наук, декан фізико-математичного факультету, ДДПУ² науковий співробітник відділу теорії функцій, Інститут математики НАН України³ студент 5 курсу фізико-математичного факультету, ДДПУ⁴ студентка 1 курсу фізико-математичного факультету, ДДПУ

e-mail: sgpi@slav.dn.ua

ЩОДО НАБЛИЖЕННЯ НЕСКІНЧЕННИХ МАТРИЦЬ

Запропоноване означення відносної норми елементів простору нескінченних матриць.

Keywords: *infinite matrix, Fourier series*

Сумою нескінчених матриць $X = \{x_{ij}\}; i \in N, j \in N$, і $Y = \{y_{ij}\}; i \in N, j \in N$, будемо називати нескінчену матрицю $Z = \{z_{ij}\}; i \in N, j \in N$, таку, що $z_{ij} = x_{ij} + y_{ij}; \forall i \in N, j \in N$. Будемо позначати $Z = [X + Y]$. Добутком нескінченої матриці $X = \{x_{ij}\}; i \in N, j \in N$, на число λ називається нескінченна матриця $Z = \{z_{ij}\}; i \in N, j \in N$, така, що $z_{ij} = \lambda x_{ij}; \forall i \in N, j \in N$.

Кожній нескінченій матриці $A = \{a_{ij}\}; i \in N, j \in N$, поставимо у відповідність сім'ю матриць $A_n^m = \{a_{ij}\}; i = 1, 2, \dots, n, j = 1, 2, \dots, m$, розміру $m \times n$ і сім'ю нескінченних матриць $\bar{A}_n^m = \{a_{ij}\}; i \in N, j \in N$, де

$$\alpha_{ij} = \begin{cases} a_{ij}, & i = 1, 2, \dots, n; j = 1, 2, \dots, m; \\ 0, & i = n + 1, n + 2, \dots; j = m + 1, m + 2, \dots \end{cases}$$

Різницею $A - A_n^m$ будемо називати матрицю $A - \bar{A}_n^m$. Зафіксуємо дві матриці-рядка $B = (b_1, b_2, \dots)$, $C = (c_1, c_2, \dots)$ і позначимо B^t, C^t матриці їм транспоновані. Нормою матриці $A = \{a_{ij}\}; i \in N, j \in N$, відносно фіксованих напрямків $B = \{b_i\}; C = \{c_i\}; i \in N$, будемо називати величину

$$\|A\|_{BC} = |B \times A \times C^t| = \left| \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij} b_i c_j \right|. \quad (1)$$

Позначимо для фіксованих напрямків $B = \{b_i\}; C = \{c_i\}; i \in N$, через \mathfrak{P}_{BC} множину нескінчених матриць, які мають скінченну норму відносно напрямків $B = \{b_i\}; C = \{c_i\}; i \in N$.

Відхиленням матриці $U = \{u_{ij}\}; i \in N, j \in N$ від $A = \{a_{ij}\}; i \in N, j \in N$, відносно $B = \{b_i\}; C = \{c_i\}; i \in N$, будемо називати $\|A - U\|_{BC}$, де

за означенням $A - U = \{a_{ij} - u_{ij}\}, i \in N, j \in N$, і будемо вважати $\|A - A_n^m\|_{BC} = \|A - \bar{A}_n^m\|_{BC}$.

Розглянемо приклад. Позначимо матриці-рядки,

$$B_0(x) = (\frac{1}{2} \cos x \cos 2x \dots \cos kx \dots); B_1(x) = (0 \sin x \sin 2x \dots \sin kx \dots),$$

для $i = 0; 1, j = 0; 1$, діагональні матриці

$$\bar{\Lambda}_{n,i} = \begin{pmatrix} \lambda_0^{(ni)} & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots \\ 0 & \lambda_1^{(ni)} & 0 & \dots & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \lambda_2^{(ni)} & \dots & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_k^{(ni)} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

такі, що $\lambda_k^{(ni)} = 0, i = 0, 1$; для $k \geq n$. Позначимо через $q(k, \nu)$ – кількість нулів серед індексів k, ν величини $a_{k\nu}^{ij}$. Тоді для матриць

$$S(i, j) = \begin{pmatrix} a_{00}^{ij} & a_{10}^{ij} & a_{20}^{ij} & \dots & a_{k0}^{ij} & \dots \\ a_{01}^{ij} & a_{11}^{ij} & a_{21}^{ij} & \dots & a_{k1}^{ij} & \dots \\ a_{02}^{ij} & a_{12}^{ij} & a_{22}^{ij} & \dots & a_{k2}^{ij} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{0n}^{ij} & a_{1n}^{ij} & a_{2n}^{ij} & \dots & a_{kn}^{ij} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

отримуємо

$$\begin{aligned} B_i(x_1) \times S(i, j) \times B_j(x_2) &= \\ &= \sum_{k_1=0}^{\infty} \sum_{k_2=0}^{\infty} 2^{-q(k_1, k_2)} a_{k_1 k_2}^{ij} \cos(k_1 x_1 - i\pi/2) \cos(k_2 x_2 - j\pi/2); \\ \sum_{i=0,1} \sum_{j=0,1} B_i(x_1) \times S(i, j) \times B_j(x_2) &= \sum_{k_1=0}^{\infty} \sum_{k_2=0}^{\infty} 2^{-q(k_1, k_2)} A_{k_1 k_2}(x_1, x_2), \quad (2) \end{aligned}$$

де

$$\begin{aligned} A_{k_1, k_2}(x_1, x_2) &= a_{k_1, k_2}^{(01)} \cos k_1 x_1 \cos k_2 x_2 + a_{k_1, k_2}^{(01)} \cos k_1 x_1 \sin k_2 x_2 + \\ &+ a_{k_1, k_2}^{(10)} \sin k_1 x_1 \cos k_2 x_2 + a_{k_1, k_2}^{(01)} \sin k_1 x_1 \sin k_2 x_2. \end{aligned}$$

Нехай $\Lambda_{r,j}$ ліва верхня квадратна частина матриці $\bar{\Lambda}_{r,j}$, S_n^m – ліва верхня розміром $n \times m$ частина матриці S . Тоді

$$\sum_{i=0,1} \sum_{j=0,1} B_i(x_1) \times [\Lambda_{n,0} \times S(i, j) \times \Lambda_{m,1}^t] B_j(x_2) =$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{k_1=0}^{\infty} \sum_{k_2=0}^{\infty} 2^{-q(k_1, k_2)} \lambda_{k_1}^{(n,0)} \lambda_{k_2}^{(n,1)} A_{k_1 k_2}(x_1, x_2) = \\
&= \sum_{i=0,1} \sum_{j=0,1} B_i(x_1) \times [\Lambda_{n,0} \times S_n^m(i, j) \times \Lambda_{m,1}^t] B_j(x_2) = \\
&= \sum_{k_1=0}^n \sum_{k_2=0}^m 2^{-q(k_1, k_2)} \lambda_{k_1}^{(n,0)} \lambda_{k_2}^{(n,1)} A_{k_1 k_2}(x_1, x_2). \tag{3}
\end{aligned}$$

Якщо елементи матриць $S(i, j)$, $i = 0; 1, j = 0; 1$, задовольняють певні умови, то ряд (2) є рядом Фур'є певної сумовної функції двох змінних [1], а величина (3) є певним прямокутним лінійним середнім цього ряду [2].

Будемо вважати матрицю $\Lambda_{n,0} \times S_n^m \times \Lambda_{m,1}^t$ розміром $n \times m$ наближенням нескінченної матриці S , а величину

$$\|S - \Lambda_{n,0} \times S_n^m \times \Lambda_{m,1}^t\|_{BC}$$

відхиленням матриці $\Lambda_{n,0} \times S_n^m \times \Lambda_{m,1}^t$ від матриці S у метриці простору \mathfrak{B}_{BC} .

Література

1. Степанец А.И. Равномерные приближения тригонометрическими полиномами. — Киев: Наук. думка, 1981. — 340 с.
2. Задерей П.В. Интегральные представления уклонений линейных средних рядов Фурье на классах дифференцируемых периодических функций двух переменных // Некоторые вопросы теории аппроксимации функций: Сб. научн. тр. / Отв. ред. В.К. Дзядык. — К.: Ин-т математики АН УССР, 1985. — С. 16–28.

¹ студентка 5 курсу фізико-математичного факультету, ДДПУ

² доцент кафедри алгебри, ДДПУ

³ доцент кафедри алгебри, ДДПУ

e-mail: letenko.yuliya@yandex.ru

ПРОТОКОЛИ РОЗПОДІЛУ ТА УЗГОДЖЕННЯ КЛЮЧА

Дана робота присвячена вивченню проблеми створення, обміну та розподілу ключів. Вивчаються і описуються основні правила розподілу та узгодження ключів, досліджуються протоколи початкового розподілу ключів Diffie-Hellman та схема Blom. На їх основі розроблена програмна реалізація криптографічних протоколів розподілу ключів.

Ключові слова: шифр, ключ, криптографія, асиметричні криптографічні системи, криптографічні протоколи.

Вступ

В наш час велика увага приділяється проблемі використання криптографічних методів в інформаційних системах.

Відомо, що криптографічні системи з відкритим ключем (асиметричні) мають перевагу над системами з закритим ключем (симетричними), оскільки не вимагають безпечного каналу для передачі таємного ключа. Та на жаль, більшість асиметричних систем (наприклад RSA) набагато повільніші за симетричні системи (наприклад AES). Так, на практиці, всі системи з закритим ключем використовуються щоб зашифрувати «довгі» повідомлення. Тому виникає проблема пересилки таємних ключів.

Розв'язання цієї проблеми базується на криптографічних протоколах. Це відносно молода галузь математичної криптографії (перші протоколи з'явилися близько 40 років тому), але вона бурхливо розвивається і на даний момент перетворилася в основний об'єкт дослідження в теоретичній криптографії.

Blom представив свою схему попереднього розподілу ключа в [2]. Узагальнення цієї схеми можна знайти в працях Blunda та інших [3], а також Beimela і Chora [1]. Diffie і Hellman опублікували свій алгоритм обміну ключа в [4]. Незалежно від них ідею обміну ключа сформулював Merkle [7]. Інформація про обмін ключа з підтвердженням представлена в роботах Diffie, van Oorschota і Wienera [5].

1. Основні теоретичні відомості сучасної криптології

Розглянемо симетричні криптографічні системи. При використанні симетричної криптосистеми дві сторони, що вступають в інформаційний обмін повинні спочатку узгодити секретний сесійний ключ, тобто ключ для шифрування всіх повідомлень, переданих в процесі обміну. Цей ключ повинен бути вказаний всім іншим і повинен періодично оновлюватися одночасно у відправника і одержувача. Процес узгодження сесійного ключа називають також обміном або розподілом ключів.

Установлена послідовність дій, які виконуються для розв'язання певного криптографічного завдання, називається *криптографічним протоколом*.

Криптографічні протоколи є важливою складовою частиною криптографічної системи. Основна відмінність протоколу від алгоритму полягає в тому, що реалізація алгоритму припускає активні дії одного суб'єкта, в той час як протокол реалізується в ході взаємодії декількох суб'єктів (сторін протоколу).

Якщо сторони, що взаємодіють, довіряють один одному й готові спільно вирішувати криптографічне завдання, то в цьому випадку використовуються двосторонні протоколи (протоколи без посередника).

Якщо між сторонами можуть виникати розбіжності або їм потрібна підтримка третьої сторони, то використовуються протоколи з посередником (незацікавленою довіреною стороною — (ТА) технічним адміністратором), які називають тристоронніми протоколами. Завдання посередника — забезпечити виконання всіх етапів протоколу, аж до його завершення. ТА відповідальний за підтвердження ідентифікації користувачів, видання сертифікатів, вибір та передачу ключів користувачам.

Існують наступні види протоколів:

- *попередній розподіл ключа;*
- *розподіл ключа сеансу;*
- *узгодження ключів;*

Процес розподілу ключа, а також протокол його узгодження полягають у тому, що наприкінці реалізації протоколу обидві сторони процесу будуть володіти спільним ключем K , значення якого не відоме жодній іншій стороні (окрім ТА).

Більшість криптографічних систем вимагають проведення попереднього розподілу секретних ключів. Для попереднього розподілу сторони можуть обмінятися ключами при особистій зустрічі, або доручити доставку ключів спеціально призначеному ТА, чи використовувати для передачі деякий виділений захищений канал.

Залежно від призначення криптографічної системи іноді зручним виявляється розподіляти не самі ключі, а деякі допоміжні ключові матеріали, на підставі яких кожен учасник або група користувачів можуть самостійно обчислити необхідний ключ, використовуючи для цього деяку встановлену заздалегідь процедуру.

Спочатку опишемо основний варіант протоколу. Для кожної пари користувачів ТА вибирає випадково ключ $K_{U,V} = K_{V,U}$ та передає його поза мережею до U і V безпечним каналом (передача ключів відбувається поза мережею, тому що мережа досить небезпечна). Цей підхід дає безумовну безпеку, проте вимагає безпечний канал для передачі інформації між ТА і кожним користувачем.

В основному варіанті ТА генерує C_n^2 ключі, передаючи кожен з них парі користувачів мережі. Для передачі ключів ми маємо потребу в безпечному каналі між ТА і кожним із користувачів. Це дає істотний прогрес відносно ситуації, в якій кожна пара користувачів незалежно обмінює між собою ключі за допомогою безпечного каналу, бо завдяки цьому можна обмежити число необхідних безпечних з'єднань з C_n^2 до n .

Проте, якщо число користувачів велике, то цей метод є недостатньо практичним, однаковою мірою як з точки зору кількості інформації, яку необхідно безпечно передати, так і з точки зору інформації, яку кожен споживач мусить безпечно зберегти (кожен користувач повинен зберегти $n - 1$ ключ, натомість ТА необхідно безпечно передати в цілому C_n^2 ключі).

Схема Bloma

Запропонована схема Bloma дозволяє скоротити кількість таємної інформації, яку мусять зберігати користувачі мережі.

Розглядається мережа, що складається з n користувачів. Ключі вибрані із скінченої групи Z_p , де $p \geq n$ є простим числом.

Значення k визначає максимальну кількість об'єднань атак, яку система зможе витримати, де $1 \leq k \leq n - 2$. У схемі Bloma ТА передає безпечним каналом $k + 1$ елемент Z_p кожному користувачеві (на відміну від тривіальної схеми попереднього розподілу ключів, в якій передається $n - 1$ елемент). Тут також кожна пара користувачів U і V може підрахувати ключ $K_{U,V} = K_{V,U}$.

Умова безпеки полягає в наступному: будь-яка множина, що найбільше k користувачів, не включаючи U і V , не в змозі встановити будь-яку інформацію про ключ $K_{U,V}$ (ми говоримо тут про безумовну безпеку).

2. Метод розподілу ключа Діффі-Хелмана

У 1976 році Diffie і Hellman винайшли метод відкритого розподілу ключів. Завдяки цьому методу користувачі можуть обмінюватися ключами по незахищених каналах зв'язку. Його безпека обумовлена трудомісткістю обчислення дискретних логарифмів в скінченному полі, на відміну від легкості розв'язання прямої задачі дискретного піднесення до степеня в тому ж скінченному полі. Суть методу Diffie-Hellman зображено на рисунку 1.

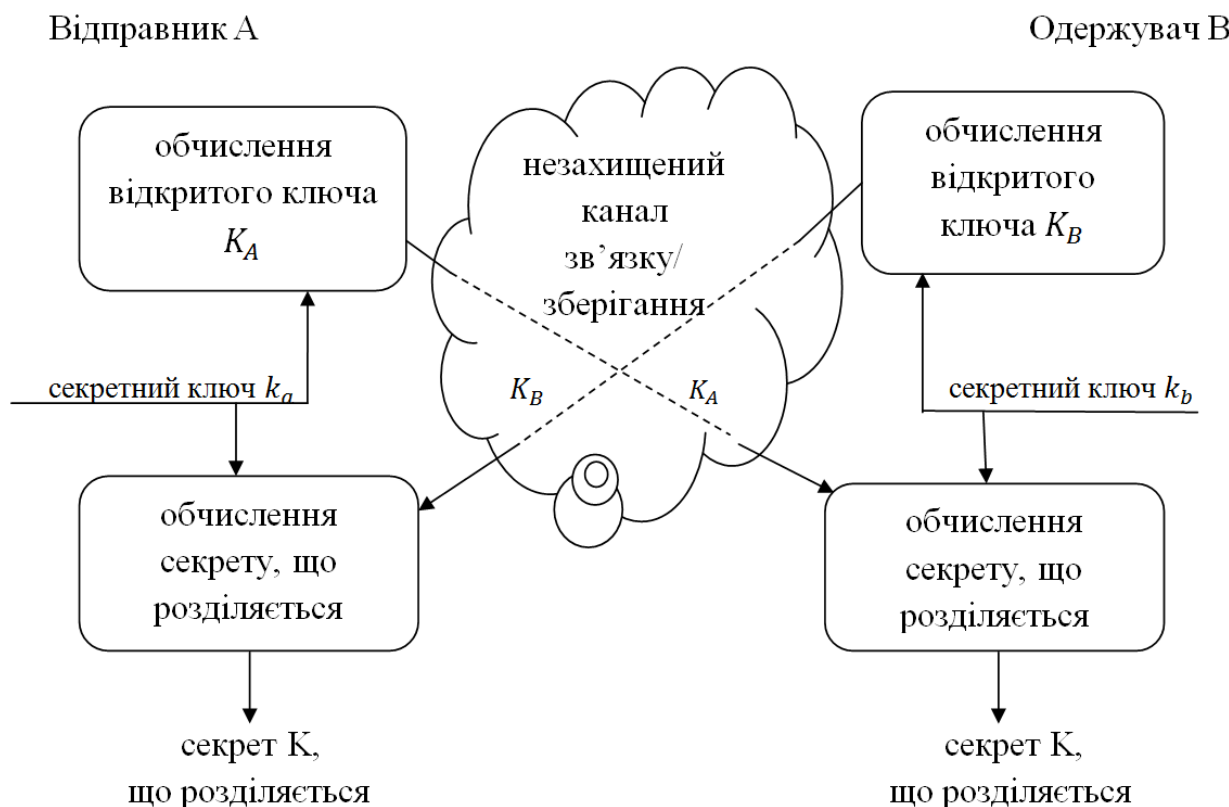


Рис. 1: Схема відкритого розподілу ключа Diffie-Hellman

Зловмисник, який перехопив значення відкритих ключів K_A і K_B , не може обчислити сесійний ключ K , тому що він не має секретних ключів k_A і k_B .

Унікальність методу Diffie-Hellman полягає в тому, що пара абонентів має можливість отримувати відоме тільки їм секретне число, передаючи по відкритій мережі відкриті ключі. Завдяки використанню односпрямованої функції операція обчислення відкритого ключа незворотна, тобто неможливо за значенням відкритого ключа абонента обчислити його секретний ключ. Схема Diffie-Hellman дає можливість шифрувати дані при кожному сеансі зв'язку на нових ключах. Не слід забувати, що будь-яке зберігання секретів підвищує ймовірність потрапляння їх в руки конкурентів або супротивника.

Протокол обміну ключів Diffie-Hellman

Якщо з якихось причин співпраця on-line з ТА непрактична або небажана, можна звернутися до часто застосовуваного методу: протоколу узгодження ключа. При такому підході користувачі U і V разом вибирають ключ, підтримуючи зв'язок за допомогою відкритого каналу.

Першим, і водночас найбільш відомим таким протоколом є *протокол обміну ключа Diffie-Hellman* (винайдений в 1976 році при співпраці W. Diffie і M. Hellman, під впливом роботи R. Merkle). Для його виконання сторони повинні домовитися про значення великого простого числа p і твірного елементу α мультиплікативної групи Z_p^* , причому значення p і α відкриті кожному користувачеві мережі (як альтернатива, ці значення могли б бути вибрані користувачем U і передані користувачеві V на першому кроці реалізації протоколу).

Після закінчення протоколу обидва користувачі, U і V , отримують в результаті один і той самий спільний ключ:

$$K = \alpha^{a_U a_V} \mod p.$$

Цей протокол, дуже схожий на раніше описану схему попереднього розподілу ключа Diffie і Hellman. Різниця полягає в тому, що показники a_U і a_V користувачів U і V , відповідно, не є сталими, а вибираються кожного разу при введенні протоколу в дію. Крім того, в цьому протоколі U і V мають впевненість у актуальності ключа, тому що ключ сеансу залежить від обох випадкових показників a_U і a_V .

3. Характеристики програм реалізованих протоколів

Розглянемо основні характеристики розроблених в межах даної роботи програм. Програмна реалізація виконана в середовищі програмування Delphi 7.

Протокол розподілу ключа Blom

Ємнісна складність даного протоколу дорівнює $O(n)$, де n — кількість користувачів. Всю інформацію необхідно зберігати ТА, тому він мусить мати відповідний об'єм пам'яті.

Часова ж складність протоколу розподілу ключа Blom для пар абонентів не залежить від загальної кількості користувачів та обраних значень змінних p і $r_{1,...,n}$. Вона є сталою і дорівнює $O(k)$, де k — кількість атак, що може витримати система.

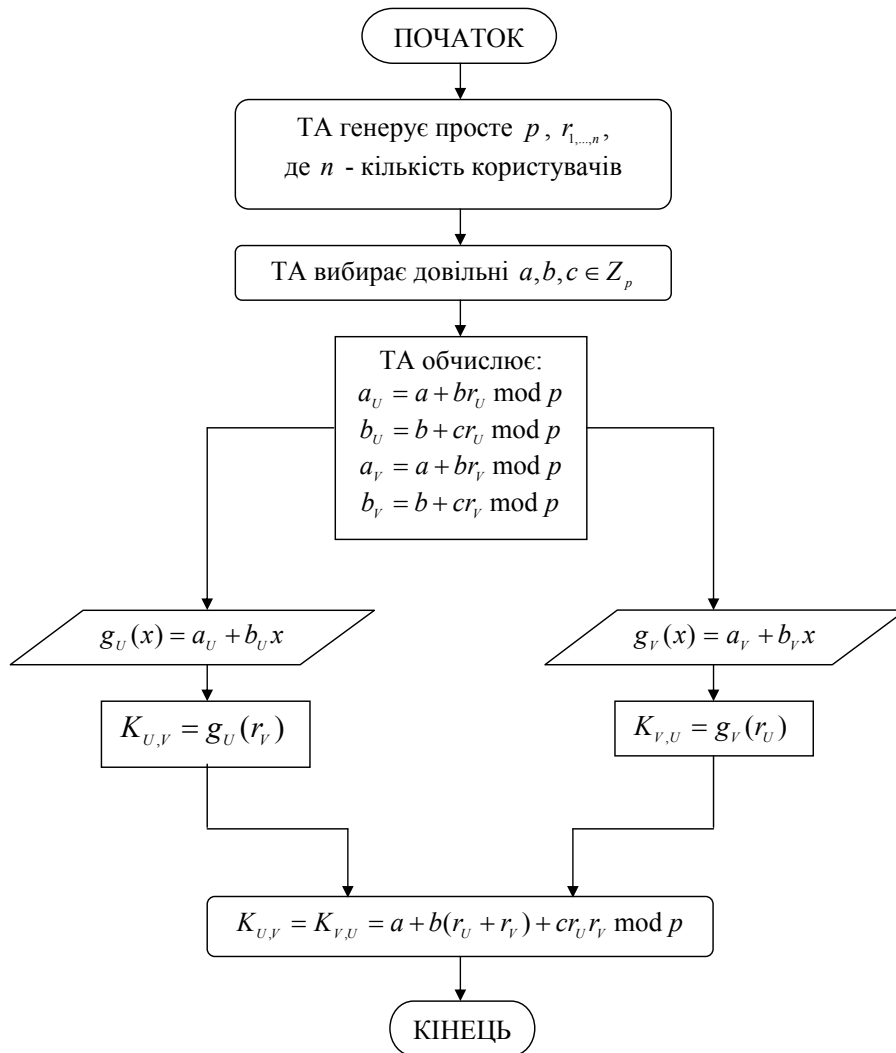


Рис. 2: Блок-схема протоколу розподілу ключа Blom (для двох користувачів)

Протокол розподілу ключів Diffie-Hellman

Процедура підрахунку b_U (b_V) має часову складність $O(p)$. Процедура підрахунку $K_{V,U}$ також має часову складність $O(p)$, а отже весь алгоритм розподілу ключа для двох користувачів має асимптотичну складність $O(p^2)$ проте на практиці це значення в декілька разів менше.

Алгоритм має ємнісну складність $O(1)$, тобто незалежно від кількості користувачів, потребує від ТА одного й того ж об'єму пам'яті. Для кожного користувача при цьому ємнісна складність однакова та також дорівнює $O(1)$.

Програма, написана для реалізації протоколу, не потребує великих об'ємів пам'яті чи процесорного часу, тому можна стверджувати, що протокол Diffie-Hellman може ефективно використовуватися в пристроях, що не мають значних обчислювальних потужностей, проте потребують захищених каналів зв'язку.

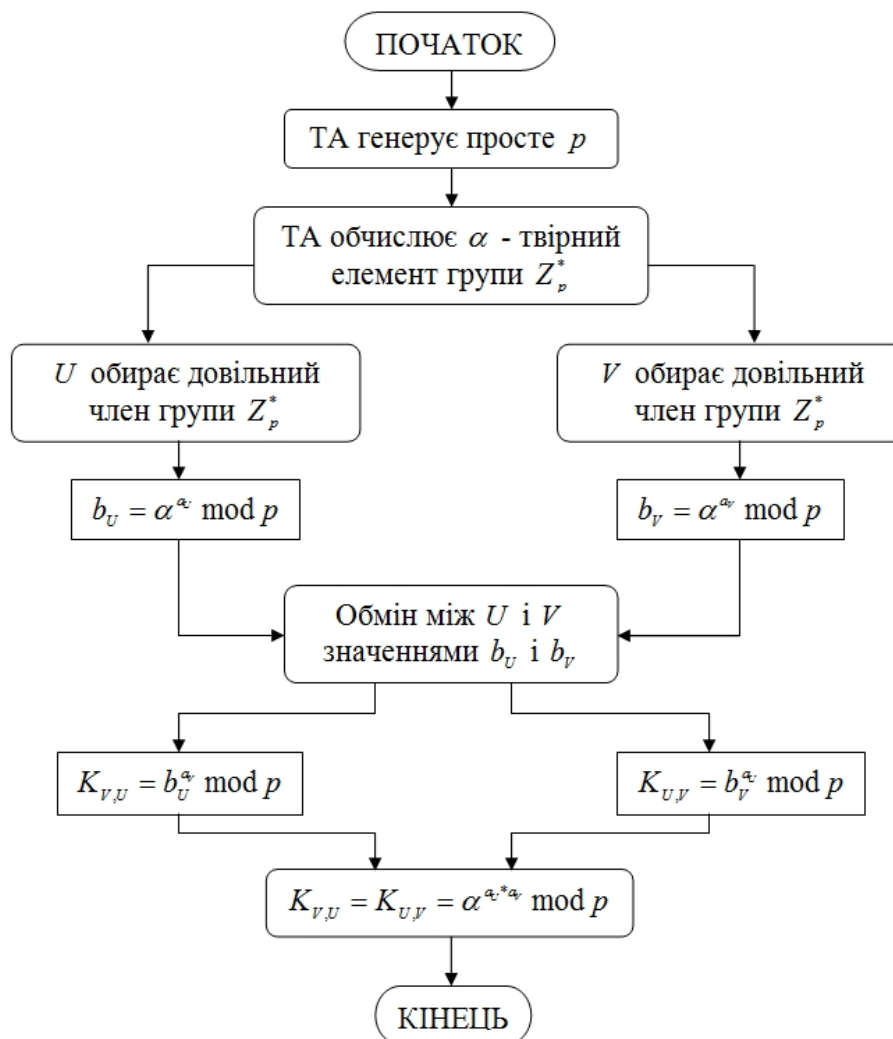


Рис. 3: Блок-схема протоколу розподілу ключа Diffie-Hellman

Висновки

Легко бачити, що кожен з протоколів має свої недоліки та переваги. Протокол ВІОМ не потребує (на відміну від протоколу Diffie-Hellman) значного процесорного часу, проте вимагає виділення порівняно значної кількості пам'яті для зберігання ТА згенерованих значень змінних. Майже всі обчислення в протоколі ВІОМ виконуються ТА, і лише на останньому етапі потребують підрахунків від абонента, через що потребує безпечного каналу зв'язку для передачі отриманих даних кінцевим користувачам. Протокол Diffie-Hellman навпаки мінімізує вплив та діяльність ТА, перекладаючи всі обчислення на абонентів, тобто більш вимогливий до ресурсів користувача, але завдяки цьому не вимагає існування безпечного каналу.

Отже, кожен з протоколів має свої слабкі та сильні сторони, тому вибір оптимального алгоритму залежить від обставин, при яких він буде використовуватися: обчислювальні можливості, доступні об'єми пам'яті, існування чи відсутність безпечних каналів зв'язку та кількість користувачів. Лише оцінивши всі ці параметри можна обрати зручний та ефективний протокол розподілу ключа.

Література

1. *Beimel A. and Chor B.* Interfection in key distribution schemes // Lecture Notes in Computer Science. — 1994. — 773. — P. 444–455.
2. *Blom R.* An optimal class of semmetric key generation schemes // Lecture Notes in Computer Science. — 1985. — 209. — P. 335–338.
3. *Blundo C., De Santis A., Herzberg A., Kutten S., Vaccaro U. and Yung M.* Perfectly-secure key distribution for dynamic conferens // Lecture Notes in Computer Science. — 1993. — 740. — P. 471–486.
4. *Diffie W. and Hellman M.E.* Multiuser cryptographic techniques // AFIPS Conference Proceedings. — 1976. — 45. — P 109–112.
5. *Diffie W., Van Oorschot P.C. and Wiener M.J.* Authentication and authenticated key exchanges // Desings, Codes and Cryptography. — 1992. — 2. — P. 107–125.
6. *Koblitz N.* A Course in Number Theory and Cryptography. — Springer-Verlag, New York, Inc., 1994. — P. 235.
7. *Merkle R.C.* Secure communications over insecure channels // Communications of the ACM. — 1978. — 21. — P. 294–299.
8. *Salomaa A.* Public-Key Cryptography. — Springer-Verlag, 2 ed., 1996, P. 271.
9. *Stinson D.R.* Kryptografia. Theory and Practice. — Copyright CRC Press LLC, 1995. — P. 437.

¹ кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри алгебри, ДДПУ

² студент 3 курсу фізико-математичного факультету, ДДПУ

e-mail: pashchenko_zd@mail.ru; kidokid@i.ua

ЖОРДАНОВА НОРМАЛЬНА ФОРМА ТА КЛАСИФІКАЦІЯ ЛІНІЙНИХ ОДНОРІДНИХ СИСТЕМ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

В статті показано алгоритм розв'язку лінійної однорідної системи диференціальних рівнянь, що використовує жорданову нормальну форму матриці цієї системи та одержано класифікацію розв'язків такої системи третього порядку.

Ключові слова: Жорданова нормальна форма, лінійні однорідні системи диференціальних рівнянь, розв'язки лінійних однорідних систем диференціальних рівнянь.

Вступ

В теорії лінійних операторів та теорії матриць окреме місце займає жорданова нормальна форма (ЖНФ) матриці. ЖНФ — це матриця, яка має найбільш простий вигляд в класі матриць, подібних до даної. Теорія ЖНФ досить докладно розглянута О.І. Кострикіним [1]. Практичне обчислення та застосування ЖНФ детально описані В.С. Мазорчуком [2]. Крім того, ним надано класифікацію жорданових матриць окремих порядків.

ЖНФ має широке застосування. Вона використовується не тільки в теоріях матриць та лінійних операторів. Ми розглядаємо використання ЖНФ для класифікації розв'язків лінійних однорідних систем диференціальних рівнянь (ЛОСДР). Взагалі диференціальні рівняння й методи дослідження їх розв'язків широко використовуються у різноманітних галузях і розділах сучасної науки й техніки. Тому дослідження диференціальних рівнянь залишається актуальним як у сучасній науці, так і у підготовці спеціалістів з математики, інформатики, прикладної математики тощо. Ці питання висвітлювалися А.М. Самойленком, М.О. Перестюком, І.О. Парасюком, Т.П. Гоєм, О.В. Махнеєм, В.І. Арнольдом.

В даній роботі розглядається класифікація розв'язків ЛОСДР зі сталими коефіцієнтами третього порядку з дійсною матрицею системи, враховуючи класифікацію ЖНФ таких матриць.

Основна частина

Лінійну однорідну систему диференціальних рівнянь n -го порядку зі сталими коефіцієнтами можна записати у вигляді

$$\frac{dY}{dt} = AY \quad (1)$$

де A — квадратна матриця n -го порядку, Y — стовпчик невідомих функцій $y_1, y_2, \dots, y_n, \dots$, $\frac{dY}{dt}$ — стовпчик похідних цих функцій.

Традиційно в теорії диференціальних рівнянь розв'язок ЛОСДР шукається у вигляді показникових функцій в такому вигляді:

$$y_1 = \gamma_1 e^{\lambda t}, y_2 = \gamma_2 e^{\lambda t}, \dots, y_n = \gamma_n e^{\lambda t}, \quad (2)$$

де $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$ і λ — константи, які можна визначити так, щоб вирази (2) задовольняли системі (1). Цей розв'язок зводиться до розв'язку системи:

$$(A - \lambda E)\Gamma = 0. \quad (3)$$

Система (3) є системою n лінійних однорідних рівнянь відносно стовпчика Γ невідомих $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$ з матрицею $M(\lambda) \equiv (A - \lambda E)$. Отже, розв'язок виду (2) системи (1) може існувати в тому і тільки в тому випадку, якщо λ є корінь характеристичного рівняння $|A - \lambda E| = 0$, тобто є власним значенням матриці A . Частинні розв'язки системи (3) є власними векторами, що відповідають всім власним значенням матриці A .

Максимальне число лінійно незалежних власних векторів, що відповідають власному значенню λ , дорівнює $n - r$, де $r = \text{rang } M(\lambda)$.

Кратність m числа λ як кореня характеристичного многочлену називається **алгебраїчною кратністю власного значення λ** . Відоме твердження про те, що $n - r \leq m$. Зразу зауважимо, що сума алгебраїчних кратностей всіх коренів характеристичного рівняння $|A - \lambda E| = 0$ дорівнює n .

Нехай $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ — всі власні значення, повторені стільки разів, скільки дорівнює їх алгебраїчна кратність. Якщо $m_j = n - r_j$, то ми отримаємо n лінійно незалежних власних векторів $(k_1^{(j)}, k_n^{(j)}, \dots, k_n^{(j)})$, $j = 1, 2, \dots, n$, що відповідають власним значенням λ_j , [1]. Всім цим власним векторам $k^{(j)} = (k_1^{(j)}, k_n^{(j)}, \dots, k_n^{(j)})$, які є розв'язками системи (3) при $\lambda = \lambda_j$, відповідає n частинних розв'язків системи (1) виду

$$y_1^{(j)} = k_1^{(j)} e^{\lambda_j t}, y_2^{(j)} = k_2^{(j)} e^{\lambda_j t}, \dots, y_n^{(j)} = k_n^{(j)} e^{\lambda_j t}. \quad (4)$$

Нам відомо, що лінійна комбінація частинних розв'язків системи однорідних рівнянь знову буде розв'язком цієї системи однорідних рівнянь. Тому

загальний розв'язок системи (1) ми можемо записати як лінійну комбінацію частинних розв'язків-стовпчиків $Y^{(j)}$ виду (4), що буде виглядати як лінійна комбінація власних векторів-стовпчиків $k^{(j)}$:

$$Y = C_1 k^{(1)} e^{\lambda_1 t} + C_2 k^{(2)} e^{\lambda_2 t} + \dots + C_n k^{(n)} e^{\lambda_n t} \quad (5)$$

де $C_j, j = 1, 2, \dots, n$ – довільні дійсні числа.

Зауваження 1. Якщо характеристичний многочлен з дійсними коефіцієнтами має корінь $\lambda_1 = \alpha + \beta i$, $\beta \neq 0$, то він також має корінь $\lambda_2 = \alpha - \beta i$. Відповідні розв'язки будуть мати вигляд:

$$\tilde{y}_j^{(1)} = e^{\alpha t} (l_j^{(1)} \cos \beta t - l_j^{(2)} \sin \beta t), \tilde{y}_j^{(2)} = e^{\alpha t} (l_j^{(1)} \sin \beta t + l_j^{(2)} \cos \beta t) \quad (6)$$

де $l_j^{(1)}$ і $l_j^{(2)}$ – дійсні числа.

Це зауваження приводить до зміни вигляду (5) загального розв'язку.

Якщо існує λ_i , що $m_i > n - r_i$, то ми не отримаємо n лінійно незалежних власних векторів. Щоб знайти розв'язки, яких не вистачає для кожного такого кореня, ми повинні шукати розв'язки у вигляді лінійних комбінацій функцій $e^{\lambda_i t}, t e^{\lambda_i t}, \dots, t^{m_i-1} e^{\lambda_i t}$ в такому вигляді:

$$y_j = b_{j1} e^{\lambda_i t} + b_{j2} t e^{\lambda_i t} + \dots + b_{jm_i} t^{m_i-1} e^{\lambda_i t}, j = 1, \dots, n, \quad (7)$$

де $b_{ji}, j = 1, \dots, n; i = 1, \dots, m$ – константи, які можна визначити так, щоб вирази (7) задовольняли системі (1). В результаті ми одержимо однорідну систему лінійних рівнянь з $n \cdot m$ невідомими. Кожен розв'язок ФСР цієї системи дасть розв'язок типу (7), а множина всіх лінійних комбінацій цих розв'язків дасть загальний розв'язок.

Класифікуючи загальні розв'язки ЛОСДР зі сталими коефіцієнтами третього порядку з дійсною матрицею системи за традиційними методами розв'язування та врахуванням умов $m_j \geq n - \text{rang} M(\lambda_j)$, ми можемо виділити наступні випадки:

- 1* $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ – різні прості дійсні корені $|A - \lambda E| = 0$
- 2* λ_1 – простий дійсний корінь, λ_2 – дійсний корінь кратності 2, $\text{rg } M(\lambda_2) = 1$
- 3* λ – дійсний корінь кратності 3, $\text{rg } M(\lambda) = 0$.
Для випадків 1*–3* розв'язки мають вигляд (5).
- 4* λ_1 – простий дійсний корінь, $\lambda_2, \bar{\lambda}_2$ – уявні прості спряжені корені.
Для цього випадку розв'язки враховують вигляд (6).
- 5* λ_1 – простий дійсний корінь, λ_2 – дійсний корінь кратності 2, $\text{rg } M(\lambda_2) = 2$

6* λ — дійсний корінь кратності 3, $\operatorname{rg} M(\lambda) > 0$.

У випадках 5*–6* для одержання розв'язків використовується вигляд (7).

ЖНФ матриці третього порядку за клітинно-діагональним виглядом також мають шість типів [2].

1⁰ $J_3(\lambda)$, де $\lambda \in C$

2⁰ $J_1(\lambda_1) \oplus J_2(\lambda_2)$, де $\lambda_1 \neq \lambda_2 \in C$;

3⁰ $J_1(\lambda_1) \oplus J_2(\lambda_2)$, де $\lambda \in C$;

4⁰ $J_1(\lambda_1) \oplus J_1(\lambda_2) \oplus J_1(\lambda_3)$, де $\lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \lambda_3 \in C$;

5⁰ $J_1(\lambda_1) \oplus J_1(\lambda_2) \oplus J_1(\lambda_2)$, де $\lambda_1 \neq \lambda_2 \in C$;

6⁰ $J_1(\lambda) \oplus J_1(\lambda) \oplus J_1(\lambda)$, де $\lambda \in C$;

Щоправда в цій класифікації випадки 1* і 4* відносяться до одного типу 4⁰, а випадок 6* розподіляється на два типи 1⁰ і 3⁰ ($2^* = 5^0$, $3^* = 6^0$, $5^* = 2^0$).

Розглянемо систему (1) у вигляді рівняння $\frac{dY}{dt} = AY$ з іншого боку. Нехай $T = (t_{ij})$ — довільна невідроджена матриця, $Y = (y_i)$ — стовпчик невідомих функцій і $X = TY$. Тоді

$X = (x_i) = \left(\sum_j t_{ij} y_j \right)$, $X' = (x'_i) = \left(\sum_j t_{ij} y'_j \right) = TY'$, а також $Y = T^{-1}X$ та $Y' = T^{-1}X'$. Помножимо рівняння (1) зліва на T . Одержимо еквівалентне рівняння:

$$\frac{dX}{dt} = T \frac{dY}{dt} = TAY = (TAT^{-1})X. \quad (8)$$

Нехай J — відповідна ЖНФ матриці A , тоді існує невідроджена матриця U , що $J = U^{-1}AU$. Матриця U складається із векторів-стовпчиків, що утворюють жордановий базис. Якщо в попередніх позначеннях взяти $T = U^{-1}$, то рівняння (8) буде мати вигляд

$$\frac{dX}{dt} = (U^{-1}AU)X = JX. \quad (9)$$

Таким чином, розв'язок системи (1) можна знаходити як $Y = UX$, де X — розв'язок системи $\frac{dX}{dt} = JX$. Тому і класифікацію розв'язків системи (1) можна проводити по класифікації жорданових матриць. Оскільки для дійсних матриць третього порядку буде шість різних типів жорданових матриць у відповідності до класифікації [2], то, розв'язуючи систему $\frac{dX}{dt} = JX$ для кожного типу, ми отримали такі розв'язки:

$$1^0 \quad X = \begin{pmatrix} C_1 e^{\lambda t} + C_2 t e^{\lambda t} + C_3 t^2 e^{\lambda t} \\ C_2 e^{\lambda t} + 2C_3 t e^{\lambda t} \\ 2C_3 e^{\lambda t} \end{pmatrix};$$

$$\begin{aligned}
2^0 \quad X &= \begin{pmatrix} C_1 e^{\lambda_1 t} \\ C_2 e^{\lambda_2 t} + C_3 t e^{\lambda_2 t} \\ C_3 e^{\lambda_2 t} \end{pmatrix}; \quad 3^0 \quad X = \begin{pmatrix} C_1 e^{\lambda t} \\ C_2 e^{\lambda t} + C_3 t e^{\lambda t} \\ C_3 e^{\lambda t} \end{pmatrix}; \\
4^0 \quad X &= \begin{pmatrix} C_1 e^{\lambda_1 t} \\ C_2 e^{\lambda_2 t} \\ C_3 e^{\lambda_3 t} \end{pmatrix}; \quad 5^0 \quad X = \begin{pmatrix} C_1 e^{\lambda_1 t} \\ C_2 e^{\lambda_2 t} \\ C_3 e^{\lambda_2 t} \end{pmatrix}; \quad 6^0 \quad X = \begin{pmatrix} C_1 e^{\lambda t} \\ C_2 e^{\lambda t} \\ C_3 e^{\lambda t} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

де $C_j, j = 1, 2, 3$ — довільні дійсні числа.

Звичайно, випадок 4^0 для дійсних матриць розпадається на два випадки, якщо виділити випадок λ_1 — простий дійсний корінь, $\lambda_2, \bar{\lambda}_2$ — уявні прості спряжені корені.

Дана класифікація розв'язків систем $\frac{dX}{dt} = JX$ може бути використана для розв'язку системи (1) $\frac{dY}{dt} = AY$ за наступним алгоритмом:

- 1) Знаходяться ЖНФ J матриці A та матриця U , що складається із векторів-стовпчиків, які утворюють відповідний жордановий базис.
- 2) Визначається тип матриці J та обирається відповідний загальний розв'язок X .
- 3) Загальний розв'язок системи (1) обчислюється як $Y = UX$.

Висновки

ЖНФ матриці ЛОСДР суттєво впливає на вид загального розв'язку такої системи. Жорданові матриці різного клітинного типу визначають різні види загального розв'язку ЛОСДР. В статті показано алгоритм розв'язку системи $\frac{dY}{dt} = AY$, що використовує ЖНФ матриці цієї ЛОСДР та одержано класифікацію розв'язків такої системи третього порядку. Дану класифікацію можна розвивати для інших порядків ЛОСДР.

Література

1. *Кострикин А.И.* Введение в алгебру. Часть II. Линейная алгебра: учебник для вузов. — 2-е изд., исправл. — М.: Физико-математическая литература, 2001. — 368 с.
2. *Мазорчук В. С.* Методичний посібник до теми «Жорданова нормальна форма» для студентів механіко-математичного факультету. — Київ: Київський університет імені Тараса Шевченка, 1998. — 123 с.
3. *Самойленко А.М., Перестюк М.О., Парасюк І.О.* Диференціальні рівняння: навчальний посібник. — К.: Либідь, 2003. — 347 с.
4. *Гой Т.П., Мазней О.В.* Диференціальні рівняння: навчальний посібник. — Івано-Франківськ : Сімик, 2012. — 352 с.

¹ доцент кафедри алгебри, ДДПУ

² доцент кафедри алгебри, ДДПУ

³ студентка 5 курсу фізико-математичного факультету, ДДПУ

e-mail: ren_elena@mail.ru, tvturka@mail.ru

ПРАКТИЧНІ СХЕМИ РЕАЛІЗАЦІЇ ПРОТОКОЛІВ ЦИФРОВОГО ПІДПISУ

Дана робота присвячена вивченню проблеми створення електронного цифрового підпису. Надано опис алгоритмів створення електронних підписів RSA, Ель Гамала, DSA та підтвердження їх автентичності. Проведений порівняльний аналіз описаних алгоритмів. Представлені приклади створення та верифікації цифрового підпису.

Ключові слова: *цифровий підпис, алгоритм підпису, алгоритм верифікації, криптографічні протоколи, дискретний логарифм*

Вступ

Із появою у 1976 році ідеології відкритого ключа криптографічна практика почала використовувати фундаментальні результати теорії чисел і сучасної алгебри. Деякі з асиметричних алгоритмів можуть використовуватися для генерування цифрового підпису.

Схема цифрового підпису — це метод підписування електронного документу, який надсилається через комп'ютерну мережу. Протокол цифрового підпису має дві складові: алгоритм підпису та алгоритм його верифікації.

Першою найбільш відомою в світі системою ЕЦП стала система RSA, математична схема якої була розроблена в 1977 році в Масачусетському технологічному інституті США і Роном Рівестом, Аді Шаміром і Леонардом Ейдельманом.

Схема підпису Ель Гамала була описана в [2], стандарт цифрового підпису (DSS) вперше був опублікований в серпні 1991 року, але офіційний статус стандарту одержав в грудні 1994 року [1]. В липневому номері Communications of the ACM з 1992 року містяться описи DSS.

Метою роботи є вивченні теоретико-числових алгоритмів для створення та реалізації електронного підпису документу.

1. Цифровий підпис

Цифровим підписом називають блок даних, згенерований з використанням деякого секретного ключа. При цьому за допомогою відкритого ключа можна перевірити, що дані дійсно згенеровані за допомогою цього секретного ключа. Алгоритм генерації цифрового підпису мусить бути таким, щоб без застосування секретного ключа було неможливо створити підпис, автентичність якого можна підтвердити.

Цифрові підписи використовуються для того, щоб підтвердити, що повідомлення прийшло дійсно від даного відправника (у припущенні, що лише відправник володіє секретним ключем, відповідним його відкритому ключу). Також підписи використовуються для створення штамп часу (timestamp) на документах: сторона, якій ми довіряємо, підписує документ з штампом часу за допомогою свого секретного ключа і, таким чином, підтверджує, що документ вже існував в момент, оголошення в штампі часу.

Цифрові підписи також можна використовувати для посвідчення (сертифікації — to certify) того, що документ належить певній особі. Це робиться так: відкритий ключ і інформація про той, кому він належить підписуються стороною, якої довіряємо. При цьому довіряти підписуючій стороні ми можемо на підставі того, що її ключ був підписаний третьою стороною. Таким чином виникає ієрархія довіри. Очевидно, що деякий ключ має бути коренем ієрархії (тобто йому ми довіряємо не тому, що він кимсь підписаний, а тому, що ми віримо a-priori, що йому можна довіряти). У централізованій інфраструктурі ключів є дуже невелика кількість кореневих ключів мережі (наприклад, наділені повноваженнями державні агентства; їх також називають сертифікаційними агентствами — certification authorities). У розподіленій інфраструктурі немає необхідності мати універсальні для всіх кореневі ключі, і кожна із сторін може довіряти своєму набору кореневих ключів (скажемо своєму власному ключу і ключам, нею підписаним). Ця концепція носить назву мережі довіри (web of trust).

Цифровий підпис документа зазвичай створюється в такий спосіб: з документа генерується так званий дайджест (message digest) і до нього додається інформація про той, хто підписує документ, штамп часу і інше. Рядок, що вийшов, далі зашифровується секретним ключем що підписує з використанням того або іншого алгоритму. Зашифрований набір біт, що вийшов, і є підписом. До підпису зазвичай прикладається відкритий ключ того, що підписує. Одержувач спочатку вирішує для себе чи довіряє він тому, що відкритий ключ належить саме тому, кому повинен належати (за допомогою мережі довіри або апріорного знання), і потім дешифрує підпис за допомогою від-

критого ключа. Якщо підпис нормально дешифрувався, і її вміст відповідає документу (дайджест і ін.), то повідомлення вважається підтвердженням.

2. Електронний підпис у системі RSA

Нагадаємо, що в системі RSA кожен абонент X має пару ключів — загальновідомий відкритий (n_X, e_X) і таємний d_X , який знає лише X і ніхто інший. Таким чином, будь-хто може скористатися алгоритмом шифрування E_X абонента X , але тільки він сам володіє алгоритмом дешифрування D_X . Важливим є виконання таких співвідношень для довільного повідомлення M :

$$D_X(E_X(M)) = E_X(D_X(M)) = M. \quad (1)$$

Ці співвідношення зводяться до рівностей $(M^{e_X})^{d_X} = (M^{d_X})^{e_X} = M$ в Z_{n_X} , і виражають той факт, що шифруюче відображення E_X та дешифруюче D_X є взаємно оберненими.

Припустимо, що Аліса хоче послати повідомлення M Бобу і переконати його, що це повідомлення дійсно послане Алісою, а не зловмисником, який маскується під Алісу. Для цього пропонується такий протокол, в якому (E_A, D_A) та (E_B, D_B) — алгоритми шифрування та дешифрування Аліси та Боба.

- Аліса обчислює $C = E_B(D_A(M))$ і посилає C Бобові.
- Боб, отримавши C , обчислює $M = E_A(D_B(C))$.

Коректність протоколу зводиться до рівності

$$E_A(D_B(E_B(D_A(M)))) = M,$$

яка випливає із співвідношень (1).

Ефективність. Аліса та Боб використовують ефективні алгоритми шифрування та дешифрування криптосистеми RSA . Зауважимо, що Аліса використовує свій приватний алгоритм D_A та відомий всім алгоритм E_B . Теж саме із Бобом — він використовує особистий алгоритм D_B і загальновідомий алгоритм E_A .

Конфіденційність. Під конфіденційністю цього протоколу ми розуміємо його надійність як звичайної криптосистеми для пересилання повідомлень. Перед зловмисником, який підслухав розмову і одержав криптотекст C , стоїть завдання визначити M із $E_B(D_A(M))$, тобто зламати криптосистему RSA .

Достовірність. Під достовірністю ми розуміємо таку властивість протоколу підпису: не тільки Боб, а й хто завгодно може впевнитися, що відправником повідомлення є саме Аліса. Що стосується описаного протоколу, то Боб, який успішно розшифрував криптотекст C і прочитав повідомлення M , дійсно має вагомі підстави вважати, що воно послане Алісою.

Справді, криптотекст має структуру $C = E_B(D_A(M))$, тому інтуїтивно переконливим є висновок, що особа, яка послала C , мала би знати алгоритм D_A . Але алгоритм D_A відомий лише Алісі (якщо тільки зловмиснику не вдалося зламати систему RSA).

Недоліки алгоритму цифрового підпису RSA .

При обчисленнях в системі цифрового підпису RSA необхідно перевіряти велику кількість додаткових умов, що створює великі труднощі. у разі невиконання якоїсь з цих умов дає можливість зловмиснику сфальшувати цифровий підпис.

Для забезпечення криптостійкості цифрового підпису RSA на рівні національних стандартів необхідно використовувати при обчисленнях цілі числа не менші за 2512 (або 10154), а це збільшує обчислювальні затрати на 20...30% у порівнянні з другими алгоритмами цифрового підпису для забезпеченні того ж рівня криптостійкості.

Цифровий підпис RSA уразливий до так званої мультиплікативної атаки. Алгоритм цифрового підпису RSA дозволяє зловмиснику без знання секретного ключа D сформувати підписи під тими документами, у яких результат хешування можна обчислити як добуток результатів хешування вже підписаних документів.

3. Система цифрового підпису Ель Гамала

Більш надійний і зручний для реалізації на персональних комп'ютерах алгоритм цифрового підпису був розроблений в 1984 році американцем арабського походження Тахером Ель Гамалем. В 1991 році Національний інститут стандартів і технологій (NIST) США обґрунтував перед комісією Конгреса США вибір алгоритму цифрового підпису Ель Гамала в якості основи для національного стандарту.

Назва $EGSA$ походить від слів EI GamaI Signature Algorithm (алгоритм цифрового підпису Ель Гамала). Ідея $EGSA$ полягає на використанні задачі дискретного логарифмування.

Як і криптосистеми для забезпечення конфіденційності повідомлень, системи цифрового підпису допускають ймовірнісну модифікацію. у ймовірнісних системах підпису алгоритм $SIGN$ є не детермінованим, а ймовірнісним.

Генерування ключів. Вибирають велике просте p , а також число g , $1 < g < p - 1$, яке має в мультиплікативній групі Z великий порядок. В ідеальному випадку g є первісним коренем за модулем p . Числа p і g не є таємницею і перебувають в загальному користуванні. Кожен абонент вибирає собі випадкове число a у проміжку від 1 до $p - 1$, і обчислює $h = g^a \bmod p$.

Відкритий ключ: p, g, h .

Таємний ключ: a .

Підписування. Аліса виробляє свій підпис S на повідомленні M таким чином. Вона

- вибирає випадкове число $r \in Z_{p-1}^*$;
- обчислює $s_1 = g^r \bmod p$;
- обчислює $r' = r^{-1} \bmod (p-1)$;
- обчислює $s_2 = (M - as_1)r' \bmod (p-1)$;
- покладає $S = (s_1, s_2)$.

Підтвердження підпису.

- Боб перевіряє, чи $g^M \equiv h^{s_1} s_1^{s_2} \pmod{p}$.

Коректність. З правил обчислення r' і s_2 випливає, що $M \equiv as_1 + rs_2 \pmod{p-1}$. Звідси з використанням теореми Ойлера отримуємо

$$g^M = g^{as_1 + rs_2 + k(p-1)} \equiv (g^a)^{s_1} (g^r)^{s_2} \equiv h^{s_1} s_1^{s_2} \pmod{p}.$$

Приклад підписів Ель Гамала.

Приклад 1. Нехай $p = 467, \alpha = 2$ і $\beta = 132$. Припустимо Оскар вибере $i = 99$, а також $j = 179$; тоді $j^{-1} \bmod (p-1) = 151$. Зараз Оскар виконує наступні обчислення:

$$\gamma = 2^{99} 132^{179} \bmod 467 = 117$$

$$\delta = -117 \cdot 151 \bmod 466 = 41$$

$$x = 99 \cdot 41 \bmod 466 = 331.$$

Пара $(117, 41)$ є справжнім підписом для відомості 331, що перевіримо через наступне обчислення:

$$132^{117} 117^{41} \equiv 303 \pmod{467},$$

а також

$$2^{331} \equiv 303 \pmod{467}.$$

Отже підпис є автентичний.

Схема цифрового підпису Ель Гамала має ряд переваг порівняно зі схемою цифрового підпису RSA.

При заданому рівні стійкості алгоритму цифрового підпису цілі числа, що застосовуються в обчисленнях, має запис на 25% коротший, що зменшує складність обчислень майже вдвічі і дозволяє значно скоротити об'єм використаної пам'яті.

При виборі модуля p достатньо перевірити його простоту і наявність у числа $(p - 1)$ великого простого множника (тобто всього дві умови, які порівняно просто перевіряються).

Процедура формування підпису за схемою Ель Гамала не дозволяє обчислювати цифрові підписи під новими повідомленнями без знання секретного ключа на відміну від RSA.

Однак алгоритм цифрового підпису Ель Гамала має і деякі недоліки порівняно зі схемою RSA. А саме, довжина цифрового підпису в 1,5 рази довша, а це в свою чергу збільшує час обчислення.

4. Алгоритм цифрового підпису DSA

У 1991 році NIST запропонував для алгоритму цифрового підпису DSA (Digital Signature Algorithm) стандарт DSS (Digital Signature Standard), в основу якого покладено алгоритми Ель Гамала і RSA.

Генерування ключів. Вибирають велике просте число p таке, що $p - 1$ має досить великий простий дільник q . Стандарт вимагає, щоб $2^{512} < p < 2^{1024}$ і $q > 2^{216}$. Далі вибирають у групі Z_p^* довільний елемент h порядку p . Параметри p, q, h не становлять таємниці і є спільними для всіх абонентів мережі.

Аліса вибирає випадкове число a в діапазоні від 0 до $q - 1$ і обчислює число $b = h^a \bmod p$. Її ключі формуються так.

Відкритий ключ: b таке, що $b = h^a \bmod p$.

Таємний ключ: a .

Підписування. Алгоритм підписування використовується вкорочуючу функцію f , в якості якої DSS пропонує функцію SHA з довжиною вкорочення 160 бітів. Щоб виробити свій підпис S для повідомлення M , Аліса

- вибирає випадкове число r в діапазоні від 0 до $q - 1$;
- обчислює $r' = r^{-1} \bmod q$;
- обчислює $s_1 = (h^r \bmod p) \bmod q$;
- обчислює $s_2 = (r'(f(M) + as_1)) \bmod q$;
- формує підпис $S = (s_1, s_2)$.

Підтвердження підпису. Отримавши повідомлення M із підписом $S = (s_1, s_2)$, Боб

- обчислює $s' = s_2^{-1} \bmod q$;
- обчислює $u_1 = (f(M)s') \bmod q$;
- обчислює $u_2 = (s_1, s') \bmod q$;
- обчислює $t = (h^{u_1} b^{u_2} \bmod p) \bmod q$;
- перевіряє рівність $t = s_1$.

Коректність. Припустимо, що підпис $S = (s_1, s_2)$ отримано згідно з алгоритмом підписування. Досить перевірити, що $h^r \equiv h^{u_1} b^{u_2} \pmod{p}$. Оскільки $b = h^a \pmod{p}$, то остання конгруенція рівносильна такій: $h^r \equiv h^{u_1 + au_2} \pmod{p}$. Підставивши у праву частину виразу для u_1 та u_2 , отримаємо

$$r'(u_1 + au_2) \equiv r'(f(M)s' + as_1s') \equiv r'(f(M) + as_1)s' \equiv s_2s' \equiv 1 \pmod{q},$$

що завершує перевірку коректності.

Приклад підпису стандарту.

Приклад 2. Приймемо $q = 101$ і $p = 78q + 1 = 7879$. Число 3 є елементом первісний в Z_{7879} , потім візьмемо

$$\alpha = 3^{78} \pmod{7879} = 170.$$

Хай $a = 75$. Тоді $\beta = \alpha^a \pmod{7879} = 4567$.

Припустимо зараз, Боб хоче підписати відомість $x = 22$ і вибирає випадково величину $k = 50$, з чого отримує

$$k^{-1} \pmod{101} = 99.$$

Тоді

$$\gamma = (170^{50 \pmod{7879}}) \pmod{101, 1}; \quad \gamma = 2518 \pmod{101}; \quad \gamma = 94,$$

а також

$$\delta = (22 + 75 \cdot 94) \pmod{101}; \quad \delta = 97.$$

За допомогою наступних обчислень верифікує підпис $(94, 97)$ під відомістю 22:

$$\delta^{-1} = 97^{-1} \pmod{101} = 25,$$

$$e_1 = 22 \cdot 25 \pmod{101} = 45,$$

$$e_2 = 94 \cdot 25 \pmod{101} = 27,$$

$$(170^{45} 4567^{27} \pmod{7879}) \pmod{101} = 2518 \pmod{101} = 94.$$

Отже підпис є справжній.

Порівняно з алгоритмом цифрового підпису Ель Гамала алгоритм DSA має певні переваги.

При будь-якому допустимому рівні стійкості, тобто при будь-якій парі чисел p и h (від 512 до 1024 біт), числа q , a , s_1 , s_2 мають довжину 160 біт, скорочуючи довжину підпису до 320 біт.

Більшість операцій з числами r , a , s_1 , s_2 при обчисленнях виконуються за модулем числа h довжиною 160 біт, що скорочує час обчислення підпису. При перевірці підпису більшість операцій з числами u_1 , u_2 , s' , t виконуються за модулем числа q довжиною 160 біт, що скорочує об'єм пам'яті і час обчислення. Недоліком алгоритму DSA є те, що при підписуванні і при перевірці підпису необхідно виконувати складні операції ділення за модулем q , що не дозволяє одержувати максимальну швидкість дій.

Висновки

Як бачимо, кожна з схем цифрового підпису має свої недоліки та переваги.

Хоча на практиці в алгоритмах цифрових підписів використовуються великі числа, для ілюстрації описаних алгоритмів наведені приклади з невеличкими числами.

Слід зазначити, що реальне виконання алгоритму DSA може бути прискорене за допомогою проведення попередніх обчислень. Значення s_1 не залежить від повідомлення та його хеш-значення $f(M)$. Можна наперед створити рядок випадкових значень r і потім для кожного з цих значень обчислити значення s_1 . Можна також заздалегідь обчислити обернені значення r' . Ці попередні обчислення значно прискорять роботу алгоритму DSA.

Отже, кожна з схем має свої слабкі та сильні сторони, тому вибір оптимального алгоритму залежить від обставин, при яких він буде використовуватись: обчислювальні можливості, доступні об'єми пам'яті, існування чи відсутність безпечних каналів зв'язку та кількість користувачів. Лише оцінивши всі ці параметри можна обрати зручну та ефективну схему цифрового підпису.

Література

1. Digital signature standart. — National Bureau of standarts FIPS Publication, 186. — 1994.
2. *ElGamal T.* A public key cryptosystem and a signature scheme based on discrete logarithms. — IEEE Transactions on Information Theory. — 1985. — 31. — P. 469–472.
3. *Koblitz N.* A Course in Number Theory and Cryptography. — Springer-Verlag, New York, Inc., 1994. — P. 235.
4. *Salomaa A.* Public-Key Cryptography. — Springer-Verlag, 2 ed., 1996, P. 271.
5. *Stinson D.R.* Криптография. Theory and Practice. — Copyright CRC Press LLC, 1995. — P. 437.

¹ кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри геометрії та МВМ, ДДПУ² студентка 5 курсу фізико-математичного факультету, ДДПУ

e-mail: kadubovs@ukr.net, voschanaya_lina@mail.ru

ПРО ЧИСЛО НЕЕКВІВАЛЕНТНИХ ДВОКОЛЬОРОВИХ ХОРДОВИХ O -ДІАГРАМ МАКСИМАЛЬНОГО РОДУ

Для цілих $0 \leq g \leq 9$ визначено число нееквівалентних 2-кольорових хордових O -діаграм (з n хордами), які містять лише один чорний та один білий цикл (2-кольорові хордові O -діаграми максимального роду), відносно дії дієдральної групи (порядку $2n$)

Ключові слова: 2-кольорова хордова O -діаграма, максимальний рід, група дієдра

Вступ

Конструкції, схожі до кола з відміченими точками, зокрема хордові діаграми, ефективно використовують в багатьох галузях науки, зокрема математиці (топології, теорії вузлів), фізиці, біології.

Нагадаємо, що хордовою діаграмою порядку n або, коротко, n -діаграмою називають конфігурацію на площині, що складається з кола, $2n$ точок на ньому (які є вершинами правильного $2n$ -кутника) та n хорд, що сполучають вказані точки. Хордові діаграми називають ізоморфними, якщо одну можна одержати з іншої в результаті повороту. Діаграми називають еквівалентними, якщо їх можна сумістити за допомогою повороту, дзеркального відбиття, або ж їх композиції.

Питаннями переліку певних класів хордових діаграм займалась ціла низка відомих математиків, зокрема автори робіт [5], [3], [6], [2]. Задачі про підрахунок числа неізоморфних та нееквівалентних n -діаграм були повністю розв'язані в роботах [3], [6]. Формули для підрахунку числа неізоморфних планарних (роду 0), тороїдальних (роду 1) n -діаграм та $2m$ -діаграм максимального роду m встановлено в [3]. Формули для підрахунку числа неізоморфних та нееквівалентних планарних 2-кольорових n -діаграм встановлено в [2].

Підрахунок числа неізоморфних, зокрема двокольорових, n -діаграм фіксованого роду є досить складною і в загальному випадку до сьогодні нерозв'язаною задачею.

Формули для підрахунку числа неізоморфних та нееквівалентних двокольорових O - і N -діаграм відповідно встановлено в роботі [9]. В [10] одержано формули для підрахунку числа неізоморфних та нееквівалентних O -діаграм, які мають один чорний (або ж білий) цикл. Задача про підрахунок числа неізоморфних O -діаграм максимального роду (з одним чорним та одним білим циклом) повністю розв'язана в [8]. Проте питання про підрахунок числа нееквівалентних (відносно дії дієдральної групи) O -діаграм максимального роду й досьогодні залишається відкритим.

В даній роботі для натуральних $n \in \{1, 3, 5, 7, 11, 13, 15, 17, 19\}$ встановлено число нееквівалентних (відносно дії дієдральної групи) 2-кольорових O -діаграм максимального роду. Крім того, для випадків $n = 1; 3; 5; 7; 9$ в явному вигляді наведено всі неізоморфні симетричні такі діаграми.

1. Основні поняття та попередні відомості

Означення 1. Коло з $2n$ точками на ньому (що є вершинами правильного $2n$ -кутника), дуги якого по чергово розфарбовані у два кольори (чорний і білий) та фіксованою нумерацією вершин за годинниковою стрілкою, будемо називати двокольоровим $2n$ -шаблоном — рис. 1 а).

2-кольоровою хордовою n -діаграмою будемо називати n -діаграму, побудовану на основі двокольорового $2n$ -шаблону.

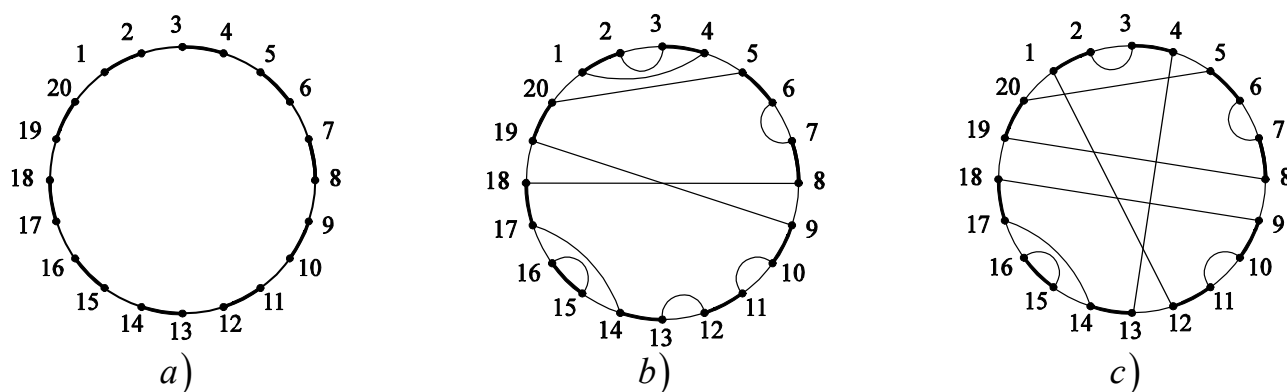


Рис. 1:

- а) двокольоровий 20-шаблон;
- б) N -діаграма (з 10 хордами), яка має 7 білих та 3 чорних циклів;
- в) O -діаграма (з 10 хордами), яка має 6 білих та 3 чорних циклів

Означення 2. 2-кольорову n -діаграму, яка не містить (містить) хорди, що сполучає вершини з номерами однакової парності, називають O -діаграмою (N -діаграмою) — рис. 1 в), б).

Означення 3. «Чорним» («білим») циклом 2-кольорової діаграми називатимемо послідовність хорд та чорних (білих) дуг, які утворюють гомеоморфний образ (орієнтованого) кола — рис. 1 b) — c).

Приклад 1. Поняття чорного (білого) циклу 2-кольорової О-діаграми проілюструємо на прикладі діаграми, зображеної на рис. 1 c). Через $(i, i + 1)$ позначимо орієнтовану дугу $2n$ -шаблону, а через $[i, j]$ — хорду, яка сполучає вершини з номерами i, j . Тоді чорні BC_k та білі WC_l цикли діаграми можна подати у вигляді

чорні цикли діаграми:

$$\begin{aligned} BC_1 &= \\ &= (1, 2)[2, 3](3, 4)[4, 13](13, 14)[14, 17](17, 18)[18, 9](9, 10)[10, 11](11, 12)[12, 1]; \\ BC_2 &= (5, 6)[6, 7](7, 8)[8, 19](19, 20)[20, 5]; \\ BC_3 &= (14, 15)[15, 16](16, 17)[17, 14]; \end{aligned}$$

білі цикли діаграми:

$$\begin{aligned} WC_1 &= (2, 3)[3, 2]; \quad WC_2 = (6, 7)[7, 6]; \quad WC_3 = (8, 9)[9, 18](18, 19)[19, 8]; \\ WC_4 &= (10, 11)[11, 10]; \quad WC_5 = (12, 13)[13, 4](4, 5)[5, 20](20, 1)[1, 12]; \\ WC_6 &= (14, 15)[15, 16](16, 17)[17, 14]. \end{aligned}$$

Якщо проігнорувати колір, то кожен чорний (білий) цикл 2-кольорової О-діаграми співпадає з відповідним циклом непофарбованої діаграми. Тоді наслідуючи [3], природнім чином визначається рід 2-кольорової О-діаграми, а саме

Означення 4. Родом 2-кольорової О-діаграми будемо називати ціле число g , яке визначається рівністю

$$g = \frac{n + 1 - \lambda}{2}, \quad (1)$$

де λ — сумарне число чорних і білих циклів діаграми.

Означення 5. Множину О-діаграм з n хордами (побудованих на 2-кольоровому $2n$ -шаблоні), які мають точно 1 чорний цикл будемо позначати $\mathfrak{Z}_{1;n}^O$. Діаграми з класу $\mathfrak{Z}_{1;n}^O$, які мають точно 1 білий цикл називатимемо діаграмами максимального роду, а множину таких діаграм позначатимемо $\mathfrak{Z}_{1,1;n}^O$.

Введемо далі наступні позначення:

S_n — симетрична група;

CS_n — множина перестановок з S_n , які розкладаються в цикл довжини n ;

$CS_n^* = \{b \in CS_n \mid b \circ \tau^{-1} \in CS_n\}$, де $\tau = (1, 2, \dots, n) \in CS_n$.

В роботі [8] було встановлено, що кожену діаграму $D \in \mathfrak{S}_{1,1;n}^O$ можна ото-тожнити з певним циклом $b \in CS_n^*$. А саме

Твердження А. Діаграма $D(b) \in \mathfrak{S}_{1,1;n}^O$ тоді і лише тоді, коли $w(b) = \tau \circ b^{-1} = (b \circ \tau^{-1})^{-1}$ є циклом довжини n . Тобто, $D(b) \in \mathfrak{S}_{1,1;n}^O$ тоді і лише тоді, коли $b \in CS_n^*$.

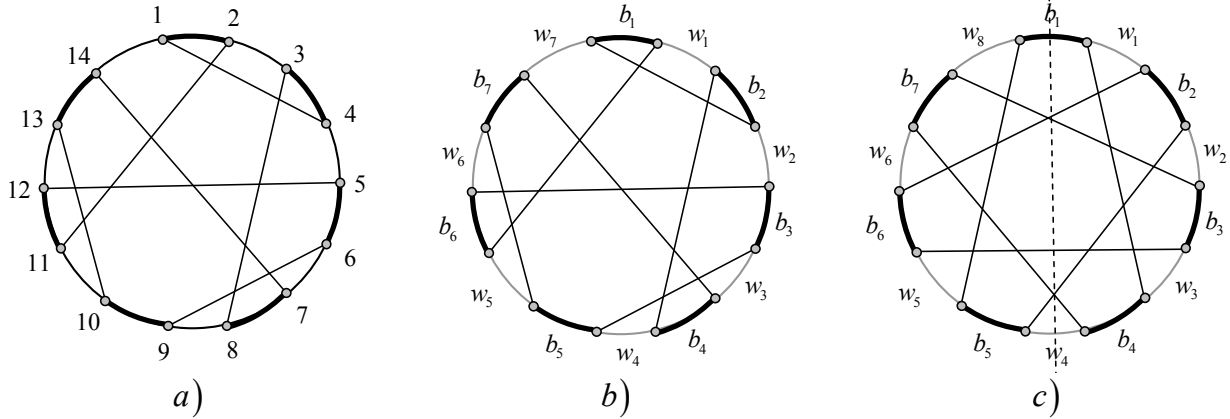


Рис. 2: а), б) діаграма $D(b) \in \mathfrak{S}_{1,1;7}^O$, $b = (1, 6, 3, 5, 7, 4, 2)$; в) діаграма $D(b) \in \mathfrak{S}_{1,1;7}^O$, що є симетричною відносно осі симетрії 14-шаблону, яка проходить через його центр та середину чорної дуги b_1

Нагадаємо основну ідею. Орієнтуємо коло діаграми за годинниковою стрілкою. І нехай діаграма $D \in \mathfrak{S}_{1;n}^O$. Під обходом чорних дуг b_j діаграми $D \in \mathfrak{S}_{1;n}^O$, починаючи з чорної дуги b_1 будемо розуміти послідовність номерів $b = (1, j_2, j_3, \dots, j_n)$ чорних дуг, які зустрічаються при слідуванні по єдиному чорному її циклу — рис. 2 б). Тоді кожен такий цикл $b \in CS_n$ однозначно визначає хорди діаграми $D(b) \in \mathfrak{S}_{1;n}^O$, а тому й саму діаграму, і навпаки. І тому цикл b цілком визначає й обходи білих дуг білих циклів діаграми $D(b) \in \mathfrak{S}_{1;n}^O$. Не важко перевірити, що якщо

$$b = (1, j_2, \dots, j_n) = \begin{pmatrix} 1 & j_2 & \dots & j_{n-1} & j_n \\ j_2 & j_3 & \dots & j_n & 1 \end{pmatrix} \in CS_n \quad (2)$$

— обхід чорних дуг діаграми $D(b) \in \mathfrak{S}_{1;n}^O$, то обхід $w = w(b)$ білих дуг цієї діаграми (також за рухом годинникової стрілки) можна подати у вигляді:

$$w(b) = \begin{pmatrix} j_2 - 1 & j_3 - 1 & \dots & j_n - 1 & n \\ 1 & j_2 & \dots & j_{n-1} & j_n \end{pmatrix} \quad (3)$$

Більше того, для довільного $b \in CS_n$ виконується рівність

$$w(b) \circ b = \begin{pmatrix} j_2 - 1 & j_3 - 1 & \dots & j_n - 1 & n \\ j_2 & j_3 & \dots & j_n & 1 \end{pmatrix} = (1, 2, \dots, n - 1, n) = \tau. \quad (4)$$

Оскільки для кожної діаграми $D(b) \in \mathfrak{S}_{1,1;n}^O$ $w(b) = \tau \circ b^{-1}$ є циклом довжини n ($w(b) \in CS_n$), то з останнього й випливає справедливість твердження А.

Приклад 2. Діаграму, зображену на рис. 2 а, б), можна ототожнити із циклом $b = (1, 6, 3, 5, 7, 4, 2)$. Не важко також перевірити, що білий цикл $w = (1, 4, 3, 7, 2, 6, 5,)$ цієї діаграми можна подати у вигляді $w = \tau \circ b^{-1}$.

Як наслідок з робіт [1], [8] маємо, що для довільного парного n $|\mathfrak{S}_{1,1;n}^O| = 0$, а для непарного $n = 2g + 1$ визначається за формулою

$$|\mathfrak{S}_{1,1;n}^O| = \frac{2(n-1)!}{n+1} = \frac{(2g)!}{g+1}. \quad (5)$$

Більше того, в [8] доведено справедливість твердження

Теорема А. Для непарного натурального n число d_n^* неізоморфних діаграм з класу $\mathfrak{S}_{1,1;n}^O$ можна обчислити за формулою

$$d_n^* = \frac{1}{n} \left(\frac{2(n-1)!}{n+1} + \sum_{i|n, i \neq n} \varphi\left(\frac{n}{i}\right) \cdot \frac{2(i-1)!}{i+1} \cdot \varphi^*\left(\frac{n}{i}\right) \cdot \left(\frac{n}{i}\right)^{i-1} \right), \quad (6)$$

де $\varphi(n)$ — функція Ейлера (кількість натуральних менших за n чисел i взаємно простих із ним, тобто $\varphi(n) = |\{1 \leq h < n \mid \text{НСД}(h, n) = 1\}|$), яка для натуральних $n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \dots \cdot p_k^{\alpha_k}$ визначається за формулою

$$\varphi(n) = n \cdot \left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{p_2}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 - \frac{1}{p_k}\right), \quad (7)$$

а величина $\varphi^*(n)$ ($\varphi^*(n) = |\{1 \leq h < n \mid \text{НСД}(h, n) = 1 = \text{НСД}(h+1, n)\}|$) для натуральних $n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \dots \cdot p_k^{\alpha_k}$ визначається за формулою

$$\varphi^*(n) = n \cdot \left(1 - \frac{2}{p_1}\right) \cdot \left(1 - \frac{2}{p_2}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 - \frac{2}{p_k}\right). \quad (8)$$

2. Основна частина

Застосовуючи лему Бернсайда (див. напр. [3], [6], [9], [10]), не важко встановити, що число d_n^{**} орбіт групи дієдра D_{2n}^* , що діє на множині $\mathfrak{S}_{1,1;n}^O$ (число нееквівалентних О-діаграм максимального роду) можна визначити за допомогою співвідношення

$$d_n^{**} = \frac{1}{2} \left(d_n^* + \frac{1}{n} \cdot S(n) \right), \quad (9)$$

де d_n^* — число неізоморфних діаграм з класу $\mathfrak{S}_{1,1;n}^O$, а

$S(n)$ — число діаграм з $\mathfrak{S}_{1,1;n}^O$, що є симетричними відносно хоча б одної з n **осей симетрії**, що проходять через середини протилежних чорної та білої дуг 2-кольорового $2n$ -шаблону.

Оскільки число діаграм, симетричних відносно кожної з n зазначених осей симетрії є однаковим, то (9) можна подати у вигляді

$$d_n^{**} = \frac{1}{2} (d_n^* + s(n)), \quad (10)$$

де $s(n)$ — число діаграм з $\mathfrak{S}_{1,1;n}^O$, що є симетричними відносно **фіксованої осі симетрії**, яка проходить через середини протилежних чорної та білої дуг 2-кольорового $2n$ -шаблону.

Таким чином, з урахуванням співвідношення (10) та відомої формули (6) для обчислення величини d_n^* , задача про підрахунок числа d_n^{**} нееквівалентних діаграм з класу $\mathfrak{S}_{1,1;n}^O$ зводиться до задачі про підрахунок числа тих діаграм з класу $\mathfrak{S}_{1,1;n}^O$, що є симетричними відносно **фіксованої осі симетрії** (яка проходить через середини протилежних чорної та білої дуг) 2-кольорового $2n$ -шаблону — рис. 2 с).

2.1. Число симетричних діаграм з класу $\mathfrak{S}_{1,1;n}^O$

Нижче для натуральних $n = 1; 3; 5; 7; 9$ в явному вигляді наведено всі (неізоморфні) симетричні діаграми з відповідних класів $\mathfrak{S}_{1,1;n}^O$.



Рис. 3: а) єдина діаграма з класу $\mathfrak{S}_{1,1;1}^O$, б) єдина діаграма з класу $\mathfrak{S}_{1,1;3}^O$

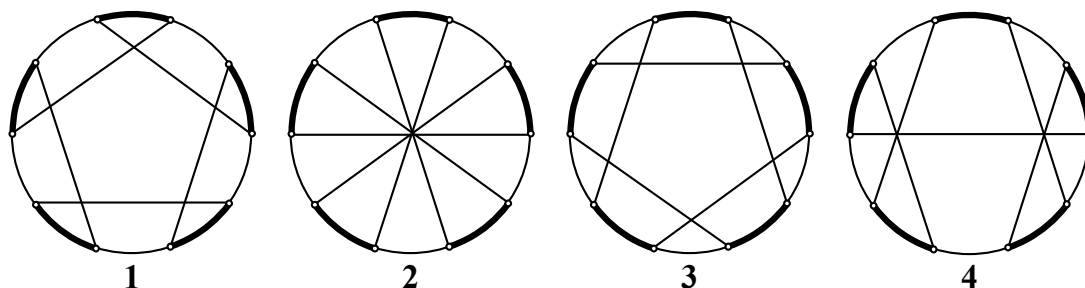


Рис. 4: всі (неізоморфні) симетричні діаграми з класу $\mathfrak{S}_{1,1;5}^O$

Не важко бачити, що у випадку $n = 7$ (рис. 5 нижче) діаграми $\{21, 22\}$; $\{23, 24\}$; $\{26, 27\}$; $\{28, 29\}$; $\{25, 30\}$ є еквівалентними під дією групи дієдра. І тому існує лише $30 - 10 + 5 = 25$ нееквівалентних діаграм з класу $\mathfrak{S}_{1,1;7}^O$.

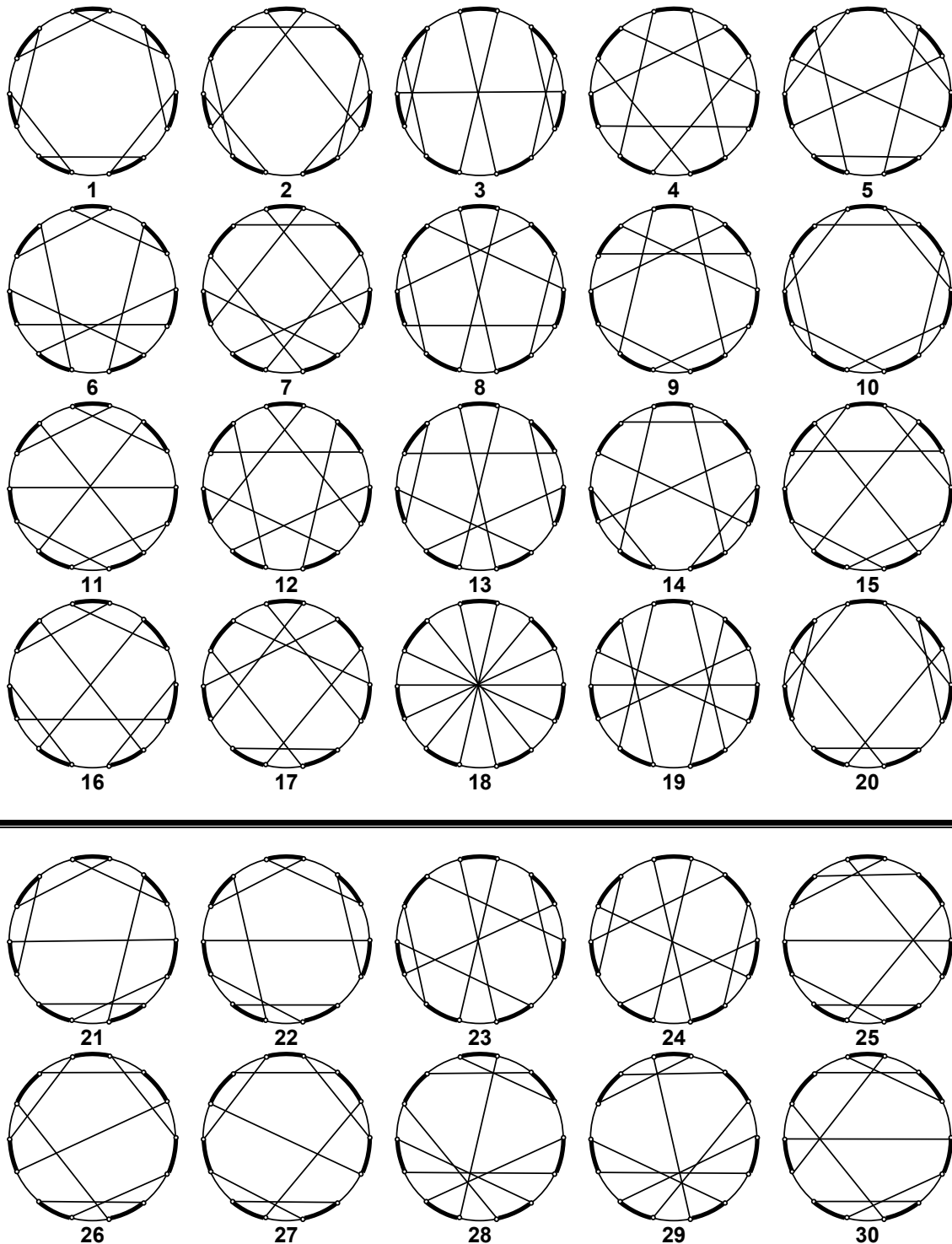
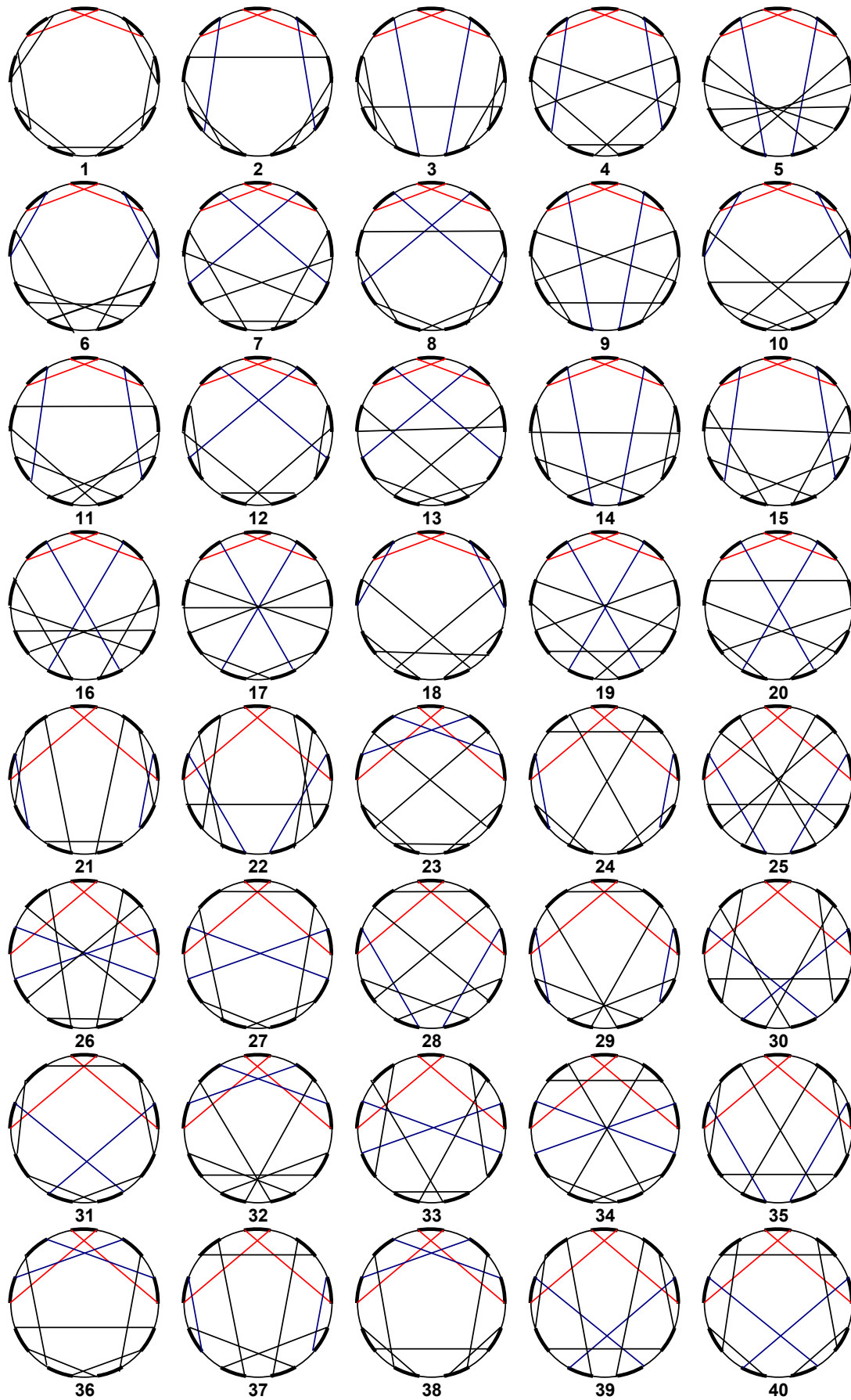
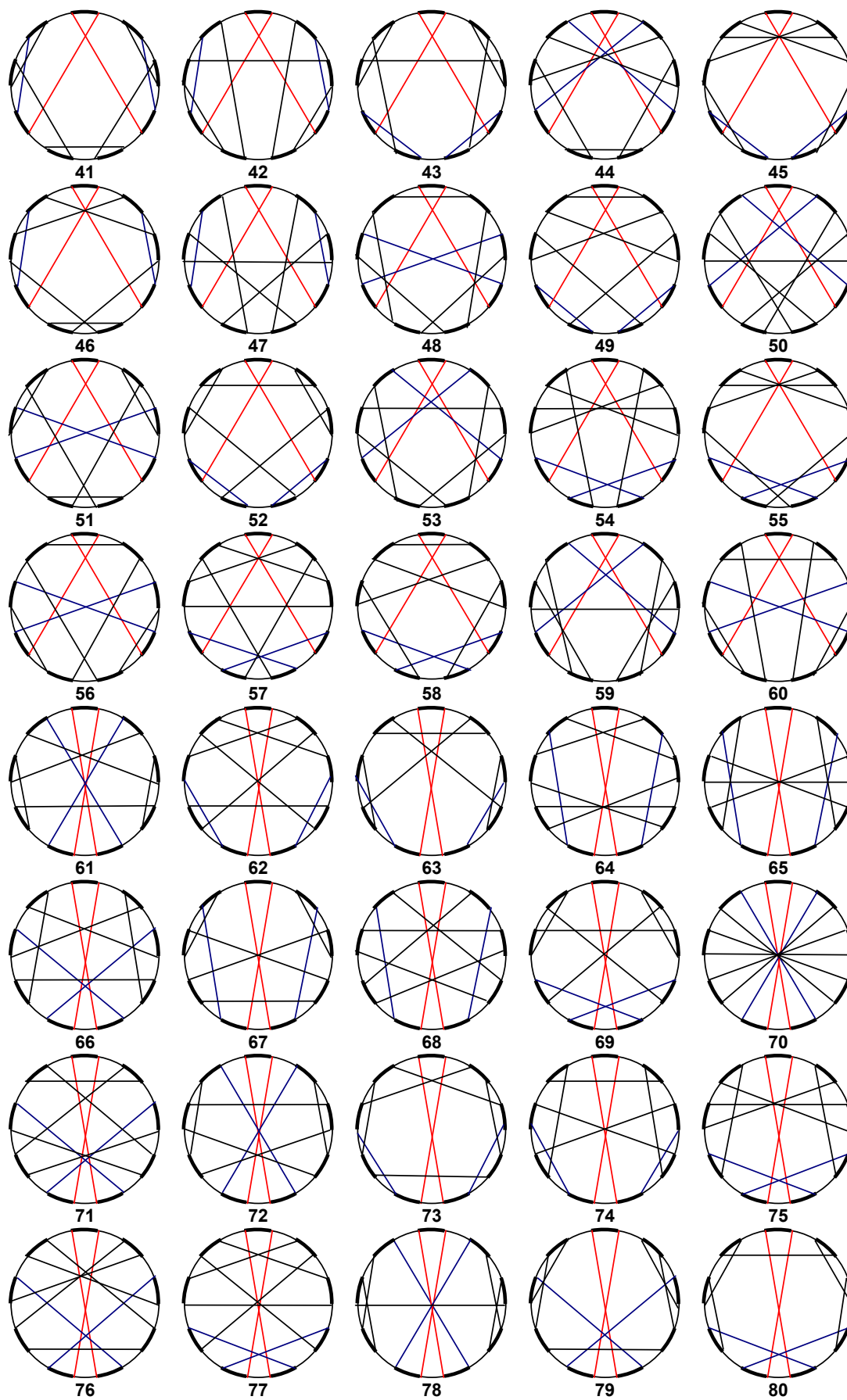
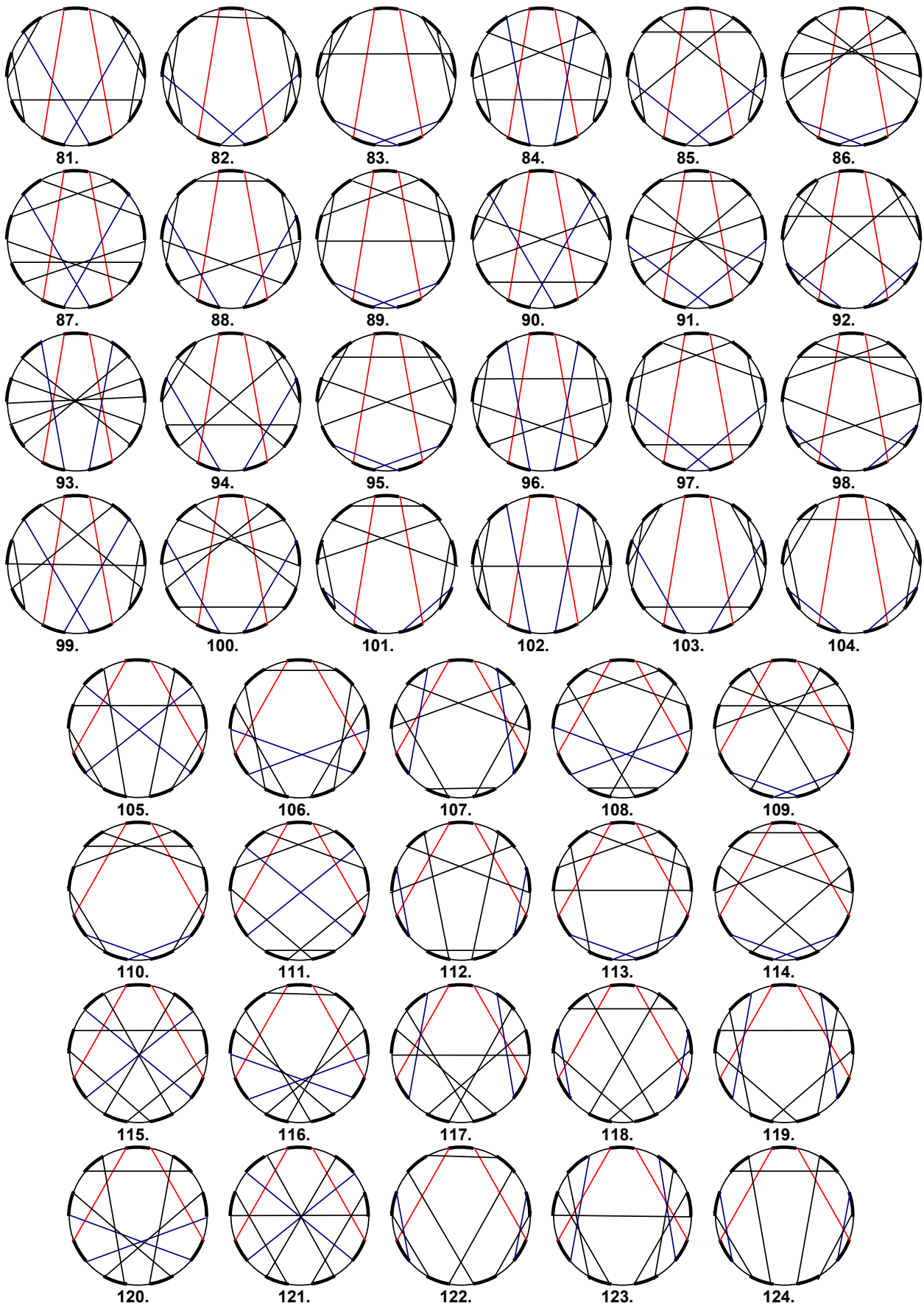


Рис. 5: всі неізоморфні діаграми з класу $\mathfrak{S}_{1,1;7}^O$

Нижче на рис. 6 зображено всі 148 (неізоморфних) симетричних діаграм з класу $\mathfrak{S}_{1,1;9}^O$.







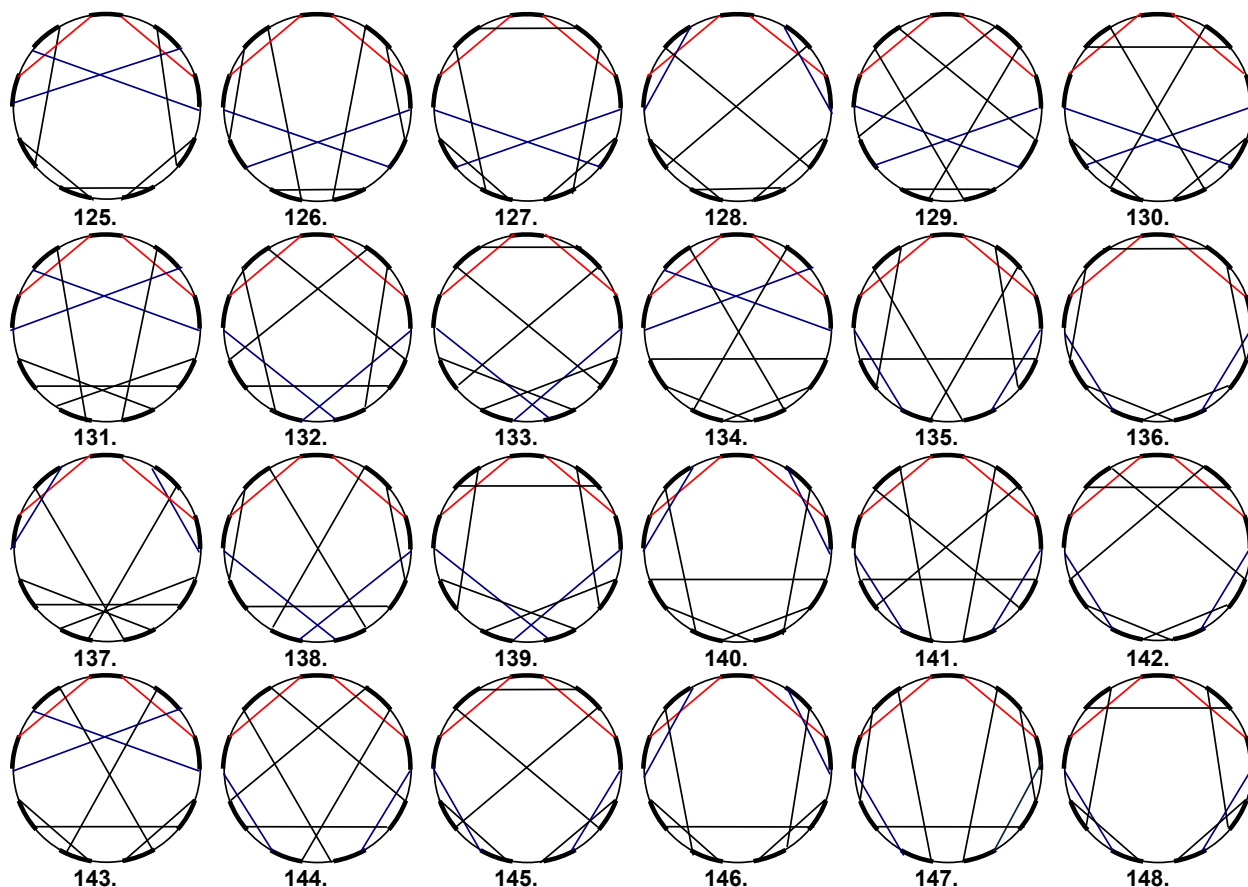


Рис. 6: всі (неізоморфні) симетричні діаграми з класу $\mathfrak{S}_{1,1;9}^O$

Зауваження 1. Як випливає з результатів роботи [10], кожній діаграмі $D \in \mathfrak{S}_{1;n}^O$ ($n = 2m + 1$), що є симетричною відносно тієї осі симетрії $2n$ -шаблону, яка проходить через його центр та середину чорної дуги b_1 (рис. 2 с), однозначно можна поставити у відповідність «симетричний» цикл довжини n , а саме цикл виду

$$b' = (j'_{m+1}, \dots, j'_3, j'_2, \boxed{1}, j_2, j_3, \dots, j_{m+1}), \quad (11)$$

де $j'_i = 2m + 3 - j_i \quad \forall i \in \{2, \dots, m + 1\}$, а $1, j_2, j_3, \dots, j_{m+1}$ — суть номери перших $(m + 1)$ чорних дуг $2n$ -шаблону, які зустрічаються при обході (починаючи з першої чорної дуги за годинниковою стрілкою) єдиного чорного циклу діаграми. Причому $\forall k, l \in \{2, \dots, m + 1\} \quad j_k + j_l \neq 2m + 3$.

І навпаки, будь-який цикл b' виду (11), у якому $\forall i \in \{2, \dots, m + 1\} \quad j_i \in \{2, 3, \dots, 2m + 1\}$, $j'_i = 2m + 3 - j_i$ та $\forall k, l \in \{2, \dots, m + 1\} \quad j_k + j_l \neq 2m + 3$ визначає єдину діаграму $D = D(b') \in \mathfrak{S}_{1;n}^O$.

Крім того, в роботі [10] встановлено, що для натуральних $n = 2m + 1$ має місце рівність

$$|\mathfrak{S}_{1;n}^O| = 2^m \cdot (m)! \quad (12)$$

Більше того, з урахуванням твердження $A.$, має місце

Лема 1. Для натуральних $n = 2m + 1$ число $s(n)$ діаграм з класу $\mathfrak{S}_{1,1;n}^O$ (що є симетричними відносно тієї осі симетрії $2n$ -шаблону, яка проходить через його центр та середину чорної дуги b_1) співпадає із числом циклів виду (11), для яких добуток

$$b' \circ \tau^{-1}, \quad \tau = (1, 2, \dots, 2m + 1) \quad (13)$$

є циклом довжини n (розкладається в один цикл).

З урахуванням Лема 1., авторами статті було написано програму математичного розрахунку величини $s(n)$ в середовищі **Maple**. Для натуральних $n = 11; 13; 15; 17; 19$ одержано наступні результати: $s(11) = 1\ 348$; $s(13) = 15\ 104$; $s(15) = 198\ 144$; $s(17) = 2\ 998\ 656$; $s(19) = 51\ 290\ 496$.

Таким чином, має місце

Твердження 1. Для непарних натуральних $1 \leq n \leq 19$ число $s(n)$ симетричних діаграм з класу $\mathfrak{S}_{1,1;n}^O$ становить

$$s(n) = \begin{cases} 1, & n = 1 \\ 1, & n = 3 \\ 4, & n = 5 \\ 20, & n = 7 \\ 148, & n = 9 \\ 1\ 348, & n = 11 \\ 15\ 104, & n = 13 \\ 198\ 144, & n = 15 \\ 2\ 998\ 656, & n = 17 \\ 51\ 290\ 496, & n = 19 \end{cases} \quad (14)$$

Крім того, більш пильні спостереження за величинами $s(n)$ (для зазначених n) дозволили виявити низку властивостей, а саме

Лема 2. Нехай $S_n(p)$ ($n = 2m + 1, p \in \{3, 4, \dots, 2m + 1\}$) — множина циклів виду $b' = (\dots, p', \boxed{1}, p, \dots)$, які задовольняють умову лема 1. Тоді мають місце наступні рівності:

- 1) $|S_n(2)| \equiv 0$;
- 2) $s(n) = \sum_{p=3}^{2m+1} |S_n(p)|$;
- 3) $\forall p \in \{m + 2, \dots, 2m + 1\} \quad |S_n(p)| = s(2m - 1) = s(n - 2)$;
- 4) $|S_n(3)| = |S_n(m + 1)| = 2 \cdot (m - 1) \cdot s(2m - 3) = (n - 3) \cdot s(n - 4)$;
- 5) $\forall j \in \{3, \dots, m + 1\} \quad |S_n(j)| = |S_n(m + 4 - j)|$.

2.2. Число нееквівалентних діаграм з класу $\mathfrak{S}_{1,1;n}^O$

Теорема 1. Для непарних натуральних $1 \leq n \leq 19$ число d_n^{**} нееквівалентних (відносно дії дієдральної групи) діаграм з класу $\mathfrak{S}_{1,1;n}^O$ можна обчислити за формулою

$$d_n^{**} = \frac{1}{2} (d_n^* + s(n)), \quad (15)$$

де d_n^* визначаються за формулою (6), а $s(n)$ — зі співвідношень (14).

$g = \frac{n-1}{2}$	n	$d(n) = \frac{2(n-1)!}{n+1}$	d_n^*	d_n^{**}
0	1	1	1	1
1	3	1	1	1
2	5	8	4	4
3	7	180	30	25
4	9	8 064	900	524
5	11	604 800	54 990	28 169
6	13	68 428 800	5 263 764	2 639 434
7	15	10 897 286 400	726 485 868	363 342 006
8	17	2 324 754 432 000	136 750 260 720	68 376 629 688
9	19	640 237 370 572 800	33 696 703 714 374	16 848 377 502 435

Табл. 1: початкові значення величин $d(n)$, d_n^* та d_n^{**}

Зауваження 2. Як з'ясувалося, для натуральних $n = 2g + 1$ початкові значення величин $d(n)$ і $s(n)$ співпадають зі значеннями величин

$S_H(2g; 1)$ — «Hultman number» [4] (послідовність **A060593** в [7])

та, відповідно,

$S_H^\pm(g; 1)$ — «signed Hultman number» [4] (послідовність **A001171** в [7]).

Висновки

Отже, в представлений роботі для початкових натуральних $n = 2g + 1$ ($g \in \{0, 1, \dots, 9\}$) повністю розв'язана задача про підрахунок числа нееквівалентних діаграм з класу $\mathfrak{S}_{1,1;n}^O$ (n -діаграм максимального роду g).

Крім того, з урахуванням зауваження 2., існує тісний зв'язок між діаграмами з класу $\mathfrak{S}_{1,1;n}^O$ та перестановками певного виду, чий «breakpoint» граfi розкладаються в один цикл [4]. Тому, на думку авторів, цілком досяжною здається подальша робота, пов'язана зі встановленням необхідних тверджень щодо бієктивності між симетричними діаграмами з класу $\mathfrak{S}_{1,1;n}^O$ та (відповідними) перестановками, чий «breakpoint» граfi розкладаються в один цикл.

Література

1. *Boccara G.* Nombre de representations d'une permutation comme produit de deux cycles de longueurs donnees // *Discrete Mathematics*. — 1980. — Vol. 29, Issue 2. — P. 105–134.
2. *Callan D., Smiley L.* Non-crossing Partitions under Rotation and Reflection, 2005, publ. electronically at <http://arXiv.org/abs/math/0510447v3>
3. *Cori R.* Counting non-isomorphic chord diagrams / R. Cori, M. Marcus // *Theoretical Computer Science*. — 1998. — Vol. 204. — P. 55–73.
4. *Grusea S.* The distribution of cycles in breakpoint graphs of signed permutations / S. Grusea, A. Labarre // *Discrete Applied Mathematics*. — 2013. — Vol. 161. — P. 1448–1466.
5. *Harer J.* The Euler characteristic of the moduli space of curves / J. Harer, D. Zagier // *Inventiones mathematical*. — 1986. — Vol. 85. — P. 457–485.
6. *Stoimenow A.* On the number of chord diagrams / A. Stoimenov // *Discrete Mathematics*. — 2000. — Vol. 218, Issues 1–3. — P. 209–233.
7. The OEIS Foundation Inc., «The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences», published electronically at <http://oeis.org>.
8. Кадубовський О. Про один клас хордових діаграм максимального роду / О. Кадубовський // Вісник Київського університету Серія: фізико-математичні науки. — 2006. — Вип. 1. — С. 17–27.
9. *Кадубовський О.А.* Двокольорові O -і N -діаграми / О.А. Кадубовський, О.В. Сторожилова, Н.В. Сторожилова // Пошуки і знахідки. Серія: фізико-математичні науки. — 2010. — Том I, Вип. 10. — С. 41–50.
10. *Кадубовський О.А.* Двокольорові O -діаграми з одним чорним циклом / О.А. Кадубовський, Ю.С. Саприкіна, С.Ю. Мазур // Пошуки і знахідки. Серія: фізико-математичні науки. — 2010. — Том I, Вип. 10. — С. 51–60.

Kadubovs'kyi O.A., Voschana L.V.

Donbas State Teachers' Training University, Slavyans'k, Ukraine.

On the Number of 2-Color Chord O -Diagrams of Maximal Genus Under the Action of Dihedral Group

In this paper for $0 \leq g \leq 9$ we determine the number of nonequivalent 2-color chord diagrams (of order n) with one black and one white cycle (2-color chord O -diagrams of maximal genus) under the action of dihedral group (of order $2n$)

Keywords: 2-color chord diagram, maximal genus, dihedral group.

ФІЗИКА

УДК 620.3

Надточій В.О., Уколов О.І., Нечволод М.К., Бугаєвська Д.О.

¹ доктор фізико-математичних наук, завідувач кафедри фізики, ДДПУ

² кандидат фізико-математичних наук, асистент кафедри вищої математики і фізики,
Керченський державний морський технологічний університет

³ доктор фізико-математичних наук, радник ректора, ДДПУ

⁴ студентка 5 курсу фізико-математичного факультету, ДДПУ

e-mail: fiziksgpu@ya.ru

РОЗРАХУНКИ ПОЛІВ ТЕМПЕРАТУР І ТЕРМІЧНИХ НАПРУЖЕНЬ У ПРИПОВЕРХНЕВИХ ШАРАХ GaAs, ІНІЦІЙОВАНИХ ІМПУЛЬСНИМ ЛАЗЕРНИМ ОПРОМІНЕННЯМ

Досліджено вплив імпульсного лазерного опромінення поверхні *GaAs* з гауссовим і дифракційним розподілом інтенсивності на процеси дефектоутворення. Розраховано розподіл полів температур і термічних напружень протягом дії лазерних імпульсів. Вперше показана можливість створення впорядкованих атомних структур у вигляді атомних кластерів лазерним опроміненням низького рівня, які можуть бути використані в мікроелектронних приладах.

Ключові слова: *лазер, дефекти, модуляція, дифракція, випромінювання.*

Вступ

Серед способів формування напівпровідникових наноструктур найбільше поширення знайшли методи, які ґрунтуються на різноманітних процесах самоорганізації, що діють під час релаксації напружених гетероструктур. Природні механізми, які при цьому використовуються, базуються на спонтанному зародженні та росту структур, що дозволяють керувати геометричними розмірами і місцезнаходженням нанооб'єктів лише у певних межах.

© Надточій В.О., Уколов О.І., Нечволод М.К., Бугаєвська Д.О., 2015

У даній роботі основна увага приділяється новому принципу адресної модифікації морфології приповерхневих шарів арсенію гелію, при якій розподіл окремих елементів масиву наноструктур є керованим процесом. Основою методу є дія на кристал просторово-модульованого лазерного опромінення з низькою інтенсивністю, що не призводить до виникнення розплаву, але стимулює активацію важливих для дефектоутворення ефектів: нагрівання, деформації поверхні та електронного збудження центрів.

Основна частина

В основу теплової задачі було покладено розв'язання диференціального рівняння другого порядку

$$c\rho\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} \left(\kappa \frac{\partial T}{\partial t} \right) + g, \quad (1)$$

де c – теплоємність, ρ – густина досліджуваної речовини, t – час від початку дії імпульсу лазерного опромінення, z – координата углиб кристала, κ – коефіцієнт теплопровідності, g – тепла потужність, яка вводиться у кристал опроміненням. Миттєве значення визначається з урахуванням використаного режиму випромінювання (імпульс вільної генерації чи модульованої добротності) та просторовим розподілом інтенсивності по лазерній плямі (гауссовий чи дифракційно-модульований).

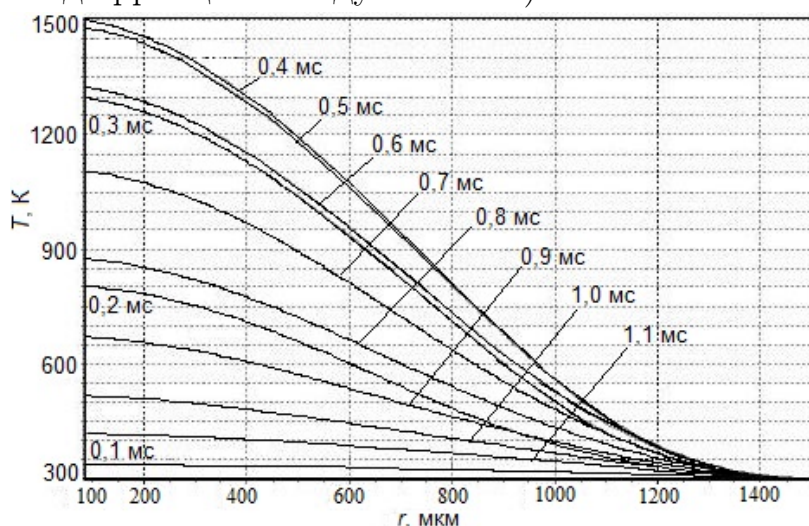


Рис. 1. Розподіл температури вздовж радіуса лазерної плями на поверхні $GaAs$ в різні моменти часу від початку дії лазерного імпульсу ($E = 1$ Дж, $\lambda = 694$ нм, $\tau_p = 1$ мс)

Особливість розв'язування рівняння (1) полягала у необхідності врахування температурної залежності c , κ і коефіцієнта поглинання, який неявно входить до значення g . У даній роботі рівняння (1) розв'язувалось як для гауссового так і для дифракційно-модульованого опромінення кристалів $GaAs$. Для комп'ютерних обчислень початкові умови були введені до програми «STRESS» і рівняння (1) розв'язувалось за методом сіток. Результати розрахунків розміщувались у тривимірному масиві даних, які визначають розподіл

температури кристала у різні моменти часу від початку дії лазерного імпульсу. Одержані результати про зміну температури в опроміненій зоні наведені на рис. 1. Вони були використані у подальшому для розрахунку деформації поверхні і встановлення граничних параметрів лазерного опромінення. Розподіл деформацій на опроміненій поверхні в залежності від координат і часу дії лазерного імпульсу знаходився з урахуванням температурної залежності коефіцієнту теплового розширення за формулою

$$\varepsilon = [3,5652(\ln T - 1) - 1,312]T \cdot 10^{-6} - [3,5652(\ln T_0 - 1) - 14,312]T_0 \cdot 10^{-6}, \quad (2)$$

де ε – ступінь відносної деформації, T_0 – початкова температура кристалу. Наступним етапом розв’язання було визначення термічних напружень в залежності від температури та координат для різних кристалографічних площин. З урахуванням температурної залежності модуля Юнга і анізотропії кристалу кінцеві формули мають такий вигляд:

$$\sigma = \frac{[3,5652(\ln T - 1) - 1,312]T \cdot 10^{-6} - [3,5652(\ln T_0 - 1) - 14,312]T_0 \cdot 10^{-6}}{S_{11} - 2 \left(S_{11} - S_{12} - \frac{1}{2}S_{44} \right) (\cos^2 \theta_0 \cdot \sin^2 \theta_0)}, \quad (3)$$

$$\sigma = \frac{[3,5652(\ln T - 1) - 1,312]T \cdot 10^{-6} - [3,5652(\ln T_0 - 1) - 14,312]T_0 \cdot 10^{-6}}{S_{11} - \left(S_{11} - S_{12} - \frac{1}{2}S_{44} \right) \sin^2 \theta_0 (1 + 2 \cos^2 \theta_0)}, \quad (4)$$

$$\sigma = \varepsilon \left/ \left(S_{11} - 2 \left(S_{11} - S_{12} - \frac{1}{2}S_{44} \right) \cdot \left(\frac{\sin^2 \theta_0}{6} - \cos^2 \theta_0 \right) + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{2}{3} \left(\frac{\sin^2 \theta_0}{6} - \cos^2 \theta_0 \right)^2 \cdot \sin^2 \theta_0 + \frac{4}{3} \left(\frac{\sin^2 \theta_0}{6} - \cos^2 \theta_0 \right)^2 \right) \right., \quad (5)$$

де формули (3), (4) і (5) можна застосовувати до розрахунків для площин (100), (110) та (111) відповідно. У формулах S_{11} , S_{12} , S_{44} – компоненти тензора піддатливості, θ_0 – кут між вибраним і кристалографічним напрямками, які належать до однієї із вказаних площин.

Дифракційний розподіл інтенсивності при дифракції від екранів з різною товщиною і профілем розраховували за формулами Френеля та Кірхгофа. Визначено коефіцієнт інтенсивності k при дифракції від напівплощини

(рис. 2)

$$\kappa = \frac{I}{I_0} = \frac{\left[\frac{1}{2} + \xi(\vartheta) \right]^2 + \left[\frac{1}{2} + \eta(\vartheta) \right]^2}{2} \quad (6)$$

де I_0 – інтенсивність не дифрагованого випромінювання, $\xi(\vartheta)$ і $\eta(\vartheta)$ – інтеграли Френеля, що описують спіраль Корню.

При дифракції від прямокутного вирізу (рис. 3) коефіцієнт розподілу інтенсивності опромінення κ_I знаходиться як добуток розподілу інтенсивності дифрагованого променя від кожної із сторін екрану

$$\kappa_I = \prod_{i=1}^2 \frac{I}{I_0} = \frac{1}{4} \prod_{i=1}^2 \left\{ \left[\frac{1}{2} + \xi(\vartheta) \right]^2 + \left[\frac{1}{2} + \eta(\vartheta) \right]^2 \right\}. \quad (7)$$

При такій дифракції майже удвічі збільшуються перепади між мінімальними і максимальними значеннями інтенсивності порівняно із такими ж значеннями для екрану у вигляді напівплощини.

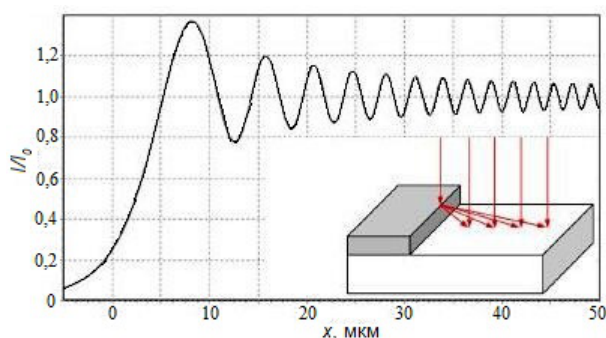


Рис. 2. Розподіл інтенсивності опромінення при дифракції від напівплощини ($\lambda = 694$ нм, $b = 130$ мкм)

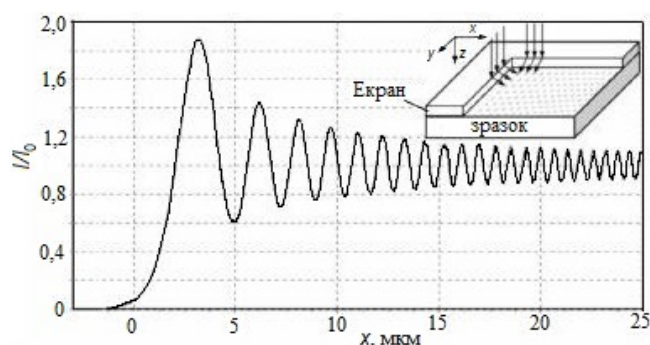


Рис. 3. Розподіл інтенсивності опромінення при дифракції від прямокутного вирізу ($\lambda = 694$ нм, $b = 10$ мкм)

Наведемо формулу, яка дозволяє чисельно розраховувати амплітуду дифракційно-модульованої електромагнітної хвилі для довільного профілю екрана

$$E(P) = -\frac{i}{2\lambda} E_0 \sqrt{\left(\sum_{j=0}^N \cos(ks_j)(1 + \cos \varphi_j) \right)^2 + \left(\sum_{j=0}^N \sin(ks_j)(1 + \cos \varphi_j) \right)^2}. \quad (8)$$

У формулі (8) s_j – відстань від обраної точки на опроміненій поверхні до елементарної площини з номером j хвильового фронту у площині екрану,

φ_j – кут між нормаллю до елемента хвильового фронту і напрямком s_j , k – хвильове число. За формулою (8) був розрахований розподіл інтенсивності опромінення на поверхні кристала при дифракції від екранів нестандартного профілю (квадратного отвору і клиновидного екрану з різною висотою сторін). Теоретично розв'язана зворотна задача синтезу мікроголограми для заданого розподілу інтенсивності на опроміненій поверхні. У такий спосіб можна задавати необхідний розподіл лазерно-індукованих структурних утворень, які можуть мати особливі фізичні властивості.

Утворення дефектів під дією лазерних імпульсів з $\tau_p = 1$ мс

1. *Опромінення з гауссовим розподілом інтенсивності.* Експериментально визначена гранична доза $W_b = 25$ Дж/см² опромінення *GaAs* для імпульсу з $\tau_p = 1$ мс. При $W > W_b$ на поверхні утворюються лінійні дефекти (рис. 4, а), а при менших значеннях, коли $W < W_b$, структурними методами виявляється дефектний шар з підвищеною концентрацією лише точкових дефектів (рис. 4, б). Із порівняння теоретичних розрахунків (рис. 1) та результатів експериментальних досліджень (рис. 4, а і рис. 4, б) встановлено також, що температура на межі між а і б зонами у процесі опромінення сягає 850 К. При ще меншій густині енергії лазерного опромінення, на межі дефектної і не модифікованої поверхні кристала (рис. 4, б), максимальна температура становить $T \approx 400$ К, а термічне напруження $\sigma \approx 100$ МПа. Знання граничних температур і напружень, у межах яких створюються лише точкові дефекти у приповерхневих шарах, дозволяє розвивати новий підхід до керування властивостями напівпровідника, який ґрунтується на формуванні поблизу його поверхні нанорозмірних кластерів.

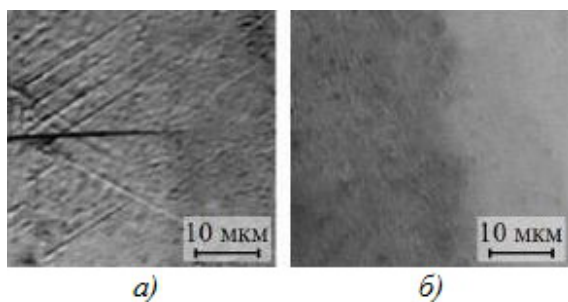


Рис. 4. Структури на опроміненій поверхні кристалу *GaAs* лазерним імпульсом з гауссовим розподілом інтенсивності: а – зона пластичності, б – периферійна зона з границею розподілу дефектної (зліва) і не модифікованої частини кристалу ($\lambda = 694$ нм, $\tau_p = 1$ мс)

2. *Опромінення з дифракційним розподілом інтенсивності.* Опромінення кристалів дифракційно-модульованими лазерними імпульсами виконувалось при рівнях інтенсивності $W < W_b$. При дифракції від екрану у вигляді напівплощини інтенсивність лазерного опромінення на поверхні мала розподіл, який вказано на рис. 2, і не перевищувала 25 Дж/см².

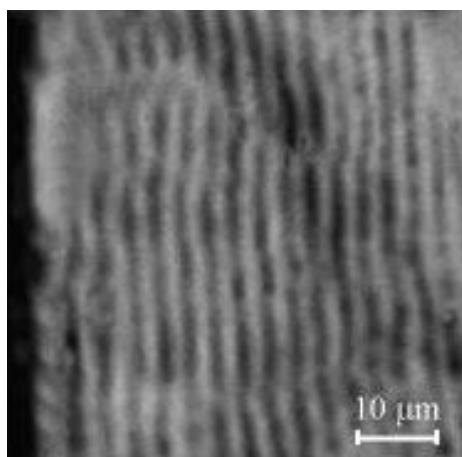


Рис. 5. Оптичне зображення періодичного рельєфу на поверхні *GaAs* ($\lambda = 694$ нм, $\tau_p = 1$ мс, $b = 130$ мкм)

Після хімічного травлення опроміненних монокристалів *GaAs* була виявлена лінійно-періодична структура (рис. 5), яка адекватно відображала заданий розподіл енергії. У тому разі, якщо зразки не піддавались хімічному травленню, подібні структури оптичним методом не виявлялись. Цей факт свідчить про те, що при низькому рівні інтенсивності опромінення дефектна структура утворилась у приповерхневому шарі.

На ділянках поверхні з високим рівнем лазерного опромінення $W > W_b$, де зароджувались тріщини, лінійно-періодичні структури вказаного вище типу не виявлялись. Це вказує на важливу роль термічних напружень в утворенні періодичних структур, значення яких зменшились внаслідок релаксації.

Порівняння експериментальних результатів і чисельних розрахунків приводять до висновку, що максимальні значення термічних напружень утворюються у зонах з максимальною температурою і саме на цих ділянках витравлюються канавки періодичного рельєфу. У віддаленій від екрану зоні на поверхні, де значення періоду дифракційної картини прямує до постійного значення, градієнт термічних напружень сягає величини ≈ 85 МПа/мкм (рис. 6).

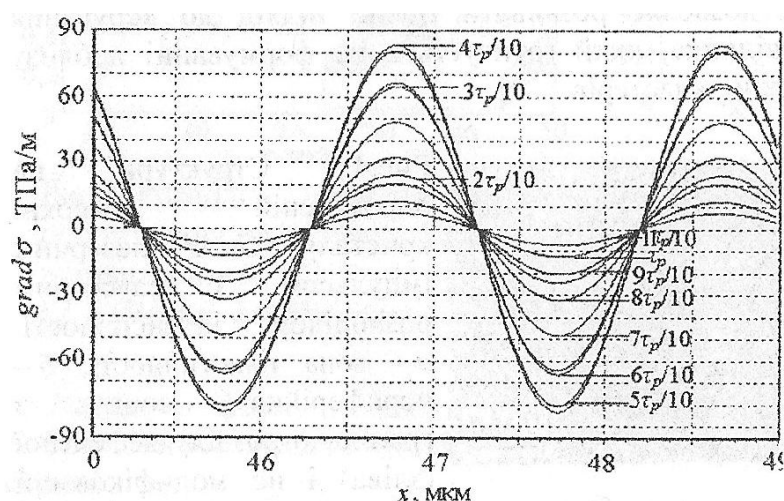


Рис. 6. Утворення градієнту термічних напружень на поверхні *GaAs* дією дифракційно-модульованого лазерного опромінення ($\lambda = 694$ нм, $\tau_p = 1$ мс, $b = 130$ мкм)

Для отримання двовимірного розподілу інтенсивності на поверхні опромінення кристалів *GaAs* здійснювалось через непрозорий екран з прямокутним вирізом (рис. 3). При цьому збільшувалась максимальна

температура розігріву поверхні, а тому і градієнт термічних напружень. Окрім цього, градієнт термічних напружень став промодульованим у двох напрямках у площині поверхневого шару (рис. 7). Під дією такого розподілу температури і термічних напружень у приповерхневому шарі монокристала *GaAs* утворилася відповідна дефектна структура (рис. 8) з наведеним на рис. 7 періодом розподілу. Знімок зроблений після хімічного травлення поверхні.

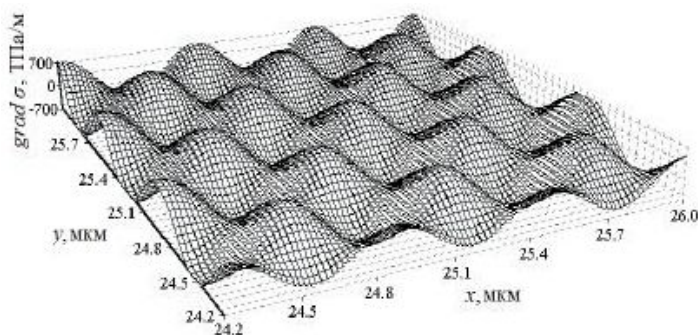


Рис. 7. Утворення градієнту термічних напружень на площині (111) монокристалу *GaAs* ($\lambda = 694$ нм, $\tau_p = 1$ мс, $b = 10$ мкмс)

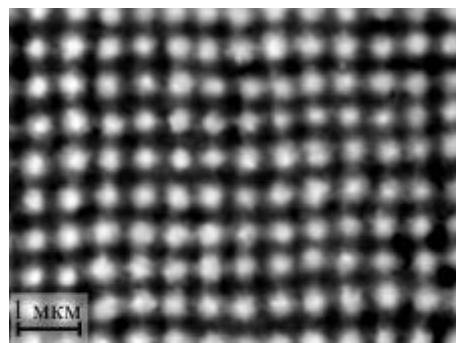


Рис. 8. Оптичний знімок опроміненої поверхні *GaAs*. Білі плями-горбики після хімічного травлення ($\lambda = 694$ нм, $\tau_p = 1$ мс, $b = 10$ мкмс)

Висновки

1. Виконані розрахунки розподілу полів температур, деформацій і термічних напружень, створених дифракційно-модульованим лазерним опроміненням. Запропоновано два варіанти рішення задачі про розподіл термічного напруження – через визначення компонент тензора деформації, або з урахуванням орієнтаційної залежності модуля Юнга.
2. Експериментально знайдено значення граничної щільності енергії $W_b = 25$ Дж/см² опромінення лазерними імпульсами мілісекундної тривалості, нижче якої домінують процеси точкового дефектоутворення.
3. Уперше показана можливість створення періодичних дефектних структур у вигляді атомних кластерів шляхом дифракційно-модульованого імпульсного опромінення ($\tau_p = 1$ мс) низького рівня. Позиціонування таких структур задається законом модуляції лазерного випромінювання і таким чином вирішується завдання їх адресного і періодичного розподілу.

Література

1. *Надточий В.А.* Микропластичность алмазоподобных кристаллов (Si, Ge, GaAs, InAs): Дис. ... доктора физ.-мат. наук: 01.04.07 / Харьковский национальный университет. — Харьков, 2006. — 467 с.
2. *Надточий В.А., Алехин В.П.* Микропластичность монокристаллов Ge при воздействии лазерного облучения и деформации сжатия // Физ. и хим. обраб. материалов. — 2004. — №4. — С. 27–32.
3. *Кашкаров П.К., Тимошенко В.Ю.* Образование дефектов в полупроводниках при импульсном лазерном облучении // Поверхность: физика, химия, механика. — 1995. — №2. — С. 5–34.
4. *Александров Л.Н., Нидаев Е.В., Васильев А.Л.* Дефекты в приповерхностном слое кремния, образующиеся при импульсном лазерном облучении // Письма в ЖТФ. — 1988. — Т.14, №9. — С. 838–841.
5. *Надточій В.О.* Структурні зміни у приповерхневому шарі Ge під дією лазерного імпульсу / М.М. Голоденко, А.З. Калімбет, Д.С. Москаль // Фіз. і хім. твердого тіла. — 2003. — Т.4, №3. — С. 556–559.

¹ кандидат педагогических наук, доцент кафедры физики, ДГПУ

e-mail: fiziksgpu@ya.ru

ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ГАЛИЛЕЯ В ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

Показано, что кинематические эффекты специальной теории относительности могут быть получены при использовании преобразований Галилея. В качестве основы для вывода используется понятие пространственно-временного интервала. Различие между преобразованиями Галилея и Лоренца в том, что второе относится к классу ортогональных преобразований в 4-мерном пространстве-времени, а первое — нет.

Ключевые слова: преобразования Галилея и Лоренца, пространственно-временной интервал, система отсчета, релятивистские эффекты.

Введение

Обычно утверждается, что преобразования координат Галилея $x' = x - vt$, $t' = t$ противоречат постулатам теории относительности. Действительно, из этих преобразований следует классический закон сложения скоростей. Если $\Delta x = x_2 - x_1$ — перемещение тела за промежуток времени $\Delta t = t_2 - t_1$ в системе K , $\Delta x' = x'_2 - x'_1$ — перемещение того же тела за промежуток времени $\Delta t' = t'_2 - t'_1$ в системе K' , то $\Delta x' = \Delta x - v\Delta t$. Разделив это равенство почленно на $\Delta t' = \Delta t$, получим $\Delta x'/\Delta t' = \Delta x/\Delta t - v$ или $u' = u - v$. Здесь u и u' — скорость одного и того же тела в системах K и K' . (Повсюду в этой статье принимается, что инерциальная система отсчета K' движется относительно K вдоль оси x со скоростью v). Пусть мы измеряем скорость света в обеих системах отсчета и $u' = c$. Тогда $u = c + v$, что противоречит факту абсолютности скорости света в вакууме, на который опирается специальная теория относительности.

Однако, в предисловии к книге американских профессоров Э. Тейлора и Дж. Уиллера [1] Н. В. Мицкевич пишет, что «преобразования Галилея и Лоренца физически эквиваленты. И можно без труда показать, что первое приводит в точности к тем же релятивистским эффектам, к каким приводит второе». Об этом можно прочесть и в других книгах, рассчитанных на более подготовленного читателя [2; 3].

Попробуем разобраться в этом, не применяя используемый в специальных книгах сложный математический аппарат.

Основная часть

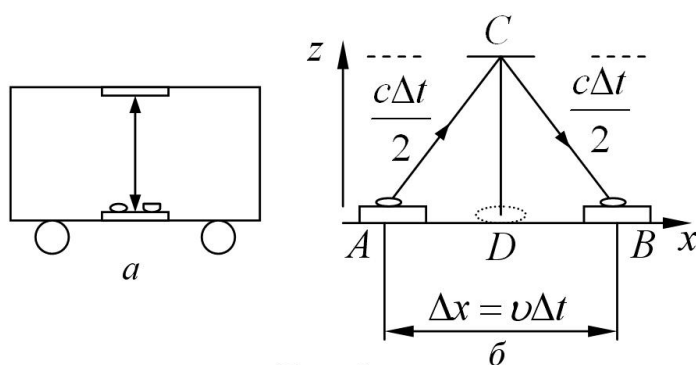


Рис. 1

В теории относительности, особенно в общей, важную роль играет величина, называемая пространственно-временным интервалом между событиями. Пусть первое событие — вспышка света в вагоне (рис. 1а). Свет отражается от зеркала и возвращается назад.

Прием вспышки — второе событие. В вагоне эти события произошли в одном месте пространства, для наблюдателя на станции — в разных (рис. 1б). Расстояние между ними тем больше, чем быстрее едет поезд. По теореме Пифагора $DC^2 = AC^2 - AD^2$, где $AC = c\Delta t/2$, $AD = \Delta x/2$, $\Delta x = v\Delta t$. v — скорость поезда относительно станции, $DC = h$ — высота вагона. Окончательно запишем:

$$4h^2 = c^2\Delta t^2 - \Delta x^2. \quad (1)$$

Возьмем еще одну систему отсчета, жестко связанную с машиной, которая едет параллельно поезду, но с меньшей скоростью. В этой системе вспышка и прием света так же произошли в разных местах пространства. Аналогично получаем

$$4h^2 = c^2\Delta t'^2 - \Delta x'^2 \quad (2)$$

Высота вагона h одна и та же во всех системах. Чтобы убедиться в этом, предположим, что поезд должен проехать сквозь туннель. Высота неподвижного вагона и высота туннеля одинаковы. Предположим, что поперечные размеры движущегося тела изменяются, например, уменьшаются. Тогда в системе отсчета, жестко связанной с вагоном, высота туннеля будет ниже вагона и поезд не сможет пройти. В системе отсчета, связанной с туннелем, ситуация обратная. В этой системе движется вагон и его размеры, согласно допущению, должны сократиться. Следовательно, вагон пройдет сквозь туннель. Но выбор системы отсчета не должен влиять на исход наблюдаемого явления, следовательно, на основании принципа относительности, мы вынуждены сделать вывод, что размеры тела, перпендикулярные направлению относительного движения систем, абсолютны. Приравнивая правые части выражений (1) и (2), получим:

$$c^2\Delta t^2 - \Delta x^2 = c^2\Delta t'^2 - \Delta x'^2.$$

Промежутки времени и пространственные расстояния между события-

ми различны в разных системах отсчета. Но для каждой пары событий существует величина одинаковая во всех системах. Это — пространственно-временной интервал. Квадрат его имеет следующий вид:

$$s^2 = c^2 \Delta t^2 - \Delta x^2 \text{ или } s^2 = (c\Delta t)^2 - l^2, \quad (3)$$

где l — расстояние между точками, где произошли события.

В нашем выводе использовались специальные события — вспышка и прием света. Но этот вывод справедлив и для произвольных событий. Например, если они не очень удалены друг от друга ($l \leq c\Delta t$), то всегда можно подобрать такое h , что свет, вспыхнувший одновременно и в том же месте, что и первое событие, придет к месту второго события в тот момент, когда оно должно произойти.

Если свет распространяется непосредственно из одной точки в другую ($h = 0$), то $c\Delta t = l$ и

$$s = 0 \quad (4)$$

Если события произошли в одном месте пространства, то промежуток времени Δt_0 между ними называется собственным. В нашем примере в системе, связанной с вагоном, $l = 0$ и

$$\Delta t_0 = \frac{s}{c} \quad (5)$$

«Собственное» время неизменно во всех системах отсчета, так как интервал и скорость света абсолютны.

Это значит, что темп физических процессов совершенно одинаков для человека, где бы он ни находился — на Земле или в кабине летящего с огромной скоростью звездолета. Именно «собственное» время определяет темп физических процессов в данной системе отсчета.

Пространственные расстояния также могут быть выражены через интервал. Так, длину тела, например, линейки, в любой системе отсчета можно определить, зная значение интервала между двумя событиями, которые заключаются в измерении положения начала и конца линейки, при условии, что эти события происходят одновременно. Тогда $\Delta t = 0$ и

$$l = \sqrt{-s^2} \quad (6)$$

Только надо иметь ввиду, что одновременная фиксация границ измеряемого тела происходит по-своему в каждой системе отсчета. Это не одна и та же пара событий в разных системах. Поэтому для разных систем отсчета интервал s в выражении (5) не одинаков.

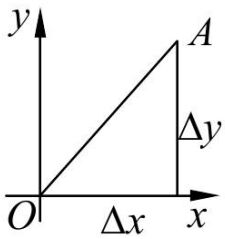


Рис. 2

Любые события мы можем изобразить на пространственно-временной диаграмме. В обычном пространстве (рис. 2) расстояние между двумя точками можно найти по теореме Пифагора, $OA^2 = l^2 = \Delta x^2 + \Delta y^2$. Можно ли пользоваться этой теоремой и, вообще, евклидовой геометрией в «пространственно-временном мире»? Как показывает опыт, нельзя. Геометрия пространства-времени в специаль-

ной теории относительности — псевдоевклидова. И, например, квадрат гипотенузы равен не сумме квадратов катетов, а их разности («псевдопифагорова» теорема).

$$OA^2 = s^2 = (c\Delta t)^2 - x^2$$

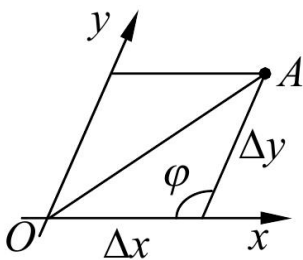


Рис. 3

До сих пор мы пользовались прямоугольными декартовыми координатами. Однако это совсем не обязательно. Можно пользоваться и косоугольными и криволинейными системами координат. Тогда квадрат расстояния между теми же точками, оставаясь неизменным по величине, будет иметь более сложную форму. Например, при использовании косоугольных координат в обычном

пространстве (рис. 3) получим $OA^2 = l^2 = \Delta x^2 + \Delta y^2 - 2\Delta x\Delta y \cos \varphi$. Будет иным и выражение для квадрата интервала между событиями, если построить косоугольную пространственно-временную диаграмму. Помимо квадратов разностей координат и промежутка времени в это выражении будет входить член с произведением $\Delta x\Delta t$. Углы и их функции на пространственно-временной диаграмме можно выразить через скорость. Только, напоминаем, здесь надо пользоваться соотношениями псевдоевклидовой геометрии. Она во многом сходна с евклидовой, но имеет некоторые отличия. Выражения (4), (5) и (6) справедливы для любых систем координат и в любых системах отсчета.

Теперь посмотрим, как будет выглядеть интервал в K' , если воспользоваться преобразованиями Галилея $x'_1 = x_1 - vt_1$, $t'_1 = t_1$ для первого события и $x'_2 = x_2 - vt_2$, $t'_2 = t_2$, для второго. Тогда $\Delta x' = \Delta x - v\Delta t$, $\Delta t' = \Delta t$ или

$$\Delta x = \Delta x' + v\Delta t'. \quad (7)$$

Поставим (7) в выражение для интервала (3). Получим:

$$s^2 = c^2 \left(I - \frac{v^2}{c^2} \right) \Delta t'^2 - \Delta x'^2 - 2v\Delta x'\Delta t'. \quad (8)$$

Отметим для сравнения, что если бы мы проделали такие же расчеты с

преобразованиями Лоренца $x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$, $t' = \frac{t - vx/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$, то выражение для интервала не изменилось бы, т.е. получили бы $s^2 = c^2\Delta t'^2 - \Delta x'^2$. Учитывая вышеизложенное можно сделать вывод, что в случае преобразований Галилея пространственная ось x' и временная ось t' в системе K' не перпендикулярны друг к другу, хотя в системе K они взаимноперпендикулярны. Преобразования же Лоренца не нарушают перпендикулярности пространственной и временной оси.

Теперь предположим, что события происходят в одном и том же месте системы K' , т.е. $\Delta x' = 0$. Подставляя это значение $\Delta x'$ в выражение (8), получим $s = c\sqrt{1 - v^2\Delta t'/c^2}\Delta t'$ или, учитывая (5),

$$\Delta t_0 = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}\Delta t' \quad (9)$$

Наконец, заменяя $\Delta t'$ равным ему (по преобразованию Галилея) значением Δt , получаем обычное релятивистское соотношение между промежутками времени в двух системах отсчета

$$\Delta t = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (10)$$

Напомним, что $t' = t$ означает, что часы системы K' показывают то же время, что и часы системы K , находящиеся в той же точке пространства. (В каждой системе отсчета имеется множество часов, покоящихся относительно тела отсчета своей системы). Таким образом, если часы системы K' мы будем ставить по правилу $t' = t$, то они будут отставать от темпа физических процессов в этой системе, который определяется собственным временем t_0 ($\Delta t' > \Delta t_0$, см. (9)).

Проверим далее – будут ли синхронизированы между собой такие часы в K' . Сверим часы, находящиеся в разных точках пространства K' , при помощи светового сигнала. Из т. A с координатой x'_1 посылаем короткий световой сигнал в т. B с координатой x'_2 . В момент t' по часам, расположенным в т. B , световой сигнала отражается и затем возвращается снова в т. A . Определим время распространения светового сигнала из одной точки в другую в системе K' . Для этого запишем интервал в системе отсчета K' между событиями – излучением и приемом светового сигнала в точках A и B . Этот интервал

равен нулю в любой системе отсчета (см. (4)):

$$c^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right) \Delta t'^2 - \Delta x'^2 - 2\Delta x'v\Delta t' = 0$$

Решая это квадратное уравнение, получаем

$$\Delta t'_1 = \frac{\Delta x'(v - c)}{c^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right)}, \quad \Delta t'_2 = \frac{\Delta x'(v + c)}{c^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right)}.$$

Эти промежутки времени соответствуют распространению светового сигнала в двух противоположных направлениях между точками A и B .

Если t' — момент отражения светового сигнала в т. B , то момент отправления его из т. A — $t'_1 = t' + \Delta t'_1$ ($\Delta t'_1 < 0$), а момент возвращения в ту же точку — $t'_2 = t' + \Delta t'_2$. Одновременно с моментом t' в т. B , по Эйнштейну, следует считать показания часов в точке A , лежащее посередине между моментами отправления и возвращения светового сигнала в эту точку:

$$\frac{t'_1 + t'_2}{2} = \frac{t' + \Delta t'_1 + t' + \Delta t'_2}{2} = t' + \frac{\Delta t'_1 + \Delta t'_2}{2}.$$

Подставляя значения $\Delta t'_1$ и $\Delta t'_2$, получаем

$$\frac{t'_1 + t'_2}{2} = t' + \frac{\Delta x'v}{c^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right)}.$$

Оказывается, что одновременным в K' событиям в разных точках соответствуют различные показания часов. Значит, часы в системе K' не синхронизированы между собой. Разность значений временной координаты для двух одновременных событий

$$\delta t' = \frac{\Delta x'v}{c^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right)} \quad (11)$$

Для сравнения можно показать, что если бы мы пользовались преобразованиями Лоренца, то часы в разных точках K' были бы синхронными. В этом случае интервал между теми же событиями, приемом и отправлением сигнала, в системе K' будет $s^2 = c^2 \Delta t'^2 - \Delta x'^2 = 0$. Отсюда $\Delta t'_1 = \Delta x'/c$

и $\Delta t'_2 = \Delta x'/c$. Расчеты, аналогичные предыдущим, дают для показаний часов в т. A в момент времени, одновременный с t' в т. B :

$$\frac{t' + \Delta t'_1 + t' + \Delta t'_2}{2} = \frac{t' - \frac{\Delta x'}{c} + t' + \frac{\Delta x'}{c}}{2} = t',$$

т.е. в этом случае одновременным событиям в разных точках соответствуют одинаковые показания часов.

Наконец, сравним размеры тел в K и K' , параллельные направлению относительной скорости систем отсчета. Пусть в системе K покоится линейка, расположенная вдоль оси x . Координаты ее начала и конца x_1 и x_2 , так что ее длина в системе K будет $l_0 = x_2 - x_1$. Чтобы определить ее длину в системе K' найдем значение интервала между двумя событиями — измерением координат начала и конца линейки, происходящими в один и тот же момент времени K' . Как было показано, в системе K' показания часов в разных точках в один и тот же момент времени отличаются на $\delta t'$. Поэтому мы должны считать, что для одновременных событий $\Delta t'$ равняется не нулю, а $\delta t'$, $\Delta t' = \delta t'$. Подставляя значение $\Delta t'$ в (8), получим $s^2 = -\frac{\Delta x'^2}{1 - v^2/c^2}$ и, согласно (6),

$$l = \frac{\Delta x'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (12)$$

Но $\Delta x' = \Delta x - v\Delta t'$, где $\Delta x = l_0$, а $\Delta t' = \delta t' = \frac{\Delta x'v}{c^2(1 - v^2/c^2)}$.

Поэтому, после простых преобразований, получаем $\Delta x' = l_0(1 - v^2/c^2)$. Подставляя значение $\Delta x'$ в (12), найдем окончательно

$$l = l_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \quad (13)$$

Итак, если подходить к преобразованиям Галилея с современных релятивистских позиций, то получаются обычные кинематические эффекты теории относительности.

Но как же классическая формула сложения скоростей, о которой мы говорили в самом начале? Ведь она противоречит основным положениям теории относительности! Но, оказывается, и здесь все в порядке. Дело в том, что отношение $\Delta x'/\Delta t' = u'$ не является истинной скоростью тела в системе K' .

На минуту отвлечемся от наших абстрактных рассуждений. Предположим, что Вы решили узнать, с какой средней скоростью способны пробежать расстояние 5 км. У начала и конца маршрута стоят Ваши товарищи с часами. Вы начали бежать ровно в двенадцать по часам стоящего на старте. Подбежав к финишу, от второго приятеля узнаете, что прибыли в двенадцать часов и десять секунд. Неужели средняя скорость пробега была 0,5 км/с и побиты все мировые рекорды? Конечно, нет. Просто Ваши товарищи не проверили свои часы, не синхронизировали их. Узнав у кого из них часы не в порядке и введя соответствующие поправки, можно найти истинное время пробега. Возвращаясь к системе K' , вспомним, что там, кроме подобной ситуации со временем, еще и $\Delta x' \neq l$ (см. (12)). Истинная скорость в системе K' есть, очевидно

$$u' = \frac{l}{\Delta t_0} \quad (14)$$

Согласно (9) $\Delta t_0 = \sqrt{1 - v^2/c^2} \Delta t'$, где $\Delta t' = t'_2 - t'_1$, причем t'_2 и t'_1 измерялись по одним часам и в том же месте системы K' . В нашем случае, при вычислении скорости, t'_2 и t'_1 — показания двух часов в разных местах пространства K' , поэтому необходимо иметь ввиду, что часы не являются синхронными и ввести поправку $\delta t' = \frac{\Delta x' v}{c^2(1 - v^2/c^2)}$. Тогда

$$\Delta t_0 = \left(\Delta t' - \frac{\Delta x' v}{c^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right)} \right) \cdot \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \quad (15)$$

Подставляя в (14) значение l из выражения (12) и Δt_0 из (15), получим

$$u' = \frac{\Delta x'}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right) \left(\Delta t' - \frac{\Delta x' v}{c^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right)} \right)}.$$

Разделив числитель и знаменатель правой части на $\Delta t'$, после простых преобразований, получим,

$$u' = \frac{\Delta x' / \Delta t'}{1 - \frac{v^2}{c^2} - \frac{\Delta x'}{\Delta t'} \cdot \frac{v}{c^2}}.$$

Учитывая, что $\Delta x' / \Delta t' = u - v$, окончательно записываем:

$$u' = \frac{u - v}{1 - \frac{uv}{c^2}}.$$

Таким образом, мы получили обычную релятивистскую формулу преобразования скорости.

Выводы

Таким образом, по форме записи более сложные преобразования Лоренца физически оказываются более простыми, чем преобразования Галилея. Отличие системы отсчета, которое получается при преобразовании Галилея в 4-мерном пространстве-времени от декартовой, получаемой при преобразовании Лоренца, — неортогональность оси времени к пространственным осям с вытекающими отсюда последствиями.

Литература

1. *Тейлор Э., Уилер Дж.* Физика пространства-времени. — М.: Мир, 1971. — 7 с.
2. *Мицкевич Н. В.* Физические поля в общей теории относительности. — М.: Наука, 1969. — 329 с.
3. *Moller C.* The Theory of Relativity. — Oxford, 1952.

¹ студентка 5 курсу фізико-математичного факультету, ДДПУ

² доктор фізико-математичних наук, завідувач кафедри фізики, ДДПУ

³ кандидат фізико-математичних наук, асистент кафедри вищої математики і фізики,
Керченський державний морський технологічний університет

e-mail: alyonasergeevna@bk.ru

ВИМІРЮВАННЯ ПИТОМОГО ОПОРУ НАПІВПРОВІДНИКА ЧОТИРЬОХЗОНДОВИМ МЕТОДОМ

У статті розглянута методика вимірювань і обчислювання питомого опору напівпровідників, для яких можна забезпечити контакти з поверхнею без інжекції носіїв заряду в об'єм. Наведені формули для обчислення опору об'ємних кристалів і тонких пластин, які використовуються для інтегральних схем.

Ключові слова: *питомий опір, зонди, потенціал, напівпровідник.*

Вступ

Чотирьохзондовий метод вимірювання питомого опору напівпровідників є найпоширенішим. Крім високих метрологічних показників перевага чотирьохзондового методу полягає в тому, що для його застосування не потрібно створення омичних контактів до зразка, можливе вимірювання питомого опору об'ємних кристалів найрізноманітнішої форми і розмірів, а також питомого опору шарів напівпровідникових структур. Умовою для його застосування з точки зору форми зразка є наявність плоскої поверхні, лінійні розміри якої перевершують лінійні розміри системи зондів.

Основна частина

Розглянемо теоретичні основи чотирьохзондового методу вимірювання питомого опору стосовно до зразка, який являє собою напівнескінченний об'єм, обмежений плоскою поверхнею.

На плоскій поверхні зразка вздовж прямої лінії розміщені чотири металевих зонди (рис.1) з малою площею вістря, відстані між якими l_1, l_2, l_3 . Через два зовнішніх зонди 1 і 4 пропускають електричний струм I_{14} , на двох внутрішніх зондах 2 і 3 вимірюють різницю потенціалів U_{23} .

За виміряними значеннями різниці потенціалів між зондами 2 і 3 та струму, що протікає через зонди 1 і 4, можна визначити питомий опір зразка.

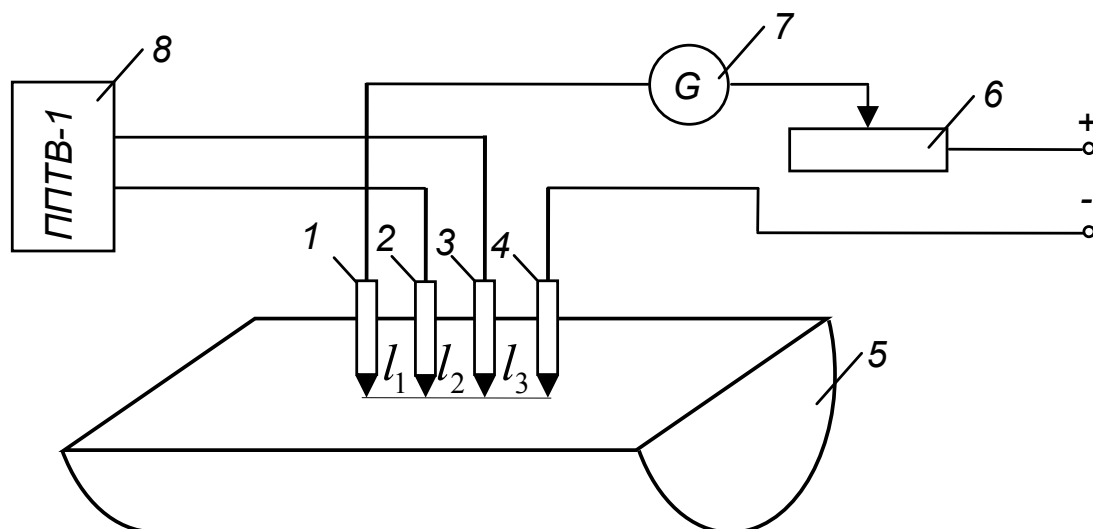


Рис. 1: Схема вимірювання питомого опору напівпровідникових матеріалів чотирьохзондовим методом;
1,2,3,4 – зонди, 5 – зразок напівпровідника, 6 – реостат, 7 – гальванометр, 8 – потенціометр

Щоб знайти аналітичний зв'язок між питомим опором ρ , струмом I_{14} і напругою U_{23} , необхідно спочатку вирішити більш просту задачу, пов'язану з протіканням струму через окремий точковий зонд, що знаходиться в контакті з плоскою поверхнею напівпровідникового зразка напівнескінченного об'єму (рис.1). Так як просторовий розподіл електричного потенціалу $U(r)$ у зразку має сферичну симетрію, то для його визначення досить розв'язання рівняння Лапласа у сферичній системі координат, в якому залишено лише член, що залежить від r , $\Delta U(r) = \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dU}{dr} \right) = 0$ за умови, що потенціал в точці $r = 0$ позитивний і прагне до нуля при дуже великих r . Інтегрування цього рівняння з урахуванням зазначених граничних умов дозволяє отримати наступне рішення: $U(r) = -C/r$. Константу інтегрування можна обчислити з умови для напруженості електричного поля \mathcal{E} при деякому значенні $r = r_0$:

$$\mathcal{E}(r_0) = - \left. \frac{dU(r)}{dr} \right|_{r=r_0}.$$

Оскільки густина струму, що протікає через півсферу радіусом r_0 , $j = \frac{I}{(2\pi r_0^2)}$, а відповідно до закону Ома $j = \frac{\mathcal{E}}{\rho}$, то $\mathcal{E}(r_0) = \frac{I\rho}{(2\pi r_0^2)}$. Остаточного отримаємо:

$$U(r) = \frac{I\rho}{(2\pi r)}. \quad (1)$$

Отже маємо, що розподіл потенціалу буде таким же, коли форма контакту зонда з поверхнею зразка має вигляд напівсфери. Нехай радіус контакту дорівнює r_1 . Тоді електрична напруга на зразку дорівнює електричному потенціалу зонда:

$$U(r_1) = \frac{I\rho}{(2\pi r_1)}. \quad (2)$$

З порівняння напруги на приконтактному шарі товщиною $r_2 - r_1$

$$U(r_1) - U(r_2) = \frac{I\rho}{(2\pi)} \frac{r_2 - r_1}{r_1 \cdot r_2}$$

і напруги на зразку (2) випливає, що основна зміна потенціалу відбувається поблизу зонда. Наприклад, при $r_2 = 10r_1$ напруга на зразку перевершує напругу на шарі товщиною $r_2 - r_1$ всього лише на 10%. Це означає, що значення протікаючого через зонд струму визначається головним чином опором приконтактної області, протяжність якої тим менша, чим менше радіус контакту.

Лінійне розташування зондів. Сформулюємо припущення, на яких заснований чотирьохзондовий метод вимірювання питомого опору:

- 1) зонди розташовані на плоскій поверхні однорідного ізотропного зразка напівнескінченного об'єму;
- 2) зонди мають контакти з поверхнею зразка в точках, які розташовані вздовж прямої лінії;
- 3) інжекція носіїв заряду в об'єм зразка відсутня.

За принципом суперпозиції електричний потенціал в будь-якій точці зразка дорівнює сумі потенціалів, створюваних у цій точці струмом кожного зонда. При цьому потенціал має позитивний знак для струму, втікаючого в зразок (зонд 1), і негативний знак для струму, що витікає з зразка (зонд 4). Для системи зондів, відстані між якими l_1, l_2, l_3 , потенціали вимірювальних зондів 2 і 3

$$U_2 = \frac{I_{14}\rho}{2\pi} \left(\frac{1}{l_1} - \frac{1}{l_2 + l_3} \right);$$

$$U_3 = \frac{I_{14}\rho}{2\pi} \left(\frac{1}{l_1 + l_2} - \frac{1}{l_3} \right);$$

Різниця потенціалів

$$U_{23} = U_2 - U_3 = \frac{I_{14}\rho}{2\pi} \left(\frac{1}{l_1} - \frac{1}{l_2 + l_3} - \frac{1}{l_1 + l_2} + \frac{1}{l_3} \right). \quad (3)$$

Згідно (3), питомий опір зразка

$$\rho = \frac{2\pi}{\frac{1}{l_1} - \frac{1}{l_2+l_3} - \frac{1}{l_1+l_2} + \frac{1}{l_3}} \frac{U_{23}}{I_{14}}.$$

Якщо відстані між зондами однакові, тобто $l_1 = l_2 = l_3 = S$, то

$$\rho = 2\pi S \frac{U_{23}}{I_{14}} \quad (4)$$

Використовуючи інші комбінації включення струмових і потенціальних зондів, можна отримати аналогічні вирази для питомого опору, які відрізняються від (4) значеннями числових коефіцієнтів. При вимірюванні питомого опору тонких напівпровідникових пластин різної товщини необхідно вводити поправку, яка враховує товщину зразка. У цьому разі формула має вигляд:

$$\rho = \frac{\pi}{\ln 2} d \frac{U}{I} f\left(\frac{d}{S}\right),$$

де $f\left(\frac{d}{S}\right)$ — поправка на товщину пластин, d — товщина зразка в мм. Числові значення поправки наведені у таблиці 1

Таблиця 1. Значення поправки для різних товщин зразка

$\frac{d}{s}$	0,4	0,5	0,5555	0,625	0,8333	1,0	1,25	1,66	2,0
$f\left(\frac{d}{s}\right)$	0,9995	0,9974	0,9948	0,9898	0,96	0,92	0,849	0,7225	0,6336

Особливістю використання даного експерименту було те, що зразки Ge та Si після вирізання алмазним диском шліфувались мікропорошками АСМ-5, АСМ-1, та хімічно полірувались у водному розчині HNO_3 і HF в об'ємному співвідношенні 5 : 3 для видалення дефектів після вирізання. Для усунення можливої інжекції носіїв заряду із зондів використовували деформування необхідної поверхні зразка при одночасному ультразвуковому опроміненні. Така дія призводить до створення у приповерхневому шарі товщиною до 10 мкм дефектів структури, що мають високу швидкість поверхневої рекомбінації і запобігають інжекції [8].

Висновки

У даній роботі студентка навчилася виготовляти вольфрамкові зонди для чотирьохзондової голівки, користуватись потенціометром ППТВ-1, виконувати вимірювання струму і різниці потенціалів, розраховувати питомий опір зразків германію та визначати похибки.

На монокристалах кремнія і германія були використані зонди з фосфористої бронзи, алюмінію або вольфрамові зонди із спеціальним покриттям електролітичним способом Ni, Ag, Ga, In. Для усунення інжекції носіїв заряду із зонда в об'єм напівпровідника зразки деформували стисканням при 300 К з одночасним ультразвуковим опроміненням і тим самим вводили дефекти структури на глибину до 10 мкм.

Література

1. Батавин В.В., Концевой Ю. А., Федорович Ю. В. Изменение параметров полупроводниковых материалов и структур. — М. : Радио и связь, 1985. — 264 с.
2. Бонч-Бруевич В. Л., Калашников С. Г. Физика полупроводников. — М. : Наука, 1977. — 674 с.
3. Добровольский В. Н., Литовченко В. Г. Перенос электронов и дырок у поверхности полупроводников. — К. : Наук. думка, 1985. — 192 с.
4. Зеегер К. Физика полупроводников. — М. : Мир, 1977. — 615 с.
5. Ковтонюк Н.Ф., Концевой Ю. А. Измерение параметров полупроводниковых материалов. — М. : Высш. шк., 1969. — 432 с.
6. Смит Р. Полупроводники. — М. : Мир, 1982. — 558 с.
7. Стриха В. И., Ветров А. П. Применение ЭВМ в физическом эксперименте. — К. : Вища шк. Головное изд-во, 1979. — 86 с.
7. Уколов А.И. Измерения времени жизни неосновных носителей заряда в приповерхностном слое монокристаллического Ge зондовым методом / А.И. Уколов, В.А. Надточий, Н.Н. Голоденко // Вісник Харківського національного ун-ту, серія «Фізика». — 2011. — №962, вип. 15. — С. 63–66.

Olhova A.S., Nadtochy V.O., Ukolov O.I

Donbas State Teachers' Training University, Slavyans'k, Ukraine.

Dimension of semiconductor specific resistance by fourth-probes method

Methodology of dimension and calculation of semiconductor specific resistance for what contacts with surface without discharge's carrier injection in volume are searched in the article. Formulas of resistance calculation of volume crystals and thin plates which used for integral diagrams are cited.

Keywords: *specific resistance, probes, potential, semiconductor.*

¹ студентка 5 курса физико-математического факультета, ДГПУ

² доктор физ.-мат. наук, профессор, заведующий кафедрой физики, ДГПУ

e-mail: Alena-Demchenko1989@mail.ru

ФИЗИЧЕСКИЕ МЕХАНИЗМЫ РАЗРУШЕНИЯ КОВАЛЕНТНЫХ КРИСТАЛЛОВ ПРИ ПОНИЖЕННЫХ ТЕМПЕРАТУРАХ

В работе кратко рассмотрены основные положения теорий хрупкого разрушения ковалентных полупроводников и в том числе некоторые результаты экспериментов, выполненные на кафедре физики.

Ключевые слова: монокристалл, германий, разрушение, дефекты структуры.

Введение

В настоящее время нет достаточно полной теории хрупкого разрушения полупроводников, отражающей детали микромеханизма разрушений. Еще сравнительно недавно [1] существовало широко распространенное мнение о свойствах германия и кремния, как о чрезвычайно хрупких материалах при температурах 300-400К. Теоретические представления развивались, в основном, для таких твердых тел, как стекла и некоторые металлы. Хрупкое разрушение происходит в том случае, если предел прочности материала оказывается ниже предела упругости. В литературе [2 – 6] известны теории хрупкого разрушения Поляни, Коттрелла, Гриффитса, Стро и Журкова.

Основная часть

Простейший метод оценки теоретической прочности был предложен Поляни. В этом методе предполагается, что для осуществления разрыва кристалла необходимо приложить такое напряжение, которое способно увеличить расстояние между атомными плоскостями на величину порядка параметра решетки a . Полученные значения теоретической прочности для таких материалов, как медь и серебро оказались равными $\sigma_0 \approx 0,6 \cdot 10^{10}$ Па.

Определение σ_0 по теплоте сублимации (испарения) дает также близкие значения для указанных выше материалов.

Некоторые авторы [7] определяли σ_0 из сил межмолекулярного взаимодействия. Для этого привлекалась зависимость потенциальной энергии $U(x)$ и силы взаимодействия $f(x)$ между частицами твердого тела с изменением расстояния между ними. Сравнение теоретической прочности σ_0 , вычисленной тремя разными методами, показывает, что все они приводят примерно к одним и тем же значениям, по порядку величины равным $0,1E$, где E – модуль упругости кристалла. При этом значение σ_0 представляет огромную величину в интервале $10^9 - 10^{10}$ Па.

Реальная, или техническая прочность σ_p кристаллов, которая важна в технике, оказалась на 2 – 3 порядка ниже их теоретической прочности σ_0 . В настоящее время принято считать, что такое различие между σ_p и σ_0 обусловлено наличием в реальных твердых телах всевозможных дефектов, в частности микротрещин, выделений второй фазы, снижающих прочность тел. Впервые такая точка зрения была высказана Гриффитсом [2], которому и принадлежит метод расчета технической прочности кристаллов. В постановке Гриффитса задача сводилась к определению растягивающего напряжения, возникающего в хрупком теле и приводящего к необратимому расширению краев внутренней трещины. Критические оценки этой теории различными экспериментаторами показали её несостоятельность для полупроводниковых кристаллов при сравнении с результатами эксперимента. В большом обзоре О.Джонсон и П.Гиббс [7] констатировали, что на величину σ_p монокристаллического германия (Ge) не влияет: метод выращивания, плотность дислокаций в интервале значений $10^3 - 10^8$ см⁻², испытания в различных кислотах, щелочах, растворителях и освещение внешним источником. Это оказалось необъяснимым, поскольку внешняя среда должна изменять поверхностную энергию γ_p кристалла и значение $\sigma_p = \sqrt{2E\gamma_p/\pi a}$, где a – межатомное расстояние. Можно оправдать независимость σ_p от плотности дислокаций, поскольку они неподвижны в интервале температур 300 - 400К и основным тормозом для их движения являются высокие значения потенциала Пайерлса, свойственные для ковалентных кристаллов. При этом дислокации не способны накапливаться и локально создавать концентрацию напряжений для разрыва межатомных связей.

Выход из такого затруднительного положения, связанного с применением теории Гриффитса, можно найти, используя новые результаты, полученные в работах [8, 9]. Так, в работе [8] было установлено с использованием оптической и электронной микроскопии, рентгеновской топографии, электрических измерений структурно-чувствительных параметров, что приповерхностные слои кристаллов Ge, Si, толщиной до 30 – 50 мкм обладают

аномально пластичными свойствами, и в них проявляется диффузионный массоперенос вещества при пониженных температурах. Внутренняя, более прочная часть кристалла, в которой не проявляется пластичность при низких температурах, оказывается при этом защищенной от воздействия внешних факторов приповерхностным пластичным слоем. Поэтому в целом кристалл может только тогда разрушиться, если влияние внешних факторов, как минимум, распространяется с поверхности до границы раздела с очень прочной объемной частью кристалла. В данном случае имеется в виду воздействие поверхностно-активной среды, освещения, а также зародышевых трещин от контакта с деформирующим устройством. Активными концентраторами напряжений могут быть также выделения второй фазы типа GeO_x , всегда существующие в выращенных монокристаллах германия.

Выводы

Рассмотрены методы оценки теоретической прочности твердых тел, указаны существенно большие её значения (на 1 – 2 порядка величины) по сравнению с технической прочностью и причины такого различия. Предложено возможное объяснение несоответствия σ_p в теории Гриффитса с экспериментальными значениями.

Литература

1. Батавин В.В., Концевой Ю. А., Федорович Ю. В. тур. — М.: Радио и связь, 1985. — 264 с.
2. Концевой Ю.А. Пластичность и прочность полупроводниковых материалов и структур / Ю.А. Концевой, Ю.М. Литвинов, Э.А. Фаттахов. — М.: Радио и связь, 1982. — 239 с.
3. Stroh A.N. The formation of cracks as a result of plastic flow // Proc. Roy. Soc. — 1954. — Vol. 223, №1154. — P. 404–414.
4. Cottrell A.N. Theory of brittle fracture in steel and similar materials // Trans. Am. Inst. Metall. Petrol. Engrs. — 1958. — V. 212. — P. 192–203.
5. Журков С.Н. Временная зависимость прочности твердых тел / С.Н. Журков, Б.Н. Нарзуллаев // ЖТФ. — 1953. — Т.23, вып.10. — С. 1677–1689.
6. Журков С.Н. Проблема прочности твердых тел // Вестн. АН СССР. — 1954. — Т. 11. — С. 78–82.
7. Джонсон О. Хрупкое разрушение германия / О. Джонсон, П. Гиббс; пер.с англ. З.Г. Фридмана // Разрушение твердых тел. — М. : Металлургия, 1967. — С. 122–145.

8. *Надточий В.А.* Микропластичность алмазоподобных кристаллов (Si, Ge, GaAs, InAs) / Надточий В.А. Дис. ... д-ра физ.-мат. наук: 01.04.07. — Харьков, 2006. — 471 с.
 9. *Корсуков В.Е.* Зарождение разрушения в поверхностных слоях монокристаллов Ge и Si / В.Е. Корсуков, С.А. Князев, А.С. Лукьяненко [и др.] // ФТТ. — 1996. — Т.38, №1. — С. 113–121.
-

Demchenko A.S., Nadtochiy V.A.

Donbas State Teachers' Training University, Slavyans'k, Ukraine.

Physical mechanisms of covalent crystals fracture at low temperatures

The main theses of covalent semiconductor fracture theory and some experiments results which were completed on the physics department are scrutinized in the article.

Keywords: *monocrystal, germanium, fracture, structure defect.*

ІНФОРМАТИКА ТА МЕТОДИКА ЇЇ ВИКЛАДАННЯ

УДК 373.5.018.43 : 51

Глазова В.В., Весела К.В.

¹ кандидат педагогічних наук, доцент кафедри геометрії та МВМ, ДДПУ

² студентка 5 курсу фізико-математичного факультету, ДДПУ

e-mail: veraglazova@ukr.net, karina.veselaya@mail.ru

ЕЛЕМЕНТИ ДИСТАНЦІЙНОГО НАВЧАННЯ ПРИ ВИВЧЕННІ МАТЕМАТИКИ В ШКОЛІ

У статті розглядаються сучасні педагогічні проблеми дистанційного навчання, зокрема впровадження елементів дистанційного навчання в освітній процес загальноосвітніх закладів. Аналізується система дистанційного навчання Moodle та можливості її використання при вивченні математики в школі.

Ключові слова: *дистанційне навчання, елементи навчання, система дистанційного навчання.*

Вступ

Інтенсивний розвиток інформаційно-комунікаційних технологій в ХХІ ст. призвів до виникнення такої проблеми, як модернізація системи освіти. Державна національна програма «Освіта. Україна ХХІ століття» передбачає запровадження науково-методичних досягнень та сучасних педагогічних технологій в освітній процес, створення новітньої системи інформаційного забезпечення освіти.

У сучасному суспільстві спілкування все частіше набуває віртуального змісту. Сучасні учні активно користуються мобільними пристроями, електронною поштою, чатами, форумами для комунікації та спілкування. Важливим завданням є навчання учнів за короткий термін отримувати, перетворювати, засвоювати і використовувати в житті велику кількість інформації. Отже, можливості, що надаються Інтернетом і спілкуванням на відстані, дають основу для формування нового способу навчання школярів, яке отримало назву дистанційне навчання.

© Глазова В.В., Весела К.В., 2015

Завдяки сучасним інформаційно-комунікаційним технологіям дистанційна форма навчання дає можливість і вчителям, і учням розв'язувати різні практичні та теоретичні завдання, швидко і зручно спілкуватися, працювати у вільний для себе час, знаходячись на відстані від навчального закладу.

Розробці концептуальних педагогічних положень про дистанційне навчання значну увагу приділяли вітчизняні та зарубіжні вчені О. Андрєєв, В. Биков, Д. Іванченко, В. Кухаренко, Н. Морзе, Є. Полат, Є. Смирнова-Трибульська, П. Стефаненко А. Хуторський та ін. Методичним та дидактичним проблемам і перспективам використання сучасних інформаційно-комунікаційних технологій у навчальному процесі присвячено роботи Ю. Горошка, Л. Грамбовської, М. Жалдака, О. Жильцова, Т. Крамаренко, В. Монахова, С. Ракова, Ю. Рамського, С. Семерікова, О. Скафи, В. Снегурової, Ю. Триуса, С. Шокалюк та ін.

Метою статті є створення уявлення про елементи дистанційного навчання як складові освітнього процесу та можливості використання їх при вивченні математики в школі.

Основна частина

Через різні підходи щодо розуміння поняття «дистанційне навчання» науковці наводять велику кількість його визначень. За одним з таких підходів дистанційне навчання означає форму організації і реалізації освітнього процесу, за якою його учасники здійснюють навчальну взаємодію принципово і переважно екстериторіально (тобто, на відстані, яка не дозволяє і не передбачає безпосередню навчальну взаємодію учасників віч-на-віч, інакше, коли учасники територіально знаходяться поза межами можливої безпосередньої навчальної взаємодії і коли у процесі навчання їх особиста присутність у певних навчальних приміщеннях навчального закладу не є обов'язковою) [4, с. 9].

У навчальних закладах України навчання на відстані представлено у вигляді технологій дистанційного навчання, що закріплені законодавчою базою. Для забезпечення такого навчання, вдосконалення його структури шляхом розширення мереж і навчальних центрів, забезпечення контролю якості за рахунок впровадження в практику навчальних курсів і технологій, розвитку дистанційної форми навчання в системі середньої освіти наказом Міністерства освіти і науки України затверджено Положення про дистанційне навчання [2].

Під час використання в освітньому процесі загальноосвітньої школи дистанційних форм педагогічна взаємодія, методика навчання, організація процесу навчання набувають суттєвих змін.

Існують дві основні моделі дистанційного навчання учнів, які побудовані на основі комп'ютерних мережних технологій:

- позбавлена безпосереднього спілкування учителя з учнями;
- передбачає обов'язкову безпосередню взаємодію педагога і учнів.

Перша може бути використана у загальноосвітніх навчальних закладах, наприклад, під час карантину [1, с. 45].

Щоб організувати дистанційне навчання школярів необхідно мати наступні основи:

- індивідуальний підхід та відкритість при організації навчального процесу;
- закріплення за школярем вчителя-тьютора, який виконує роль вчителя, керівника й консультанта та веде спілкування за допомогою інформаційно-комунікаційного зв'язку, зокрема Інтернету (форумів, чатів, онлайн-конференцій тощо);
- створення відповідних умов для навчання учня, який бажає опанувати математичні науки для оволодіння міжнародним досвідом.

Важливими елементами дистанційного навчання для шкільної освіти є систематичний комплекс програмно-методичних засобів; багатофункціональність; нова дидактична якість програмно-методичного забезпечення мультимедійними засобами; адаптивність, що спирається на наявні навчально-методичні програми; апаратні й програмні засоби навчання, які забезпечують роботу вчителя й учня; технологічність змісту (застосування відеоматеріалів, аудіоматеріалів, мережі Інтернет тощо).

Найголовнішим елементом у системі дистанційного навчання є його зміст і форма реалізації. Зміст — це розробка продуманих та чітких навчальних програм, посібників, підручників, системи самоперевірки, методичних розробок; форма реалізації — набагато ширша, ніж просте використання комп'ютерів та інших технічних засобів навчання.

Реалізація дистанційного навчання математики може відбуватися у вигляді послідовностей технологічних циклів: підготовчого, навчального, заключного.

Підготовчий цикл забезпечує включення учнів у процес дистанційного навчання математики на основі визначення індивідуалізованих цілей діяльності, забезпечення комфортного входження учнів в навчальний колектив та реалізації процедури знайомства; конструювання індивідуальних траєкторій освоєння навчального математичного змісту.

Навчальний цикл відображає структуру навчальної математичної діяльності; передбачає обов'язкову взаємодію вчителя та учнів і забезпечує засвоєння учнями математичного змісту у відповідності із загальними та індиві-

дуалізованими цілями, здійснення контролю і діагностики з метою корекції подальшої траєкторії навчання.

Завершальний цикл орієнтований на перевірку досягнутого рівня сформованості системи математичних знань і вмінь [3].

Існує велика кількість систем дистанційного навчання, які дозволяють створювати дистанційні курси для отримання освіти. До найпопулярніших систем дистанційного навчання можна віднести наступні: Moodle, Lotus, Learning, мережева освітня платформа e-University, віртуальне навчальне середовище Веб-клас, система дистанційного навчання АГАПА тощо.

Усі ці системи мають спільну мету — програмне забезпечення дистанційного навчання. Але відрізняються технічним забезпеченням, наявністю різних параметрів та компонентів, ціною категорією, широтою використання, потребами до устаткування, які можуть бути платними. Системи дистанційного навчання повинні дозволяти користувачам виконувати елементарні функції, серед яких завантаження, редагування текстових документів, збереження їх на сервері та обмін документами, перегляд і прослуховування навчальних ресурсів, зокрема мультимедійних, проводити навчання в синхронному та асинхронному режимах за допомогою чатів, форумів, e-mail тощо.

Система підтримки дистанційного навчання Moodle є зручним програмним засобом для створення та підтримки навчального процесу в умовах дистанційного і змішаного навчання, оскільки надає своїм користувачам велику кількість можливостей:

1. Через мережу учень отримує навчальні матеріали, для цього використовуються такі елементи: Ресурс, Урок, Глосарій, Семінар та ін.
2. Забезпечення та підтримка можливості взаємного спілкування як між учнями та вчителем, так і між учнями, які беруть участь у курсі. Для спілкування може бути використаний синхронний режим, який потребує застосування програм-комунікаторів, чатів, внутрішнього обміну повідомленнями, та асинхронний режим, у якому контакт здійснюється з використанням e-mail, форуму, завдання та ін.
3. Документування і збереження роботи, результатів дискусій, заданих питань та отриманих відповідей.
4. Надання інструментів, які можуть здійснювати поточний контроль та оцінювати досягнення окремих учасників та доставку зворотних даних кожної теми, зокрема оцінки й відгуки на їх роботи. Для цього використовують Форум, Завдання, Журнал, Оцінки, Звіти тощо.

5. Надання можливості аналізу участі й активності окремих учасників курсу, аналіз часу, який учень витратив на роботу з навчальними матеріалами; оцінка труднощів, які виникли в учасника або групи при вивченні тієї чи тієї теми навчального курсу; швидка реакція на проблеми, які виникли, наприклад, при пересиланні додаткових матеріалів.

На базі системи дистанційного навчання Moodle, було розроблено курс для учнів 10 класу «Тригонометричні функції». Для спілкування з учнями були використані елементи, які пропонує дана система — «Чат», «Форум»; для отримання теоретичної інформації — «Глосарій», «Урок», «Файл», «Сторінка»; для контролю знань учнів — «Завдання», «Тест» та інші (рис. 1).

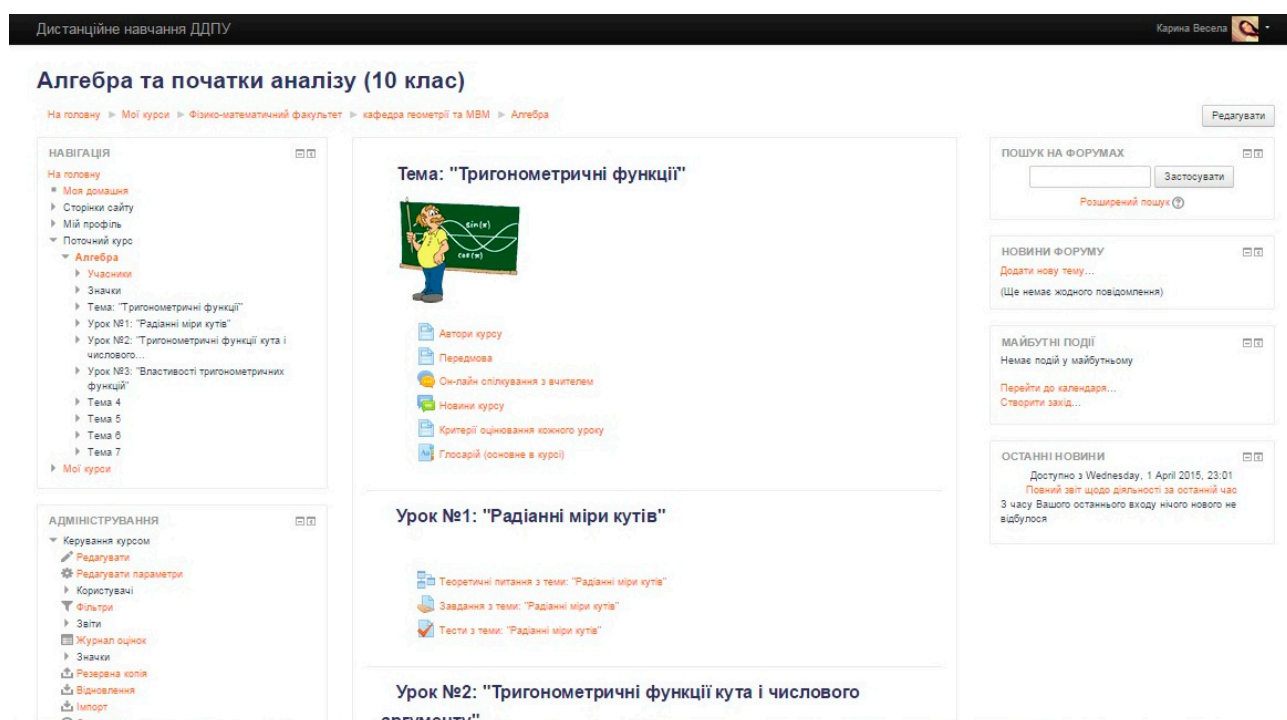


Рис. 1: Приклад дистанційного курсу у Moodle

В силу інтерактивного стилю спілкування і оперативного зв'язку в дистанційному навчанні відкривається можливість більш індивідуалізувати процес навчання. Вчитель в залежності від успіхів учня може застосовувати індивідуальну методику навчання, пропонувати йому додаткові блоки навчальних матеріалів, посилання на інформаційні ресурси. Фактор часу стає обов'язковим, учень може також вибрати свій темп вивчення матеріалу, а значить, може працювати за індивідуальною освітньою програмою. У навчанні математики ця проблема займає особливе місце, що пояснюється специфікою цього навчального предмета.

Система, налаштована учителем, підбає про те, щоб перевести учня на наступний рівень вивчення матеріалу або повернути до попереднього за умови, що учень повністю не оволодів знаннями. Для учня це можливість вивчення предмета на новому, сучасному рівні. Математика є однією з найскладніших шкільних дисциплін і викликає труднощі у багатьох школярів. Сьогодні необхідна така організація навчального процесу, яка дозволила б враховувати відмінності між учнями і створювати оптимальні умови для ефективної навчальної діяльності всіх школярів.

Висновок

Система Moodle може бути використана для підтримки всіх етапів планування, адміністрування та реалізації процесу дистанційного навчання математики. Управління системою та створення курсів, їх повна публікація з простим інтерфейсом не вимагає спеціальних інформаційно-комунікаційних компетентностей з боку вчителя. Основна задача, яка стоїть перед дистанційним навчанням, полягає в тому, що використовуючи інструменти інформаційно-комунікаційних технологій, створити курси, які б приносили користь освітньому процесу на відстані.

Література

1. Організація середовища дистанційного навчання в середніх загальноосвітніх навчальних закладах : посіб. / [Богачков Ю. М., Биков В. Ю., Пінчук О. П. та ін.] ; наук. ред. Ю. М. Богачков. — К.: Педагогічна думка, 2012. — 160 с.
2. Положення про дистанційне навчання. Режим доступу <http://zakon2.rada.gov.ua/laws/show/z0703-13>.
3. *Снегурова В. И.* Методическая система дистанционного обучения математике учащихся общеобразовательных школ : автореф. дис. на соискание научн. степени докт. пед. наук : 13.00.02 / Снегурова Виктория Игоревна – Санкт-Петербург, 2010. — 46 с.
4. Технологія створення дистанційного курсу : [навч. посіб.] / За ред. В. Ю. Бикова та В. М. Кухаренко — К. : Міленіум, 2008. — 324 с.

¹ старший преподаватель кафедры алгебры, ДГПУ

e-mail: stepkin.andrey@rambler.ru

Распознавание графов с помощью трёх агентов

Рассматривается задача распознавания графов с помощью трёх агентов. Два агента-исследователя перемещаются по графу, считывают и изменяют метки в вершинах, ребрах и инциденторах графа. Агент-экспериментатор получает от этих агентов информацию об их перемещении и метках, и на этой основе распознает исследуемый граф с точностью до отметок на графе. Предложен алгоритм распознавания квадратичной (от числа вершин графа) временной сложности, квадратичной емкостной сложности и коммуникационной сложности равной $O((n^2) \cdot \log(n))$, при этом верхняя оценка числа ребер, посещенных агентами исследователями равна $O(n^2)$. Для распознавания агентам требуется по две различные краски (всего три краски). Алгоритм основан на методе обхода графа в глубину.

Ключевые слова: *распознавание графов, коллектив агентов*

Введение

В настоящее время существуют огромное множество сред, требующих изучения [1]. Это является одной из причин активного развития такого направления как теория дискретных динамических систем [2]. Одной из эффективных моделей описания и изучения сред явилась модель предложенная В. М. Глушковым — модель взаимодействия управляющей и управляемой систем. Взаимодействие этих систем часто представляется как процесс перемещения управляющего автомата по графу управляемой системы. Такое представление привело к обширному и интенсивно развивающемуся исследованию поведения автоматов в лабиринтах, заданных в виде графов [2-6].

Исследованию графа при помощи одного агента посвящено много работ, при этом остается малоисследованно распознавание графа при помощи коллектива агентов. Что делает актуальной задачу проведения систематического исследования экспериментов по распознаванию графа несколькими агентами. При таком распознавании основной проблемой является проблема эффективности их взаимодействия, с целью уменьшения затрат времени и памяти на распознавание. Требуется разработать такой алгоритм движения, при котором блуждающие агенты не мешают друг другу, не дублируют работу друг друга и ищут новые подграфы для распознавания, после распознавания своего подграфа.

Основная часть

В работе рассматривается коллектив из трех агентов: два агента-исследователя блуждают по графу, перекрашивают его элементы, записывают номера в вершины графа и передают полученную информацию агенту-экспериментатору. Агенты-исследователи A и B имеют конечную на каждом шаге, но растущую память. Взаимодействие агентов-исследователей осуществляется за счет окраски элементов графа, нумерации вершин графа и обмена информацией через агента-экспериментатора. Алгоритм распознавания основан на методе обхода графа в глубину. Разработана процедура, которая позволяет агентам после завершения распознавания своего подграфа искать новые подграфы для распознавания. Это решило проблему простоя агента, в случае, когда начальное расположение агентов не позволило распознавать граф в равных частях и одному из агентов приходилось стоять, пока второй агент продолжал работу над распознаванием оставшегося подграфа, который мог в разы превышать подграф, распознанный простаивающим агентом. Поэтому начальное расположение агентов сильно влияло на время выполнения алгоритма, а в некоторых случаях приводило к тому, что весь граф (кроме вершины, в которой находился второй агент) распознавался одним агентом.

В начале работы все элементы графа окрашены в белый цвет, агенты A и B помещаются в произвольные несовпадающие вершины графа G , нумеруют их и передают номера агенту-экспериментатору, который помещает их во множество вершин V_H . Агенты-исследователи передвигаются по графу из вершины v в вершину u по ребру (v, u) , могут изменять окраску вершин v , u , ребер (v, u) , инциденторов $((v, u), v)$, $((v, u), u)$, а так же записывают в вершины номера. Находясь в вершине v , агент-исследователь воспринимает метки всех элементов окрестности $Q(v)$ и номера смежных с ней вершин, на основании этой информации определяет, по какому ребру будет дальше перемещаться, и как будет окрашивать элементы графа. Агент-экспериментатор может передавать сообщения агентам-исследователям, а также принимать и идентифицировать сообщения от агентов-исследователей, обладает конечной, неограниченно растущей внутренней памятью, в которой фиксируется результат функционирования агентов-исследователей на каждом шаге и, кроме того, строится представление графа G , вначале неизвестного агентам, списками ребер и вершин.

Выполняя обход графа, агенты A и B создают красный и желтый пути соответственно. Рассмотрим принцип построения агентами пути «своего» цвета. При движении в белую вершину красный (желтый) путь удлиняется, при движении назад по своему пути — укорачивается. Если агент-

исследователь вернулся в вершину, из которой начал обход графа, а в её окрестности не оказалось белых вершин, то он окрашивает эту вершину в черный цвет. Алгоритм заканчивает работу, когда красный и желтый пути становятся пустыми, а все вершины черными. Выполняя обход графа G , агенты создают нумерацию посещенных вершин. Первый раз посетив вершину агент A окрашивает её в красный цвет (агент B — в желтый цвет), записывает в память вершины соответствующий номер (полученный от агента-экспериментатора). Распознавание графа G происходит на основе созданной агентами-исследователями нумерации, путем построения графа H изоморфного G .

Предложен новый метод и алгоритм реализации этого метода, в котором агент, закончивший распознавание своего подграфа, переходит на чужой подграф и там начинает движение в поисках еще не распознанных подграфов, как можно ближе к своему расположению. Поиск начинается с той части чужого подграфа, где наименее вероятно появление в нужной вершине другого агента раньше рассматриваемого агента. Такой метод не требует дополнительных сложных вычислений и лишних шагов для поиска вершин, подобранных по какому-либо фиксированному критерию, так же не требует дополнительной информации о нахождении другого агента вблизи выбранной вершины. В случае, если вершина все же будет занята другим агентом, рассматриваемый агент либо остановится до появления других вершин, либо сразу определит следующую ближайшую подходящую вершину и начнет движение в ее направлении. Сложность же предложенного метода обусловлена сложностью поиска пути перехода в новый подграф для распознавания.

Основные результаты и выводы

Теорема 1. *Три агента, выполнив алгоритм распознавания на графе G , распознают рассматриваемый граф с точностью до изоморфизма.*

Теорема 2. *Временная сложность алгоритма распознавания равна $O(n^2)$, емкостная — $O(n^2)$, а коммуникационная — $O(n^2 \cdot \log(n))$, число переходов по ребрам, совершаемых агентами-исследователями — $O(n^3)$. При этом в алгоритме используется три краски.*

Основным результатом данного алгоритма является решение проблемы простоя агента, в случае, когда начальное расположение агентов не позволило распознавать граф в равных частях и один из агентов-исследователей завершал работу, в то время, когда второй агент продолжал работу над распознаванием оставшегося подграфа, который мог в разы превышать подграф,

распознанный завершившим работу агентом. Это, в общем случае, дает значительное преимущество при использовании двух агентов-исследователей по сравнению с алгоритмами, использующими одного агента. Предложенный алгоритм является дальнейшим развитием результатов работ [3-5].

Литература

1. *Albers S.* Exploring unknown environments / S. Albers, M.R. Henzinger // SIAM Journal on Computing. — 2000. — №29(4). — P. 1164–1188.
2. *Кудрявцев В.Б.* О поведении автоматов в лабиринтах / В.Б. Кудрявцев, Щ. Ушчумлич, Г. Килибарда // Дискретная математика. — 1992. — Т.4, №3. — С. 3–28.
3. *Dudek G.* Topological exploration with multiple robots / G. Dudek, M. Jenkin, E. Milios, D. Wilkes // In 7th International Symposium on Robotics with Application (ISORA), Anchorage, Alaska, USA. — 1998.
4. *Стёпкин А.В.* Использование коллектива агентов для распознавания графов / А.В. Стёпкин // Компьютерные исследования и моделирование. — 2013. — Т.5, №4. — С. 525–532.
5. *Стёпкин А.В.* Возможность и сложность распознавания графов тремя агентами / А.В. Стёпкин // Таврический вестник информатики и математики. — 2012. — №1 (20). — С. 88–98.
6. *Грунский И.С.* Распознавание конечного графа коллективом агентов / И.С. Грунский, А.В. Стёпкин // Труды ИПММ НАН Украины. — 2009. — Т. 19. — С. 43–52.

¹ кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри алгебри, ДДПУ

² студентка 4 курсу фізико-математичного факультету, ДДПУ

e-mail: dudchira@meta.ua

ПОРІВНЯЛЬНИЙ АНАЛІЗ ПРИКЛАДНОГО ПРОГРАМНОГО ЗАБЕЗПЕЧЕННЯ ДЛЯ ПЕРЕГЛЯДУ WEB-СТОРИНОК

Стаття присвячена пошуку найкращого браузера. І це вже не власна симпатія користувача до тієї чи іншої програми, а певною мірою отримана «експертна» оцінка, що складається з чисельних перевірених параметрів.

Ключові слова: *прикладне програмне забезпечення, браузер, Internet-технології.*

Вступ

Сьогодні усе більшого значення при вирішенні будь-яких дослідних завдань набувають такі інструменти комунікацій, як Internet та Internet-технології.

Всі користувачі працюють в тому чи іншому браузері. Але не всі знають, який з них «найкращий».

В мережі Інтернет щорічно проводяться незалежні дослідження з пошуку «найкращого браузера». У творчих дослідженнях беруть участь всі бажаючі користувачі Інтернет. До складу експертів входять люди найрізноманітніших видів діяльності, віку, навичок і здібностей.

Головним завданням нашого дослідження є визначення параметрів, за якими потрібно буде проводити опитування для виявлення «найкращого браузера».

Основна частина

Спочатку визначимо, що ми розуміємо під словами «найкращий браузер».

Як правило, той чи інший браузер володіє своїми відмінними плюсами і мінусами. Найкраще прикладне програмне забезпечення в ідеалі повинно задовольняти наступним головним вимогам:

- якість відображення інформації (коректне відображення структури сайтів, шрифтів, графіки тощо);

- швидкість роботи;
- ймовірність появи помилок при роботі браузера (у тому числі при одночасному завантаженні 20 різних сайтів);
- зручність роботи;
- безпека при передачі інформації у браузері;
- загальна ефективність роботи.

В інтернеті є багато веб-ресурсів, що пропонують на своїх сторінках різні онлайн тестування. У творчому дослідженні з пошуку найкращого браузера взяли участь всі бажаючі користувачі Internet. В грудні минулого року ми прийняли участь у такому тестуванні [2].

Були досліджені 5 різних браузерів: Internet Explorer, Mozilla Firefox, Google Chrome, Opera та Safari. Кожен з них був протестований за вказаними вище параметрами.

В ході дослідження було виявлено, що найбільшою придатністю та ефективністю при повсякденній роботі має браузер Google Chrome. На звання «найкращого» кожний зайняв своє місце.

Зазначимо, що при тестуванні враховували наявність перелічених вимог на думку користувачів. Отриманий результат виразили у відсотках і назвали коефіцієнтом ефективності.

- 5 місце. Internet Explorer (коефіцієнт ефективності — 41%).
- 4 місце. Safari (коефіцієнт ефективності — 65%).
- 3 місце. Opera (коефіцієнт ефективності — 79%).
- 2 місце. Mozilla Firefox (коефіцієнт ефективності — 88%).
- 1 місце. Google Chrome (коефіцієнт ефективності — 93%).

Крім того версія браузера Google Chrome для Windows може заощадити заряд акумуляторної батареї ноутбука під час перегляду відео на сайті YouTube. Експерименти показали, що Google Chrome забезпечує приріст часу роботи батареї до 25% за рахунок зниженого енергоспоживання під час використання GPU-прискорення.

Найчастіше, веб-браузери зберігають історію відвіданих сайтів для спрощення доступу до них у майбутньому. І ця історія локально зберігається на комп'ютері. Сам браузер ніколи не відсилає історію переглядів куди б то не було за межі персонального комп'ютера або іншого пристрою. Також можна в будь-який момент видалити всю історію переглядів веб-сторінок. Для того, щоб інформація про переглянуті сторінки не зберігалася в історії переглядів, в Google Chrome слід активувати режим інкогніто. Більше того, створювані в цьому режимі файли cookies після закриття вікон автоматично видаляються.

В цьому браузері також просто управляти запитами. Це можуть бути визначення вашого місця розташування, доступ до камери і мікрофону, спливаючі вікна і т.д.

Висновки

В результаті проведеного дослідження з пошуку «найкращого браузера» був отриманий коефіцієнт ефективності кожного з них. Порівнюючи данні у відсотках бачимо, що користувачі Internet надали перевагу Google Chrome (93%), але Mozilla Firefox отримав майже такий самий коефіцієнт ефективності (88%).

Нагадаємо, що за статистикою агентства StatCounter за 2014 рік серед повного списку браузерів лише Mozilla Firefox та Google Chrome отримали прихильність користувачів на позначці близько 25% кожний. Вже сьогодні ця відмітка для Google Chrome сягнула 48,71%.

Якщо ви ще не вирішили, який браузер обрати, радимо спробувати обидва. Виходячи з отриманих результатів, звання «найкращого браузера» цілком належить Google Chrome. Але те, що може сподобатися одному користувачеві, іншому стане незручним.

Важливо, щоб отримані результати допомогли споживачам зробити корисні висновки.

Література

1. Клинова Е. Занимательный гид по браузерам и всемирной паутине [Электронный ресурс] / Е. Клинова. — Режим доступа: <http://googlerussiablog.blogspot.com>, 2011.
2. Различные опросы на сайте [Электронный ресурс]. — Режим доступа: <http://optimakomp.ru/oprosy/>.

МЕТОДИКА ВИКЛАДАННЯ МАТЕМАТИКИ В ЗОШ ТА ВНЗ

УДК 37.091.26

Беседін Б.Б., Шевцова К.С.

¹ кандидат педагогічних наук, доцент кафедри геометрії та МВМ, ДДПУ

² студентка 5 курсу фізико-математичного факультету, ДДПУ

e-mail: besedin_boris@ukr.net, shevtsova8071993@mail.ru

ТЕСТОВА ПЕРЕВІРКА ЗНАНЬ УЧНІВ ПІД ЧАС ВИВЧЕННЯ МАТЕМАТИКИ

Стаття присвячена проблемі тестової перевірки знань учнів під час вивчення математики, пошуку шляхів вдосконалення даного методу перевірки знань і складання методичних рекомендацій щодо покращення ефективності перевірки знань учнів тестуванням на уроках математики.

Ключові слова: *тест, контроль, перевірка знань, процес навчання математики, методика.*

Вступ

Однією з цілей математики є досягнення певного рівня знань учнів. Щоб визначити результат навчання проводиться перевірка знань. Є різні способи перевірки знань. Один із них — тестовий. Використання тестів як форми поточного контролю полегшує роботу вчителя, забезпечує вимірювання об'єктивного рівня знань учнів та допомагає підготувати старшокласників до зовнішнього оцінювання. Від організації роботи учнів з тестами залежить об'єктивність оцінювання знань і загалом ефективність використання тестів у навчальному процесі.

Питанням тестової перевірки знань займались: Захарійченко Ю.О., Шкільний О.В. (розробили методичні рекомендації щодо підвищення якості тестових завдань) [2], Воскерч'ян С.М. (розглядав використання методу тестування при обліку успішності школярів) [1], Майоров А.М., Миколаєва Є.І. (займались створенням тестів для системи освіти) [3,4], Чашечнікова О.С. (вивчала проблему подолання протиріччя між вимогою об'єктивності оцінки знань учнів та необхідністю врахування їх індивідуальних особливостей) [5], Москальова О.І. [6] та інші.

© Беседін Б.Б., Шевцова К.С., 2015

Аналіз досвіду роботи над данною проблемою, анкетування, проведене серед учителів щодо використання тестового контролю показують, що процес розробки та застосування тестів вимагає вдосконалення. Серед недоліків тестової перевірки можна відмітити вгадування відповідей учнями, а також те, що не всі необхідні освітні характеристики можна визначити проводячи тестову перевірку знань. Оскільки тестовий метод перевірки знань є дуже зручним для сучасного уроку математики, то усунувши існуючі недоліки ми можемо підвищити ефективність контролю знань з математики. Розробляючи тест, вчитель повинен підходити відповідально до цього процесу, слід зважати на велику кількість аспектів, які підвищують об'єктивність оцінок, які в результаті тестування отримують учні.

Тому, **науковою проблемою статті** є пошук шляхів вдосконалення тестової перевірки знань учнів під час вивчення математики.

Основна частина

В ході аналізу психолого-педагогічної літератури було з'ясовано, що тести мають ряд переваг перед іншими методами перевірки знань учнів:

- 1) економія та більш раціональне використання часу уроку;
- 2) можливість контролю як великого обсягу матеріалу, так і окремої теми;
- 3) визначення рівня засвоєння навчального матеріалу;
- 4) знаходження індивідуальних прогалин в знаннях учнів та оперативне внесення корективів;
- 5) дисциплінування учнів, індивідуальний підхід до кожного [2].

Педагогам, які починають застосовувати тести в процесі навчання варто пам'ятати, що тестування не слід застосовувати відразу для підсумкового оцінювання. Учні необхідно підготувати до виконання тесту шляхом пояснення деяких правил роботи з тестами, бо в процесі вивчення математики учні звикають розв'язувати вправи в декілька дій, такі, що потребують деталізації та часу на роздуми. Специфікою ж тестування є інтенсивність роботи, тобто виконання великої кількості завдань за обмежений проміжок часу. По завершенню 11-го класу учні мають пройти ЗНО, що впливає на рейтинг при вступі у ВНЗ. Тобто, вміння швидко і якісно розв'язувати тестові завдання буде дуже корисним для майбутніх випускників.

Розробка якісних педагогічних тестів потребує використання наукових методів відбору змісту, теорії педагогічних вимірювань, сучасних математико-статистичних методів, що застосовуються для перевірки відповідності тесту визначеним науково обґрунтованим критеріям якості. Сучасне становище в галузі тестового контролю ускладнюється тим, що у переважній більшості викладачів немає спеціальної підготовки з методики розробки і ви-

користання педагогічних тестів.

Тому, для подолання вищезазначених проблем в процесі дослідження розроблені такі методичні принципи щодо розробки і застосування тестів у навчальному процесі:

- 1) систематичність використання;
- 2) оптимальне поєднання з іншими формами контролю знань учнів;
- 3) реалізація принципу диференціації у навчанні;
- 4) дотримання процедури проведення тестування;
- 5) використання якісно складених тестових матеріалів;
- 6) урізноманітнення форм тестових завдань (відкриті, закриті, завдання на встановлення відповідностей, встановлення послідовностей).

Висновки

На сьогоднішній день тестова перевірка знань є невід'ємною складовою частиною контролю за навчальною діяльністю учнів. Тести можна застосовувати в класах різного профілю, але вони мають бути адаптовані відповідно до критеріїв складання тестів. Застосування тестів в процесі навчання у поєднанні з іншими методами контролю знань учнів дозволяє значно оптимізувати навчальний процес.

Література

1. *Воскерчян С.М.* Про використання методу тестів при обліку успішності школярів / С.М. Воскерчян // Радянська педагогіка. — 1973. — №10. — С. 14–22.
2. *Захарійченко Ю.О.* Методичні рекомендації щодо підвищення якості створення та розв'язування тестових завдань / Ю.О. Захарійченко, О.В. Школьний // Математика в школі. — 2010. — №3. — С. 11–18.
3. *Майоров А.М.* Теорія і практика створення тестів для системи освіти / А.М. Майоров. — М.: Інтеллект центр, 2001. — 109 с.
4. *Миколаєва Є.І.* Тестування без міфів. — ЭКО. №10, 2001. — 124 с.
5. *Чашечнікова О.С.* Тести: можливості подолання протиріччя між вимогою об'єктивності оцінки знань учнів та необхідністю врахування їх індивідуальних особливостей // Дидактика математики: проблеми і дослідження: Міжнародний збірник наукових робіт. — 2004. — Вип. 21. — С. 99–105.
6. *Москальова О.І.* Корекція на вгадування при обчисленні балів за формулою для тестів множинного вибору / О.І. Москальова // Збірник наукових праць фізико-математичного факультету СДПУ. — 2011. — Вип. 1. — С. 172–176.

¹ студентка 5 курсу фізико-математичного факультету, ДДПУ

² кандидат педагогічних наук, доцент кафедри геометрії та МВМ, ДДПУ

e-mail: svetlana.anikova@mail.ru, nelya_trush@ukr.net

МОДЕЛЮВАННЯ Й ПРОЕКТУВАННЯ ЯК ОСНОВНІ ВИДИ МЕТОДИЧНОЇ ДІЯЛЬНОСТІ МАЙБУТНЬОГО ВЧИТЕЛЯ МАТЕМАТИКИ

У статті з'ясовуються теоретичні аспекти понять «методичне моделювання» й «методичне проектування» та шляхи вдосконалення процесу формування у майбутніх вчителів математики даних видів методичної діяльності.

Ключові слова: *модель, проект, методичне моделювання, методичне проектування, компетентність, компетенція, методична діяльність.*

Вступ

Сучасний етап модернізації освіти вимагає від випускників вищого навчального закладу підвищеного рівня професійної підготовки, компетентності у новітніх методиках і технологіях навчання, наявності глибоких і міцних знань з фахових дисциплін, уміння застосовувати наявні знання у професійній діяльності та готовності досягти значущих професійних результатів. Методична підготовка майбутнього вчителя математики є однією з провідних складових у системі його фахової підготовки. Основною метою методичної підготовки майбутнього вчителя математики виступає формування готовності, здатності і досвіду студентів у виконанні методичної діяльності. Одними з провідних видів методичної діяльності в процесі методичної підготовки майбутнього вчителя математики є діяльність з моделювання й проектування. Ці види діяльності інтегрують в собі інші види методичної діяльності та виступають системоутворюючим фактором операційно-діяльнісного компонента методичної компетентності майбутнього вчителя.

Аналіз останніх досліджень і публікацій, в яких започатковано вирішення проблематики використання моделювання й проектування в педагогічній діяльності, показує, що даній проблематиці присвячені роботи багатьох науковців, таких, як І. Акуленко, Т. Ващик, В. Гузеєв, А. Дахін, В. Лобашев, Є. Лодатко, О. Мещанінов, В. Моторіна, А. Новіков, М. Сибірська, Н. Яковлева та інші.

Серед науковців немає повної узгодженості щодо тлумачення понять «методичного моделювання» та «методичного проектування». Однак одностайним є розуміння того, що моделювання та проектування є провідними видами методичної діяльності вчителя математики.

Опитування молодих вчителів математики, діагностика та аналіз результатів діяльності студентів математичних спеціальностей Донбаського Державного Педагогічного університету продемонстрували, що рівень сформованості таких видів методичної діяльності як моделювання й проектування є недостатнім. Традиційне навчання, забезпечуючи студентів значним багажем предметних знань, не сприяє розвитку у них вмінь виходити за межі навчальних ситуацій, у яких формуються ці знання, використовувати їх у своїй методичній діяльності.

Аналіз реальної методичної підготовки студентів свідчить, що зміст освіти є недостатньо спрямованим на набуття ними відповідних компетенцій, які мають стати основою їх професійної діяльності.

Існує суперечність між рівнем теоретичних досліджень питань, пов'язаних з педагогічним моделюванням й проектуванням та реальним рівнем відповідних компетентностей студентів.

Основна частина

Нині перед системою професійної освіти постає завдання формування, розвитку й удосконалення методичної компетентності майбутніх фахівців у період їх навчання. Формування методичної компетентності у майбутніх вчителів математики відбувається в процесі опанування студентами системи компетенцій — системи, яка відображає комплекс суспільно заданих вимог до обсягу й рівня засвоєння сукупності методичних знань, умінь і навичок, ціннісних орієнтацій та досвіду виконання молодим фахівцем різних видів методичної діяльності [4].

Виконання студентами різних видів методичної діяльності й опанування відповідних методичних компетенцій дає можливість не лише ознайомитися із виробленими і сформованими в теорії та практиці підходами щодо здійснення їх майбутньої професійної діяльності, а й уможливорює побудову суб'єктивно або об'єктивно нового теоретичного знання, яке описує закономірності навчально-виховного процесу [6].

Реалізація студентами цих методичних компетенцій створює об'єктивні умови для побудови теоретичних логічних конструкцій і процедур їх перевірки на практиці під час здійснення професійної діяльності.

Головним кроком на цьому шляху є теоретичне дослідження й перетворення тих об'єктів, що є заміниками реальних процесів і об'єктів (їхніх моделей), що виступають предметом методики навчання математики як науки і навчальної дисципліни у вищому навчальному закладі. Це — діяльність з методичного моделювання. Вона виступає і як провідний вид методичної діяльності, який реалізує майбутній вчитель математики у процесі методичної підготовки, і як метод наукового дослідження, і як метод навчання, і дає змогу поєднати емпіричне й теоретичне в навчальному процесі й педагогічному дослідженні [2].

Методичне моделювання є окремим видом педагогічного моделювання, яке визначається Є. Лодатком як «дослідження педагогічних об'єктів (явищ) за допомогою моделювання понятійних, процесуальних, структурно-змістових чи концептуальних характеристик навчально-виховного процесу, результативних показників або окремих його «сторін» в межах топічно визначуваного соціокультурного кластера на загальноосвітньому, професійно орієнтованому або іншому рівнях». [5, с.69]

В означенні поняття педагогічної моделі, наведеному вище, зазначені предмети моделювання, тобто вказано, що може імітувати чи відображати модель: властивості, ознаки, характеристики об'єкта; принципи внутрішньої організації об'єкта; принципи функціонування об'єкта. Властивості, ознаки, характеристики й інші атрибути об'єкта утворюють його зміст, принципи внутрішньої організації визначають структуру, а принципи функціонування характеризують його функціональність, яку доцільно пов'язувати з орієнтованістю досліджуваного об'єкта на реалізацію певних функцій, наприклад, комунікативної, когнітивної, виховної, освітньої, управлінської тощо.

В залежності від предмету моделювання будемо розглядати наступні типи моделей:

- 1) змістові моделі — це тип педагогічних моделей, для яких предметом моделювання є зміст досліджуваного педагогічного об'єкта, що утворюється сукупністю певних атрибутів (властивостей, ознак, характеристик тощо), які слугують основою для його специфікації;
- 2) структурні моделі — це тип педагогічних моделей, для яких предметом моделювання є структура досліджуваного педагогічного об'єкта разом зі зв'язками, характерними для її складників;
- 3) функціональні моделі — це тип педагогічних моделей, для яких предметом моделювання є орієнтованість досліджуваного об'єкта на реалізацію певних педагогічно значущих функцій.

Базові типи педагогічних моделей слугують основою для утворення похідних типів моделей, основа яких формується подвійним предметом моделювання: структурою і змістом, або структурою і функціональністю, або змістом і функціональністю досліджуваного об'єкта. Зазвичай подібні моделі знаходять значно ширше використання в дослідженнях, аніж моделі базових типів, оскільки на практиці виявляється доволі важко моделювати педагогічний об'єкт в абстрагуванні від його структури чи функціональності.

Окремим видом педагогічного моделювання є методичне моделювання, яке будемо визначати як процес побудови, вивчення та оперування спеціальними об'єктами (методичними моделями), які є уявними або матеріально реалізованими системами, що формують предмет методики навчання математики як науки й навчальної дисципліни у ВНЗ [1].

Діяльність з методичного проектування виступає природнім продовженням процесу методичного моделювання, оскільки передбачає подальшу розробку побудованої моделі й доведення її до рівня практичного використання. Методичне проектування — це діяльність суб'єкта/об'єкта освіти, спрямована на конструювання моделей перетворення педагогічної дійсності. Методичне проектування передбачає трансформацію самого методичного об'єкта або його моделі (наприклад, системи дидактичних цілей навчання теми) відповідно до конкретних умов її передбаченого застосування [3]. Оскільки майбутній фахівець певною мірою обмежений у змозі здійснити перевірку, уточнення й корегування свого проекту у практичній діяльності, тому методичне проектування, здійснюване майбутнім вчителем математики, є діяльністю вторинною у порівнянні з методичним моделюванням.

Операційною основою для здійснення методичного проектування є діяльність з методичного моделювання. Тому компетенції, що стосуються цих видів методичної діяльності можуть бути об'єднані в один блок.

Для того щоб майбутні вчителі математики мали змогу домогтися успіху у своїй професійній кар'єрі, метою навчання у ВНЗ повинно стати формування молодого фахівця з високим рівнем методичної компетентності, опанування студентами системи методичних компетенцій на основі засвоєння різних видів методичної діяльності й набуття продуктивного суб'єктного досвіду такої діяльності, у тому числі і компетенцій з методичного моделювання й проектування.

Для досягнення вищеназваної мети у процесі підготовки майбутніх вчителів математики необхідно:

- забезпечити мотиваційну зорієнтованість майбутнього вчителя математики на самостійне й ефективне оволодіння методичним моделюванням

й проектуванням;

- створити умови для вдосконалення теоретичної та практичної підготовки студентів з методичного моделювання й проектування, як основних видів методичної діяльності;
- забезпечити поєднання теоретичної та практичної підготовки, а також максимізацію суб'єктивного досвіду студентів у використанні методичного моделювання й проектування у їхній майбутній професійній діяльності;
- забезпечити вироблення у студентів критичного ставлення до результатів попередньої роботи, до продукування конструктивних ідей щодо вдосконалення своєї методичної підготовки.

Робота з формування виділених нами видів методичної діяльності має проводитись у різних напрямках.

У процесі викладання курсу методики навчання математики на лекціях викладачі мають демонструвати студентам види діяльності, пов'язані з різними типами моделей, аналізуючи особливості їх побудови та використання. На практичних та лабораторних заняттях повинні широко використовуватись методи навчання, що моделюють зміст діяльності вчителя математики (технології інтерактивного, проектного, контекстного навчання тощо). Удосконаленню вмінь майбутніх вчителів математики виконувати методичне моделювання й проектування сприяє використання у навчальному процесі комплексу методичних задач, що забезпечують системність, послідовність, цілісність процесу опанування студентами компетенцій з методичного моделювання й проектування. Система розроблених авторами методичних задач включає як завдання на розробку моделей окремих типів (змістових, структурних або функціональних) так і комплексні завдання, пов'язані з розробкою моделей квазітипів, оскільки практика методичного моделювання вчителя математики передбачає передусім створення саме таких моделей.

Відповідно до змістового наповнення, студенти розробляють прогностичні та процесуальні моделі, останні у свою чергу представлені організаційно-управлінськими, інструментальними, моніторинговими, рефлексивними моделями. Серед видів методичного моделювання, здійснюваного майбутнім вчителем математики, важливе місце також займає моделювання елементів діяльності фахівця певного профілю (математика, фізика, лінгвіста тощо) у процесі навчання математики на відповідному рівні. Зразки для навчального моделювання студентами технологій навчання математики в класах різних профілів демонструють відеоуроки, серед яких є як уроки професіоналів так і початківців та проведених студентами під час педагогічної практики.

Під час лабораторних занять студенти здійснюють проектування:

- 1) технології навчання через зіставлення теоретичних моделей з уточненою дидактичною метою;
- 2) конкретної педагогічної ситуації в процесі навчання математики на різних рівнях;
- 3) варіанта трансформації й адаптації певної технології навчання до конкретних умов вивчення програмової теми учнями на відповідному рівні чи у класі відповідного профілю;
- 4) процедури спільної діяльності вчителя й учнів у процесі реалізації адаптованого способу навчання;
- 5) системи засобів діагностики рівня та якості засвоєння учнями навчального матеріалу тощо.

Щоб отримати нову якість фахової підготовки учителя до використання методичного моделювання й проектування у їх професійній діяльності, доцільна розробка навчальних курсів, що сприятимуть формуванню професіоналізму та розвитку загальної педагогічної культури майбутнього учителя математики. Зокрема нами розроблено спеціальний курс з вибраних питань методики навчання математики. Метою даного курсу є узагальнення та систематизація знань студентів про особливості здійснення діяльності з методичного моделювання та проектування, формування суб'єктного математичного і методичного досвіду студентів зі здійснення діяльності математичного моделювання та проектування, а також навчання такої діяльності інших.

Висновки

Акценти в методичній підготовці вчителя математики мають бути перенесені з вивчення стандартних, інваріантних станів на механізми оволодіння новими, прилучення до перспективних моделей педагогічного досвіду й готовності до набуття власного в широкій і різноманітній практиці.

Посилення фахово-педагогічної спрямованості підготовки майбутніх фахівців, активізація цілеспрямованої самоосвітньої діяльності, максимізація цілеспрямованого суб'єктивного досвіду методичної діяльності може відбуватись через формування у майбутніх вчителів математики компетенцій з методичного моделювання й проектування.

Література

1. *Акуленко І. А.* Компетентнісно орієнтована методична підготовка майбутнього вчителя математики профільної школи (теоретичний аспект) : монографія / І. А. Акуленко. — Черкаси : Вища Видавець Чабаненко Ю., 2013. — 460 с.

2. Вішнікіна Л. Педагогічне моделювання як засіб проектування освітніх процесів / Л. Вішнікіна // Імідж сучасного педагога. — 2008. — №7-8 (86-87). с. 80–84.
3. Кузьмінський А. І. Наукові засади методичної підготовки майбутнього вчителя математики : монографія / А. І. Кузьмінський, Н. А. Тарасенкова, І. А. Акуленко. — Черкаси : ЧНУ імені Богдана Хмельницького, 2009. — 320 с.
4. Кузьмінський А. І. Методичні компетентності в системі фахової підготовки майбутнього вчителя математики [Електронний ресурс] / А. І. Кузьмінський. — Режим доступу http://www.nbuu.gov.ua/portal/soc__gum/vchu/N149/N149p003-007.pdf.
5. Лодатко Є. О. Типологія педагогічних моделей / Є. О. Лодатко // Вища освіта України: теоретичний та науково-методичний часопис. — 2013. — Випуск 3 (50). — с. 68–72.
6. Моторіна В. Г. Дидактичні і методичні засади професійної підготовки майбутніх учителів математики у вищих педагогічних навчальних закладах : дис. д-ра пед. наук : 13.00.04 / В. Г. Моторіна: Харківський національний педагогічний ун-т ім. Г. С. Сковороди. — Х., 2005. — 512 с.

Anikova S.V., Trush N. I.

Donbas State Teachers' Training University, Slavyans'k, Ukraine.

Simulation and projecting as the main methodical activities' aspects of the future Mathematics' teacher

Theoretical aspects of the definitions «methodical simulation» and «methodical projection», the ways of improving this process formation of the future Mathematics teachers of these methodological activities are searched in the article.

Keywords: *simulator, project, methodical simulation, methodical projection, competence, competency, methodical activity.*

¹ кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри геометрії та МВМ, ДДПУ

^{2–3} студенти 5 курсу фізико-математичного факультету, ДДПУ

e-mail: kadubovs@ukr.net, olja_zwetkova@mail.ru, polyuga.marina@mail.ru

ДО ПИТАНЬ ПРО СИСТЕМАТИЗАЦІЮ ФАКТІВ ГЕОМЕТРІЇ ТРАПЕЦІЙ ТА ЇХ КЛАСИФІКАЦІЮ

Стаття присвячена систематизації фактів геометрії трапецій та супровідним дидактичним аспектам, пов'язаним із способами фіксації та побудови знань. Також авторами пропонується низка нових термінів для окремих видів трапеції, за допомогою яких наведено дві взаємодоповнювальні класифікації трапецій, відміні від традиційних класифікацій більшою видовою деталізацією.

Ключові слова: *систематизація, геометрія трапецій, задачі на трапецію, класифікація трапецій.*

Вступ

Теоретичні відомості про трапецію в різному обсязі представлені у більшості джерел, присвячених шкільному курсу геометрії, зокрема в посібниках із серій: «Абітурієнтам», «Повторюємо та систематизуємо шкільний курс ...», «Геометрія у визначеннях, формулах і таблицях» та ін. «Трапеції» є невід'ємною складовою змістової лінії «чотирикутники» шкільного курсу геометрії. Проте *систематизації фактів геометрії трапецій*, на нашу думку, в існуючій навчально-методичній літературі приділяється недостатня увага.

Серед джерел, присвячених вибраним задачам на трапеції (зокрема на окремі їх види) та способам їх розв'язання, автори вважають своїм обов'язком виділити: статті В. Алексєєва [1] та І.Ф. Шаригіна [25]; навчальні посібники О.С. Істера [10], І.А. Кушніра [16], [17] та В.В. Прасолова [22]; серед збірок, які містять широке коло задач на трапеції, — збірники задач [7], [14], [17], [18], [19], [23]; серед посібників із серії «Шкільний курс геометрії у кресленнях та формулах» — посібник В.В. Амелкіна [3].

Серед підручників, в яких (на нашу думку) трапеціям приділяється значно більша увага порівняно з іншими підручниками, слід виділити діючі підручники [4], [6], [20] та пробний підручник [13]. В [6] важливі відомості, зокрема задачі теоретичного характеру на трапеції, виділено жирним шрифтом. Серед переваг [20] слід виділити те, що важливі факти геометрії

трапецій представлено у вигляді завдань, які відповідають початковому і середньому; достатньому та високому рівням навчальних досягнень відповідно. Найбільш вдалим в дидактичному сенсі, на нашу думку, є підручник [13]. До переваг [4] можна віднести найбільшу кількість задач теоретичного характеру та зведену таблицю «опорних фактів про трапецію». Однак в [4] трапеція визначається як «чотирикутник, у якого дві сторони паралельні».

Автори статті віддають перевагу традиційному визначенню трапеції. З методичними аспектами вивчення трапецій в шкільному курсі геометрії, зокрема можливими підходами до визначення трапеції та їх класифікації, можна ознайомитися, наприклад, в [5], [9], [24]. Зокрема в [9] наведено достатню кількість аргументів на користь саме традиційного визначення трапеції.

За діючою програмою ЗНО з математики (укладеної на основі *(нового стандарту)* навчальної програми з математики для учнів 5–9 класів ЗОНЗ та навчальної програми для учнів 8–9 класів ЗОНЗ (класів) з поглибленим вивченням математики) учень повинен **знати**: визначення трапеції, види та властивості трапеції; визначення середньої лінії трапеції та її властивості; вписані в коло та описані навколо кола трапеції; формули обчислення площі трапеції; серед вимог до предметних **вмінь** — застосовування *визначень, ознак та властивостей різних видів* чотирикутників до розв'язування планіметричних задач та задач практичного змісту.

Як зазначено в [8], «Навчальні задачі є ефективним засобом реалізації і формою втілення змісту навчання. Викладач повинен постійно вирішувати проблему відбору навчальних задач, щоб забезпечити системне засвоєння змісту навчальної дисципліни. Тому, необхідною є вдала і обґрунтована систематизація задач. Проблемою в цьому випадку є вибір засад для такої систематизації...»

Підсумовуючи зазначене, слід констатувати, що на великий жаль, *відомості з геометрії трапецій, які містяться у більшості джерел, носять вибіркового характер з акцентами в залежності від уподобань авторів*. А такі важливі питання, як наприклад рівність та подібність окремих видів чотирикутників та їх ознаки (зокрема ознаки трапецій), взагалі залишаються за лаштунками переважної більшості підручників. Але ж, не можна не погодитися з тим, що одними з основних задач при вивченні геометричних об'єктів, є задачі про порівняння (співставлення) та їх виокремлення (розпізнання) з більш ємної множини однорідних об'єктів. Однак не можна не відзначити й позитивну тенденцію — в підручниках все частіше виділяють задачі, які є опорними («характеристичними») для вивчення окремих видів трапеції.

ЗОНЗ — загальноосвітній навчальний заклад

Другий аспект (в контексті вивчення трапецій), який автори також не можуть залишити без уваги, пов'язаний із тим, що в існуючих підручниках та навчально-методичній літературі класифікації (класифікаціям) трапецій, навіть у порівнянні з класифікацією паралелограмів, приділяється досить поверхнева увага. Для більшості учнів та навіть студентів математичних спеціальностей педагогічних ВНЗ і молодих вчителів математики «*Трапеції бувають рівнобедрені, прямокутні та інші.*» Більше того, в багатьох навчальних посібниках трапеції класифікують саме так. Звісно ж, що такий стан справ не може не викликати занепокоєння.

Крім того, як зазначено в [11] «... дійсність показує, що не лише в учнів, а й у студентів фізико-математичних факультетів педагогічних ВНЗ, за наявності фактичних знань і вмінь їх застосовувати при розв'язуванні задач відсутнє чітке розуміння взаємозв'язків між елементами теоретичних знань, що впливає на рівень осмислення самих систематично засвоєних знань. Це свідчить про те, що визначена система наукових знань не формується. Останнє пояснюється тим, що в зміст сучасної освіти з математичних дисциплін не включені знання про способи фіксації і побудови знань. Настав час, коли чітка структура всього накопиченого і вивченого матеріалу допоможе усунути існуючу проблему та якісно підвищить рівень підготовки майбутніх вчителів математики».

Питанням систематизації фактів з окремих тем курсу геометрії присвячено, наприклад, статті [11], [12]. Серед сучасних видань з елементарної геометрії, в яких наведено яскраві геометричні факти, що не ввійшли до шкільних підручників, слід виділити посібники І.А. Кушніра [16], [17] та двотомне видання Я.П. Понаріна [21]. Зокрема в останньому досить ґрунтовно розглядаються властивості довільних чотирикутників.

Крім зазначеного вище, до написання даної статті авторів надихнули дві роботи, які, незалежно одна від одної, вийшли у 2009 році. А саме: книга визнаного фахівця шкільної геометрії, заслуженого вчителя України І.А. Кушніра «Геометрія трапеції в задачах» [15] (це перша книга, цілком присвячена трапеціям) та робота Ф. Аліфіренка «Узагальнення теореми Стюарта для трапеції. Спільне в геометрії трикутників і трапецій» [2] (яка переважно присвячена перенесенню основних фактів геометрії трикутника в якості аналогів на випадок трапецій). Тому представлений нами матеріал (в певному сенсі) можна вважати логічним продовженням зазначених робіт.

Саму ж статтю умовно можна розбити на чотири частини:

робота посіла II місце у II етапі Всеукраїнського конкурсу-захисту науково-дослідницьких робіт учнів-членів Малої академії наук України у 2008/2009 навчальному році

в першій — крім загально-прийнятих в діючих підручниках понять і визначень авторами для окремих видів трапеції введено низку нових термінів та наведено відповідні визначення; в другій — безпосередньо сам результат авторського доробку щодо систематизації фактів геометрії трапецій, зокрема окремих видів трапецій; в третій — запропоновано чотири рівні складності задач, з урахуванням яких наведено деякі методичні рекомендації щодо дидактичного забезпечення теми; в четвертій — дві взаємодоповнювальні класифікації трапецій, які відрізняються від традиційних класифікацій більшою видовою деталізацією та можливістю «класифікаціо-видового» підходу до вивчення трапецій.

1. Основні поняття та визначення

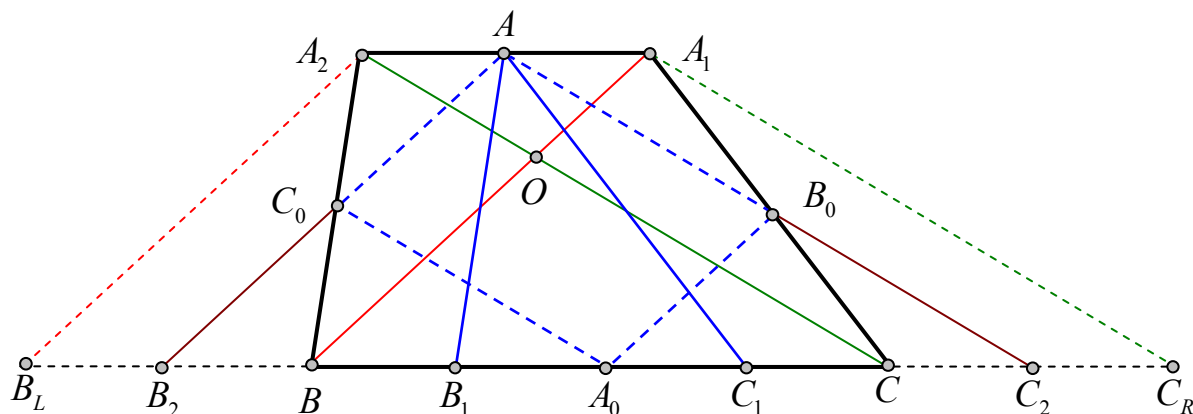
Означення 1. ([6]) Трапецією називають чотирикутник, у якого дві протилежні сторони паралельні, а дві інші — непаралельні. Паралельні сторони називаються основами, а непаралельні — бічними сторонами трапеції. Трапецію називають рівнобічною, якщо довжини її бічних сторін є рівними. Трапецію називають прямокутною, якщо один з її кутів є прямим.

Означення 2. ([20]) Висотою трапеції називають перпендикуляр, опущений з будь-якої точки прямої, яка містить одну з основ, на пряму, яка містить іншу основу трапеції. Середньою лінією («першою середньою лінією») трапеції називають відрізок, який сполучає середини її бічних сторін.

Означення 3. Трапецію називатимемо описаною навколо кола ω , якщо її сторони належать дотичним до кола ω . Трапецію називатимемо вписаною в коло ω , якщо її вершини належать колу ω .

Означення 4. Дві трапеції $(ABCD \text{ і } A'B'C'D')$ називають рівними, якщо міри їх відповідних кутів та довжини їх відповідних сторін є рівними. Іншими словами (в символному вигляді), якщо $\angle A = \angle A'$, $\angle B = \angle B'$, $\angle C = \angle C'$, $\angle D = \angle D'$; $AB = A'B'$, $BC = B'C'$, $CD = C'D'$, $DA = D'A'$, то трапеції $ABCD$ і $A'B'C'D'$ називають рівними та використовують запис $ABCD = A'B'C'D'$.

Означення 5. Дві трапеції $(ABCD \text{ і } A'B'C'D')$ називають подібними, якщо міри їх відповідних кутів є рівними, а довжини їх відповідних сторін пропорційними. Іншими словами (в символному вигляді), якщо $\angle A = \angle A'$, $\angle B = \angle B'$, $\angle C = \angle C'$, $\angle D = \angle D'$; $\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CD}{C'D'} = \frac{DA}{D'A'} = k$, то трапеції $ABCD$ і $A'B'C'D'$ називають подібними з коефіцієнтом k та позначають $ABCD \sim A'B'C'D'$.



Означення 6. Нехай A_1A_2BC — трапеція з основами $A_1A_2 < BC$, в якій A, C_0, A_0, B_0 є серединами сторін A_1A_2, A_2B, BC і CB відповідно, та для якої виконано додаткові побудови, зображені на рисунку вище:

$AB_1 \parallel A_2B, B_1 \in (BC); AC_1 \parallel A_1C, C_1 \in (BC); B_2 = (AC_0) \cap (BC), C_2 = (AB_0) \cap (BC); A_2B_L \parallel A_1B, B_L \in (BC); A_1C_R \parallel A_2C, C_R \in (BC)$.

Тоді: відрізки AA_0, BB_0, CC_0 називатимемо медіанами трапеції;

медіану AA_0 — другою середньою лінією трапеції;

чотирикутник $AC_0A_0B_0$ — паралелограмом Варіньона;

$\triangle AB_1C_1$ — першим чудовим трикутником трапеції;

$\triangle AB_2C_2$ — другим чудовим трикутником трапеції;

трикутники A_2B_LC і A_1BC_R — відповідно «лівим» та «правим» зовнішніми трикутниками трапеції;

$\triangle A_2OB, \triangle A_1OC$ і $\triangle A_2OA_1, \triangle BOC$ — власними малими трикутниками, прилеглими до відповідних бічних сторін та основ трапеції,

а $\triangle A_2BC, \triangle BA_1A_2$ і $\triangle A_1BC, \triangle CA_1A_2$ — власними великими трикутниками, прилеглими до відповідних сторін трапеції.

Означення 7. Якщо діагоналі трапеції є перпендикулярними, то таку трапецію будемо називати ДД-прямокутною або ж дельта-трапецією;

якщо діагональ трапеції є перпендикулярною до бічної сторони, то — ДБ-прямокутною;

якщо діагональ є перпендикулярною до основи, то — ДО-прямокутною;

якщо сума градусних мір кутів при більшій основі становить 90° , то — ББ-прямокутною;

якщо кути при більшій основі є гострими, то — умовно-гострокутною (рис. 1а);

якщо один з кутів при основі прямий, то — прямокутною (рис. 1б);

якщо один з кутів при більшій основі тупий, то — умовно-тупокутною (рис. 1с).

Зауваження 1. Оскільки II чудовий трикутник трапеції є рівним (за трьома сторонами) лівому (та правому) зовнішньому її трикутнику, то традиційно «необхідні» (для розв'язування певного кола задач) додаткові побудови лівого або ж правого зовнішнього трикутника трапеції можна і доцільно замінити розглядом саме II чудового трикутника трапеції. Переваги зазначеної «заміни» стануть зрозумілими із контексту подальшого матеріалу. Більш детально із застосуваннями II чудового трикутника трапеції можна ознайомитися в книзі І.А. Кушніра [15], в якій звернено увагу на зазначений трикутник та запропоновано називати його чудовим.

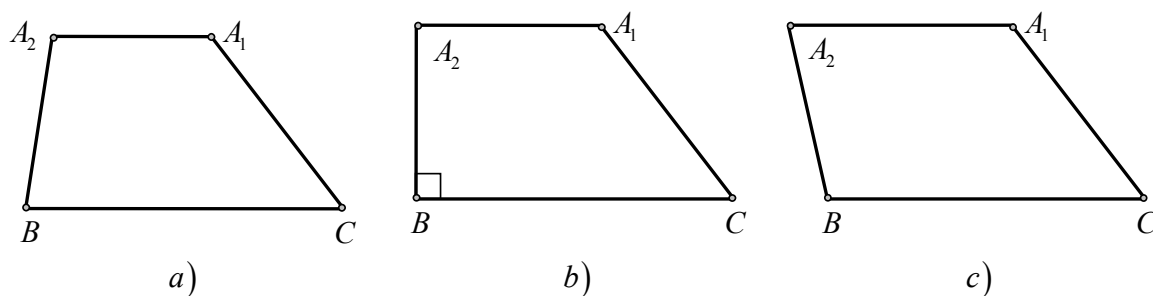


Рис. 1: до понять умовно-гострокутної, прямокутної та умовно-тупокутної трапецій

Зауваження 2. Заради визначеності та (традиційної) зручності, в подальшому завжди будемо вважати (а тому і зображати), що трапецію розташовано так, що відносно середньої лінії більша за довжиною основа знаходиться нижче, а менша — вище. У зв'язку з чим більшу за довжиною основу будемо називати «нижньою», меншу за довжиною основу — «верхньою», а бічні сторони — «лівою» та «правою» відповідно.

Означення 8. Якщо довжина верхньої (меншої) основи трапеції дорівнює довжині лівої (або ж правої) бічної сторони, то таку трапецію будемо називати ЛВ-рівнобокою (та ПВ-рівнобокою відповідно); ЛВ- та ПВ-рівнобокі трапеції будемо називати БВ-рівнобокими.

Якщо довжина нижньої (більшої) основи трапеції дорівнює довжині лівої (або ж правої) бічної сторони, то таку трапецію будемо називати ЛН-рівнобокою (та ПН-рівнобокою відповідно); ЛН- та ПН-рівнобокі трапеції будемо називати БН-рівнобокими.

Означення 9. Трапецію, яка є одночасно ЛВ- та ПВ-рівнобокою будемо називати максимально рівнобокою зверху. Трапецію, яка є одночасно ЛН- та ПН-рівнобокою будемо називати максимально рівнобокою знизу.

Означення 10. Якщо довжина меншої основи максимально рівнобокої зверху трапеції вдвічі менша за довжину більшої основи, то таку трапецію будемо називати правильною.

2. Основні факти геометрії трапецій

2.1. «Нерівність» трапеції, ознаки рівності та подібності трапецій

- 1) «Нерівність трапеції»: якщо b, c, d, a — довжини бічних сторін та меншої і більшої основ трапеції відповідно, то має місце система нерівностей

$$\begin{cases} |b - c| < a - d < b + c \\ |b - a + d| < c < b + a - d \\ |c - a + d| < b < c + a - d \end{cases} \quad (1)$$

- 1*) І навпаки: якщо додатні числа b, c, d, a , з яких принаймні два є різними (заради визначеності, нехай це будуть a і d , причому $d < a$), задовольняють систему 1, то завжди існує трапеція, для якої b, c, d, a — довжини бічних сторін та меншої і більшої основ відповідно.

Нехай трапеції A_1A_2BC і $A'_1A'_2B'C'$ задано за допомогою систем (T) і (T') відповідно

$$(T) : \begin{cases} \overrightarrow{A_1A_2} \parallel \overrightarrow{CB}, & A_1A_2 < BC \\ \angle A_1CB = \gamma, & \angle A_2BC = \beta \\ A_1A_2 = d, & BC = a \\ A_1C = b, & A_2B = c \\ A_1B = e, & A_2C = f \end{cases} \quad \text{і} \quad (T') : \begin{cases} \overrightarrow{A'_1A'_2} \parallel \overrightarrow{C'B'}, & A'_1A'_2 < B'C' \\ \angle A'_1C'B' = \gamma', & \angle A'_2B'C' = \beta' \\ A'_1A'_2 = d', & B'C' = a' \\ A'_1C' = b', & A'_2B' = c' \\ A'_1B' = e', & A'_2C' = f' \end{cases}$$

Тоді мають місце наступні

2) ознаки рівності двох трапецій:

- I-1.** Якщо $d = d', a = a', b = b', \gamma = \gamma'$, то $A_1A_2BC = A'_1A'_2B'C'$;
I-2. Якщо $d = d', a = a', c = c', \beta = \beta'$, то $A_1A_2BC = A'_1A'_2B'C'$;
II. Якщо $d = d', a = a', \beta = \beta', \gamma = \gamma'$, то $A_1A_2BC = A'_1A'_2B'C'$;
III. Якщо $d = d', a = a', b = b', c = c'$, то $A_1A_2BC = A'_1A'_2B'C'$;
IV. Якщо $d = d', a = a', e = e', f = f'$, то $A_1A_2BC = A'_1A'_2B'C'$.

3) та ознаки подібності двох трапецій:

- I-1.** Якщо $\frac{d}{d'} = \frac{a}{a'} = \frac{b}{b'}$ і $\gamma = \gamma'$, то $A_1A_2BC \sim A'_1A'_2B'C'$;
I-2. Якщо $\frac{d}{d'} = \frac{a}{a'} = \frac{c}{c'}$ і $\beta = \beta'$, то $A_1A_2BC \sim A'_1A'_2B'C'$;
II. Якщо $\frac{d}{d'} = \frac{a}{a'}$ і $\beta = \beta', \gamma = \gamma'$, то $A_1A_2BC \sim A'_1A'_2B'C'$;
III. Якщо $\frac{d}{d'} = \frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$, то $A_1A_2BC \sim A'_1A'_2B'C'$;
IV. Якщо $\frac{d}{d'} = \frac{a}{a'} = \frac{e}{e'} = \frac{f}{f'}$, то $A_1A_2BC \sim A'_1A'_2B'C'$.

2.2. «Важливі неможливості» в трапеції

Не існує трапеції, у якої

- 1) протилежні кути рівні; 2) основи рівні;
- 3) точка перетину діагоналей належить (першій) середній лінії;
- 4) діагональ є бісектрисою обох протилежних кутів;
- 5) діагональ перпендикулярна обом бічним сторонам;
- 6) точка перетину діагоналей ділить хоча б одну з них навпіл.

2.3. Властивості довільної трапеції

1. Сума кутів, прилеглих до бічної сторони трапеції, становить 180° .
2. Основна властивість середньої лінії трапеції: середня лінія трапеції є паралельною до основ, а її довжина дорівнює півсумі довжин основ трапеції.
3. Довжина середньої лінії трапеції менша за довжину хоча б однієї з її діагоналей.
4. Середня лінія трапеції ділить навпіл будь-який відрізок з кінцями на основах (або ж їх продовженнях) трапеції.
 - 4.1. I-ша та II-га середні лінії трапеції в точці перетину діляться навпіл.
 - 4.2. Середины діагоналей трапеції належать її (першій) середній лінії.
 - 4.3. $C_0E_0 = F_0B_0$, де C_0, B_0 середини бічних сторін A_2B і A_1C відповідно, а $E_0 = A_1B \cap C_0B_0$, $F_0 = A_2C \cap C_0B_0$.
 - 4.4. Відстань між серединами діагоналей трапеції дорівнює модулю піврізниці довжин її основ.
5. Внутрішній (відносно трапеції) відрізок прямої, яка проходить через точку перетину діагоналей паралельно до основ, ділиться нею навпіл.
6. Точка перетину діагоналей належить другій середній лінії трапеції.
7. Медіани трапеції перетинаються в одній точці.
8. Основна властивість трапеції: точка перетину продовжень бічних сторін, середини основ та точка перетину її діагоналей належать одній прямій.
9. Бісектриси кутів, прилеглих до бічної сторони трапеції, перетинаються під прямим кутом; точка їх перетину належить середній лінії трапеції.
10. Нехай l_1 і l_2 — прямі, що проходять через вершини A_1 і A_2 (меншої) основи паралельно до бічних сторін A_2B і A_1C відповідно та перетинають діагоналі A_2C і A_1B в точках L_1 і L_2 (відповідно). Тоді $L_1L_2 \parallel A_1A_2$.
11. Бісектриса кута трапеції відтинає від основи цієї трапеції (або її продовження) відрізок, рівний бічній стороні, яка є прилеглою до цього кута.
12. Добуток площ трикутників, на які трапеція розбивається однією зі своїх діагоналей, дорівнює добутку площ трикутників, на які вона розбивається іншою своєю діагоналлю.

2.4. Властивості та ознаки рівнобічної трапеції

1. **Властивості-ознаки рівнобічної трапеції:** трапеція є рівнобічною **тоді і лише тоді**, коли виконується одна з наступних умов:

- 1.1) кути при основі є рівними (сума протилежних кутів становить 180^0);
- 1.2) діагоналі є рівними;
- 1.3) I-ий чудовий трикутник є рівнобедреним;
- 1.4) II-ий чудовий трикутник є рівнобедреним;
- 1.5) паралелограм Варіньона є ромбом;
- 1.6) друга середня лінія є перпендикулярною до її основ;
- 1.7) довжини відрізків діагоналей, що сполучають точку їх перетину з кінцями однієї основи, рівні між собою;
- 1.8) основа висоти, що проведена з вершини меншої основи трапеції, ділить більшу її основу на відрізки, довжини яких дорівнюють піврізниці та півсумі довжин основ;
- 1.9) точка перетину діагоналей є рівновіддаленою від прямих, що містять бічні сторони;
- 1.10) навколо трапеції можна описати коло;
- 1.11) $BB_0 = CC_0$ або $A_1C_0 = A_2B_0$ або $C_0B = B_0C$ або $A_2C_0 = A_1B_0$, де B_0, C_0 — середини бічних сторін A_1C і A_2B відповідно;
- 1.12) $BA_2 + A_2C = BA_1 + A_1C$, де $\overrightarrow{A_1A_2} \parallel \overrightarrow{CB}$;
- 1.13) $P_{\triangle BA_2O} = P_{\triangle CA_1O}$;
- 1.14) $BA_2 + A_2A_0 = CA_1 + A_1A_0$, де A_0 середина більшої основи BC ;
- 1.15) $P_{\triangle BC_0C} = P_{\triangle BB_0C}$.

2. В рівнобедреній трапеції різниця довжин бічних сторін менша за різницю довжин основ.

2.5. Властивості та ознаки ББ-прямокутної трапеції

1) У ББ-прямокутної трапеції:

- 1.1) довжина другої середньої лінії дорівнює модулю піврізниці довжин її основ;
- 1.2) довжина другої середньої лінії дорівнює відстані між серединами діагоналей;
- 1.3) квадрат різниці довжин основ дорівнює сумі квадратів довжин бічних сторін;
- 1.4) площа ББ-прямокутної трапеції дорівнює добутку площі I чудового трикутника на відношення суми довжин основ до їх різниці.

2) **Ознака ББ-прямокутної трапеції:** трапеція є ББ-прямокутною **тоді і лише тоді**, коли її I-ий чудовий трикутник є прямокутним з прямим кутом при вершині, що є серединою меншої основи.

2.6. Властивості-ознаки прямокутної трапеції

- 1) Трапеція є прямокутною **тоді і лише тоді**, коли коли виконується одна з наступних умов:
 - 1.1) І-ий чудовий трикутник є прямокутним з прямим кутом при вершині, що належить більшій основі;
 - 1.2) квадрат довжини її більшої бічної сторони дорівнює сумі квадратів меншої бічної сторони та різниці основ;
 - 1.3) $A_1C_0 = C_0C$ (або $A_2B_0 = B_0B$).

2.7. Властивості-ознаки дельта-трапеції (ДД-прямокутної)

- 1) Трапеція є дельта-трапецією (є ДД-прямокутною) **тоді і лише тоді**, коли виконується одна з наступних умов:
 - 1.1) довжина другої середньої лінії дорівнює довжині середньої лінії;
 - 1.2) сума площ квадратів, побудованих на її діагоналях дорівнює чотирьом площам трапеції;
 - 1.3) ІІ-ий чудовий трикутник є прямокутним з прямим кутом при вершині, що є серединою меншої основи;
 - 1.4) паралелограм Варіньона є прямокутником.

2.8. Властивості-ознаки ДБ-прямокутної трапеції

- 1) Трапеція є ДБ-прямокутною **тоді і лише тоді**, коли коли виконується одна з наступних умов:
 - 1.1) один з власних великих трикутників трапеції є прямокутним, прямий кут якого спирається на (відповідну) основу;
 - 1.2) квадрат довжини основи дорівнює сумі квадратів довжин діагоналі та бічної сторони, що виходять з різних її кінців.

2.9. Властивості-ознаки ДО-прямокутної трапеції

- 1) Трапеція є ДО-прямокутною **тоді і лише тоді**, коли коли виконується одна з наступних умов:
 - 1.1) власний великий трикутник трапеції є прямокутним, прямий кут якого спирається на (відповідну) бічну сторону;
 - 1.2) квадрат довжини бічної сторони дорівнює сумі квадратів довжин діагоналі та основи, що виходять з різних її кінців.

2.10. Властивості та ознаки вписаної трапеції

- 1) Якщо навколо трапеції можна описати коло, то вона є рівнобічною, а центром такого кола є точка перетину серединних перпендикулярів до її сторін.
- 2) Навколо трапеції можна описати коло **тоді і лише тоді**, коли вона є рівнобічною.

2.11. Властивості та ознаки описаної трапеції

- 1) Якщо в трапецію можна вписати коло, то:
 - 1.1) сума довжин її основ дорівнює сумі довжин бічних сторін;
 - 1.2) його центр є точкою перетину бісектрис кутів трапеції та належить (першій) середній лінії трапеції;
 - 1.3) з його центра бічну сторону трапеції видно під прямим кутом;
 - 1.4) довжина його діаметра дорівнює довжині висоти трапеції;
 - 1.5) квадрат довжини його діаметра дорівнює добутку довжин основ;
 - 1.6) квадрат довжини його радіуса дорівнює добутку довжин відрізків, на які точка дотику вписаного кола ділить бічну сторону трапеції.
- 2) В трапецію можна вписати коло **тоді і лише тоді**, коли сума довжин її основ дорівнює сумі довжин бічних сторін (довжина її (першої) середньої лінії дорівнює півсумі довжин бічних сторін).
- 3) В трапецію A_1A_2BC ($\overrightarrow{A_1A_2} \uparrow \uparrow \overrightarrow{CB}$, $A_1A_2 < BC$) можна вписати коло **тоді і лише тоді**, коли виконується рівність

$$\operatorname{tg} \frac{\angle A_1CB}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{\angle A_2BC}{2} = \frac{A_1A_2}{BC}. \quad (2)$$

2.12. Основна властивість-ознака «вписано-описаної» трапеції

Трапеція є вписаною і описаною тоді і лише тоді, коли вона є рівнобічною, а довжина її бічної сторони дорівнює довжині середньої лінії.

2.13. Основні метричні співвідношення в довільній трапеції

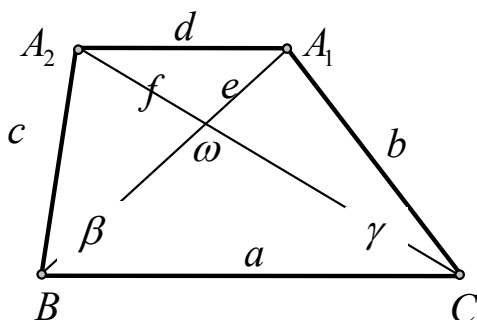


Рис. 2: до основних метричних співвідношень в трапеції

Якщо J_1 (J'_1) — точка перетину бісектрис внутрішніх (зовнішніх) кутів при вершинах A_1 і C , а J_2 (J'_2) — точка перетину бісектрис внутрішніх (зовнішніх) кутів при вершинах A_2 і B , то

$$2J_1J_2 = |(a + d) - (b + c)|, \quad 2J'_1J'_2 = a + d + b + c. \quad (3)$$

Аналог теореми синусів

$$\frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} = \frac{a-d}{\sin (\beta + \gamma)}. \quad (4)$$

Аналоги теореми косинусів

$$\cos \beta = \frac{(a-d)^2 + c^2 - b^2}{2(a-d)c}, \quad \cos \gamma = \frac{(a-d)^2 + b^2 - c^2}{2(a-d)b}. \quad (5)$$

$$\cos(180^\circ - \beta - \gamma) = \frac{b^2 + c^2 - (a-d)^2}{2bc}, \quad (a+d)^2 = e^2 + f^2 - 2ef \cos \omega. \quad (6)$$

Довжини діагоналей трапеції

$$e^2 = a^2 + b^2 - \frac{a}{a-d} ((a-d)^2 + b^2 - c^2) = c^2 + ad + \frac{d}{a-d} (c^2 - b^2); \quad (7)$$

$$f^2 = a^2 + c^2 - \frac{a}{a-d} ((a-d)^2 + c^2 - b^2) = b^2 + ad + \frac{d}{a-d} (b^2 - c^2); \quad (8)$$

$$e^2 + f^2 = b^2 + c^2 + 2ad. \quad (9)$$

Косинус кута між діагоналями трапеції

$$\cos \omega = \frac{1}{2} \cdot \frac{(a-d) \cdot (b^2 + c^2 - a^2 - d^2)}{\sqrt{a(ad+b^2) - d(ad+c^2)} \cdot \sqrt{a(ad+c^2) - d(ad+b^2)}}. \quad (10)$$

Довжини проекцій бічних сторін на більшу основу трапеції

$$BA'_2 = \frac{(a-d)^2 + c^2 - b^2}{2(a-d)}, \quad A'_1C = \frac{(a-d)^2 + b^2 - c^2}{2(a-d)}. \quad (11)$$

Синуси кутів (при більшій основі) трапеції

$$\begin{aligned} \sin \beta &= \frac{\sqrt{(a-d+b+c)(a-d-b+c)(a-d+b-c)(-a+d+b+c)}}{2(a-d)c} = \\ &= \frac{2}{(a-d)c} \cdot \sqrt{p(p-a+d)(p-b)(p-c)}, \quad p = \frac{a-d+b+c}{2}, \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} \sin \gamma &= \frac{\sqrt{(a-d+b+c)(a-d-b+c)(a-d+b-c)(-a+d+b+c)}}{2(a-d)b} = \\ &= \frac{2}{(a-d)b} \cdot \sqrt{p(p-a+d)(p-b)(p-c)}, \quad p = \frac{a-d+b+c}{2}. \end{aligned} \quad (13)$$

Довжина висоти трапеції

$$h_a = A_i A'_i = \frac{2}{(a-d)} \cdot \sqrt{p(p-a+d)(p-b)(p-c)}, \quad p = \frac{a-d+b+c}{2}. \quad (14)$$

Аналоги прямої та оберненої теорем Піфагора

1) Трапеція є прямокутною тоді і лише тоді, коли:

$$c^2 = b^2 + (a - d)^2 \quad \text{або ж} \quad b^2 = c^2 + (a - d)^2. \quad (15)$$

2) Трапеція є ББ-прямокутною тоді і лише тоді, коли:

$$(a - d)^2 = b^2 + c^2. \quad (16)$$

3) Трапеція є ДД-прямокутною тоді і лише тоді, коли:

$$(a + d)^2 = e^2 + f^2 \Leftrightarrow a^2 + d^2 = b^2 + c^2. \quad (17)$$

4) Трапеція є ДБ-прямокутною тоді і лише тоді, коли:

$$\begin{aligned} a^2 &= b^2 + e^2 \quad \text{або ж} \quad a^2 = c^2 + f^2, \quad (\text{для умовно-гострокутних трапецій}); \\ d^2 &= b^2 + f^2 \quad \text{або ж} \quad d^2 = c^2 + e^2, \quad (\text{для умовно-тупокутних трапецій}). \end{aligned} \quad (18)$$

5) Трапеція є ДО-прямокутною тоді і лише тоді, коли:

$$\begin{aligned} \text{або} \quad c^2 &= d^2 + e^2 \quad \text{і} \quad b^2 = e^2 + a^2; \\ \text{або ж} \quad c^2 &= a^2 + f^2 \quad \text{і} \quad b^2 = f^2 + d^2. \end{aligned} \quad (19)$$

1*) Трапеція ($a > d$) є умовно-гострокутною тоді і лише тоді, коли:

$$((a - d)^2 + b^2 - c^2) \cdot ((a - d)^2 + b^2 - c^2) > 0. \quad (20)$$

2*) Трапеція ($a > d$) є умовно-тупокутною тоді і лише тоді, коли:

$$((a - d)^2 + b^2 - c^2) \cdot ((a - d)^2 + b^2 - c^2) < 0. \quad (21)$$

Довжини відрізків з кінцями на сторонах трапеції

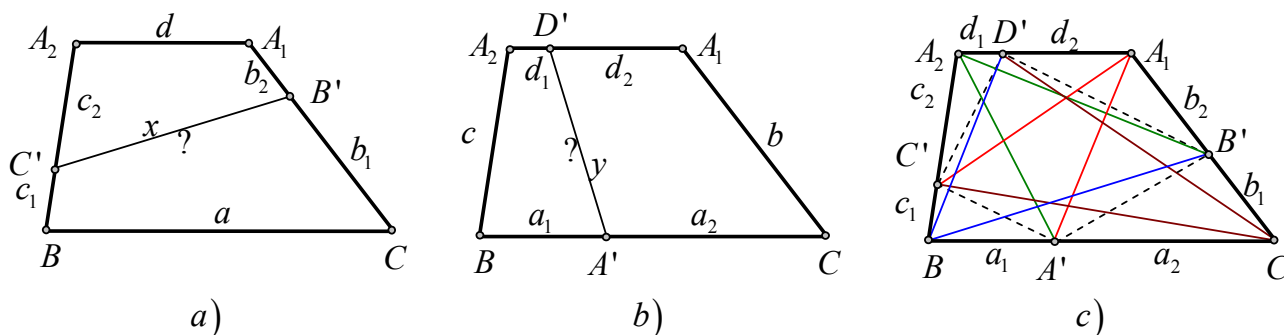


Рис. 3: до формул обчислення довжин відрізків з кінцями на сторонах трапеції:
 $a = a_1 + a_2$, $b = b_1 + b_2$, $c = c_1 + c_2$, $d = d_1 + d_2$

1. Довжину відрізка з кінцями на бічних сторонах трапеції (рис. 3 а) можна обчислити за формулою:

$$x^2 = \left(\frac{ab_2 + db_1}{a - d} \right)^2 + \left(\frac{ac_2 + dc_1}{a - d} \right)^2 - \frac{ab_2 + db_1}{a - d} \cdot \frac{ac_2 + dc_1}{a - d} \cdot \frac{b^2 + c^2 - (a - d)^2}{bc}. \quad (22)$$

1.1) Нехай далі $C'B' \parallel BC$. Тоді $b_2 : b_1 = c_2 : c_1 = x - d : a - x$, а формула (22) набуває вид

$$x = C'B' = a \cdot \frac{b_2}{b} + d \cdot \frac{b_1}{b}. \quad (23)$$

1.1.1) якщо B' – середина AC , то $C'B'$ – середня лінія, а формула (23) набуває вид

$$C'B' = \frac{a + d}{2}. \quad (24)$$

1.1.2) якщо $C'B'$ проходить через точку перетину діагоналей, то $b_2 : b_1 = d : a$, а формула (23) набуває вид

$$C'B' = \frac{2ad}{a + d}. \quad (25)$$

1.1.2)* довжину відрізка $C'B'$, який містить точку перетину продовжень бічних сторін, є паралельним до її основ та обмежений продовженнями діагоналей трапеції, можна знайти за формулою

$$C'B' = \frac{2ad}{a - d}. \quad (26)$$

1.1.3) якщо $C'B'$ ділить трапецію на дві подібні трапеції, то $b_2 : b_1 = x : a$ та із формули (23) маємо

$$C'B' = \sqrt{a \cdot d}, \quad \text{звідки} \quad b_2 : b_1 = \sqrt{d} : \sqrt{a} = c_2 : c_1; \quad (27)$$

1.1.4) якщо $C'B'$ ділить трапецію на дві трапеції рівних площ, то $b_2 : b_1 = (a + x) : (d + x)$ та із формули (23) маємо

$$C'B' = \sqrt{\frac{a^2 + d^2}{2}}, \quad \text{звідки} \quad b_2 : b_1 = (\sqrt{2(a^2 + d^2)} - a - d) : a + d \quad (28)$$

2. Довжину відрізка з кінцями на основах трапеції (рис. 3 б) можна обчислити за формулою:

$$y^2 = b^2 \cdot \frac{a_1 - d_1}{a - d} + c^2 \cdot \frac{a_2 - d_2}{a - d} - (a_1 - d_1)(a_2 - d_2). \quad (29)$$

2.1) довжину другої середньої лінії — за формулою

$$AA_0^2 = \frac{b^2}{2} + \frac{c^2}{2} - \left(\frac{a - d}{2} \right)^2. \quad (30)$$

3. Довжини відрізків з кінцями на основі та бічній стороні трапеції (рис. 3 с)) можна обчислити за формулами:

$$\begin{aligned} A'B'^2 &= a_2^2 + b_1^2 - \frac{a_2}{a-d} \cdot \frac{b_1}{b} \cdot ((a-d)^2 + b^2 - c^2), \\ B'D'^2 &= d_2^2 + b_2^2 + \frac{d_2}{a-d} \cdot \frac{b_2}{b} \cdot ((a-d)^2 + b^2 - c^2); \\ A'C'^2 &= a_1^2 + c_1^2 - \frac{a_1}{a-d} \cdot \frac{c_1}{c} \cdot ((a-d)^2 - b^2 + c^2), \\ C'D'^2 &= d_1^2 + c_2^2 + \frac{d_1}{a-d} \cdot \frac{c_2}{c} \cdot ((a-d)^2 - b^2 + c^2). \end{aligned} \quad (31)$$

4. Довжини «чевіан» трапеції (рис. 3 с)) можна обчислити за формулами:

$$\begin{aligned} A_1A'^2 &= a_2^2 + b^2 - \frac{a_2 \cdot ((a-d)^2 + b^2 - c^2)}{a-d}, \quad A_1C'^2 = c_2^2 + d^2 + \frac{c_2 \cdot d \cdot ((a-d)^2 - b^2 + c^2)}{c(a-d)}; \\ A_2A'^2 &= a_1^2 + c^2 - \frac{a_1 \cdot ((a-d)^2 - b^2 + c^2)}{a-d}, \quad A_2B'^2 = b_2^2 + d^2 + \frac{b_2 \cdot d \cdot ((a-d)^2 + b^2 - c^2)}{b(a-d)}; \end{aligned} \quad (32)$$

4.1) довжини медіан трапеції — за формулами

$$\begin{aligned} AA_0^2 &= \frac{b^2}{2} + \frac{c^2}{2} - \left(\frac{a-d}{2}\right)^2; \quad BB_0^2 = \frac{a^2}{2} + \frac{c^2}{2} - \frac{b^2}{4} + d \left(\frac{a}{2} + \frac{c^2 - b^2}{2(a-d)}\right); \\ CC_0^2 &= \frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2} - \frac{c^2}{4} + d \left(\frac{a}{2} + \frac{b^2 - c^2}{2(a-d)}\right). \end{aligned} \quad (33)$$

Аналог властивості точки перетину медіан

Нехай M — точка перетину медіан AA_0 , BB_0 і CC_0 . Тоді мають місце відношення:

$$\frac{AM}{MA_0} = \frac{2a+d}{a}, \quad \frac{BM}{MB_0} = \frac{2a}{a+d} = \frac{CM}{MC_0}. \quad (34)$$

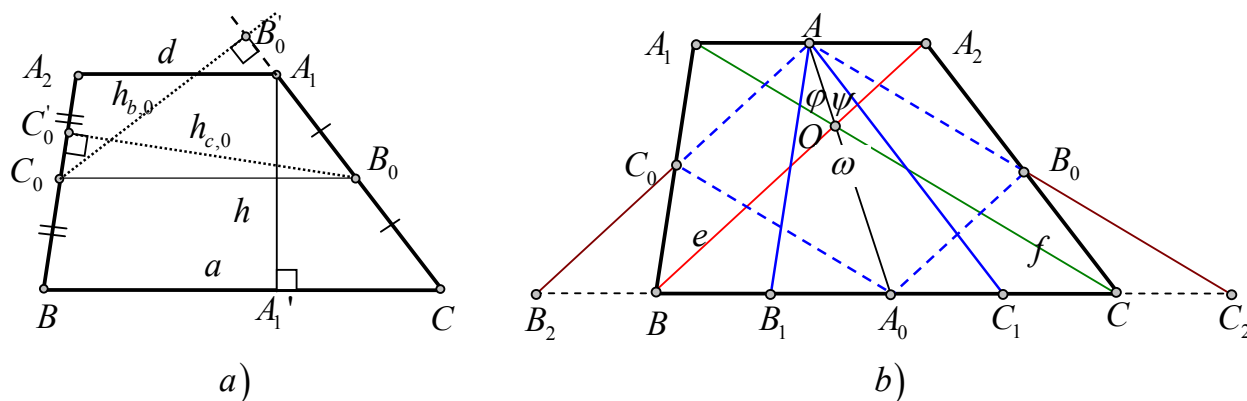


Рис. 4: до формул обчислення площі трапеції

Формули площ трапеції та деяких її фігур

1) Площу трапеції можна знайти (як/за):

1.1) площу другого чудового трикутника трапеції:

$$S_{A_1A_2BC} = S_{AB_2C_2}; \quad (35)$$

1.2) добуток довжини висоти на півсуму довжин її основ:

$$S_{A_1A_2BC} = \frac{a+d}{2} \cdot h = C_0B_0 \cdot h; \quad (36)$$

1.3) добуток другої середньої лінії і суми перпендикулярів, проведених на цю середню лінію (або на її продовження) з двох вершин, які є кінцями однієї з діагоналей;

1.4) добуток довжини діагоналі трапеції на довжину другої середньої лінії та на синус кута між ними:

$$S_{A_1A_2BC} = AA_0 \cdot A_1B \cdot \sin \psi, \quad S_{A_1A_2BC} = AA_0 \cdot A_2C \cdot \sin \varphi; \quad (37)$$

1.5) подвоєну площу трикутника, утвореного бічною стороною та серединою іншої бічної сторони:

$$S_{A_1A_2BC} = 2 \cdot S_{\Delta A_2BB_0}, \quad S_{A_1A_2BC} = 2 \cdot S_{\Delta A_1CC_0}; \quad (38)$$

1.6) добуток довжини бічної сторони трапеції на довжину перпендикуляра, опущеного із середини іншої бічної сторони трапеції на цю бічну сторону:

$$S_{A_1A_2BC} = A_1C \cdot C_0B'_0 = b \cdot h_{b,0}, \quad S_{A_1A_2BC} = A_2B \cdot B_0C'_0 = c \cdot h_{c,0}; \quad (39)$$

1.7) подвоєну площу паралелограма Варіньона:

$$S_{A_1A_2BC} = 2 \cdot S_{AC_0A_0B_0}; \quad (40)$$

1.8) як добуток довжин середніх ліній трапеції на синус кута між ними;

1.9) квадрат суми коренів із площ власних малих трикутників, прилеглих до основ трапеції:

$$S_{A_1A_2BC} = \left(\sqrt{S_{\Delta A_1A_2O}} + \sqrt{S_{\Delta BCO}} \right)^2; \quad (41)$$

1.10) добуток площі першого чудового трикутника на відношення суми довжин основ до їх різниці:

$$S_{A_1A_2BC} = \frac{a+d}{a-d} \cdot S_{AB_1C_1}; \quad (42)$$

1.11) за «першою формулою Герона» (за сторонами трапеції):

$$S_{A_1A_2BC} = \frac{a+d}{a-d} \cdot \sqrt{p(p-a+d)(p-b)(p-c)}, \quad p = \frac{a-d+b+c}{2}; \quad (43)$$

1.12) за «другою формулою Герона» (за основами і діагоналями трапеції):

$$S_{A_1A_2BC} = \sqrt{q(q-e)(q-f)(q-a-d)}, \quad q = \frac{a+d+e+f}{2}; \quad (44)$$

1.13) за формулою (лише для умовно-гострокутних трапецій):

$$S_{A_1A_2BC} = \frac{1}{2} (a^2 - d^2) \cdot \frac{\sin \beta \cdot \sin \gamma}{\sin(\beta + \gamma)}. \quad (45)$$

1.14) півдобуток діагоналей на синус кута між ними.

$$S_{A_1A_2BC} = \frac{1}{2} \cdot e \cdot f \cdot \sin \omega. \quad (46)$$

2) Друга середня лінія трапеції ділить її на дві трапеції рівних площ.

3) Площі власних великих трикутників, прилеглих до спільної основи трапеції є рівними.

4) Площі трикутників, утворених бічними сторонами та спільною вершиною, що належить прямій, яка містить середини основ трапеції, є рівними.

5) $S_c = S_b$, де S_c і S_b — площі власних малих трикутників, прилеглих до бічних сторін трапеції.

6) $S_c = S_b = \sqrt{S_a \cdot S_d}$, $S_a : S_d = a^2 : d^2$, де S_a і S_d — площі власних малих трикутників, прилеглих до основ трапеції.

2.14. Деякі ознаки трапеції

Опуклий чотирикутник A_1A_2BC (O — точка перетину діагоналей A_1B і A_2C) (що не є паралелограмом) **є трапецією**, якщо виконується одна з наступних умов:

- 1) трикутники A_1BC і A_2BC мають однакову площу;
- 2) трикутники A_1OC і A_2OB мають однакову площу;
- 3) $\sqrt{S_{A_1A_2BC}} = \sqrt{S_{BOC}} + \sqrt{S_{A_2OA_1}}$;
- 4) довжина відрізка, що сполучає середини протилежних непаралельних сторін чотирикутника дорівнює півсумі довжин двох інших сторін;
- 5) середня лінія проходить через точку перетину діагоналей;
- 6) довжина відрізка, що сполучає середини діагоналей, дорівнює піврізниці довжин протилежних сторін;
- 7) $C_0E_0 = F_0B_0$, де C_0, B_0 середини протилежних сторін A_2B і A_1C відповідно, а $E_0 = A_1B \cap C_0B_0$, $F_0 = A_2C \cap C_0B_0$;
- 8) внутрішній (відносно чотирикутника) відрізок прямої, яка проходить через точку O перетину діагоналей паралельно до однієї зі сторін, ділиться точкою O навпіл;
- 9) добуток площ трикутників, на які чотирикутник розбивається однією зі своїх діагоналей, дорівнює добутку площ трикутників, на які він розбивається іншою своєю діагоналлю;
- 10) середини двох протилежних сторін та точка перетину продовжень двох інших сторін належать одній прямій.

2.15. Додаткові властивості і формули для окремих видів трапеції

1. Діагональ трапеції є бісектрисою гострого кута (при більшій основі) тоді і лише тоді, коли довжина прилеглої бічної сторони дорівнює довжині меншої основи.
2. Діагональ трапеції є бісектрисою тупого кута (при меншій основі) тоді і лише тоді, коли довжина прилеглої бічної сторони дорівнює довжині більшої основи.
3. Якщо бісектриси кутів при одній з основ трапеції перетинаються на іншій основі, то довжина останньої дорівнює сумі довжин бічних сторін.
4. Якщо довжина бічної сторони трапеції дорівнює сумі довжин її основ, то бісектриси прилеглих до неї кутів перетинаються на іншій бічній стороні.
5. Довжина більшої основи вдвічі більша за довжину меншої основи трапеції A_1A_2BC ($\overrightarrow{A_1A_2} \parallel \overrightarrow{CB}$, BC) тоді і лише тоді, коли на більшій основі BC існує така точка Z , що периметри трикутників BA_2Z , A_2ZA_1 та ZA_1C є рівними.
6. Якщо в трапецію A_1A_2BC з основами $BC = a$, $A_1A_2 = d$ ($a > d$) та бічними сторонами $A_1C = b$, $A_2B = c$ можна вписати коло, яке дотикається сторін A_1A_2 , A_2B , BC , CA_1 в точках D_t , C_t , A_t і B_t відповідно, то
 - (а) $C_tD_t \parallel BC$, $B_tD_t \parallel BC$, де $Q = BD_t \cap A_2A_t$;
 - (б) $BC_t \cdot C_tA_2 = CB_t \cdot B_tA_1$;
 - (с) радіус вписаного кола можна знайти за однією з формул

$$r = \frac{S_{A_1A_2BC}}{a + d} = \frac{S_{A_1A_2BC}}{b + c}; \quad (47)$$

$$r = \sqrt{BC_t \cdot C_tA_2}, \quad r = \sqrt{CB_t \cdot B_tA_1}; \quad (48)$$

- (d) мають місце співвідношення

$$\frac{S_{A_1A_2BC}}{\sqrt{BC_t \cdot C_tA_2}} = d \left(1 + \frac{BC_t}{d - C_tA_2} \right) = a \left(1 + \frac{C_tA_2}{a - BC_t} \right); \quad (49)$$

- (е) кола, побудовані на бічних сторонах як на діаметрах, дотикаються;
- (ф) радіуси r_1 , r_2 , r_3 , r_4 кіл, вписаних у трикутники BOC , A_2OB , A_1OA_2 і COA_1 відповідно (O — точка перетину діагоналей), задовольняють умову

$$\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_3} = \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_4}; \quad (50)$$

7. Для рівнобічної трапеції A_1A_2BC ($\overrightarrow{A_1A_2} \parallel \overrightarrow{CB}$) з основами $BC = a$, $A_1A_2 = d$ ($a > d$) та бічними сторонами $A_1C = A_2B = b$ ($\beta = \gamma$) мають місце наступні співвідношення та формули-спрощення:

$$(a) \quad \frac{b}{\sin \beta} = \frac{a-d}{2 \sin \beta \cos \beta}, \quad \cos \beta = \frac{a-d}{2b}; \quad \sin \beta = \frac{\sqrt{4b^2 - (a-d)^2}}{2b};$$

$$(b) \quad e^2 = f^2 = b^2 + ad, \quad \cos \omega = \frac{2b^2 - a^2 - d^2}{2(b^2 + ad)}; \quad BA'_2 = A'_1C = \frac{a-d}{2};$$

$$(c) \quad AA_0^2 = \frac{4b^2 - (a-d)^2}{4}, \quad BB_0^2 = CC_0^2 = \frac{2a(a+d) + b^2}{4};$$

$$(d) \quad h_a = A_1A'_1 = A_2A'_2 = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{4b^2 - (a-d)^2} = \sqrt{e^2 - \left(\frac{a+d}{2}\right)^2};$$

$$(e) \quad S_{A_1A_2BC} = \frac{a+d}{4} \sqrt{4b^2 - (a-d)^2} = \frac{a+d}{4} \sqrt{4e^2 - (a+d)^2} = \frac{a^2-d^2}{4} \operatorname{tg} \beta;$$

(f) центр описаного навколо трапеції кола належить колу, описаному навколо $\triangle BOA_2$, де O — точка перетину діагоналей;

(g) радіус кола, описаного навколо трапеції, можна знайти за формулою

$$R = \frac{b\sqrt{b^2 + ad}}{\sqrt{4b^2 - (a-d)^2}} = \frac{\sqrt{4h_a^2 + (a+d)^2} \sqrt{4h_a^2 + (a-d)^2}}{8h_a}. \quad (51)$$

8. Якщо в рівнобоку трапецію з гострим кутом β при (більшій) основі можна вписати коло, то

$$\frac{R}{r} = \frac{\sqrt{1 + \sin^2 \beta}}{\sin^2 \beta} = \frac{a+d}{4ad} \sqrt{(a+d)^2 + 4ad}. \quad (52)$$

9. Якщо **рівнобічна трапеція** A_1A_2BC ($\overrightarrow{A_1A_2} \parallel \overrightarrow{CB}$) з основами $BC = a$ і $A_1A_2 = d$ ($a > d$) [та бічними сторонами $A_1C = A_2B = b$] є:

(a) **ББ-прямокутною**, то

$$\boxed{(a-d)^2 = 2b^2}, \quad \beta = \gamma = 45^\circ, \quad e = f = \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{a^2 + d^2}, \quad \cos \omega = \frac{-2ad}{a^2 + d^2},$$

$$R = \frac{1}{2} \sqrt{a^2 + d^2}, \quad h_a = \frac{1}{2}(a-d), \quad S = \frac{1}{4}(a^2 - d^2); \quad (53)$$

(b) **ДД-прямокутною** (дельта-трапецією), то

$$\boxed{b = \sqrt{\frac{a^2 + d^2}{2}}}, \quad e = \frac{a+d}{\sqrt{2}}, \quad \cos \beta = \frac{a-d}{\sqrt{2}\sqrt{a^2 + d^2}}, \quad \sin \beta = \frac{a+d}{\sqrt{2}\sqrt{a^2 + d^2}},$$

$$\omega = 90^\circ, \quad R = \frac{1}{2} \sqrt{a^2 + d^2}, \quad h_a = \frac{1}{2}(a+d), \quad S = \frac{1}{4}(a+d)^2; \quad (54)$$

- (с) **ДБ-прямокутною**, то центр описаного навколо неї кола співпадає із серединою більшої основи і тому

$$2R = a, \quad \boxed{b^2 = \frac{a(a-d)}{2}}, \quad e = \sqrt{\frac{a(a+d)}{2}}, \quad \cos \beta = \sqrt{\frac{a-d}{2a}}, \quad \sin \beta = \sqrt{\frac{a+d}{2a}},$$

$$\cos \omega = -\frac{d}{a}, \quad h_a = \frac{\sqrt{a^2-d^2}}{2}, \quad S = \frac{a+d}{4} \sqrt{a^2-d^2}; \quad (55)$$

- (д) **описаною** (можна вписати коло), то:

$$\boxed{b = \frac{a+d}{2}}, \quad r = \frac{\sqrt{ad}}{2} = \frac{h_a}{2}, \quad P_{A_1A_2BC} = 4b = 2(a+d),$$

$$e = \frac{1}{2} \sqrt{(a+d)^2 + 4ad}, \quad R = \frac{a+d}{8} \sqrt{\frac{(a+d)^2 + 4ad}{ad}},$$

$$S_{A_1A_2BC} = \frac{a+d}{2} \sqrt{ad}, \quad B_t C_t = \frac{2ad}{a+d}, \quad (56)$$

де B_t, C_t — точки дотику вписаного кола з бічними сторонами A_1C і A_2B відповідно;

- (е) такою, що $h_a = \sqrt{ad}$, то в неї можна вписати коло;
 (ф) **БВ-рівнобокою** (діагональ є бісектрисою гострого кута), то вона є максимально рівнобокою зверху ($\boxed{b = c = d}$) та мають місце формули

$$\cos \beta = \frac{a-d}{2d}, \quad \sin \beta = \frac{\sqrt{(a+d)(3d-a)}}{2d}, \quad e = \sqrt{d(a+d)}, \quad \cos \omega = \frac{d-a}{2d},$$

$$R = \frac{d\sqrt{d(a+d)}}{\sqrt{(a+d)(3d-a)}}, \quad h_a = \frac{\sqrt{(a+d)(3d-a)}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{6} \sqrt{P^2 - 4a^2},$$

$$P = 3d + a = 2\sqrt{a^2 + 3h_a^2},$$

$$S = \frac{(a+d)\sqrt{(a+d)(3d-a)}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{36} (P + 2a) \sqrt{P^2 - 4a^2}; \quad (57)$$

- (г) **БН-рівнобокою** (діагональ є бісектрисою тупого кута), то вона є максимально рівнобокою знизу ($\boxed{b = c = a}$) та мають місце формули

$$\cos \beta = \frac{a-d}{2a}, \quad \sin \beta = \frac{\sqrt{(a+d)(3a-d)}}{2a}, \quad e = \sqrt{a(a+d)}, \quad \cos \omega = \frac{a-d}{2a},$$

$$R = \frac{a\sqrt{a(a+d)}}{\sqrt{(a+d)(3a-d)}}, \quad h_a = \frac{\sqrt{(a+d)(3a-d)}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{6} \sqrt{P^2 - 4d^2},$$

$$P = 3a + d = 2\sqrt{d^2 + 3h_a^2},$$

$$S = \frac{(a+d)\sqrt{(a+d)(3a-d)}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{36} (P + 2d) \sqrt{P^2 - 4d^2}. \quad (58)$$

- (х) **правильною**, то

$$\boxed{d = b = \frac{a}{2}}, \quad 2R = a, \quad \beta = 60^\circ, \quad e = \frac{a\sqrt{3}}{2}, \quad \omega = 120^\circ,$$

$$h_a = \frac{a\sqrt{3}}{4}, \quad S = \frac{3\sqrt{3}}{4} \cdot R^2 = \frac{3\sqrt{3}}{16} \cdot a^2; \quad (59)$$

10. Для **прямокутної трапеції** A_1A_2BC ($\overrightarrow{A_1A_2} \parallel \overrightarrow{CB}$) з основами $BC = a$ і $A_1A_2 = d$ ($a > d$) та бічними сторонами $A_1C = b < c = A_2B$ ($\gamma = 90^\circ$) мають місце наступні співвідношення та формули-спрощення:

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad & \boxed{c^2 = b^2 + (a - d)^2}, \quad \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{1} = \frac{a - d}{\cos \beta}; \\ \text{(b)} \quad & e^2 = b^2 + a^2 = c^2 + 2ad - d^2, \quad f^2 = b^2 + d^2 = c^2 + 2ad - a^2; \\ \text{(c)} \quad & e^2 + f^2 = 2b^2 + a^2 + d^2 = b^2 + c^2 + 2ad = 2c^2 - a^2 - d^2 + 4ad; \\ \text{(d)} \quad & \cos \omega = \frac{b^2 - ad}{\sqrt{b^2 + a^2} \sqrt{b^2 + d^2}} = \frac{c^2 - ad - (a - d)^2}{\sqrt{c^2 + d(2a - d)} \sqrt{c^2 + a(2d - a)}}; \\ \text{(e)} \quad & AA_0^2 = \frac{(a - d)^2}{4} + b^2, \quad BB_0^2 = \frac{b^2}{4} + a^2, \quad CC_0^2 = \frac{c^2}{4} + ad; \\ \text{(f)} \quad & BA'_2 = a - d, \quad h_a = b, \quad S = \frac{a + d}{2} \cdot b = \frac{a + d}{2} \cdot \sqrt{c^2 - (a - d)^2}. \end{aligned}$$

11. У трапеції A_1A_2BC ($\overrightarrow{A_1A_2} \parallel \overrightarrow{CB}$) з будь-яких двох умов 1*) $A_1B \perp A_2C$; 2*) $A_2B = \sqrt{A_1A_2 \cdot BC}$; 3*) $A_2B \perp A_2A_1$ впливає третя.

12. Якщо **прямокутна трапеція** A_1A_2BC ($\overrightarrow{A_1A_2} \parallel \overrightarrow{CB}$) з основами $BC = a > d = A_1A_2$ [та бічними сторонами $A_1C = b < c = A_2B$]:

- (а) **є ДД-прямокутною** (дельта-трапецією), то

$$\begin{aligned} & \boxed{b^2 = ad}, \quad c^2 = ad + (a - d)^2, \quad e^2 = a(a + d), \quad f^2 = d(a + d); \\ & \frac{e}{f} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{d}}, \quad e^2 + f^2 = (a + d)^2, \quad h_a = \sqrt{ad}, \quad S = \frac{a + d}{2} \sqrt{ad}; \\ & \sin \beta = \frac{\sqrt{ad}}{\sqrt{ad + (a - d)^2}}, \quad \cos \beta = \frac{a - d}{\sqrt{ad + (a - d)^2}}, \quad \cos \omega = 0. \end{aligned} \quad (60)$$

- (б) **є ДБ-прямокутною**, то

$$\begin{aligned} & \boxed{b^2 = d(a - d)}, \quad c^2 = a(a - d), \quad f^2 = ad, \quad e^2 = a^2 + ad - d^2; \\ & h_a = \sqrt{d(a - d)}, \quad S = \frac{a + d}{2} \sqrt{d(a - d)}, \quad e^2 + f^2 = a^2 + 2ad - d^2; \\ & \sin \beta = \frac{\sqrt{d}}{\sqrt{a}}, \quad \cos \beta = \frac{\sqrt{a - d}}{\sqrt{a}}, \quad \cos \omega = \frac{-d^2}{\sqrt{ad} \sqrt{a^2 + ad - d^2}}. \end{aligned} \quad (61)$$

- (с) **є ЛВ-рівнобокою** (діагональ є бісектрисою гострого кута), то

$$\begin{aligned} & \boxed{c = d}, \quad b^2 = a(2d - a), \quad e^2 = 2ad, \quad f^2 = d^2 + a(2d - a); \\ & e^2 + f^2 = d^2 + 4ad - a^2, \quad h_a = \sqrt{a(2d - a)}, \quad S = \frac{a + d}{2} \sqrt{a(2d - a)}; \\ & \sin \beta = \frac{\sqrt{a(2d - a)}}{d}, \quad \cos \beta = \frac{a - d}{d}, \quad \cos \omega = \frac{-a(a - d)}{\sqrt{2ad} \sqrt{d^2 + 2ad - a^2}}. \end{aligned} \quad (62)$$

- (d) **є ПВ-рівнобокою** (діагональ є бісектрисою прямого кута при більшій основі), то

$$\boxed{b = d}, \quad c^2 = d^2 + (a - d)^2, \quad e^2 = a^2 + d^2, \quad f^2 = 2d^2; \\ e^2 + f^2 = a^2 + 3d^2, \quad h_a = d, \quad S = \frac{a+d}{2} \cdot d;$$

$$\sin \beta = \frac{d}{\sqrt{d^2 + (a-d)^2}}, \quad \cos \beta = \frac{a-d}{\sqrt{d^2 + (a-d)^2}}, \quad \cos \omega = \frac{-(a-d)}{\sqrt{2}\sqrt{a^2 + d^2}}. \quad (63)$$

- (e) **є ЛН-рівнобокою** (діагональ є бісектрисою тупого кута), то

$$\boxed{c = a}, \quad b^2 = d(2a - d), \quad e^2 = a^2 + 2ad - d^2, \quad f^2 = 2ad; \\ e^2 + f^2 = a^2 + 4ad - d^2, \quad h_a = \sqrt{d(2a - d)}, \quad S = \frac{a+d}{2} \sqrt{d(2a - d)};$$

$$\sin \beta = \frac{\sqrt{d(2a-d)}}{a}, \quad \cos \beta = \frac{a-d}{a}, \quad \cos \omega = \frac{d(a-d)}{\sqrt{2ad}\sqrt{a^2 + 2ad - d^2}}. \quad (64)$$

- (f) **є ПН-рівнобокою** (діагональ є бісектрисою прямого кута при меншій основі), то

$$\boxed{b = a}, \quad c^2 = a^2 + (a - d)^2, \quad f^2 = a^2 + d^2, \quad e^2 = 2a^2; \\ e^2 + f^2 = 3a^2 + d^2, \quad h_a = a, \quad S = \frac{a+d}{2} \cdot a;$$

$$\sin \beta = \frac{a}{\sqrt{a^2 + (a-d)^2}}, \quad \cos \beta = \frac{a-d}{\sqrt{a^2 + (a-d)^2}}, \quad \cos \omega = \frac{(a-d)}{\sqrt{2}\sqrt{a^2 + d^2}}. \quad (65)$$

- (g) **є описаною** (можна вписати коло), то пряма, що проходить через центр вписаного кола і вершину гострого кута, ділить трапецію на дві фігури рівних площ та мають місце наступні співвідношення

$$\boxed{2ad = b(a + d)}, \quad r = \frac{ad}{a+d} = \frac{b}{2} = \frac{h_a}{2}, \quad c = \frac{a^2 + d^2}{a+d}; \\ e = \frac{d\sqrt{4a^2 + (a+d)^2}}{a+d}, \quad f = \frac{a\sqrt{4d^2 + (a+d)^2}}{a+d}, \quad S = ad;$$

$$\sin \beta = \frac{2ad}{\sqrt{a^2 + d^2}}, \quad \cos \beta = \frac{a^2 - d^2}{\sqrt{a^2 + d^2}}, \quad \cos \omega = \frac{-(a-d)^2}{\sqrt{(a+d)^2 + 4a^2}\sqrt{(a+d)^2 + 4d^2}}. \quad (66)$$

- (h) є такою, що $2ad = b(a + d)$, то в неї можна вписати коло;
(i) є такою, що бісектриса кута B перетинає меншу бічну сторону A_1C в точці Q , причому $CQ = A_1A_2$, то в неї можна вписати коло;
(j) розділена відрізком з кінцями на бічних сторонах і паралельним до її основ на дві трапеції, в кожную з яких можна вписати коло, то

$$d = \frac{1}{2} \left(c - \sqrt{c^2 - b^2} \right), \quad a = \frac{1}{2} \left(c + \sqrt{c^2 - b^2} \right). \quad (67)$$

3. Класифікація трапецій

На рисунках 5 і 6 нижче представлено блок-схеми можливих підходів до більш деталізованих класифікацій (відмінних від традиційних) трапецій «за мірами кутів» та «довжинами сторін» відповідно.

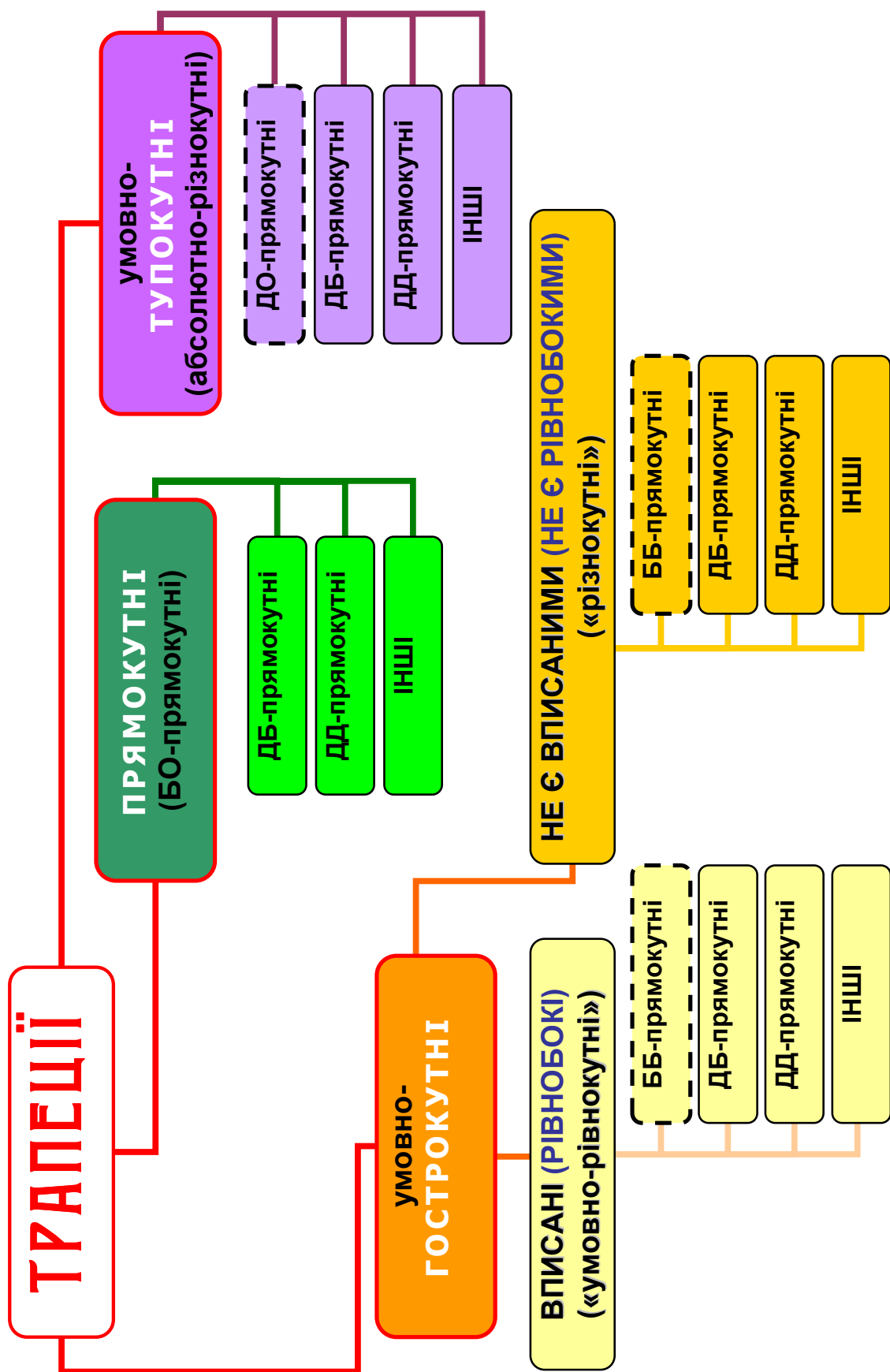


Рис. 5: Блок-схема до класифікації трапецій «за мірами кутів»

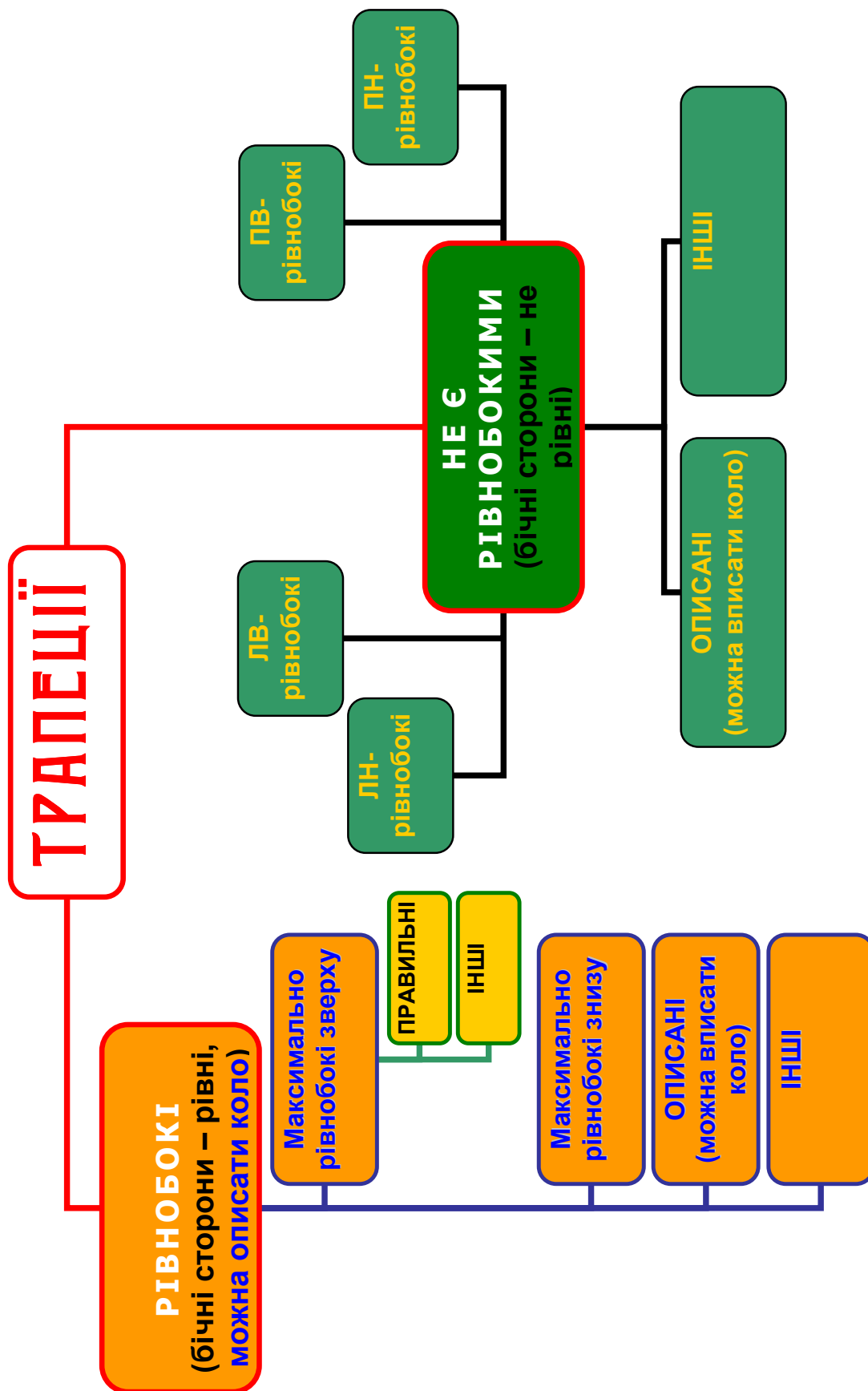


Рис. 6: Блок-схема до класифікації трапецій «за довжинами сторін»

4. Деякі дидактичні аспекти

Нижче пропонується один з можливих підходів до використання дидактичного матеріалу із зазначеної теми на основі «тематичної» систематизації задач з урахуванням *чотирьох* рівнів їх складності.

Визначимо наступні «рівні складності задач».

I-ий рівень: задачі на безпосереднє застосування однієї з властивостей трапеції (зокрема, окремого її виду) — задачі «ілюстративного характеру» — на відпрацювання навичок застосування основних властивостей.

II-ий рівень: задачі на застосування певної властивості, яка подається в умові задачі в неявному вигляді — задачі на «розпізнання завуальованої властивості», зокрема за допомогою додаткових побудов.

III-ій рівень: задачі на використання та/ або застосування «двох і більше» властивостей трапеції, розпізнання яких переважно відбувається за допомогою додаткових побудов або ж в результаті оперування з аналітичними умовами-властивостями та раніше встановленими формулами.

IV-ий рівень: задачі на встановлення нових властивостей (зокрема для окремих випадків трапеції) та/ або дослідницького характеру (зокрема, «на побудову», «на розрізання»).

Слід зазначити, що «тематична» систематизація задач (та їх класифікація у відповідності із зазначеними рівнями) може бути коректно реалізованою переважно для «першого кола» задач — **I-го і II-го рівня**, які мінімально залежать від хронології викладу теоретичного матеріалу.

Задачі мішаного характеру слід відносити до «другого кола» задач (це переважно задачі **III-го і IV-го рівня**), які необхідно і доцільно розглядати лише після першого кола задач.

Висновки

На думку авторів, процеси систематизації та класифікації задач з того чи іншого розділу математики є саме тими видами математичної творчості, які повинні бути включені не лише в програму підготовки майбутніх вчителів математики, а й у програму курсів підвищення кваліфікації вчителів математики. Вважаємо, що це дасть можливість: опанувати справжню математичну культуру; підготуватися до передачі її своїм учням; більш ефективно організовувати навчальну діяльність.

Відзначимо, що подальші розвідки в цьому напрямку можуть бути продовжені за рахунок:

- виокремлення ключових «афінних» задач геометрії трапецій;
- виокремлення ключових «метричних» задач геометрії трапецій;

— дослідження додаткових чудових точок, кіл та ліній трапеції;
— систематизації та класифікації задач на розрізання та побудову трапецій, яким в шкільному курсі геометрії майже не приділяється увага.

Цікавим також здається питання про «синтетичну» класифікацію трапецій *«за кутами та довжинами сторін»*.

Маємо надію, що запропонований матеріал допоможе учням-випускникам систематизувати свої знання з геометрії трапецій під час підготовки до ЗНО, буде цікавим викладачам математики та допоможе студентам педагогічних ВНЗ і молодим вчителям математики при опануванні практичними навичками при розв'язанні задач на трапеції.

Література

1. *Алексеев В.* Задачи о трапециях / В. Алексеев, В. Галкин, В. Панферов, В. Тарасов // Научно-популярный физико-математический журнал Квант. — 2000. — № 6. — С. 37–41.
2. *Аліфіренко Ф.М.* Узагальнення теореми Стюарта для трапеції. Спільне в геометрії трикутників і трапецій [Електронний ресурс] / Ф.М. Аліфіренко. — Режим доступу: http://ddpu.edu.ua/fmk/man_robota_2009.pdf
3. *Амелькин В.В., Рабцевич Т.И., Тимохович В.Л.* Школьная геометрия в чертежах и формулах. — Минск: Красико-Принт, 2008. — 80 с.
4. *Апостолова Г.В.* Геометрія : 8 : дворівневий підручник для загальноосвітніх навчальних закладів. — К. : Генеза, 2008. — 272 с.
5. *Бескін М.М.* Методика геометрії : підручник для педагогічних інститутів. — М.: Учпедгиз, 1947. — 276 с.
6. *Бурда М.І., Тарасенкова Н.А.* Геометрія : підручник для 8 класів загальноосвітніх навчальних закладів. — К. : «Зодіак ЕКО» 2010. — 239 с.
7. *Гордин Р.К.* Геометрия. Планиметрия. 7—9 классы. — 3-е изд., испр. — М. : МЦНМО, 2006. — 416 с.
8. *Дзундза А.І.* Особистісний підхід до систематизації навчальних задач / А.І. Дзундза, С.Г. Цапова // Дидактика математики: проблеми і дослідження. — Міжнародний збірник наукових робіт. — Донецьк: Вид-во ДонНУ. — 2012. — Вип. 38. — С. 150–164.
9. *Золотухин Ю.П.* Еще раз про трапецию / [Отклик на статью Л.А. Латотина, Б.Д. Чеботаревского «Пра паняцце трапецыі» в журн. «Матэматыка: праблемы выкладання», № 4, 2003] Ю.П. Золотухин // Матэматыка: праблемы выкладання. — 2004. — №3. — С. 52–58.
10. *Истер А.С.* Решбник основных конкурсных задач по математике из сборника под редакцией М. И. Сканави : Прогрессии. Текстовые за-

- дачі. Начала аналізу. Планиметрия. Стереометрія: Учеб. пособ. / А.С. Истер. — К. : А.С.К., 2004. — 576 с.
11. *Кадубовський О.А.* До питання про формування навичок при систематизації та класифікації метричних задач шкільного курсу геометрії / О.А. Кадубовський, О.Л. Кадубовська // Проблеми трудової і професійної підготовки: Науково-методичний зб. — 2009. — Вип. 14. — С. 46—54.
12. *Кадубовський О.А.* Навколо теореми Стюарта: наслідки, узагальнення та застосування / О.А. Кадубовський, В.М. Кадубовська, О.Л. Кадубовська // Збірник наукових праць фізико-математичного факультету СДПУ. — 2012. — Випуск 2. — С. 163—180.
13. *Капинос А., Кондратьева Л.* Геометрія: Пробний підручник для 8 класу. — Тернопіль: Підручники і посібники, 2008. — 240 с.
14. *Куланин Е.Д., Федин С.Н.* 3000 конкурсных задач по математике. — М. : Абрис-пресс, 2003. — 624 с.
15. *Кушнір І.А.* Геометрія трапеції в задачах. — Х. : Вид. Група «Основа» 2009. — 80 с. (Зб. журн. «Математика в школах України»; Вип. 9 (81)).
16. *Кушнір І.А.* Тріумф шкільної геометрії : навч. посібник для 7-11 кл. / І.А. Кушнір. — К. : Нашчас, 2005. — 432 с.
17. *Кушнір І.А.* Методи розв'язання задач з геометрії : кн. для вчителя / І.А. Кушнір. — К. : Абрис, 1994. — 464 с.
18. *Кушнір И., Финкельштейн Л.* Геометрия 7–9. Школа боевого искусства. Сборник задач. — Киев: Факт, 2000. — 384 с.
19. *Литвиненко Г.Н., Скнар В.Н., Федченко Л.Я.* Сборник заданий для письменного экзамена по геометрии в 7-9 классах общеобразовательных школ, лицеев и гимназий. — Донецк, 1998. — 56 с.
20. *Мерзляк А.Г., Полонський В.Б., Якір М.С.* Геометрія : підруч. для 8 кл. з поглибл. вивченням математики. — Х.: Гімназія, 2009. — 240 с.
21. *Понарин Я.П.* Элементарная геометрия: В 2 т. — Т. 1: Планиметрия, преобразования плоскости. — М.: МЦНМО, 2004. — 312 с.
22. *Прасолов В.В.* Задачи по планиметрии: Учебное пособие. — 5-е изд., испр. и доп. — М. : МЦНМО: ОАО «Московские учебники», 2006. — 640 с.
23. Сборник задач по математике для поступающих во втузы / В.К. Егоров и др. // Учебн. пособие; под. ред. М.И. Сканави. — 6-е изд. испр. и доп. — М. : «Столетие», 1997. — 560 с.
24. *Чичигин В.Г.* Методика преподавания геометрии: Планиметрия. — М.: Учпедгиз, 1959. — 391 с.
25. *Шарыгин И.* Трапеция / И. Шарыгин // Научно-популярный физико-математический журнал Квант. — 1994. — № 5. — С. 45.

МЕТОДИКА ВИКЛАДАННЯ ФІЗИКИ ТА АСТРОНОМІЇ В ЗОШ ТА ВНЗ

УДК 372.853

Лимарєва Ю.М., Шарап Р.А.

¹ кандидат педагогічних наук, доцент кафедри фізики, ДДПУ

² студент 3 курсу фізико-математичного факультету, ДДПУ

e-mail: zet.80@bk.ru

РОЛЬ ІСТОРИЧНОЇ ЗАДАЧІ У ФОРМУВАННІ СВІДОМИХ ЗНАНЬ З ФІЗИКИ

Стаття присвячена дослідженню ролі історичної задачі у навчальному процесі з фізики. Розглянуто можливості її використання на різних етапах уроку та дидактична вага на уроках різних типів в основу яких покладено історизм.

Ключові слова: *історична задача, навчальний процес, свідомість, особистість, розвиток.*

Вступ

Проблема використання історичного матеріалу на сучасному уроці фізики зводиться переважно до повідомлення фактів з історії розвитку науки. Таке використання має на меті розширення знань особистості та формування її зацікавленості й пізнавального інтересу. Однак, слід зауважити, що просте перечитування чи переказування історії не є єдиним та максимально продуктивним варіантом використання історичних знань у навчанні фізиці. Вважаємо за доцільне привернути увагу до інших способів використання історизму (а саме, історичних задач) у навчальному процесі. Тому, **мета** статті: максимально показати можливий спектр застосування історичного матеріалу під час вивчення фізики.

©Лимарєва Ю.М., Шарап Р.А., 2015

Основна частина

Історична задача, як і будь-яка інша, за формою її подання може бути текстовою, графічною, задачею-малюнком або задачею-експериментом. Кожна з них, залежно від ситуації, має свої переваги. Передусім, історична задача являє собою відображення історії розвитку науки. Частіше за все, на занятті в інформативній формі подається задача (умова) та спосіб її вирішення, що відображений в історії науки.

Розглянемо інші доцільні підходи до використання історичної задачі у навчальному процесі. Так, наприклад, на етапі мотивації навчальної діяльності вона, перш за все, має зацікавити особистість та мотивувати її до пошуку задоволення власного інтересу. На цьому етапі історична задача може супроводжуватися такими ключовими запитаннями: «Чому діяльність вченого призвела саме до такого результату?» або «Що намагався отримати експериментатор?». Тому, в нагоді стають задачі короткі за змістом та такі, що вимагають малої кількості логічних операцій для з'ясування умови. Зазначимо, що в такому випадку доцільно змінити послідовність основних етапів уроку, а саме: спочатку подати мотиваційну історичну задачу, а потім здійснити актуалізацію опорних знань, наголошуючи на тому, що саме ці знання допоможуть вирішити проблему зазначену у задачі. Отже, основними перевагами історичної задачі на даному етапі виступають зрозумілість її сюжету, простота умови та конкретність його подання.

Використання історичної задачі на етапі актуалізації опорних знань також може стати не менш ефективним у навчальному процесі. Порівняння та аналіз описаної ситуації вимагає активізації розумової діяльності та відновлення у пам'яті раніше отриманих знань. До того ж, доцільним буде додатково привернути увагу учнів до фізичних помилок, що, можливо, були здійснені вченими. Можливе також навмисне подання помилкових фактів або взагалі уникнення їх певної частини: пошук помилки завжди був продуктивним методом підвищення розумової активності особистості.

Під час формування вмінь та навичок (етап розв'язування задач) основними перевагами підходу що розглядається виступають реальність сюжету, який підвищує інтерес, та можливість сюжетної наступності. Мається на увазі, що у випадку коли сюжет зацікавив особистість, то в подальшому стануть у нагоді додаткові конкретні запитання аналогічної тематики. Таким чином, для викладача з'являється можливість визначити рівень та напрямок зацікавленості особистості, а відповідно, професійно використати його для можливої подальшої диференціації додаткових індивідуальних завдань.

Зазначена комплексність створює умови для продуктивного формування світогляду особистості та її особистої життєвої позиції, окрім безпосереднього отримання нею вмінь та навичок розв'язування задач з визначеної теми. До того ж, перше, згідно сучасним вимогам до навчання, виступає на перший план.

Окрему дидактичну та методичну вагу несуть задачі-малюнки та малюнки-помилки на історичну тематику, які на достатньому рівні відповідають вимогам, що виставляються до завдань для домашнього самостійного розв'язування: вони мають «силу» підтримувати інтерес, а їх безпосередня навчальна дія «пом'якшується» способом їх подання, тобто малюнком. Отже, історична задача може вдало використана для домашнього завдання. Це може бути як загальне так й індивідуальне завдання. За такого підходу, фізична теорія, яка лежить в основі вивчення теми засвоюється не на основі загальної, абстрагованої від практичного досвіду використання інформації, а на основі історичного факту та досвіду видатних особистостей науки.

Історизм виступає потужним засобом в організації факультативної, гурткової та позаурочної роботи з фізики. Так, наприклад, історична задача може бути вдалим приводом для оформлення фізичної тематичної газети, у якій відображатимуться факти з історії розвитку науки, вчені-автори досліджень, фізичні історичні помилки та досягнення, а також зв'язок історичної події або проблеми відображеної в задачі із сучасністю. При цьому, проблематика може мати наступність у інших фізичних газетах, та відображати, наприклад, різні епохи у вирішенні проблеми, а з часом і періодизацію розвитку певної галузі науки.

Задачі-малюнки дозволяють наочно слідкувати за історією розвитку певних фізичних приладів. Такий підхід доцільно використовувати для організації індивідуальної роботи. Логічним продовженням якого виступатимуть, наприклад, створення презентацій та їх використання у позакласній роботі або відтворення історичних моделей приладів та механізмів, що увійшли в історію фізичної науки.

Вдало використана історична задача здатна в процесі її вирішення до відтворення історичних віртуальних діалогів видатних персоналій науки. На її основі забезпечується встановлення особливостей розвитку науки на певному етапі її розвитку. До того ж, усвідомлюватиметься логіка науки та наукового пошуку, а також відбувається підсвідоме або свідоме проектування набутих знань на сучасний розвиток фізики. Розуміння необхідності й актуальності матеріалу, що вивчається створить благодатне підґрунтя для організації активного навчально-виховного процесу.

У ході розгляду теми уроку історична задача може бути подана описом наукових дослідів. Тим самим відбувається знайомство особистості з практичним розвитком фізики в історії науки. Використання історичних наукових дослідів поданих у формі історичної задачі сприятиме встановленню історичної та наукової значущості розвитку фізичної науки. Вона може розкривати еволюцію фізики, вдосконалення дослідів, хід розвитку теорії та можливості практичного її застосування. Окрім того, такий підхід сприяє можливості створення сучасних аналогів історично та науково значущого обладнання, яке завдяки своїй простоті дозволяє відтворити, перш за все, фізичну суть експерименту і, таким чином, допомагає свідомо засвоїти навчальний матеріал. Відтворення історичних наукових експериментів стає в нагоді і тоді, коли навчальний процес ґрунтується на практично-пошуковій роботі особистості. Нажаль, масово такий підхід у сучасній школі впровадити не представляється можливим, але він абсолютно себе виправдовує в організації та проведенні факультативів, позакласних заходів, індивідуальній роботі з обдарованими учнями.

Історична задача може бути використана як частина у відтворенні, дослідженні та використанні історії розвитку фізичних приладів, обладнання та експерименту під час вивчення нового матеріалу або проведення лабораторної роботи. До того ж, фізичний експеримент може супроводжуватися кількома історичними задачами із різних тем фізики, що дозволяє викладачу показати єдність усіх тем та фізичної науки взагалі.

Висновки

Історична задача виступає потужним дидактичним засобом у вивченні фізики. У дослідженні та вивченні історії розвитку фізичних явищ вона виступає рушійною силою у навчальному процесі та мотиватором самоосвітньої діяльності особистості. Сприяючи розвитку уваги та логічного мислення, історична задача формує загальний розвиток особистості з фізики та її світоглядну позицію, а також забезпечує розвиток індивіда як соціальної одиниці. Історична задача може бути гармонійно вписана у всі етапи уроку та має бути використана у найрізноманітніших ракурсах її подання на уроках різних типів, що становить підстави подальшого вивчення проблеми. Варіативність подання умови задачі та урізноманітнення її сюжетно-історичної глибини дає можливість для диференційованого та індивідуального підходів до формування впродовж вивчення фізики свідомої особистості, а також створює умови для активізації творчості викладача.

Література

1. Кроуфорд А., Саул В., Метьюз С., Макінстер Д. Технології критичного мислення учнів / А. Кроуфорд, В. Саул, С. Метьюз, Д. Макінстер. — К.: Вид-во «Плеяди», 2006. — 220 с.
2. Курбатов Р. Школа, построенная на познавательном интересе ребенка: Управленческие методы, педагогические приемы, конкретные модели работы учителя / Р. Курбатов. — «Воспитание. Образование. Педагогика» Вып. 20. — М.: Чистые пруды, 2009. — 32 с.
3. Лазарев В. С. Опыт-экспериментальная работа в образовательном учреждении: Практическое пособие для руководителей / В. С. Лазарев — М.: Центр педагогического образования, 2008. — 48 с.
4. Маркова А. К. Мотивация и ее воспитание у школьников / А. К. Маркова. — М.: Педагогика, 1983. — 64 с.
5. Масленникова Д. Ю., Попова Т. М. Засоби музейної педагогіки у фізичній освіті / Д. Ю. Масленникова, Т. М. Попова / Засоби і технології сучасного навчального середовища: Матеріали конференції, м. Кіровоград, 17 – 18 травня 2013 р. / Відповідальний редактор: С. П. Величко — Кіровоград: ПП «Ексклюзив-Система», 2013. — С. 118–120.

¹ кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри алгебри, ДДПУ² студентка 5 курсу фізико-математичного факультету, ДДПУ

e-mail: kaydannv@mail.ru

КОМП'ЮТЕРНЕ МОДЕЛЮВАННЯ НА УРОКАХ ФІЗИКИ ЗАГАЛЬНООСВІТНЬОЇ ШКОЛИ З ВИКОРИСТАННЯМ СИСТЕМИ MATHCAD

Актуальним завданням на сьогодні є підвищення рівня навчально-виховного процесу, створення новітніх, а також удосконалення існуючих засобів навчання, високий рівень викладання практики та теорії. Метою статті є аналіз процесу створення умов вдосконалення і покращення результатів навчально-виховного процесу за допомогою комп'ютерного моделювання на уроках фізики загальноосвітньої школи з використанням системи MathCad.

Ключові слова: комп'ютерне моделювання, навчально-виховний процес, система MathCad.

Вступ

Національною доктриною розвитку освіти в Україні в XXI столітті визначено, що одним з первинних напрямів її розвитку є впровадження у всі ланки освітньої галузі сучасних інформаційно-комунікаційних технологій. Це забезпечує подальше покращення навчально-виховного процесу, підвищення якості, доступності та ефективності освіти, вироблення у підростаючого покоління умінь та навичок, необхідних для практичного виконання в нинішньому інформаційному середовищі.

Сьогоднішній стан розвитку суспільства вимагає від її членів бути більш інформованими, мобільними, вміти творчо і критично розмірковувати, а значить і більш вмотивованими до саморозвитку і самонавчання. Такі риси мають бути закладені у шкільні роки, а особливо при вивченні дисциплін природничого спрямування. Виконувалось тестування з фізики, аналіз якого говорить про невідповідність вимог ринку праці до випускників ЗОШ і дійсного стану їх підготовленості до самореалізації. Це складає проблему, яку в деякій мірі можна вирішити завдяки створення навчально-розвивального середовища, в якому учні можуть вирішувати різноманітні завдання. Одним із напрямків розв'язання цієї проблеми при навчанні фізики в загальноосвітній школі є застосування в навчально-виховному процесі комп'ютерного моделювання.

Проблемам впровадження комп'ютерних моделей у навчальний процес середніх та вищих навчальних закладів присвячено багато досліджень з теорії та методики навчання фізики, зокрема таких науковців, як Бугайов О.І., Гриценко В.Г., Іваницький О.І., Калапуша Л.Р., Коваль В.С., Маланюк П.М., Прудський В.І., Семещук І.Л., Федонюк А.А., Яценко Т.М. та інші. Проблеми використання програмно-апаратних навчальних лабораторних комплексів на основі комп'ютерів досліджували Дем'яненко В.М., Желюк О.М., Лапінський В.В., Федішова Н.В. та інші.

На сучасному етапі окремі питання використання новітніх комп'ютерних технологій у навчальному процесі були і залишаються предметом досліджень багатьох науковців, зокрема: Балик Н.Р., Білоусової Л.І., Єршова А.П., Жалдака М.І., Клочка В.І., Морзе Н.В., Ракова С.А., Спіріна О.М., Триуса Ю.В. та ін.

Основна частина.

Актуальним завданням на сьогодні є підвищення рівня навчально-виховного процесу, створення новітніх, а також удосконалення існуючих засобів навчання, високий рівень викладання практики та теорії. Для покращення рівня викладання використовують інноваційні технології при навчанні, а зокрема зростає роль використання комп'ютерів в навчальному процесі.

У період вивчення усього курсу фізики найбільшу роль відіграють експерименти, демонстрації, фізичні та лабораторні практикуми. На сьогоднішній день досить часто фізичні кабінети та лабораторії не забезпечені підходящим обладнанням, або воно застаріле. В таких випадках доцільно використовувати комп'ютерне моделювання. Також моделювання можна використовувати при вивченні процесів та явищ, які важко продемонструвати в реальних умовах. Комп'ютерне моделювання фізичних явищ і процесів полегшує їх дослідження, так як відображає за допомогою спеціальних програм суцільну картину для дослідника.

У свою чергу є можливість проводити експерименти над об'єктами або явищами, створивши належні умови, інакше кажучи написати спеціальну програму, та слідкувати за перебігом експерименту, змінювати параметри, отримати результати в у візуальному (діаграми, графіки) чи числовому вигляді, прослідкувати залежність від тої чи іншої закономірності, параметру тощо. Широко застосовуються такі програми для моделювання явищ:

- середовище візуального програмування (Delphi);
- математичний пакет (Mathcad);
- мова структурного програмування (Pascal);
- середовище flash-програмування (Macromedia Flash);

— табличний процесор (MS EXCEL).

Правильне використання комп'ютерних моделей фізичних процесів та явищ дозволяє досягати найвищих результатів при засвоєнні знань школярами, і цим самим урізноманітнює матеріал який вивчають учні.

Так як нові інформаційні технології навчання (НІТН) закладають в себе всеохоплюючі засоби обробки інформації, то відкриваються можливості широкого розвитку творчого потенціалу, диференціації навчання, пізнавальних здібностей окремо кожного учня в навчальному процесі. За рахунок існування в складі НІТН наперед вироблених засобів автоматизації технічних, рутинних операцій, які необхідно виконувати під час дослідження різних процесів і явищ, можна набагато зменшити навантаження при навчанні учнів, надати навчальній діяльності дослідного, творчого характеру, що природно зацікавлює учня, результати якої стимулюють пізнавальну активність, приносять задоволення.

Аналізуючи застосовність програмних засобів загальних призначень або педагогічних програмних забезпечень (ППЗ) в навчальному процесі потребує аналізу ППЗ як з погляду психолого-педагогічних, дидактичних вимог, так і реалізованості даного ППЗ на наявному апаратному забезпеченні. В багатьох випадках виникає проблема встановлення програмного засобу на шкільному апаратному забезпеченні та його конфігурування для ефективного вирішення навчальної задачі.

Сформульовані раніше вимоги для шкільних фізичних демонстрацій з певним застереженням можуть бути перенесені на засоби НІТ, що використовуються для підтримки навчання фізики. Характерними відмінностями, які притаманні засобам НІТ, є:

- а) інтерактивність (розглядають як доступність моделі фізичного явища для безпосередньої корекції параметрів моделі та вхідних даних);
- б) адаптивність (можливість зміни темпу навчання, реакції ППЗ на відповіді учня, способів подання навчального матеріалу тощо, яка здійснюється за мінімальної участі вчителя або взагалі без його втручання);
- в) можливість побудови гіпертекстової структури навчального матеріалу (графічного, текстового, а також включаючи засоби анімації, когнітивної графіки).

При підготовці матеріалу до уроку фізики можна виділити основне за допомогою анімації. Саме MathCad представляє нам такі можливості. Анімація буде виконана у окремому відео файлі, який можна переглянути на різних відео програвачах (наприклад, вбудованим у Windows програвач Windows Media Player).

Треба зазначити, що учні гуманітарних шкіл та навіть і середніх шкіл, не мають необхідних навичок мислення для глибокого розуміння процесів та явищ, які описано в розділах які вони вивчають. У таких випадках нам допоможуть сучасні засоби навчання, і насамперед це ПК. Уроки з використанням ПК викликають в учнів більший інтерес, заохочують працювати всіх, навіть слабо підготовлених дітей. Якість знань при цьому вагомо зростає.

Багато явищ та процесів в умовах шкільного кабінету фізики не можна продемонструвати. Це наприклад, явища мікросвіту, або процеси, які швидко протікають. Учні відчують труднощі, бо не в змозі уявити ці процеси та явища, а завдяки комп'ютера ми можемо створити моделі цих явищ та процесів, які допоможуть подолати таку проблему.

Комп'ютерне моделювання допомагає створити на екрані комп'ютера динамічну, живу й наочну картину явищ або процесів, які важко пояснити «на пальцях», тому вчитель отримує широкі можливості для вдосконалення уроків.

Потрібно вказати, що під комп'ютерними моделями ми розуміємо комп'ютерні програми, які допомагають в імітації фізичних дослідів, явищ або ідеалізованих моделей ситуацій, що трапляються у фізичних задачах, та користування одиницями вимірювання фізичних величин для вирішення математичних задач. Механізм роботи з одиницями вимірювань фізичних величин дозволяє в середовищі Mathcad [1]:

- вводити дані в потрібній системі вимірювань і в потрібних одиницях вимірювань;
- вести контроль розмірностей у формулах, за якими проводяться розрахунки;
- виводити розраховані дані в потрібній системі вимірювань і в потрібних одиницях вимірювань;

Механізм роботи з розмірними величинами проілюстровано на прикладі. На рис. 1 показано розв'язок в середовищі Mathcad найпростішої фізичної задачі: на площу S діє сила F ; питається, чому дорівнює тиск P .

Фізичні задачі в середовищі Mathcad не просто можуть, але і повинні вирішуватися з підключенням одиниць вимірювання фізичних величин — сили, площі і тиску, якщо мати на увазі представлену задачу.

Комп'ютер не тільки стимулює і підвищує інтерес до навчання, активізує ефективність засвоєння нового матеріалу і мозкову діяльність, допомагає учням, які не приходять на заняття через хворобу, сприяє розвитку самостійної роботи учнів. Можна не сумніватись, що введення ПК у практику навчання фізики в школі допоможе вдосконалити навчальний процес та ду-

ховного та розумового розвитку учнів відповідно до його віку.

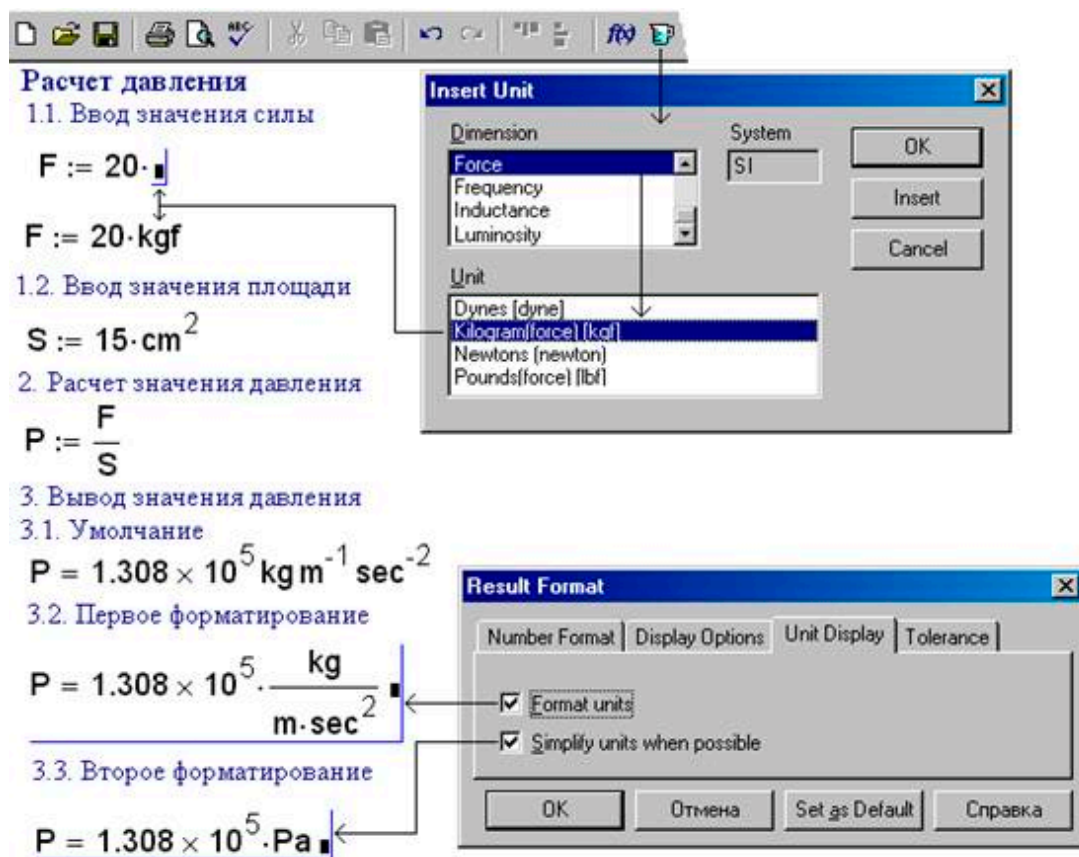


Рис. 1: Розрахунок тиску в середовищі Mathcad

Удосконаленням навчальної роботи з школярами, які тільки-но починають вивчати фізику, передбачається формування їхньої внутрішньої готовності до сприйняття якісно нового змісту науки про природу. Починаючи з першого уроку фізики учні мають сприймати інформацію, на перший погляд просту та легку для розуміння.

Схожу інформацію вони осмислювали та сприймали і до вивчення нового предмета, але їм тепер треба свій досвід переосмислювати та коригувати відповідно до нових знань. Це вимагає розвинутої уваги і певних самостійних зусиль.

Перші уроки фізики добротнo відрізняються від уроків з предметів, які вже знайомі учням. Ця відмінність зводиться до того, що уроки фізики оснащені не лише простою інформацією, а й розв'язуванням якісних і розрахункових задач, експериментами, практичними і лабораторними роботами, спостереженнями явищ природи з подальшим формуванням висновків, висуненням гіпотез та їх доведенням. Окрім того, учні мають пам'ятати безліч символів і вміти записувати їх за допомогою фізичних величин, формул, ви-

вчити величини та розуміти їх функціональну залежність. Серед прийомів, що сприяють у формуванні в учнів підвищення абстрактно-логічного рівня й абстрактного мислення, виділимо моделювання. Воно може бути опорою для виконання інтелектуальних операцій та систематизації одиниць вимірювання величин, для розуміння фізичного змісту явищ та процесів, а також для знаходження табличних значень фізичних величин, вміння їх аналізувати та ін.

Отже, користуючись досвідом учнів, який вони набули при виготовленні моделей, і поєднуючи його з інформуванням, одержаним на уроці за допомогою слуху, зору та інших органів чуття, ми створюємо зручні умови для уважнішого вивчення явищ природи в майбутньому. Багато учнів байдуже ставиться до осмислення навчального матеріалу на уроці фізики, так як вони не вміють працювати уважно. Моделювання допомагає якому-то частіше використовувати довільну увагу учня, бо він сам себе змушує уважно й систематично ставитися до результатів своєї праці, розвиваючи творчість і самостійність мислення, створює емоційну обстановку на уроці.

На практиці використовуючи комп'ютерні моделі, наприклад обчислювальний експеримент із подальшим графічним зображенням результатів, нам треба вирішити принципове питання про вибір середовища для моделювання. На початковому етапі безпосередньо буде достатньо, щоб середовище в якому буде відбуватися моделювання відповідало таким вимогам:

- результати, які досліджуються, повинні виводитися на екран у вигляді таблиць із такою кількістю рядків, щоб не перебільшувати один екран (для зручності);
- користувач має можливість переглянути графіки та за результатами з таблиць швидко будувати графіки залежності між величинами, які є характеристикою досліджуваного явища.

А саме за допомогою системи MathCad ми можемо задовольнити ці вимоги. При викладанні фізики вчитель нерідко зустрічається з наступними труднощами:

- школярі не сприймають деякі явища (такі, як явища світу з астрономічними розмірами і мікросвіту);
- вивчаючи деякий матеріал учитель при його викладанні має труднощі через поганий математичний апарат у учнів, бо завдяки ньому матеріал може бути вивчений на високому теоретичному рівні (наприклад, незнання основ інтегрального й диференціального числення при вивченні механіки);
- для вивчень явищ в школі ми не можемо використовувати певне устаткування через його небезпечність, кошовність або громіздкість (наприклад, явища квантової і ядерної фізики);

– деякі явища взагалі не можна спостерігати (наприклад, демонстрація СРТ-симетрії).

Зазвичай подібні речі в школі подані або на мізерному науковому рівні, тобто пояснюються «на пальцях», або не вивчаються взагалі, що, безсумнівно, відображається на рівні підготовки учнів. Для вирішення значної частини цих проблем і допоможе нам вивчення елементів комп'ютерного моделювання. Саме це можна зробити за наступними напрямками:

- показати моделі демонстрацій;
- провести модельні лабораторні роботи;
- організовувати заняття з моделюванням фізичних явищ.

Застосування елементів комп'ютерного моделювання значно збільшує інтерес до явища або процесу які вивчаються і заохочує учнів до самостійної дослідницької роботи завдяки властивій процесу моделювання гнучкості і динамічності. Використання методу моделювання за допомогою системи MathCad дозволяє на достатньому науковому рівні вивчати розділи, у яких необхідне застосування диференціальних рівнянь і інтегрування, а також анімаційний супровід. Так як при підготовці матеріалу до уроку фізики треба виділити основне за допомогою анімації. Саме MathCad представляє нам такі можливості.

Висновки

За допомогою комп'ютерного моделювання на уроках фізики загальноосвітньої школи з використанням системи MathCad ми в змозі реалізувати більшість проблем які виникають в процесі навчання, такі як:

- використання передових інформаційних технологій;
- зміна форм навчання та видів діяльності в межах одного уроку;
- полегшення підготовки вчителя до уроку та залучення до цієї діяльності учнів;
- розширення можливостей ілюстративного супроводу уроку, подавати фізичні процеси у вигляді графіків, тощо;
- здійснення індивідуальної роботи;
- проведення інтегрованих уроків, які забезпечують посилення зв'язків між предметами;
- організація інтерактивних форм контролю вмінь, навичок та знань;
- організація дослідницьких, самостійних, творчих робіт на якісно новому рівні з можливістю виходу в глобальний інформаційний простір.

Література

1. *Очков В.* Физические величины в Mathcad / В. Очков // Компьютер-Пресс (З'2000). — 2000. — <http://twt.mpei.ac.ru/ochkov/>
2. *Александрук В.В.* Використання інформаційних технологій на уроках фізики: Методичні рекомендації / В. В.Александрук // Глинська загальноосвітня школа І–ІІІ ст., Здолбунівський районний методичний кабінет. — 2011. — 12 с.
3. *Головко М. В.* Особливості та перспективи розвитку системи засобів комп'ютерної підтримки шкільного курсу фізики / М. В.Головко // Комп'ютер у школі та сім'ї. — 2006. — № 5. — С. 22–26.
4. *Карпова Л.Б.* Використання персонального комп'ютера на уроках фізики / Л.Б.Карпова // Фізика в школах України. — Основа. — 2008. — №17. — 32 с.
5. *Наумчик П.* Сучасна техніка на уроках фізики / П.Наумчик // Фізика (Шкільний світ). — 2005. — № 5. — С. 5–7.
6. *Соловйова О.Ю.* Використання комп'ютерних технологій у курсі фізики / О.Ю.Соловйова // Фізика в школах України. — Основа. — 2009. — № 3. — 20 с.
7. *Цодікова С.О.* Використання персонального комп'ютера на уроках фізики / С.О.Цодікова // <http://izlov.ru/docs/100/index-14189.html>

ЗМІСТ

Від редакційної колегії	3
<i>Пам'яті Володимира Івановича Рукасова</i>	<i>4</i>
Математика	15
Новіков О.О., Ровенська О.Г., Чабанова Є.О., Бикова Н.І., Волік С.В. <i>Задача Колмогорова-Нікольського для подвійних операторів Фейєра на класах інтегралів Пуассона</i>	<i>15</i>
Бодра В.І., Безсмертна К.В., Єгорова О.В., Лашина О.С., Рудь А.М. <i>Екстремальна задача для подвійних операторів Фейєра на класах інтегралів Пуассона</i>	<i>20</i>
Новіков О.О., Шумякіна А.В., Ліпкіна В.Ю., Давиденко М.А., Вагнер Г.В. <i>Асимптотичні формули для відхилень подвійних операторів Фейєра</i>	<i>23</i>
Новіков О.О., Овсій Є.Ю., Шаповалов М.С., Козаченко Ю.О. <i>Щодо наближення нескінченних матриць</i>	<i>27</i>
Летенко Ю.О., Рябухо О.М., Турка Т.В. <i>Протоколи розподілу та узгодження ключа</i>	<i>30</i>
Пащенко З.Д., Шажко С.П. <i>Жорданова нормальна форма та класифікація лінійних однорідних систем диференціальних рівнянь</i>	<i>38</i>
Рябухо О.М., Турка Т.В., Шерстюк О.С. <i>Практичні схеми реалізації протоколів цифрового підпису</i>	<i>43</i>
Кадубовський О.А., Воцана Л.В. <i>Про число нееквівалентних двокольорових хордових O-діаграм максимального роду</i>	<i>51</i>
Фізика	65
Надточій В.О., Уколов О.І., Нечволод М.К., Бугаєвська Д.О. <i>Розрахунки полів температур і термічних напружень у приповерхневих шарах GaAs, ініційованих імпульсним лазерним опроміненням</i>	<i>65</i>
Шурыгина Л.С. <i>Преобразования Галилея в теории относительности .</i>	<i>73</i>

Ольхова А.С., Надточій В.О., Уколов О.І. <i>Вимірювання питомого опору напівпровідника чотирьохзондовим методом</i>	82
Демченко А.С., Надточій В.А. <i>Физические механизмы разрушения ковалентных кристаллов при пониженных температурах</i>	87
Інформатика та методика її викладання	91
Глазова В.В., Весела К.В. <i>Елементи дистанційного навчання при вивченні математики в школі</i>	91
Степкин А.В. <i>Распознавание графов с помощью трёх агентов</i>	97
Дудченко І.В., Рудь К.О. <i>Порівняльний аналіз прикладного програмного забезпечення для перегляду веб-сторінок</i>	101
Методика викладання математики в ЗОШ та ВНЗ ..	104
Беседін Б.Б., Шевцова К.С. <i>Тестова перевірка знань учнів під час вивчення математики</i>	104
Анікова С.В., Труш Н.І. <i>Моделювання й проектування як основні види методичної діяльності майбутнього вчителя математики</i>	107
Кадубовський О.А., Цветкова О.І., Полюга М.І. <i>До питань про систематизацію фактів геометрії трапецій та їх класифікацію</i>	114
Методика викладання фізики і астрономії в ЗОШ та ВНЗ	141
Лимарєва Ю.М., Шарап Р.А. <i>Роль історичної задачі у формуванні свідомих знань з фізики</i>	141
Кайдан Н.В., Мельничук Т.М. <i>Комп'ютерне моделювання на уроках фізики загальноосвітньої школи з використанням системи MathCad</i> ..	146

Збірник наукових праць фізико-математичного факультету ДДПУ

Випуск №5

За матеріалами
Всеукраїнської науково-практичної конференції
«Перспективні напрямки сучасної науки та освіти»
Слов'янськ, ДДПУ, 22-24 квітня, 2015 р.



Для студентів, аспірантів та науковців в галузі фізико-математичних наук; вчителів та викладачів фізико-математичних дисциплін в ЗОШ та ВНЗ.

Дизайн, верстка

О.А. Кадубовський

Відповідальні за випуск

О.А. Кадубовський, В.Є. Величко

Підписано до друку 30.04.2015 р.

Формат 60 × 84 1/16. Ум. др. арк. 9,75.

Тираж 100 прим. Зам. № 766.

Підприємець Маторін Б.І.

84116, м. Слов'янськ, вул. Г. Батюка, 19.

Тел./факс +38 06262 3-20-99. Email: matorinb@ukr.net

Свідоцтво про внесення суб'єкта видавничої справи до Державного реєстру видавців, виготівників і розповсюджувачів видавничої продукції ДК №3141, видане Державним комітетом телебачення та радіомовлення України від 24.03.2008 р.
