МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ДЕРЖАВНИЙ ВИЩИЙ НАВЧАЛЬНИЙ ЗАКЛАД
«ДОНБАСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ ПЕДАГОГІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ»

ЗБІРНИК
НАУКОВИХ ПРАЦЬ
фізико-математичного факультету
ДДПУ

Заснований у 2010 році

Випуск №4

Рекомендовано вченою радою
Донбаського державного педагогічного університету

Слов'янськ – 2014

УДК 51+53+37.016:[51+53+004].
ББК 22.1+22.3+74.262.21+74.262.22.

З – 414

Збірник наукових праць фізико-математичного факультету ДДПУ. — Слов'янськ : ДДПУ, 2014. — Випуск № 4 — 196 с.

Для студентів, аспірантів та науковців в галузі фізико-математичних наук; вчителів та викладачів фізико-математичних дисциплін в ЗОШ та ВНЗ.

РЕЦЕНЗЕНТИ

АВРАМЕНКО О.В. — доктор фізико-математичних наук, професор, завідувач кафедри прикладної математики, статистики та економіки Кіровоградського державного педагогічного університету ім. В. Винниченка

САВЧЕНКО А.С. — кандидат фізико-математичних наук, старший науковий співробітник Донецького фізико-технічного інституту ім. О.О. Галкіна НАН України;

РЕКОМЕНДОВАНО ДО ДРУКУ

вченою радою державного вищого навчального закладу «Донбаський державний педагогічний університет», протокол № 8 від 23.05.2014р.

За достовірність посилань, цитат і результатів експериментів відповідальність несуть автори.

ISBN 978-966-1554-82-4

Від редакційної колегії

Шановні читачі!

Ви тримаєте в руках четвертий випуск «Збірника наукових праць фізико-математичного факультету» державного вищого навчального закладу «Донбаський державний педагогічний університет». Видання наукових праць викладачів, студентів та молодих науковців фізико-математичного факультету ДДПУ започатковано у 2010 році, коли результати наукових досліджень було опубліковано окремою серією «Фізико-математичні науки» в збірнику наукових праць «Пошуки і знахідки» за матеріалами науково-практичної конференції СДПУ «Актуальні питання науки і освіти» (СДПУ, 20-22 квітня 2010р.).

Метою збірника є підтримка наукової активності як серед студентів, так і серед молодих викладачів ДДПУ та інших ВНЗ.

Основу збірника складають повнотекстові статті доповідей на цьогорічній Всеукраїнській науково-практичній конференції «Актуальні питання науки і освіти» (Слов'янськ, ДДПУ, 22-24 квітня 2014р.). Основні результати доповідались на секційних засіданнях та були рекомендовані до друку головами секцій, завідувачами випускових кафедр та науковими керівниками випускових робіт.

Засновники збірника мають намір зробити його максимально відкритим як для авторів, так і для читачів. Він виходить один раз на рік у друкованому та електронному вигляді. Електронна версія журналу та інформація щодо співпраці з авторами є доступною на офіційному сайті збірника за адресою `http://ddpu.edu.ua/fizmatzbirnyk/begin.htm`.

Запрошуємо до співпраці. Наснаги та творчих успіхів!
Члени редакційної колегії.

До 75-річчя
Надточій Віктора Олексійовича

Надточій Віктор Олексійович народився 7 листопада 1939 року у місті Полонне Хмельницької області.

Закінчив Львівський електротехнікум зв'язку (1957), Харківський політехнічний інститут імені В.І. Леніна, радіотехнічний факультет (1966), захистив кандидатську дисертацію (1975) в Інституті металофізики АН УРСР на тему «Дослідження закономірностей низькотемпературної мікропластичної деформації монокристалічного германію і кремнію», у 1976 році йому присуджено звання доцента.

З 1984 року по даний час працює на посаді завідувача кафедри фізики.

Наукові дослідження проводить у галузі фізики напівпровідників та напівпровідникової електроніки. Розробив дислокаційну теорію низькотемпературної мікропластичності алмазоподібних кристалів. За результатами цих досліджень у 2007 році захистив докторську дисертацію на спеціалізованій Вченій раді Харківського національного університету імені В.Н. Каразіна на тему «Мікропластичність алмазоподібних кристалів (Si, Ge, GaAs, InAs)» за спеціальністю 01.04.07 — фізика твердого тіла.

Віктор Олексійович викладає майже усі розділи загальної фізики, фізику напівпровідників та радіоелектроніку. Має 140 наукових публікацій у зарубіжних та фахових виданнях України.

Рішенням Атестаційної колегії МОН Украни від 23 грудня 2008 року Надточій Віктору Олексійовичу присвоєно вчене звання професора кафедри фізики. Під його керівництвом на спеціалізованій вченій раді Харківського національного університету у 2008 році захистив дисертацію на здобуття вченого ступеня кандидата фізико-математичних наук Москаль Денис Степанович, а у 2013 році завершив і подав до захисту дисертацію з фізики напівпровідників аспірант Уколов Олексій Іванович.

Професор Надточій В.О. є керівником курсових, дипломних та магістерських робіт, він є членом Вченої ради Донбаського державного педагогічного університету.

За результатами досліджень під керівництвом В.О. Надточій у 2012 та 2013 роках отримано два патенти на винахід
№ 97999 «Спосіб визначення міри дефектності приповерхневих шарів монокристалів германію або кремнію»,
№ 101705 «Спосіб створення наноструктур на поверхні германію»,


УКРАЇНА

ПАТЕНТ

НА ВИНАХІД

№ 97999

СПОСІБ ВИЗНАЧЕННЯ МІРИ ДЕФЕКТНОСТІ ПРИПОВЕРХНЕВИХ ШАРІВ МОНОКРИСТАЛІВ ГЕРМАНІЮ АБО КРЕМНІЮ

Видано відповідно до Закону України "Про охорону прав на винаходи і корисні моделі".

Зареєстровано в Державному реєстрі патентів України на винаходи **10.04.2012.**

Голова Державної служби інтелектуальної власності України М.В. Паладій

УКРАЇНА

ПАТЕНТ

НА ВИНАХІД

№ 101705

СПОСІБ СТВОРЕННЯ НАНОСТРУКТУР НА ПОВЕРХНІ ГЕРМАНІЮ

Видано відповідно до Закону України "Про охорону прав на винаходи і корисні моделі".

Зареєстровано в Державному реєстрі патентів України на винаходи **25.04.2013.**

Голова Державної служби інтелектуальної власності України М.В. Ковіня

Державна служба інтелектуальної власності України
Ідентифікаційний код 37552556
№1

Висока результативність науково-педагогічної діяльності Віктора Олексійовича оцінена і відзначена рядом нагород:

- грамотою МОН України та знаком «Відмінник освіти України» (наказ Міністра освіти № 452 від 08.07.1999 р.),
- Почесною грамотою Донецької обласної державної адміністрації у жовтні 2004 року,
- Почесною грамотою МОН України у липні 2007 року.

Щиросердно вітаємо Вас, шановний Віктор Олексійович, зі знаменною датою у Вашому житті! Бажаємо Вам міцного здоров'я на довгі роки, щастя, добробуту, творчого натхнення та плідної праці на науковій ниві!

Основні та найбільш вагомі праці В.О. Надточій

1. Дислокационная структура монокристаллов LiF в условиях резких термических изменений / В.А. Надточий,Н.К. Нечволод // УФЖ, № 6, 1969.
2. Измерение ЭДС Холла на переменных электрических и магнитных полях / В.А. Надточий, Н.К. Нечволод // ПТЭ, № 2, 1970.
3. Некоторые закономерности ступенчатой ползучести мнокристаллического Ge и Si при комнатной температуре / В.А. Надточий,П.В. Алехин, Н.К. Нечволод, М.Х.Шоршоров // Сб. «Дефекты структуры в полупроводниках». — Новосибирск, 1973.
4. О пластической деформации Ge и Si при комнатной температуре в условиях одноосного сжатия / В.А. Надточий, П.В. Алехин, Н.К. Нечволод, М.Х.Шоршоров // Сб. «Дефекты структуры в полупроводниках». — Новосибирск, 1973.
5. О применимости теории упрочения к описанию единства закономерностей деформирования в различных условиях одноосного растяжения / В.А. Надточий, А.П. Тихонов // «Проблемы прочности», 1973. — № 5.
6. Установка для исследования ползучести алмазоподобных полупроводниковых материалов при комнатной температуре / В.А. Надточий, Н.К. Нечволод, А.П. Тихонов // «Заводская лаборатория», 1974. — № 1.
7. О пластической деформации германия при комнатной температуре / В.А. Надточий, В.П. Алехин, Н.К. Нечволод, А.П. Тихонов, М.Х. Шоршоров // Физ. и хим. обработки материалов, 1974. — № 3.
8. Некоторые закономерности ступенчатой ползучести монокристаллического германия при 300 К / В.А. Надточий, В.П. Алехин, Н.К. Нечволод // Физ. и хим. обработки материалов, 1974. — № 5.
9. О закономерностях пластической деформации кремния при комнатной температуре / В.А. Надточий, В.П. Алехин, Н.К. Нечволод, М.Х.Шоршоров // Физ. и хим. обработки материалов, 1974. — № 6.
10. НадточийВ.А. Исследование закономерностей низкотемператрной микропластической деформации монокристаллического германия и кремния: Автореферат дис. ... канд. физ.-мат. наук: 01.04.07 / АН УССР Институт металлофизики. Киев, 1975. — 26с.
11. О пластической деформации Ge и Si при комнатной температуре в условиях одноосного сжатия /В.А. Надточий, В.П. Алехин, Н.К. Нечволод //Сб. «Металлические монокристаллы». — Наука. — Москва, — 1976.
12. Особенности микропластической деформации германия в условиях одноосного сжатия при комнатной температуре /В.А. Надточий, В.П. Алехин, Н.К. Нечволод. //Сб. «Металлические монокристаллы». — Наука. — Москва, — 1976.
13. Низкотемпературная деформация в монокристаллах Ge и Si / В.А. Надточий, В.П. Алехин, Н.К. Нечволод // Сб. «Монокристаллы тугоплавких и редких металлов сплавов и соединений». — Наука, — Москва, 1977, С. 150-156.
14. Структурно-кинетические закономерности движения дислокаций в монокристаллах Ge и Si в низкотемпературном интервале 20-300 К / В.А. Надточий, А.З. Калимбет. — Вісник АН УРСР, 1978 — № 7.
15. Неконсервативное движение ростовых дислокаций в макрообразцах и нитевидных кристаллах Ge и Si в условиях одноосного сжатия при 20^0C / В.А. Надточий, В.П. Алехин, В.В. Господаревский, М.Х. Шоршоров // III Всесоюзн. совещание «Дефекты структуры в полупроводниках» — ч. 1. — Новосибирск, 1978.
16. Влияние низкотемпературной микропластической деформациии на эл. свойства кремниевых $p-n$ переходов /В.А. Надточий,А.Я. Белошапка, А.З. Калимбет // Физ. и хим. обработки материалов, 1985. — № 1.

17. Важный резерв повышения качества профессиональной подготовки выпускников педвуза / В.А. Надточий, Р.В. Олейник // Тезисы Всесоюзной конференции АН СССР. Общество психологов. — Москва, 1988. — С. 76-77.
18. Расчет дислокационных донорных уровней в щелочно-галоидных кристаллах на основе экспериментальных данных о низкотемпературной ползучести / В.А. Надточий, Н.К. Нечволод, В.А. Золотухин // Сб. «Физика твердого тела». — Донецк, 1988, С. 60-64.
19. Пути реализации проблемного обучения на лекциях /В.А. Надточий, Л.С. Шурыгина // Тезисы Всесоюзной научно-методической конференции «Методологические, дидактические и психологические аспекты проблемного обучения физике».
20. Психологические основы творчества и проблемное обучение /В.А. Надточий, Л.С. Шурыгина // Методологические, дидактические и психологические аспекты проблемного обучения физике. Тезисы докладов 2-й Всесоюзной научно-методической конференции. — Донецк, 1991. – С. 18.
21. Об эффективности использования проблемного обучения на подготовительном отделении / В.А. Надточий, В. Н.Рыбенцев // Методологические, дидактические и психологические аспекты проблемного обучения физике. Тезисы докладов 2-й Всесоюзной научно-методической конференции. — Донецк, 1991. – С. 95.
22. Ток в точечном контакте полупроводника с дефектным поверхностным слоем /В.А. Надточий, Н.Н. Голоденко, Б.А. Свиридюк // Славянск, СГПИ, 1992.
23. Автоматизированная установка на базе микроЭВМ для определения концентрации примесей в полупроводниках / В.А. Надточий, В.Н. Ткаченко, Л.С. Шурыгина // Тезисы докладов I Международной конференции «Компьютерные программы учебного назначения». — Донецк, ДонГУ, 3-5 сентября, 1993. — С. 270–271.
24. Исследование поверхностной миграции вакансий в полупроводниках германия в осциллирующем поле механических напряжений /В.А. Надточий, Н.К. Нечволод // Сборник «Актуальные проблемы современной науки». — Слов'янськ, СДПІ, 1993.
25. Методика викладання теми «Просторова когерентність» / В.А. Надточий, Н.Н. Голоденко, Н.К. Нечволод // Сборник «Актуальные проблемы современной науки». — Слов'янськ, СДПІ, 1993.
26. Ступенчатая низкотемпературная ползучесть как фрактальный процесс / В.А. Надточий,Н.К. Нечволод, Ю.Н. Гриценко // Сборник «Актуальные проблемы современной науки». — Слов'янськ, СДПІ, 1993.
27. Информатизация системы образования как условие совершенствования его содержания / В.А. Надточий, Л.С. Шуригина, Н.Н. Голоденко // Ком'ютерні програми учбового призначення. Тези доповідей II Міжнародної конференції. — Донецьк, ДонДУ, 1994. — С. 35.
28. Численный эксперимент в радиоэлектронике / В.А. Надточий, Н.Н. Голоденко, Ю.Н. Гриценко // Ком'ютерні програми учбового призначення. Тези доповідей II Міжнародної конференції. — Донецьк, ДонДУ, 1994. — С. 138.
29. Сопротивление двухслойной полупроводниковой структуры в процессе инжекции через точечный контакт / В.А. Надточий, Н.Н. Голоденко, Ю.Н. Гриценко, Н.К. Нечволод // Деп. в ГНТБ Украины., — СГПИ, Славянск. 1994, с. 23, № 1694. Ук.94.
30. Время жизни носителей в дефектном поверхностном слое полупроводника / В.А. Надточий, Н.Н. Голоденко, Ю.Н. Гриценко, Н.К. Нечволод // СГПИ, Славянск, 1995, 23 с. Деп. в ГНТБ Ук-раины, № 9, б/о 322.
31. Голографія і принцип Гюйгенса-Френеля / В.А. Надточий,М.М. Голоденко, М.К. Нечволод // Тези доповідей II Всеукраїнської конференції, УДПУ ім. М.П. Драгоманова, «Шляхи удосконалення фундаментальної і професійної підготовки вчителів фізики 24–25 травня». — Київ, 1995. — Ч. 1. — С. 54.

32. Шляхи гуманитаризації викладання фізики / В.А. Надточий, Л.С. Шуригіна, М.М. Голоденко // Тези доповідей II Всеукраїнської конференції, УДПУ ім. М.П. Драгоманова, «Шляхи удосконалення фундаментальної і професійної підготовки вчителів фізики 24-25 травня», — Київ, 1995. — Ч. 1. — С. 10.
33. Зміст освіти і можливості НІТ / В.А. Надточий,Л.С. Шуригіна // Тези доповідей II Всеукраїнської конференції, УДПУ ім. М.П. Драгоманова, «Шляхи удосконалення фундаментальної і професійної підготовки вчителів фізики 24–25 травня. — Київ, 1995. — Ч. 1. — С. 11.
34. Система підготовки майбутнього вчителя фізики / В.О. Надточій, В.Н. Рибєнцев // Тези доповідей II Всеукраїнської конференції, УДПУ ім. М.П. Драгоманова, «Шляхи удосконалення фундаментальної і професійної підготовки вчителів фізики 24-25 травня», — Київ, 1995. — Ч. 1. — С. 16.
35. Pneumatic pendulum / В.А. Надточий, Л.С. Шуригіна, М.М. Голоденко, Ю.Н. Гриценко // Методологические, дидактические и психологические аспекты проблемного обучения: материалы 4-й международной научно-методологической конференции. — Донецк: ДонГУ, 1996, С. 32.
36. Про вдосконалення змісту шкільної фізичної освіти / В.О. Надточій, Л.С. Шуригіна // Методичні особливості викладання фізики на сучасному етапі. Матеріали доповідей II міжвузівської науково-практичної конференції. — Кіровоград, 1996. — Ч. 1. — С. 92 – 93.
37. Исследование сферического p-n-перехода методом модуляции проводимости / В.А. Надточий, Н.Н. Голоденко, Ю.Н. Гриценко, Н.К. Нечволод // Деп. в ГНТБ Украины 24.10.96 г., № 2049, Ук. 96.
38. Дефектный поверхностный слой, возникающий в монокристаллическом Ge при низкотемпературной деформации / В.А. Надточий, Н.Н. Голоденко, Ю.Н. Гриценко, Н.К. Нечволод, О. Н. Панютин // Укр. вакуумное общество, Национальный центр «Харьковский гос. политехнический университет» Сб. статей «Вакуумная металлизация». — 1996, 2 с.
39. Использование аналогий для создания проблемных ситуаций / В.А. Надточий, Л.С. Шурыгина // Тезисы Международной конференции «Современные проблемы дидактики высшей школы», 27-31 авг. — Донецк, 1997.
40. Фізика як фундаментальна наука в освітньо-професійній підготовці вчителя технологій /В.О. Надточій, Н.К. Нечволод, Л.С. Шуригіна // Матеріали доповідей науково-практичної конференції «Трудова підготовка учнів і підготовка вчителів трудового навчання: історія, сучасність, перспективи розвитку», жовтень. — 1997.
41. Про формування наукового світогляду в сучасних умовах у студентів фізико-математичного факультету при вивченні фізики /В.О. Надточій, В.Н. Рибєнцев // Міністерство освіти України, Академія педагогічних наук України, Національний педагогічний університет ім. М.П.Драгоманова, Кіровоградський державний педагогічний університет ім.В. Винниченка. Методичні особливості викладання фізики на сучасному етапі: Науково-методичний збірник. — Кіровоград, 1998. — Ч. 2. – С. 14.
42. До методики вивчення електричних машин / В.О. Надточій, Л.С. Шуригіна, М.К. Нечволод, М.М. Голоденко // Методичні особливості викладання фізики на сучасному етапі: науково-методичний збірник. — Кіровоград, 1998. — С. 116–117.
43. Комп'ютерне моделювання в навчальному процесі / В.О. Надточій, М.М. Голоденко, Ю.М. Гриценко, М.К. Нечволод // Методичні особливості викладання фізики на сучасному етапі: науково-методичний збірник. — Кіровоград, 1998. — С. 143–144.
44. З досвіду викладання фізики в ліцеї / В.О. Надточій,О.Я.Бєлошапка, В.Н. Рибєнцев // Тези Першої Міжнародної Конференції «Наука і освіта 98». – Дніпропетровськ, 1998. – С. 110.
45. Логарифмическая ползучесть поликристаллической меди / В.А. Надточий, М.К. Нечволод, М.М. Голоденко, Ю.Н. Гриценко // Дніпропетровськ, науковий журнал «Придніпровський науковий вісник». — 1998. – С. 114.

46. Логарифмическая ползучесть при ступенчатом нагружении / В.А. Надточий,М.К. Нечволод, М.М. Голоденко,Ю.Н. Гриценко // Славянский гос. пед. институт. – Славянск, 1998. – 29 с. Деп. В ГНТБ Украины 23. 03.98, № 158. – Ук 98.
47. Комп'ютерне моделювання досліду Франка-Герца / В.О. Надточій, Л.С. Шуригіна, М.М. Голоденко, В.М. Ткаченко // Матеріали Всеукраїнської науково-методичної конференції «Комп'ютерне моделювання та інформаційні технології в освітній діяльності». — Кривий ріг: Криворізький держ. педуніверситет, 19-21 квітня 1999 р.
48. Визначення коефіцієнту тертя кочення / В.О. Надточій, Л.С. Шуригіна, М.К. Нечволод, М.М. Голоденко // Науково-методичний збірник з проблем навчального фізичного експерименту. — Чернігівський державний педагогічний університет, 1999.
49. Математическое моделирование низкотемпературной пластической деформации / В.А. Надточий, Н.Н Голоденко, Ю.Н. Гриценко, Н.К. Нечволод // Слав. гос. пединститут, Славянск, 1999, 24 с. Деп. в ГНТБ Украины. 25.04.99. №116. – УК 101.
50. Электрические свойства кремниевых $p-n$-переходов с дислокациями, созданными низкотемпературной деформацией /В.А. Надточий, Н.Н Голоденко, Д.Г. Сущенко // 4-й Международный симпозиум по алмазным пленкам и родственным материалам. — Харьков, 1999.
51. Наукова робота студентів як елемент навчального процесу / В.О. Надточій, М.М. Голоденко, Ю.М. Гриценко, Я.Г. Бєліченко, О.В.Періг // V Всеукраїнська наукова конференція «Фундаментальна та професійна підготовка фахівця з фізики», 6-7 червня. — Національний педуніверситет ім. М.П.Драгоманова . — Київ, 2000 р.
52. Дослідження напівпровідників методом вимірювання вольт-фарадних характеристик / В.О. Надточій, В.М. Ткаченко, О.П. Каменєв // V Всеукраїнська наукова конференція «Фундаментальна та професійна підготовка фахівця з фізики», 6-7 червня. — Національний педуніверситет ім. М.П.Драгоманова . — Київ, 2000 р.
53. Емоційний фактор у викладанні фізики / В.О. Надточій, Л.С. Шуригіна, М.К. Нечволод,М.М. Голоденко // Всеукраїнська науково-практична конференція «Активізація навчальної діяльності в школі та вузі». 27-28 вересня. — Криворізький держ. педуніверситет, 2000.
54. Действие абразивных частиц на поверхность полупроводника в процессе химико-механического полирования / В.А. Надточий, А.А. Белошапка, А.Я. Белошапка, Н.Н.Голоденко, Ю.Н. Гриценко, М. К. Нечволод // Слав. гос. пед. ин-т. — Славянск, 2000. — 9 с.: ил. — Библиогр.: 4 назв. — Рус. — Деп. в ГНТБ Украины 27.04.2000, № 96. — Ук 2000.
55. Исследование электрических свойств полупроводников со структурой алмаза и сфалерита, деформированных при низких температурах / В.А. Надточий, М.К. Нечволод // Тезисы доклада международной конференции «Высокие давления – 2000», 15-19 сентября. — Донецк. — 2000.
56. Измерение времени жизни носителей заряда и толщины дефектного поверхностного слоя полупроводника методом модуляции проводимости в точечном контакте / В.А. Надточий, Н.Н. Голоденко, Н.К. Нечволод, Д.Г. Сущенко // Вестник Донецкого государственного университета, — серія А, № 1, 2000, — С. 98 – 103.
57. До теорії логарифмічної низькотемпературної повзучості, зумовленої виснаженням дислокацій / В.О. Надточій,М.М. Голоденко,М.К. Нечволод,Д.Г. Сущенко, Ю.М. Гриценко //Журнал фізичних досліджень. — 2000. — Т.4, № 3. – С. 298–302.
58. Комп'ютерне тестування як елемент процесу навчання / В.О. Надточій, М.М. Голоденко, А.Ф. Прун,Ю.М. Гриценко // Всеукраїнська науково-практична конференція «Інформаційні технології в освіті», 16-19 травня. — Мелітопольській державний педагогічний університет. — 2001.
59. Исследование электрических свойств Ge и Si, деформированных при низких температурах / В.А. Надточий, Н.К. Нечволод, Д.Г. Сущенко // Физика и техника высоких давлений. — Донецк: ДонФТИ, 2001. — № 1, С. 104–110.

60. Проблеми сучасних освітніх технологій / В.О. Надточій,М.К. Нечволод, Л.С. Шуригіна, М.М. Голоденко, А.М. Берестовий // Міжнародна науково-методична конференція «Управління якістю професійної освіти» (Артемівськ, 24–27 квітня 2001 р.): Збірник наукових праць. — Либідь. —Донецьк. —2001. — С. 265–268.
61. Комп'ютерне моделювання досліду Франка-Герца /В.О. Надточій, А.М. Берестовий, А.Г. Лебідь, М.М. Голоденко, М.К. Нечволод // НСб. «Актуальні проблеми інженерної підготовки спеціалістів у вищих навчальних закладах інженерно-педагогічного профілю». — Харків, 2001. — С. 214.
62. Про рекомбінацію нерівноважних носіїв заряду у дефектному поверхневому шарі монокристалічного Ge / В.О. Надточій, М.К. Нечволод, М.М. Голоденко, Д.Г.Сущенко // Фізика і хімія твердого тіла. — Івано-Франківськ, 2001. — Т.2, №4. — С. 707–710.
63. Микропластичность и элетрические свойства алмазоподбных полупроводников, деформированных при низких температурах / В.А. Надточий,Н.К. Нечволод, Н.Н. Голоденко // Тези доповідей. І Українська наукова конференція з фізики напівпровідників УНКФН-1. Україна. — Одеса, 10-14 вересня 2002, — Т.2. — С. 70.
64. Генерация дислокаций на сферических включениях в кристаллах под действием одноосного напряжения сжатия /В.А. Надточий, Н.К. Нечволод, И.В. Жихарев, Н.Н. Голоденко, Я.Г. Беличенко // Вісник Донецького університету. — Сер.А: Природничі науки, 2002. — Вип. 2. — С. 197 – 200.
65. Генерация дислокаций на включениях в приповерхностных слоях деформируемых полупроводниковых кристаллов / В.А. Надточий, Н.Н. Голоденко,Я.Г. Беличенко // Матеріали міжнародної наукової конференції студентів та молодих учених. — Київ: Національний авіаційний університет. 10-11 квітня, 2002. — С. 202.
66. Движение дислокаций в приповерхностных слоях полупроводниковых кристаллов, подвергаемых механическим деформациям / В.А. Надточий, А.В. Периг, Н.Н. Голоденко // Матеріали міжнародної наукової конференції студентів та молодих учених. — Київ: Національний авіаційний університет. 10-11 квітня, 2002. — С. 203.
67. Structure Changes by the Stress Gradient in Subsurface Layers of Germanium Single Crystals / V.A. Nadtochy, I.V. Zhikharev, M.M. Golodenko, M.K. Nechvolod // «Solid Status Phenomena». — Vol. 94. — 2003. – P. 253–257.
68. Доклад на конференции «Structure Changes Caused by the Stress Gradient in Sub-surface Layers of Germanium Single Crystals». Warsaw, 14-18 September, 2002. «Fall Meeting. Symposium C» / V.A. Nadtochy, I.V. Zhikharev, M.M. Golodenko, M.K. Nechvolod.
69. Рух дислокацій у напівпровідниках, спричинений градієнтом напружень / В.О. Надточій, М.М. Голоденко, М.К.Нечволод, І.В. Жихарєв, О.В. Періг // Фізика і хімія твердого тіла. — 2003. — №1. — С. 72–76.
70. Исследование дислокаций методом рентгеновской дифракции / В.А. Надточий, Н.Н. Голоденко, И.В. Жихарєв, Н.С. Киселев // Физика и техника высоких давлений. — 2003. — Т. 13, №1. — С. 91–95.
71. Структурные изменения в зоне воздействия лазерного луча в монокристаллическом германии / В.А. Надточий, В.П. Алехин, Н.Н. Голоденко, Н.К. Нечволод, Д.С. Москаль // Физика и химия обработки материалов. — 2003. — №4. — С. 9–12.
72. Microplasticity and Electrical Properties of Subsurface Layers of Diamond-like Semiconductors Deformed at Low Temperatures /V.A. Nadtochy, M.K. Nechvolod, M.M. Golodenko // Functional Materials. — Vol. 10, №1. — 2003. – P. 702–706 .
73. Структурні зміни у приповерхневому шарі Ge під дією лазерного імпульсу / В.А. Надточий, Н.Н. Голоденко, А.З. Калимбет, Д.С. Москаль // Фізика і хімія твердого тіла. — 2003. — Т. 4, №3. — С. 556–559.

74. Микропластичность приповерхностных слоев алмазоподобных полупроводников / В.А. Надточий, В.П. Алехин // Тезисы доклада на XIV Петербургских чтениях по проблемам прочности. — С. – Петербург. 12-14 марта, 2003. — С. 42–43.
75. Низкотемпературная микропластичность кристаллов InAs / В.А. Надточий, Н.Н. Голоденко, Д.С. Москаль, А.З. Калимбет // Тези доповідей. Міжнародна наукова конференція студентів та молодих учених. — Київ: Національний авіаційний університет. — 2002. — С. 19.
76. Дислокационная структура приповерхностных слоев Ge, обусловленная воздействием лазерного луча миллисекундной длительности / В.А. Надточий, В.П. Алехин // Тези доповідей IV Міжнародної школи-конференції «Актуальні проблеми фізики напівпровідників». — Дрогобич. 24–27 червня, 2003. — С. 43–44.
77. Про фізичний механізм виникнення дислокацій у приповерхневих шарах Ge під дією лазерного опромінювання мілісекундної тривалості / В.А. Надточий, Н.Н. Голоденко, Д.С. Москаль // Тези доповідей «Всеукраїнської конференції студентів і молодих науковців з теоретичної та експериментальної фізики». — Львів. 21-23 травня, 2003. — С. 136.
78. Дислокационная структура приповерхностных слоев Ge, обусловленная воздействием лазерного луча миллисекундной длительности / В.А. Надточий, В.П. Алехин // Тези доповідей IV Міжнародної школи-конференції «Актуальні проблеми фізики напівпровідників». — Дрогобич. 24–27 червня, 2003. — С. 43–44.
79. Про фізичний механізм виникнення дислокацій у приповерхневих шарах Ge під дією лазерного опромінювання мілісекундної тривалості / В.А. Надточий, Н.Н. Голоденко, Д.С. Москаль // Тези доповідей «Всеукраїнської конференції студентів і молодих науковців з теоретичної та експериментальної фізики». — Львів. 21–23 травня, 2003. — С. 136.
80. Formation of Defect in Ge Subsurfase Layers under the Action of Laser Pulse / В.А. Надточий, Н.Н. Голоденко, Д.С. Москаль // Тези матеріалів IX Міжнародної конференції «Фізика і технологія тонких плівок» МКФТТП-IX. — Ів.-Франківськ. 19-24 травня, 2003. — С. 247–248.
81. Исследование дислокаций сканирующим электронным пучком / В.А. Надточий, Н.Н. Голоденко, Д.С. Москаль // Відкрита Всеукраїнська конференція «Сучасні питання матеріалознавства». — Харків. 10-14 вересня, 2003. — С. 95.
82. Микропластичность и электрические свойства Ge і Si, деформированных при низких температурах / В.А. Надточий, Н.Н. Голоденко, Н.К. Нечволод // Вестник Харьковского национального университета им. В.Н.Каразина, № 600, серия «Физика», выпуск 7, 2003. — С. 101–104.
83. Microplasticity in Ge Syngle Crystal Caused by the Laser Irradiation and Pressing Deformation / V.A. Nadtochy // Journal of Physical Studies.
84. Investigation of Dislocation with Scanning Electron beam / В.А. Надточий, Н.Н. Голоденко, Д.С. Москаль // Functional Materials. — Vol. 11, №1. — 2004. – P. 40–43.
85. Про фізичний механізм виникнення дислокацій у приповерхневих шарах Ge під дією лазерного опромінювання мілісекундної тривалості / В.А. Надточий, Н.Н. Голоденко, Д.С. Москаль // Вісник Львівського університету. — 2004. — №38.
86. Микропластичность монокристаллов Ge при воздействии лазерного облучения и деформации сжатия / В.А. Надточий, В.П. Алехин // Физика и химия обработки материалов. — 2004, № 4, — С. 27–32.
87. Установка для исследования микропластичности полупроводниковых кристаллов / В.А. Надточий, Н.К. Нечволод // Физика и техника высоких давлений. — 2004. — Т. 14, №2. — С. 117–121.
88. Структурные изменения в кристаллах GaAs, деформированных сжатием при 300 K / В.А. Надточий, Н.Н. Голоденко, Д.С. Москаль // Сенсорна електроніка і мікросистемні технології. — 2004. — №2. — С. 89–93.

89. Изменение времени жизни носителей заряда и проводимости дефектного приповерхностного слоя Ge при термообработках / В.А. Надточий, Н.К. Нечволод, Н.Н. Голоденко // Физика и техника высоких давлений. — 2004. — Т. 14, №3. — С. 42–48.
90. Formation of periodic structures in GaAs near-surface layers irradiated by laser pulse / V.A. Nadtochy, D.S. Moskal, M.M. Golodenko // Photoelectronics. — Vol. 14, — 2005. — P. 105–107.
91. Анизотропия микропластичности германия / В.А. Надточий, В.П. Алехин, Н.С. Киселев // Физика и химия обработки материалов. — 2005, № 1. — С. 90–93.
92. Recombination of non-equilibrium charge carriers injected into Ge through intermediate defective layer / V.A. Nadtochy, M.K. Nechvolod, M.M. Golodenko // Functional Materials. — Vol. 12, №1. — 2005. — P. 45–50.
93. Microplasticity of subsurface layers of diamond-like semiconductors under microindentation / В.А. Надточий, В.П. Алехин, Н.Н. Голоденко // Физика и техника высоких давлений. — 2005. — Т. 15, №1. — С. 44–49.
94. Дислокації у приповерхневому шарі Ge, спричинені лазерним імпульсом / В.А. Надточий, Н.К. Нечволод, Н.Н. Голоденко, Д.С. Москаль // Вісник Харківського національного університету. — № 651. Серія «Фізика». — Вип. 8. — 2005. — С. 130–135.
95. Розрахунок термопружних полів у кристалах GaAs, спричинених дією лазерного променя з дифракційною просторовою модуляцією / В.А. Надточий, Н.Н. Голоденко, Д.С. Москаль // Політ: Матеріали V Міжнародної наукової конференції студентів та молодих учених. — Київ: Національний авіаційний університет. — 2005. — С. 94.
96. Мікропластичність у кристалах GaAs / В.А. Надточий, Н.Н. Голоденко // Тези доповідей V Міжнародної школи-конференції «Актуальні проблеми фізики напівпровідників». — Дрогобич. 21-23 травня, 2005. — С. 10–11.
97. Утворення періодичних структур у приповерхневих шарах GaAs під дією імпульсного лазерного опромінення / В.А. Надточий, Н.Н. Голоденко, Д.С. Москаль // Вісник СДПУ: Зб. наук. праць — Слов'янськ: СДПУ, 2005. — Вип. 1. — С. 27–31.
98. Дія абразивних часток на поверхню монокристала у процесі хіміко-механічного полірування / В.А. Надточий, Н.Н. Голоденко, О.Я. Белошапка // Вісник СДПУ: Зб. наук. праць — Слов'янськ: СДПУ, 2005. — Вип. 1. — С. 32–38.
99. Розрахунок термопружних полів у кристалах GaAs, спричинених дією лазерного променя з дифракційною просторовою модуляцією / В.А. Надточий, Н.Н. Голоденко, Д.С. Москаль // Наука і молодь: Збірник наукових праць міжнародної наукової конференції «Політ — 2005». — Київ: Національний авіаційний університет. — Вип. 8. — 2005. — С. 94.
100. Анализ рельефа поверхности GaAa, сформированного под воздействием дифракционно-модулированного лазерного излучения / В.А. Надточий, Н.Н. Голоденко, Д.С. Москаль // Сборник тезисов 45-й Международной конференции «Актуальные проблемы прочности». — Белгород, 25–28 сентября 2006 г. — С. 117-118.
101. Periodic structure formation in GaAs near-surface layer by laser beam with diffraction modulated intensity / V.A. Nadtochy, M.M. Golodenko, D.S. Moskal // Functional Materials. — Vol. 13, №1. — 2006. — P. 100-103.
102. Микропластичность алмазоподобных кристаллов (Si, Ge, GaAs, InAs) / В.А. Надточий // Дис. докт. фіз.-мат. наук: 01.04.07. — Харків, 2006.
103. Мікропластичність алмазоподібних кристалів / В.А. Надточий, Н.К. Нечволод, Д.С. Москаль // XI Міжнародна конференція з фізики і технології тонких плівок та наносистем, Івано-Франківськ, 7-12 травня 2007 р. — Т.2. — С. 122–123.
104. О механизме упрочнения приповерхностного слоя германия под действием низкотемпературной циклической деформации / В.А. Надточий, Н.К. Нечволод, Д.С. Москаль // XVII Петербургские чтения по проблемам прочности. Санкт-Петербург, 10-12 апреля 2007 г.: сборник материалов. — Ч. II. — СПб., 2007. — С. 126–127.

105. Анализ рельефа поверхности GaAs, сформированного воздействием дифракционномодулированного лазерного излучения / В.А. Надточий, Д.С. Москаль, Н.Н. Голоденко // Известия высших учебных заведений. 2007. — Т.50, № 11. — С. 86–89.
106. Analysis the relief of the GaAs surface formed upon exposure to diffraction-modulated laser radiation / V.A. Nadtochy, M.M. Golodenko, D.S. Moskal // Russian Physics Journal. — Vol. 50, №.11. — 2007. — P. 1154–1157.
107. Дифузійно-дислокаційна модель утворення періодичної структури на поверхні напівпровідника при імпульсному лазерному опроміненні / В.А. Надточий, Н.К. Нечволод, Д.С. Москаль // 3-я Міжнародна науково-технічна конференція «Сенсорна електроніка та мікросистемні технології (СЕМСТ-3)», Україна, Одеса, 2-6 червня 2008 р. Тези доповідей. — С. 185.
108. Распределение термоупругих напряжений по облучаемой лазерным импульсом поверхности монокристаллов GaAs / В.А. Надточий, Д.С. Москаль // Физика и техника высоких давлений. — 2008. —Т.18, №3. —С.154–160.
109. Дифузійний механізм формування кластерів у GaAs під дією просторово-періодичного лазерного опромінення / В.А. Надточий, Д.С. Москаль, Л.Л. Федоренко, М.М. Юсупов // Лашкарьовські читання 2008: конф. молодих вчених з фізики напівпровідників (Київ, 21-23 квітня 2008 р) / Київ, ін.-т фізики напівпровідників НАН України. — 2008. — С. 40–41.
110. Електротехніка. Методичні вказівки по організації і плануванню самостійної роботи студентів спеціальності 6.040203 Фізика / В.А. Надточий, А.Ф. Прун // Слов'янський державний педагогічний університет. Кафедра фізики, 2008. — 86 с.
111. Дифузійно-дислокаційна мікропластичність монокристалів Ge нижче температурної межі крихкого руйнування / В.А. Надточий, О.І. Уколов // Тези доповідей міжнародної конференції студентів і молодих науковців з теоретичної та експериментальної фізики. Еврика-2009, Львів-2009, 20-22 травня. —С. 34.
112. Комп'ютерне синтезування дифракційних масок / В.А. Надточий, Д.С. Москаль, А.З. Калимбет // Пошуки і знахідки. — Т. 4 Матеріали наукової конференції СДПУ/ Укладач В.К. Сарієнко. — Слов'янськ. —2009. — С. 131–134.
113. Про застосовність методик визначення параметрів рекомбінації носіїв заряду до приповерхневих шарів напівпровідника /В.А. Надточий, Д.С. Москаль, А.З.Калимбет, О.І. Уколов // Пошуки і знахідки. СЕРІЯ: фізико-математичні науки. Матеріали наукової конференції СДПУ-2010/ Укладач В.Н. Сарієнко. — Слов'янськ, 2010. —С. 88–95.
114. Некоторые механизмы разрушения ковалентных кристаллов при пониженных температурах / В.А. Надточий, Д.С. Москаль, А.З.Калимбет, А.И. Уколов // 49-ая Международная конференция «Актуальные проблемы прочности» 14-18 июня, 2010 г. Киев, Украина. — С. 232.
115. О роли диффузионных механизмов в процессе релаксации напряжений на концентраторах в монокристаллическом германии / В.А. Надточий, А.И. Уколов, Н.К. Нечволод // XIX Петербургские чтения по вопросам прочности. 13-15 апреля, 2010 г., Санкт-Петербург. С. 298–300.
116. Способ определения степени дефектности приповерхностных слоев монокристаллов Ge и Si / В.А. Надточий, А.И. Уколов // Заявка на изобретение. Регистрационный номер №201003112.
117. Дифузійно-дислокаційна мікропластичність монокристалів Ge нижче температурної межі крихкого руйнування / В.О. Надточій, О.І. Уколов, М.К. Нечволод // Фізика і хімія твердого тіла. — 2010, № 3. — С. 575-579.
118. Измерения времени жизни неосновных носителей заряда в приповерхностном слое с дефектами монокристалла германия / В.А. Надточий, А.И. Уколов, Н.К. Нечволод // Конференція молодих вчених з фізики напівпровідників «Лашкарьовські читання — 2010», Київ, 5–7 жовтня, 2010. — С. 49–51.

119. Визначення швидкості поверхневої рекомбінації і її впливу на час життя нерівноважних носіїв заряду / В.А. Надточий, О.І. Уколов, А.З. Калимбет //Збірник наукових праць фізико-математичного факультету СДПУ. (За матеріалами Всеукраїнської науково-практичної конференції «Актуальні питання науки і освіти»). — Слов'янськ: СДПУ, 2011. — №1 — 212 с. — С. 83–88.
120. Измерение параметров рекомбинации неравновесных носителей зарядов в приповерхностных слоях монокристалла германия / В.А. Надточий, А.И. Уколов, Ю. В. Уколова //Збірник тез конференції молодих вчених з фізики напівпровідників «Лашкарьовські читання — 2011» з міжнародною участю, Київ, 12-14 травня, 2011, Україна. – 176 с. — С.8–11.
121. Спосіб створення наноструктур на поверхні германію / В.А. Надточий, О.І. Уколов //Заявка на винахід. Реєстраційний номер № а 2011 08095.
122. Измерения времени жизни неосновных носителей заряда в приповерхностном слое монокристалического Ge зондовым методом / В.А. Надточий, А.И. Уколов, Н. Н. Голоденко // Вісник Харківського національного університету, серія фізична. — 2011.
123. Исследование поверхности деформированного Ge методом атомно-силовой микроскопии / В.А. Надточий, А.И. Уколов, В. П. Алехин // Деформация и разрушение материалов. — Москва. — 2012б №4. — С. 26–32.
124. Получение низкоразмерных структур на поверхности монокристаического германия низкотемпературным деформированием / В.А. Надточий, А. И. Уколов // X Міжнародна наукова конференція «Фізичні явища в твердих тілах» — Харківський національний університетт. — Харків, 3-8 грудня, 2011. — С. 2.
125. Измерение параметров рекомбинации неравновесных носителей заряда в приповерхностных слоях монокристаллического Ge / В.А. Надточий, А. И. Уколов, О. К. Попов, С. А. Перебайло // Збірник наукових праць фізико-математичного факультету СДПУ. — Слов'янськ. — 2012. — №2. — С. 87–94.
126. Исследование наноструктур на поверхности монокристаллического Ge методом атомно-силовой микроскопии / В.А. Надточий, А. И. Уколов, С. А. Костенко, Д. Ю. Редникин // Збірник наукових праць фізико-математичного факультету СДПУ. — Слов'янськ. — 2012. — №2. — С. 94–100.
127. Вплив різних термічних змін на логарифмічну повзучість монокристалів LiF в області дії фізичного механізму виснаження дислокацій / В.А. Надточий, М. К. Нечволод, І. В. Малєєв, О. І. Уколов, А. З. Калімбет // Збірник наукових праць фізико-математичного факультету СДПУ. — Слов'янськ. — 2012. — №2. — С. 100–109.
128. Москаль Д.С. Дефектоутворення у приповерхневих шарах монокристалів під впливом низькорівневого просторово-модульованого лазерного опромінення: Автореф. дис. ... канд. фіз.-мат. наук: 01.04.07. Наук. керівник В.О. Надточій. Харківський нац. ун-т., 2008. — 19 с.
129. Влияние термических изменений на логарифмическую ползучесть монокристаллов фтористого лития (LiF) в области действия физического механизма истощения дислокаций / В.А. Надточий, М. К. Нечволод , А. З. Калимбет, И.В. Малеев, А.И. Уколов // Вісник Донбаської державної машинобудівної академії: тематичний збірник наукових праць. — Краматорськ. — 2011. — №4,(25). — С.127–132.
130. Образование наноструктур на поверхности германия при деформировании в температурном интервале (300-600)К / В.А. Надточий, А.И. Уколов, Н.К. Нечволод // Тезисы доклада XX Петербургских чтений по проблемам прочности, посвященные памяти профессора В.А. Лихачева., С.-Петербург. — 10–12 апреля, 2012. — С. 228–230.
131. Спосіб визначення міри дефектності приповерхневих шарів монокристалів германію або кремнію. Патент на винахід № 97999 Вважається чинним з 10.04.2012. Видано Державною службою інтелектуальної власності України / В.А. Надточий, О.І. Уколов // Україна (19) UA (11) 97999 (13) C2 (51) МПК G01N 27/87 (2006.01).

132. Получение низкоразмерных структур на поверхности монокристалического германия низкотемпературным деформированием / В.А. Надточий, А. И. Уколов // X Міжнародна наукова конференція «Фізичні явища в твердих тілах» — Харківський національний ун-т. — Харків, 3–8 грудня, 2011. — 2 с.
133. Формирование наноструктур в Ge при условии дислокационно-поверхностной диффузии / В.А. Надточий, А.И. Уколов, Н.К.Нечволод // Физ. и техн. высоких давлений. – 2012. — Т.22, №3. — С. 54–62.
134. Распределение дефектов в тонких полупроводниковых пластинах при низкотемпературной деформации / В.А. Надточий, А.И. Уколов, Н.К. Нечволод // Физ. и техн. высоких давлений. — 2013. — Т.23, №4. — С. 83–91.
135. Устройство для измерения параметров рекомбинации неравновесных носителей заряда в приповерхностных слоях монокристаллов Ge / В.А. Надточий, А.И. Уколов // Вісник Харківського національного університету, серія «Фізика». — 2012. — №1020, вип. 17. — С. 87–90.
136. Формування наноструктур у монокристалічному германії за умови дислокаційно-поверхневої дифузії / В.А. Надточий, О.І. Уколов, І.О. Хорунжа, М.А. Полтавцев // Збірник наукових праць фізико-математичного факультету ДДПУ. — Слов'янськ: ДДПУ, 2013. — № 3. — С. 68–77.
137. Исследование распределения дефектов в полупроводниковых пластинах интегральных схем при воздействии механических напряжений / В.А. Надточий, А.И. Уколов, И.Л. Щербина, Р.И. Иванов // Збірник наукових праць фізико-математичного факультету ДДПУ. — Слов'янськ: ДДПУ, 2013. — № 3. — С. 77–86.
138. Формирование массивов наноструктур на поверхности германия при создании градиента напряжения / В.А. Надточий, А.И. Уколов, Н.К.Нечволод // Вестник Тамбовского университета. Серия: естественные и технические науки. — 2013. — Т. 18, вып. 4. — С. 2004–2005.
139. Стимулированная напряжением поверхностная диффузия и ее влияние на разрушение монокристаллов Ge / В.А. Надточий, А.И. Уколов // XI Міжнародна наукова конференція «Фізичні явища в твердих тілах» — Харківський національний ун-т. — Харків, 3–6 грудня, 2013, — С. 108.
140. Спосіб створення наноструктур на поверхні германію. Патент на винахід №101705. Зареєстровано в Державному реєстрі України на винаходи 25.04.2013. Автори Надточій В.О., Уколов О.І. // Україна (19) ИА (11) С2(51) МПК НО1L 27/322 (2006/01).
141. Уколов О.І. Утворення дефектів і низько-розмірних атомних структур у приповерхневих шарах германію під час деформації в інтервалі температур 300–600 К. Автореферат дис. ... канд. фіз.-мат. наук: 01.04.07. Наук. керівник В.О. Надточій. Дисертація прийнята до захисту у 2014 р.

Шановному Віктору Олексійовичу бажаємо міцного здоров'я, творчої наснаги і подальших успіхів у науці та викладацькій роботі!

Професорсько-викладацький склад
фізико-математичного факультету ДДПУ.

МАТЕМАТИКА

УДК 517.5

Новіков О.О., Ровенська О.Г., Воронцова Ю.М., Андрющенко Н.В., Волик С.В.

[1] *кандидат фіз.-мат. наук, декан фізико-математичного факультету, ДВНЗ «ДДПУ»*

[2] *кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри вищої математики, ДДМА*

[3–4] *студенти 5 курсу фізико-математичного факультету, ДВНЗ «ДДПУ»*

[5] *студентка 1 курсу фізико-математичного факультету, ДВНЗ «ДДПУ»*

e-mail: sgpi@slav.dn.ua

НАБЛИЖЕННЯ КЛАСІВ ІНТЕГРАЛІВ ПУАСОНА ОПЕРАТОРАМИ ФЕЙЄРА

Отримані асимптотичні формули для верхніх граней відхилень операторів Фейєра на класах інтегралів Пуасона.

Ключові слова: *ряды Фур'є, суми Фейєра.*

Нехай L — множина сумовних 2π–періодичних функцій, $f \in L$ і

$$S[f] = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k(f)\cos kx + b_k(f)\sin kx) \equiv \sum_{k=0}^{\infty} A_k(f;x)$$

— ряд Фур'є функції f. Позначимо через $S_n(f;x)$ часткові суми ряду Фур'є, тоді суми Фейєра $\sigma_n(f;x)$ функції $f \in L$ задаються наступним співвідношенням

$$\sigma_n(f,x) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} S_k(f,x). \tag{1}$$

Наслідуючи О.І. Степанця [1], побозначимо $C^q_{\beta,\infty}$ – класи неперервних 2π–періодичних функцій $f(x)$, які можна подати у вигляді згортки

$$f(x) = A_0 + \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(x+t)P^q_\beta(t)\,dt,$$

в якій $P^q_\beta(t) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} q^k \cos(kt + \frac{\beta\pi}{2})$ – ядро Пуасона, а $\varphi \in S^0_M$, тобто функція $\varphi(x)$ має нульове середнє значення на періоді і $\operatorname{esssup}|\varphi(x)| \leqslant 1$.

Задача про наближення класів $C^q_{\beta,\infty}$ лінійними методами має історію. С.М. Нікольський [2] показав, що для верхніх граней відхилень часткових сум Фур'є на класі аналитичних функцій має місце асимптотична рівність

$$\mathcal{E}\left(C^q_{\beta,\infty}; S_n\right) = \frac{8q^n}{\pi^2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{du}{\sqrt{1-q^2\sin^2 u}} + O(1)\frac{q^n}{n},$$

де величина $O(1)$ не залежить від $n \in \mathbb{N}$. С.Б. Стечкин [3] показав, що залишковий член цієї рівності можна подати у вигляді $O(1)\frac{q^n}{n(1-q)}$, де величина $O(1)$ рівномірно обмежена відносно $n \in \mathbb{N}$ та $q \in (0;1)$.

В роботі [1] О.І. Степанець отримав аналогічну асимптотичну формулу для класів $C^q_\beta H_\omega$. В.І. Рукасов та С.О. Чайченко [4] для верхніх граней відхилень сум Валле Пуссена на класах $C^q_{\beta,\infty}$ і $C^q_\beta H_\omega$ отримали аналогічні асимптотичні формули. Зокрема, у цій роботі показано, що

$$\mathcal{E}\left(C^q_{\beta,\infty}; V_{n,p}\right) = \frac{4q^{n-p+1}}{\pi p(1-q^2)} + O(1)\left(\frac{q^{n-p+1}}{p(n-p)(1-q)^3} + \frac{q^n}{p(1-q^2)}\right). \tag{2}$$

А.С. Сердюк [5] показав, що має місце більш загальна рівність ніж (2):

$$\mathcal{E}\left(C^q_{\beta,\infty}; V_{n,p}\right) = \frac{q^{n-p+1}}{p}\left(\frac{4}{\pi^2}K_{p,q} + O(1)\left(\frac{q}{(n-p+1)(1-q)^s}\right)\right),$$

де

$$K_{p,q} = \int\limits_0^{\pi} \frac{\sqrt{1-2q^p\cos pt + q^{2p}}}{1-2q\cos pt + q^2}dt, \ \ s = s(p) = \begin{cases} 1, & p = 1 \\ 3, & p = 2, 3, ... \end{cases}$$

В даній роботі отримані аналогичні асимптотичні рівності для верхніх граней відхилень тригонометричних поліномів $\sigma_n(f,x)$ на класах $C^q_{\beta,\infty}$.

Теорема 1. *Нехай $q \in (0;1)$. Тоді для $n \to \infty$ має місце асимптотична формула*

$$\mathcal{E}(C^q_{1,\infty}, \sigma_n) = \frac{2}{\pi n}\left(\frac{2q}{1-q^2} + \ln\frac{1+q}{1-q}\right) + O(1)\frac{q^n}{n(1-q)^3}. \tag{3}$$

Якщо $q \in (0;1)$ задовольняє умові $|3q^2-1| > q^3$, то для $n \to \infty$ має місце асимптотична формула

$$\mathcal{E}(C^q_{0,\infty}, \sigma_n) = \frac{2}{\pi n}\left(\frac{2q}{1+q^2} - \frac{1+q^2}{1-q^2}\text{arctg}\frac{2q}{1-q^2}\right) + O(1)\frac{q^n}{n(1-q)^3}. \tag{4}$$

Доведення. На підставі співвідношення (1) маємо

$$\delta_n(f;x) \overset{df}{=} f(x) - \sigma_n(f;x) = f(x) - \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} S_k(f;x) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\rho_k(f;x), \tag{3}$$

де $\rho_k(f,x) \overset{df}{=} f(x) - S_k(f,x)$.

Застосовуючи прийоми роботи [6, с.123], отримуємо

$$\delta_n(f;x) = \frac{1}{\pi n}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{f_\beta^\alpha(x+t)}{1-2q\cos t+q^2}\left[\Sigma_1 \cos\frac{\beta\pi}{2} + \Sigma_2 \sin\frac{\beta\pi}{2}\right]dt, \tag{5}$$

де

$$\Sigma_1 = \sum_{k=0}^{n-1} q^k[\cos kt - q\cos(k-1)t] = \frac{1/2}{1-2q\cos t+q^2}[2 - 4q\cos t +$$

$$+2q^2\cos 2t - 2q^n(\cos nt + 2q\cos(n-1)t - q^2\cos(n-2)t)],$$

$$\Sigma_2 = \sum_{k=0}^{n-1} q^k[q\sin(k-1)t - \sin kt] = \frac{1}{1-2q\cos t+q^2}[-4q\sin t +$$

$$+2q^2\sin 2t - 2q^n(\sin nt + 2q\sin(n-1)t - q^2\sin(n-2)t)].$$

Тоді, враховуючи, що

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{dt}{(1-2q\cos t+q^2)^2} = O(1)(1-q)^{-3},$$

на підставі (5) маємо

$$\delta_n(f;x) = \frac{1}{\pi n}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{f_\beta^\alpha(x+t)}{(1-2q\cos t+q^2)^2}\left[[1-2q\cos t+q^2\cos 2t]\cos\frac{\beta\pi}{2} - \right.$$

$$\left. -[-2q\sin t + q^2\sin 2t]\sin\frac{\beta\pi}{2}\right]dt + O(1)\frac{q^n}{(1-q)^3 n}.$$

Нехай $\beta = 1$. Тоді

$$\delta_n(f;x) = \frac{1}{\pi n}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{f_1^q(x+t)[-2q\sin t + q^2\sin 2t]}{(1-2q\cos t+q^2)^2}dt + O(1)\frac{q^n}{(1-q)^3 n}.$$

Отже, в силу інвариантності класу $C^q_{1,\infty}$ відносно зсуву за аргументом

$$\sup_{f\in C^q_{1,\infty}} ||\delta_n(f;x)|| = \sup_{f\in S^0_M}\left|\frac{1}{\pi n}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\frac{f(t)[-2q\sin t+q^2\sin 2t]}{(1-2q\cos t+q^2)^2}dt+\frac{O(1)q^n}{(1-q)^3 n}\right| =$$

$$=\frac{1}{\pi n}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\frac{\varphi(t)(-2q\sin t+q^2\sin 2t)}{(1-2q\cos t+q^2)^2}dt+O(1)\frac{q^n}{(1-q)^3 n}.$$

де

$$\varphi(t)=\operatorname{sign}(-2q\sin t+q^2\sin 2t)=\begin{cases}-1, & t\in(0;\pi),\\ 1, & t\in(-\pi;0).\end{cases}$$

Оскільки $\varphi\in S^0_M$, то отримуємо

$$\mathcal{E}(C^q_{1,\infty},\sigma_n)=\frac{2}{\pi n}\int\limits_{0}^{\pi}\frac{2q\sin t-q^2\sin 2t}{(1-2q\cos t+q^2)^2}dt+O(1)\frac{q^n}{(1-q)^3 n}. \tag{6}$$

Обчислимо інтеграл. Застосовуючи заміну $z=\cos t$, маємо

$$\int\frac{2q\sin t-q^2\sin 2t}{(1-2q\cos t+q^2)^2}dt=-\int\frac{2q-2q^2 z}{(1-2qz+q^2)^2}dz=$$

$$=-\frac{(1-q^2)}{2}(1-2q\cos t+q^2)^{-1}+\frac{1}{2}\ln(1-2q\cos t+q^2).$$

Таким чином,

$$\int\limits_{0}^{\pi}\frac{2q\sin t-q^2\sin 2t}{(1-2q\cos t+q^2)^2}dt=\frac{2q}{(1-q^2)}+\ln\frac{(1+q)}{(1-q)}.$$

Отже, на підставі (6) отримуємо (3).

Нехай тепер $\beta=0$. Тоді для $f^q_0\in S^0_M$

$$\delta_n(f;x)=\frac{1}{\pi n}\int\limits_{-\pi}^{\pi}f^q_0(x+t)\left(I+\frac{1-2q\cos t+q^2\cos 2t}{(1-2q\cos t+q^2)^2}\right)dt+O(1)\frac{q^n}{(1-q)^3 n},$$

де I таке, що $\operatorname{mes}T(I+\frac{1-2q\cos t+q^2\cos 2t}{(1-2q\cos t+q^2)^2}\geqslant 0)=\operatorname{mes}T(I+\frac{1-2q\cos t+q^2\cos 2t}{(1-2q\cos t+q^2)^2}\leqslant 0)$. Оскільки

$$\left(\frac{1-2q\cos t+q^2\cos 2t}{(1-2q\cos t+q^2)^2}\right)'=\frac{2q\sin t(-1+3q^2-q^3\cos t)}{(1-2q\cos t+q^2)^3},$$

то для q таких, що $|3q^2-1| > q^3$ на проміжку $[-\pi;0]$ функція $\frac{1-2q\cos t+q^2\cos 2t}{(1-2q\cos t+q^2)^2}$ зростає, а на проміжку $[0;\pi]$ спадає. Так, що функція

$$\nu(t) = \frac{1-2q\cos t+q^2\cos 2t}{(1-2q\cos t+q^2)^2} - \frac{1-q^2}{(1+q^2)^2}$$

додатна на $(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2})$ і від'ємна на $(-\pi;\frac{\pi}{2})\cup(\frac{\pi}{2};\pi)$. Тому для функції $f_0^q(x) = \varphi(t) = \operatorname{sign}(\nu(t)) \in S_M^0$ виконується

$$\mathcal{E}(C_{0,\infty}^q,\sigma_n) = \frac{1}{\pi n}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\varphi(x+t)\nu(t)dt + O(1)\frac{q^n}{(1-q)^3 n} =$$

$$= \frac{2}{\pi n}\int\limits_{0}^{\pi}\left|\frac{q^2-1}{(1+q^2)^2} + \frac{1-2q\cos t+q^2\cos 2t}{(1-2q\cos t+q^2)^2}\right|dt + O(1)\frac{q^n}{n(1-q)^3}. \qquad (7)$$

Застосовуючи універсальну тригонометричну підстановку та методи інтегрування раціональних функцій отримуємо,

$$\int\limits_0^{\pi}\left|\frac{1-2q\cos t+q^2\cos 2t}{(1-2q\cos t+q^2)^2}\right|dt = \frac{2}{\pi n}\left(\frac{2q}{(1+q^2)} - \frac{1+q^2}{1-q^2}\operatorname{arctg}\frac{2q}{1-q^2}\right).$$

Отже на підставі (7) отримуємо (4). Терема доведена.

Література

1. *Степанец А.И.* Решение задачи Колмогорова-Никольского для интегралов Пуассона непрерывных функций // Мат. сборник. — 2001. — Т. 192, № 1. — С. 113—138.
2. *Никольский С.М.* Приближение функций тригонометрическими полиномами в среднем // Изв. АН СССР. Сер. мат. — 1946. — Т. 10, № 3. — С. 207—256.
3. *Стечкин С.Б.* Оценка остатка ряда Фурье для дифференцируемых функций // Тр. Мат. ин-та им. В.А. Стеклова АН СССР. — 1980. — Т. 145. — С. 126—151.
4. *Рукасов В.І.* Наближення аналітичних періодичних функцій сумами Валле-Пуссена / В.І. Рукасов, С.О. Чайченко // Укр. мат. журн. — 2002. — Т. 54, № 12. — С. 1653—1668.
5. *Сердюк А.С.* Наближення інтегралів Пуасона сумами Валле Пуссена // Укр. мат. журн. — 2004. — Т. 56, № 1. — С. 97—107.
6. *Степанец А.И.* Классификация и приближение периодических функций. — Киев: Наук. думка, 1987. — 268 с.

УДК 517.5

Новіков О.О., Ровенська О.Г., Циганок А.А., Ничипорук А.О., Соловйова К.В.

[1] *кандидат фіз.-мат. наук, декан фізико-математичного факультету, ДВНЗ «ДДПУ»*

[2] *кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри вищої математики, ДДМА*

[3–5] *студенти 5 курсу фізико-математичного факультету, ДВНЗ «ДДПУ»*

e-mail: sgpi@slav.dn.ua

СПІВВІДНОШЕННЯ ДЛЯ ЕЛЕМЕНТІВ ПІДСУМОВУЮЧИХ МАТРИЦЬ ПОТРІЙНИХ ОПЕРАТОРІВ ВАЛЛЕ ПУССЕНА

Отримані елементи підсумовуючих трикутних матриць, потрійних операторів Валле Пуссена.

Ключові слова: *ряды Фур'є, представлення сум Валле Пуссена.*

Вступ

Нехай L — множина сумовних 2π–періодичних функцій, $f \in L$ і

$$S[f] = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k(f)\cos kx + b_k(f)\sin kx) \equiv \sum_{k=0}^{\infty} A_k(f;x) \tag{1}$$

— ряд Фур'є функції f. Позначимо через $S_n(f;x)$ часткові суми ряду Фур'є

$$S_n(f;x) = \sum_{k=0}^{n} a_k \cos kx + b_k \sin kx. \tag{2}$$

Тоді для $1 \leqslant p < n$ відповідні суми Валле Пуссена функції $f \in L$ можна подати співвідношенням

$$V_{n,p}(f,x) = \frac{1}{p}\sum_{k=n-p}^{n-1} S_k(f,x). \tag{3}$$

Нехай p_1, p_2, p_3 — довільні натуральні числа такі, що $p_1 + p_2 + p_3 < n$. Потрійними сумами Валле Пуссена будемо називати тригонометричні многочлени, які задаються наступним співвідношенням

$$V_{n,p_1,p_2,p_3}(f,x) = V^{(3)}_{n,\overline{p}}(f,x) = \frac{1}{p_1}\sum_{k=n-p_1}^{n-1}\frac{1}{p_2}\sum_{m=k-p_2+1}^{k}\frac{1}{p_3}\sum_{r=m-p_3+1}^{m} S_r(f,x). \tag{4}$$

Для застосування методів вивчення інтегральних представлень відхилень потрійних операторів Валле Пуссена ці оператори слід подати у вигляді методів, які породжуються нескінченними трикутними матрицями наступним чином. За допомогою нескінченної трикутної матриці чисел $\Lambda = \{\lambda_k^{(n)}\}$, $k, n = 0, 1, 2, \ldots,$ $\lambda_0^{(n)} = 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\lambda_k^{(n)} = 0$ для $k \geqslant n$, кожній функції f, що має ряд Фур'є (1), поставимо у відповідність послідовність тригонометричних полиномів:

$$U_n(f;x;\Lambda) = \frac{a_0}{2}\lambda_0^{(n)} + \sum_{k=1}^{n-1} \lambda_k^{(n)}(a_k(f)\cos kx + b_k(f)\sin kx). \tag{5}$$

У вигляді тригонометричних поліномів (5) суми Валле Пуссена $V_{n,p}(f;x)$ функції $f(x)$, що задаються співвідношенням (3), можна подати за допомогою матриці $\Lambda = \{\lambda_k^{(n)}\}$, елементи якої задаються наступним співвідношенням

$$\lambda_k^{(n)} = \begin{cases} 1, & 1 \leqslant k \leqslant n-p; \\ 1 - \frac{k-n+p}{p}, & n-p < k \leqslant n,\ n,\ p \in \mathbb{N},\ p < n. \end{cases}$$

Неважко помітити, що у випадку, коли $p_1 = p_2 = 1$, $p_3 = p$, потрійні суми Валле Пуссена співпадають із звичайними сумами Валле Пуссена.

Потрійні суми Валле Пуссена у випадку, коли $p_3 = 1$, співпадають з повторними сумами, відповідні співвідношення для елементів підсумовуючих матриць яких отримані у роботі [3].

У даній роботі отримані співвідношення для елементів підсумовуючих матриць $\Lambda = \{\lambda_k^{(n)}\}$ потрійних методів Валле Пуссена V_{n,p_1,p_2,p_3}.

Основна частина

Теорема 1. *Нехай* $2 \leqslant p_1 \leqslant p_2 < p_3$, $p_1 + p_2 + p_3 < n$. *Тоді*

$$V_{n,p_1,p_2,p_3}(f,x) = \frac{a_0}{2}\lambda_0^{(n)} + \sum_{k=1}^{n-1} \lambda_k^{(n)}(a_k(f)\cos kx + b_k(f)\sin kx).$$

якщо числа $\lambda_k^{(n)}$ *задаються наступним співвідношенням*

$$\lambda_k^{(n)} =$$

$$\begin{cases} 1, & k=1,2,...,n-\overline{p}+2; \\ 1-\frac{1}{p_1p_2p_3}\sum\limits_{i=1}^{k-n+\overline{p}-2}\frac{1}{2}i(i+1), & k=n-\overline{p}+3,...,n-p_{2,3}+2; \\ 1-\frac{1}{p_1p_2p_3}[\sum\limits_{i=1}^{k-n+p_{2,3}-2}\frac{(2i+p_1+1)p_1}{2}+\sum\limits_{i=1}^{p_1}\frac{i(i+1)}{2}], & k=n-p_{2,3}+3,...,n-p_{1,3}+1; \\ \frac{1}{p_1p_2p_3}[(n-k+1-\frac{p_{2,1}}{2})p_2p_1-\sum\limits_{i=1}^{n-k-p_3}\frac{i(i+1)}{2}], & k=n-p_{1,3}+1,...,n-p_3-1; \\ \frac{1}{p_3}[(n-k+1)-\frac{p_{1,2}}{2}], & k=n-p_3,...,n-p_{1,2}+1; \\ \frac{1}{p_1p_2p_3}[(n-k+1-\frac{p_{1,2}}{2})p_2p_1+\sum\limits_{i=0}^{k-n+p_{1,2}-2}\frac{(i+1)i}{2}], & k=n-p_{1,2}+2,...,n-p_2; \\ \frac{1}{p_1p_2p_3}[\sum\limits_{i=1}^{p_1}\frac{(i+1)i}{2}+\sum\limits_{i=1}^{n-k-p_1}\frac{p_1}{2}(2i+p_1+1)], & k=n-p_2+1,...,n-p_1-1; \\ \frac{1}{p_1p_2p_3}\sum\limits_{i=1}^{n-k}\frac{i(i+1)}{2}, & k=n-p_1,...,n-1, \end{cases} \tag{6}$$

де $\overline{p}=p_1+p_2+p_3$, $p_{i,j}=p_i+p_j$.

Доведення. Нехай $2 \leqslant p_1 \leqslant p_2 < p_3$, $p_1+p_2+p_3<n$. Позначимо $p_{i,j}=p_i+p_j$, $i=1,2,3; j=1,2,3;$ $\overline{p}=p_{1,2,3}=p_1+p_2+p_3$.
Тоді потрібні числа $\lambda_k^{(n)}$ задовольняють умову

$$\frac{1}{p_1p_2p_3}\sum_{k=n-p_1}^{n-1}\sum_{\nu=k-p_2+1}^{k}\sum_{m=\nu-p_3+1}^{\nu}S_m(f,x)=\frac{1}{p_1p_2p_3}\sum_{k=n-p_1}^{n-1}$$

$$\begin{array}{ccccccc} [S_{k-p_{2,3}+2}+ & S_{k-p_{2,3}+3}+ & S_{k-p_{2,3}+4}+ & ... & +S_{k-p_3+1}+ & ... & +S_{k-p_2+1}+ \\ +S_{k-p_{2,3}+3}+ & S_{k-p_{2,3}+4}+ & S_{k-p_{2,3}+5}+ & ... & +S_{k-p_3+2}+ & ... & +S_{k-p_2+2}+ \\ +S_{k-p_{2,3}+4}+ & S_{k-p_{2,3}+5}+ & S_{k-p_{2,3}+6}+ & ... & +S_{k-p_3+3}+ & ... & +S_{k-p_2+3}+ \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ +S_{k-p_3+1}+ & S_{k-p_3+2}+ & S_{k-p_3+3}+ & ... & +S_{k-p_3+p_2+1}+ & ... & +S_k]= \end{array}$$

$$=S_{n-p_1-p_2-p_3+2}+3S_{n-p_1-p_2-p_3+3}+6S_{n-p_1-p_2-p_3+4}...+$$

$$+...+6S_{n-3}+3S_{n-2}+S_{n-1}=\sum_{k=0}^{n-1}\lambda_k^{(n,\overline{p})}A_k(f;x).$$

Всі суми Фур'є $S_k=S_k(f;x)$, що додаються, розташовані в p_1 прямокутних таблицях, у кожній з яких p_3 стовпців і p_2 строк.

Розпочнемо підрахунок з кінця. У перший блок зберемо елементи S_k , які хоча б в одній з таблиць є самим правим нижнім елементом. Неважко помітити, що елемент S_{n-i} для кожного $i=1,2,...,p_1$ зустрічається один раз в $p_1 - i + 1$-ой таблиці і на одиницю раз більше в кожній наступній до p_1-й включно. Тому кількість елементів S_{n-i} в усій цій побудові дорівнює $1+2+...+i = \frac{i(i+1)}{2}$. Гармоніка $A_{n-\nu}$ міститься в усіх сумах $S_{n-i} = \sum_{j=0}^{n-i} A_j$, у яких номер більше-дорівнює номеру цієї гармоніки. Кількість усіх елементів S_k з номерами $k \geqslant n-\nu$, $\nu = 1, 2, ..., p_1$, в усій будівлі дорівнює $\sum_{i=1}^{\nu} \frac{i(i+1)}{2}$. Це означає, що загальна кількість гармонік $A_{n-\nu}$ в усіх таблицях для кожного $\nu = 1, 2, ..., p_1$ дорівнює $\sum_{i=1}^{\nu} \frac{i(i+1)}{2}$. Виконуючи заміну $k = n - \nu$, $\nu = n - k$, для $k = n - p_1, n - p_1 + 1, ..., n - 1$ отримуємо

$$\lambda_k^{(n)} = \frac{1}{p_1 p_2 p_3} \sum_{i=1}^{n-k} \frac{i(i+1)}{2}, \tag{7}$$

Кожний з елементів з номерами $k = n - p_2 + 1, ..., n - p_1 - 1$ входить в кожну з p_1 таблиць і утворює рівно p_1 неповних діагоналей так, що для кожного $i = 1, 2, ..., p_2 - p_1 - 1$ елемент S_{n-p_1-i} в останній таблиці утворює найбільш довгу діагональ довжиною $p_1 + i < p_2$ штук і в кожній попередній на 1 більш коротку. Тому загальна кількість елементів S_{n-p_1-i} для кожного $i = 1, 2, ..., p_2 - p_1 - 1$ дорівнює $(p_1+i)+(p_1+i-1)+...+(i+1) = \frac{p_1}{2}(2i+p_1+1)$. Для номерів $k = n - p_2 + 1, ..., n - p_1 - 1$ гармоніка $A_k = A_{n-p_1-\nu}$, $\nu = 1, 2, ..., p_2 - p_1 - 1$, потрапляє по одному разу у кожну з сум S_m з номерами $m = n - p_1, n - p_1 + 1, ..., n - 1$, загальна кількість яких дорівнює $\sum_{i=1}^{p_1} \frac{i(i+1)}{2}$, і по одному разу в кожну з сум S_{n-p_1-i}, $1 \leqslant i \leqslant \nu$. Кількість всіх елементів S_m з номерами $m = n - p_1 - \nu, ..., n - p_1 - 1$, в усій будівлі дорівнює $\sum_{i=1}^{\nu} \frac{p_1}{2}(2i+p_1+1)$. Таким чином, виконуючи заміну $k = n - p_1 - \nu$, $\nu = n - p_1 - k$, для $k = n - p_2 + 1, ..., n - p_1 - 1$ отримуємо

$$\lambda_k^{(n)} = \frac{1}{p_1 p_2 p_3} [\sum_{i=1}^{p_1} \frac{i}{2}(i+1) + \sum_{i=1}^{n-k-p_1} \frac{p_1}{2}(2i + p_1 + 1)]. \tag{8}$$

Суми $S_{n-\nu-p_2+1}$, $\nu = 1, 2, ...p_1 - 1$, утворюють в усій цій побудові ν повних діагоналей і $p_1 - \nu$ діагоналей, довжини яких дорівнюють відповідно $p_2 - 1, p_2 - 2, ..., p_2 - (p_1 - \nu)$. Тому загальна кількість всіх елементів S_k з номерами $n - \nu - p_2 + 1 \leqslant k \leqslant n - p_2$ дорівнює

$$\nu p_2 p_1 - \sum_{i=p_1-\nu}^{p_1-1} \frac{i(i+1)}{2}.$$

Отже, для $\nu = 1, 2, ...p_1 - 1$, маємо

$$\lambda_{n-\nu-p_2+1}^{(n)} = \frac{1}{p_1 p_2 p_3} [\nu p_2 p_1 - \sum_{i=p_1-\nu}^{p_1-1} \frac{i(i+1)}{2} + \sum_{i=1}^{p_1} \frac{i}{2}(i+1) + \sum_{i=1}^{p_2-p_1-1} \frac{p_1}{2}(2i+p_1+1)].$$

Виконуючи заміну $\nu = n - k - p_2 + 1$, для $k = n - p_1 - p_2 + 2, ..., n - p_2$ отримуємо

$$\lambda_k^{(n)} = \frac{1}{p_1 p_2 p_3}[(n - k + 1 - \frac{(p_2 + p_1)}{2})p_2 p_1 + \sum_{i=0}^{k-n+p_1+p_2-2} \frac{i}{2}(i + 1)]. \tag{9}$$

Суми S_k з номерами $k = n - p_3, ..., n - p_1 - p_2 + 1$ утворюють блок повних діагоналей. Для $\nu = 1, 2, ..., p_3 - p_1 - p_2$ суми $S_{n-p_1-p_2+2-\nu}$ містяться $p_1 p_2$ раз. Тому для $k = n - p_3, ..., n - p_1 - p_2 + 1$

$$\lambda_k^{(n)} = \frac{1}{p_3}[(n - k + 1) - \frac{p_2 + p_1}{2}]. \tag{10}$$

Сума $S_{n-p_3-p_1+\nu}$, для кожного $\nu = 1, 2, ...p_1 - 1$, утворює в усій цій будівлі ν повних діагоналей і $p_1 - \nu$ діагоналей, довжини яких дорівнюють відповідно $p_2 - 1, p_2 - 2, ..., p_2 - (p_1 - \nu)$. Тому загальна кількість сум S_k з номерами $k = n - p_3 - p_1 + \nu, ..., n - 1$ дорівнює $(p_1 - \nu)p_2 p_1 - \sum_{i=\nu}^{p_1-1} \frac{(p_1-i)(p_1-i+1)}{2} + p_2 p_1[(p_3 + 1) - \frac{p_2+p_1}{2}]$ так, що для $k = n - p_1 - p_3 + 1, ..., n - p_3 - 1$

$$\lambda_k^{(n)} = \frac{1}{p_1 p_2 p_3}[(n - k + 1 - \frac{p_2 + p_1}{2})p_2 p_1 - \sum_{j=1}^{n-k-p_3} \frac{j(j + 1)}{2}]. \tag{11}$$

Гармоніка $A_{n-p_1-p_2-p_3+3}$ не потрапляє в одну суму $S_{n-p_1-p_2-p_3+2}$, $A_{n-p_1-p_2-p_3+4}$ не потрапляє в одну суму $S_{n-p_1-p_2-p_3+2}$ і в дві суми $S_{n-p_1-p_2-p_3+3}$ і т.д. Кожна з сум S_k з номерами $k = n-p_1-p_2-p_3+2, n-p_1-p_2-p_3+3, ..., n-p_2-p_3+1$ є кутовим елементом відповідно у першій, другій, ... , p_i-й таблиці і в кожній наступній утворює діагональ на 1 довшу, а в попередніх не зустрічається. Тому кожна з сум $S_{n-p_1-p_2-p_3+1+\nu}$ для $\nu = 1, 2, ..., p_1 - 1$ міститься $1 + 2 + .. + \nu = \frac{\nu(\nu+1)}{2}$ разів. Гармоніка $A_{n-p_1-p_2-p_3+2+\nu}$, $\nu = 1, 2, ..., p_1$ не міститься в усіх сумах з номерами меншими за $n - p_1 - p_2 - p_3 + 2 + \nu$. Загальна кількість сум S_k з номерами $k < n - p_1 - p_2 - p_3 + 2 + \nu$ дорівнює $\sum\limits_{i=1}^{\nu} \frac{i(i+1)}{2}$. Таким чином для $k = n - p_1 - p_2 - p_3 + 3, n - p_1 - p_2 - p_3 + 4, ..., n - p_2 - p_3 + 2$

$$\lambda_k^{(n)} = 1 - \frac{1}{p_1 p_2 p_3} \sum_{i=1}^{k-n+p_1+p_2+p_3-2} \frac{i(i + 1)}{2}. \tag{12}$$

Кожна із сум S_k з номерами $k = n-p_2-p_3+2, n-p_2-p_3+3, ..., n-p_1-p_3$ зустрічається у кожній таблиці більше одного разу, але не утворює жодної повної діагоналі. Загальна кількість елементів $S_{n-p_2-p_3+1+i}$ для кожного $i = 1, 2, ..., p_2-p_1-1$ дорівнює $(p_1+i)+(p_1+i-1)+...+(i+1) = \frac{p_1}{2}(2i+p_1+1)$.

Гармоніка $A_{n-p_2-p_3+2+\nu}$, $\nu = 1, 2, ..., p_2 - p_1 - 1$ не міститься в усіх сумах з номерами меншими за $n-p_2-p_3+2+\nu$. Загальна кількість сум S_k з номерами $n-p_2-p_3+2 < k < n-p_2-p_3+2+\nu$ дорівнює $\sum\limits_{i=1}^{\nu} \frac{p_1}{2}(2i+p_1+1)$, а всіх сум S_k з номерами $k < n-p_2-p_3+2+\nu$ дорівнює $\sum\limits_{i=1}^{\nu} \frac{p_1}{2}(2i+p_1+1) + \sum\limits_{i=1}^{p_1} \frac{i(i+1)}{2}$. Таким чином для $k = n-p_2-p_3+3, n-p_2-p_3+4, ..., n-p_1-p_3+1$

$$\lambda_k^{(n)} = 1 - \frac{1}{p_1 p_2 p_3}[\sum_{i=1}^{k-n+p_2+p_3-2} \frac{p_1}{2}(2i+p_1+1) + \sum_{i=1}^{p_1} \frac{i(i+1)}{2}]. \qquad (13)$$

Поєднуючи (7) – (13), отримуємо (6).

Теорема доведена.

Література

1. *Степанец А.И.* Классификация и приближение периодических функций. — К.: Наук. думка, 1987. — 268 с.
2. *Ровенская О.Г.* Приближение интегралов Пуассона повторными суммами Валле Пуссена / О.Г. Ровенская, О.А. Новиков // Нелінійні коливання. — 2010. — Т. 13, № 1. — С. 96–99.
3. *Новиков О.А.* Представление повторных методов Валле Пуссена в виде λ–методов / О.А. Новиков, О.Г. Ровенская, Т.В. Шулик [та ін.] // Збірник наукових праць фізико-математичного факультету ДДПУ. — 2013. — Випуск 3. — С. 13–16.

УДК 517.5

Бодрая В.И., Сазонова Ю.В., Панасенко Я.С., Логвиненко А.В., Протыняк А.Л.

[1] *асистент каф. высшей математики, Киевский национальный университет технологий и дизайна*

[2–5] *студенты 5 курса физико-математического факультета, ГВУЗ «ДГПУ»*

e-mail: sgpi@slav.dn.ua

ПРИБЛИЖЕНИЕ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ ПРЯМОУГОЛЬНЫМИ ЛИНЕЙНЫМИ МЕТОДАМИ

Отримані асимптотичні формули для верхніх граней відхилень прямокутних лінійних середніх на класах періодичних функцій багатьох змінних

Ключевые слова: *ряды Фурье, асимптотические равенства.*

Введение

В данной работе изучаются вопросы приближения классов периодических функций m переменных, имеющих почти везде ограниченные обобщенные частные производные. Классификации неперерывных периодических функций на основе учета свойств семейств коэффициентов Фурье периодических функций многих переменных были предложены в работах П.В. Задерея [1], А.И. Степанца, Н.Л. Пачулиа [2], Р.А. Ласурии [3], В.И. Рукасова [4] и других.

Пусть $R^m = \{\vec{x} = (x_1, x_2, ..., x_m), x_i \in R, i = 1, 2, ..., m\}$ – m-мерное Евклидово пространство, $T^m = \prod\limits_{i=1}^{m} [-\pi; \pi]$ – m-мерный куб с ребром 2π,

$$N^m = \left\{\vec{x} \in R^m | x_i \in N, \ i = 1, 2, ..., m\right\}.$$

Через $L(T^m)$ обозначим множество 2π-периодических по каждой переменной, суммируемых на кубе T^m, функций $f(\vec{x}) = f(x_1, x_2, ..., x_m)$. Пусть $E^m \subset R^m$ – множество упорядоченных m-ок из нулей и единиц. Следуя [5], каждой паре точек $\vec{s} \in E^m$, $\vec{k} \in N_*^m = N^m \cup E^m$, поставим в соответствие коэффициент Фурье функции $f \in L(T^m)$

$$a_{\vec{k}}^{\vec{s}}(f) = \frac{1}{\pi^m} \int\limits_{T^m} f(\vec{x}) \prod_{i=1}^{m} \cos\left(k_i x_i - \frac{s_i \pi}{2}\right) dx_i.$$

Каждому вектору $\vec{k} \in N_*^m$ поставим в соответствие величину

$$A_{\vec{k}}(f; \vec{x}) = \sum_{\vec{s} \in E^m} a_{\vec{k}}^{\vec{s}}(f) \prod_{i=1}^{m} \cos\left(k_i x_i - \frac{s_i \pi}{2}\right).$$

Тогда, следуя [2,7], ряд Фурье функции $f(\vec{x})$ задается соотношением

$$S[f]=\sum_{\vec{k}\in N_*^m}\frac{1}{2^{q(\vec{k})}}A_{\vec{k}}(f;\vec{x}), \qquad (1)$$

где $q(\vec{k})$ – количество нулевых координат вектора $\vec{k}$.

Пусть $\overline{m}=\{1,2,...,m\}$. Обозначим символом $\mu(r)\subset\overline{m}$ r-элементные подмножества из $\overline{m}$. Гармоникой, сопряженной с $A_{\vec{k}}(f;\vec{x})$ по переменным x_ν, $\nu\in\mu\subset\overline{m}$ будем называть величину

$$A_{\vec{k}}^{\sum\limits_{\nu\in\mu}\vec{e}_\nu}(f;\vec{x})=\sum_{\vec{s}\in E^m}a_{\vec{k}}^{\vec{s}}(f)\prod_{i\in\overline{m}\setminus\mu}\cos\left(k_ix_i-\frac{s_i\pi}{2}\right)\prod_{j\in\mu}\cos\left(k_jx_j-\frac{(s_j+1)\pi}{2}\right).$$

Следуя работе [6] введем понятие (ψ,β)-производных функций многих переменных следующим образом. Пусть $\psi_i(x), i=1,2,...,m,$ – фиксированный набор функций, определенных на $[1;+\infty)$, $\beta_i\in R, i=1,2,...,m,$ – фиксированный набор чисел.

Обозначим через N_μ^m множество элементов $\vec{k}\in N_*^m$, у которых $k_i\neq 0, i\in\mu$. Предположим, что для всякого $\mu\subset\overline{m}$ ряды

$$\sum_{\vec{k}\in N_\mu^m}\frac{1}{2^{q(\vec{k})}\prod\limits_{i\in\mu}\psi_i(k_i)}\sum_{\zeta(r)\subset\mu}(-1)^r\prod_{j\in\mu\setminus\zeta(r)}\cos\frac{\beta_j\pi}{2}\prod_{\nu\in\zeta(r)}\sin\frac{\beta_\nu\pi}{2}A_{\vec{k}}^{\sum\limits_{l\in\zeta(r)}\vec{e}_l}(f;\vec{x}). \qquad (2)$$

являются рядами Фурье некоторых функций $\varphi_\mu(\vec{x})$, которые будем называть частичными (ψ,β)–производными по переменным $x_i, i\in\mu\subset\overline{m}$ и обозначать $\varphi_\mu=f_{\beta_\mu}^{\psi_\mu}$.

Через $L_{\beta_\mu}^{\psi_\mu}$ обозначим множество функций $f\in L$, которые для всякого $\mu\subset\overline{m}$ имеют $f_{\beta_\mu}^{\psi_\mu}$. Множество неперерывных функций из $L_{\beta_\mu}^{\psi_\mu}$ таких, что для всех $\mu\subset\overline{m}$

$$\int\limits_{T^m}f_{\beta_\mu}^{\psi_\mu}(\vec{t})\prod_{j=1}^m dt_j=0,\quad \operatorname{esssup}|f_{\beta_\mu}^{\psi_\mu}|\leqslant 1,$$

будем обозначать $C_{\beta_\mu,\infty}^{\psi_\mu}, \mu\subset\overline{m}$.

Пусть $\Lambda=\{\Lambda_1,\Lambda_2,...,\Lambda_m\}$ – фиксированный набор бесконечных треугольных числовых матриц, $\Lambda_i=\{\lambda_{k,i}^{(n)}\}$, $i=1,2,...,m$, $n\in N$, $k=0;1;...$, $\lambda_{0,i}^{(n)}=1$ и $\lambda_{k,i}^{(n)}=0$ для $k\geqslant n$. Пусть далее $\lambda_{\vec{k}}^{(\vec{n})}=\prod\limits_{i=1}^m\lambda_{k_i,i}^{(n_i)}$ и $G_{\vec{n}}=\prod\limits_{i=1}^m[0;n_i-1]$. Так, что $\lambda_{\vec{k}}^{(\vec{n})}=0$ для любых $\vec{k}\notin G_{\vec{n}}$.

Функции $f \in L(T^m)$, имеющей ряд Фурье (1), поставим в соответствие семейство тригонометрических полиномов

$$U_{\vec{n}}(f;\vec{x};\Lambda) = \sum_{\vec{k}\in G_{\vec{n}}} 2^{-q(\vec{k})}\lambda_{\vec{k}}^{(\vec{n})} A_{\vec{k}}(f;\vec{x}). \qquad (3)$$

Целью данной работы является изучение асимптотического при $n_i \to \infty$, $i = 1,2,...,m$, поведения величин

$$\mathcal{E}(C^{\psi_\mu}_{\beta_\mu,\infty};U_{\vec{n}}) = \sup_{f\in C^{\psi_\mu}_{\beta_\mu,\infty}} ||f(\vec{x}) - U_{\vec{n}}(f;\vec{x};\Lambda)||_C$$

при $n_i \to \infty$, $i = 1,2,...,m$.

Основная часть

Найдем для величин $\delta_{\vec{n}}(f;\vec{x}) = f(\vec{x}) - U_{\vec{n}}(f;\vec{x})$, которые являются уклонениями тригонометрических многочленов $U_{\vec{n}}(f;\vec{x})$, $\vec{n} \in N^m$, от функции $f(\vec{x})$, интегральные представления через параметры, определяющие класс функций $C^{\psi_\mu}_{\beta_\mu,\infty}$. Для этого находим соотношения между коэффициентами Фурье функций из $C^{\psi_\mu}_{\beta_\mu,\infty}$ и их обобщенных производных.

Лемма 1. *Пусть* $f \in C^{\psi_\mu}_{\beta_\mu,\infty}, \mu \subset \overline{m}$. *Тогда для всякого* $\vec{k} \in N^m_\mu$, $\vec{s} \in E^m$, $\mu \subset \overline{m}$ *для коэффициентов Фурье функции* $f(\vec{x})$ *и ее производной* $f^{\psi_\mu}_{\beta_\mu}(\vec{x})$ *выполняются равенства*

$$a^{\vec{s}}_{\vec{k}}(f) = \prod_{i\in\mu}\psi_i(k_i)\sum_{\zeta\subset\mu}\prod_{i\in\mu(r)\setminus\zeta}\cos\frac{\beta_i\pi}{2}\prod_{j\in\zeta}(-\sin\frac{\beta_j\pi}{2})(-1)^{\sum\limits_{\nu\subset\zeta}s_\nu} a_{\vec{k}}^{\vec{s}+\sum\limits_{\nu\in\zeta}(-1)^{s_\nu}\vec{e}_\nu}(f^{\psi_\mu}_{\beta_\mu}). \qquad (4)$$

Положим

$$\tau_i(v) = \begin{cases} (1-\lambda_i(v)\psi_i(n_i v), & \frac{1}{n_i} \leqslant v \leqslant 1, \\ \psi_i(n_i v), & 1 \leqslant v,\ i = 1,2,...,m, \end{cases} \qquad (5)$$

где $\lambda_i(v)$ – непрерывные на $[0;1]$ функции такие, что $\lambda_i(k/n) = \lambda^{(n)}_{k,i}$.

Теорема 1. *Пусть класс функций* $C^{\psi_\mu}_{\beta_\mu,\infty}, \mu \subset \overline{m}$ *и оператор* $U_{\vec{n}}(\Lambda)$ *такие, что функции* $\tau_i(v)$, *определенные соотношениями (5), имеют суммируемые на* R *преобразования Фурье*

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} |\widehat{\tau}_i(t)|dt < \infty,\ i = 1,2,...,m.$$

Тогда для всякой функции $f \in C^{\psi_\mu}_{\beta_\mu,\infty}$ *в каждой точке* $\vec{x} \in T^m$ *для отклонений прямоугольных операторов* $U_{\vec{n}}(\Lambda)$ *выполняется равенство*

$$\delta_{\vec{n}}(f;\vec{x}) = \sum_{r=1}^{m}(-1)^{r+1}\sum_{\mu(r)\subset\overline{m}}\frac{1}{\pi^r}\int\limits_{R^r} f^{\psi_\mu}_{\beta_\mu}\left(\vec{x}+\sum_{j\in\mu(r)}\frac{t_j}{n_j}\vec{e}_j\right)\times$$

$$\times\prod_{\nu\in\mu(r)}\int\limits_0^\infty \tau_\nu(v_\nu)\cos\left(v_\nu t_\nu+\frac{\beta_\nu\pi}{2}\right)dv_\nu dt_\nu. \tag{6}$$

Доказательство. В силу соотношения (3)

$$S[\delta_{\vec{n}}(f,\vec{x})] = \sum_{\vec{k}\in N^m_*}\frac{1}{2^{q(\vec{k})}}\left(1-\prod_{i=1}^{m}\lambda^{(n_i)}_{k_i,i}\right)A_{\vec{k}}(f,\vec{x}) =$$

$$=\sum_{i=1}^{m}\sum_{\vec{k}\in N^m_i}\frac{1}{2^{q(\vec{k})}}\left(1-\lambda^{(n_i)}_{k_i,i}\right)A_{\vec{k}}(f,\vec{x})+\sum_{i=2}^{m}(-1)^{i+1}\sum_{\mu(i)\subset\overline{m}}\sum_{\vec{k}\in N^m_\mu}\frac{1}{2^{q(\vec{k})}}\times$$

$$\times\prod_{j\in\mu(i)}\left(1-\lambda^{(n_j)}_{k_j,j}\right)A_{\vec{k}}(f,\vec{x}) \overset{\text{df}}{=} \sum_{i=1}^{m}(-1)^{i+1}\sum_{\mu(i)\subset\overline{m}}S_\mu(f,\vec{x}). \tag{7}$$

Вычислив коэффициенты Фурье функций

$$\mathcal{I}_{\mu(r)}(\vec{x}) = \frac{1}{\pi^r}\int\limits_{T^r} f^{\psi_\mu}_{\beta_\mu}\left(\vec{x}-\sum_{i\in\mu(r)}t_i\vec{e}_i\right)\times$$

$$\times\prod_{\nu\in\mu(r)}\int\limits_0^\infty \tau_\nu(v_\nu)\cos\left(v_\nu t_\nu+\frac{\beta_\nu\pi}{2}\right)dv_\nu dt_\nu,\ \ \mu=\mu(r)\subset\overline{m}, \tag{8}$$

и применяя формулы (4), получаем

$$S\left[\mathcal{I}_{\mu(r)}\right] = \sum_{\vec{k}\in N^m_\mu}\frac{1}{2^{q(k)}}\prod_{j\in\mu}\left(1-\lambda^{(n_j)}_{k_j,j}\right)A_{\vec{k}}(f,\vec{x}) = S_\mu(f,\vec{x}).$$

Поэтому

$$\delta_{\vec{n}}(f,\vec{x}) = \sum_{i=1}^{m}(-1)^{i+1}\sum_{\mu\subset\overline{m}}\mathcal{I}_{\mu(i)}(f,\vec{x}).$$

Объединяя последнее соотношение с (7) и (8), получаем (6). □

Изучим асимптотическое поведение при $n_i \to \infty$, $i = 1, 2, ..., m$, величин

$$\mathcal{E}\left(C^{\psi_\mu}_{\beta_\mu,\infty}; U_{\vec{n}}\right) = \sup_{f \in C^{\psi_\mu}_{\beta_\mu,\infty}} ||\delta_{\vec{n}}(f; x)||_C.$$

Теорема 2. *Пусть функции $\tau_{i,j}(v)$, имеют суммируемые на R преобразования Фурье. Тогда при $n_i \to \infty$, $i = 1, 2, ..., m$, справедлива асимптотическая формула*

$$\mathcal{E}\left(C^{\psi_\mu}_{\beta_\mu,\infty}; U_{\vec{n}}\right) = \sum_{i=1}^{m} [A(\tau_i) + O(1)a(\tau_i)] + O(1) \sum_{j=2}^{m} \sum_{\mu(j) \subset \overline{m}} \prod_{\nu \in \mu(j)} A(\tau_\nu), \qquad (9)$$

где

$$A(\tau_i) = \int_{-\infty}^{\infty} \left| \int_0^{\infty} \tau_i(v) \cos(vt + \beta_i \pi/2) dv \right| dt, \quad i = 1, 2, ..., m,$$

$$a(\tau_i) = \int_{|t| \geqslant \frac{\pi n_i}{2}} \left| \int_0^{\infty} \tau_i(v) \cos(vt + \beta_i \pi/2) dv \right| dt, \ i = 1, 2, ..., m,$$

$O(1)$ *— величина, равномерно ограниченная по n_i, $i = 1, 2, ..., m$.*

Доказательство. Применяя равенство (6), получаем

$$\mathcal{E}\left(C^{\psi_\mu}_{\beta_\mu,\infty}; U_{\vec{n}}\right) = \sup_{f \in C^{\psi_\mu}_{\beta_\mu,\infty}} \left\| \sum_{r=1}^{m} (-1)^{r+1} \sum_{\mu(r) \subset \overline{m}} \frac{1}{\pi^r} \int_{R^r} f^{\psi_\mu}_{\beta_\mu} \left(\vec{x} - \sum_{j \in \mu} \frac{t_j}{n_j} \vec{e}_j \right) \times \right.$$

$$\left. \times \prod_{\nu \in \mu} \int_0^{\infty} \tau_\nu(v_\nu) \cos\left(v_\nu t_\nu + \frac{\beta_\nu \pi}{2}\right) dv_\nu dt_\nu \right\|_C.$$

Поэтому справедлива оценка сверху

$$\mathcal{E}\left(C^{\psi_\mu}_{\beta_\mu,\infty}; U_{\vec{n}}\right) \leqslant \sum_{j=1}^{m} A(\tau_j) + O(1) \sum_{\zeta=2}^{m} \sum_{\mu(\zeta) \subset \overline{m}} \prod_{j \in \mu(\zeta)} A(\tau_j). \qquad (10)$$

Для 2π-периодической функции $f^{\psi_i}_{i,\beta_i}(-\vec{x}) = \varphi^*_i(\vec{x})$, где функции $\varphi^*_i(x)$, $i = 1, 2, ..., m$, определены так, что на промежутке $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$

$$\varphi^*_i(t) = \mathrm{sign}\left(n_i \int_0^{\infty} \tau_i(v) \cos\left(vtn_i + \frac{\beta_i \pi}{2}\right) dv \right),$$

а на промежутке $[-\pi; -\frac{\pi}{2}) \cup (\frac{\pi}{2}; \pi]$ так, что

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} \varphi_i^*(x)dx = 0, \quad i = 1, 2, ..., m,$$

выполнено $f_*(\vec{x}) = \sum\limits_{i=1}^{m} f_i(x_i) \in C^{\psi_\mu}_{\beta_\mu,\infty}$. Поэтому справедливо неравенство

$$\sum_{j=1}^{m}[A(\tau_j) + O(1)a(\tau_j)] + O(1)\left[\sum_{\zeta=2}^{m}\sum_{\mu(\zeta)\subset\overline{m}}\prod_{j\in\mu(\zeta)} A(\tau_j)\right] \leqslant$$

$$\leqslant \mathcal{E}\left(C^{\psi_\mu}_{\beta_\mu,\infty}; U_{\vec{n}}\right) \leqslant \sum_{j=1}^{m} A(\tau_j) + O(1)\left[\sum_{\zeta=2}^{m}\sum_{\mu(\zeta)\subset\overline{m}}\prod_{j\in\mu(\zeta)} A(\tau_j)\right].$$

Из этого неравенства вытекает (9). Теорема доказана.

Литература

1. *Задерей П.В.* Интегральные представления уклонений линейных средних рядов Фурье на классах дифференцируемых периодических функций двух переменных // Некоторые вопросы теории аппроксимации функций: Сб. научн. тр. / Отв. ред. В.К. Дзядык. — К.: Ин-т математики АН УССР, 1985. — С. 16–28.
2. *Степанец А.И.* Кратные суммы Фурье на множествах (ψ, β)-дифференцируемых функций / А.И. Степанец, Н.Л. Пачулиа // Укр. мат. журн. — 1991. — Т. 43, № 4. — С. 545–555.
3. *Ласурия Р.А.* Кратные суммы Фурье на множествах $\overline{\psi}$-дифференцируемых функций // Укр. мат. журн. — 2003. — Т. 55, №7. — С. 911–918.
4. *Рукасов В.И.* Приближение классов $\overline{\psi}$-интегралов периодических функций многих переменных прямоугольными линейными средними их рядов Фурье / В.И.Рукасов, О.А. Новиков, В.И. Бодрая // Укр. мат. журн. — 2005. — Т. 57, № 4. — С. 564 – 570.
5. *Степанец А.И.* Классификация и приближение периодических функций. — К.: Наук. думка, 1987. — 268 с.
6. *Ключникова А.Р.* Приближение классов функций многих переменных прямоугольными линейными операторами / А.Р. Ключникова, А.С. Леденева , Ю.М. Качина [та ін.] // Збірник наукових праць фізико-математичного факультету СДПУ. — 2012. — Випуск 2. — С. 28–36.
7. *Степанец А.И.* Равномерные приближения тригонометрическими полиномами. — К.: Наук. думка, 1981. — 340 с.

УДК 517.5

Сілін Є.С.

[1] *кандидат фізико-математичних наук, старший викладач кафедри математики, ДВНЗ «ДДПУ»*

e-mail: silin-evgen@meta.ua

НАБЛИЖЕННЯ ЛОКАЛЬНО СУМОВНИХ ФУНКЦІЙ МАЛОЇ ГЛАДКОСТІ ОПЕРАТОРАМИ ВАЛЛЕ ПУССЕНА В ІНТЕГРАЛЬНІЙ МЕТРИЦІ

В роботі розглядаються питання наближення класів Степанця $\widehat{L}^{\overline{\psi}}\mathfrak{N}$ операторами Валле Пуссена в просторі $\widehat{L}$ у випадку, коли множини $\widehat{L}^{\overline{\psi}}\mathfrak{N}$ складаються з функцій малої гладкості. Одержано асимптотичні закони поведінки верхніх граней відхилень згаданих функцій від операторів Валле Пуссена, які в певних випадках забезпечують розв'зання відомої задачі Колмогорова-Нікольського.

Ключові слова: $\overline{\psi}$ *-похідна, модуль неперервності, оператор Валле Пуссена.*

Вступ

В роботі [1] класи $\widehat{L}^{\overline{\psi}}\mathfrak{N}$ означені наступним чином. Нехай $\widehat{L}$ — множина функцій f, які вимірні на дійсній осі і такі, що мають скінчену норму $||f||_{\widehat{L}} = \sup\limits_{a\in\mathbb{R}} \int\limits_{a}^{a+2\pi} |f(t)|\, dt$.

Позначимо через $\mathfrak{A}$ множину неперервних при $v \geqslant 0$ функцій $\psi(v)$, які задовольняють умови: 1) $\psi(v) \geqslant 0$, $\psi(0) = 0$, $\psi(v)$ зростає на $[0, 1)$; 2) $\psi(v)$ опукла донизу на $[1, \infty)$ і $\lim\limits_{v\to\infty} \psi(v) = 0$; 3)похідна $\psi'(v) = \psi'(v + 0)$ має обмежену варіацію на $[0, \infty)$. Підмножину функцій $\psi(v)$, для яких $\int\limits_{1}^{\infty} \frac{\psi(v)}{v}\, dv < \infty$, позначають $\mathfrak{A}'$.

Для пари $\psi_1, \psi_2 \in \mathfrak{A}$ визначимо функцію $\overline{\psi}$: $\overline{\psi} \overset{\mathrm{df}}{=} \psi_{1+} + i\psi_{2-}$, де ψ_{1+} та ψ_{2-} — парне і непарне продовження функцій ψ_1, ψ_2 відповідно.

Тоді через $\widehat{L}^{\overline{\psi}}\mathfrak{N}$ будемо позначати множину функцій $f \in \widehat{L}$, які майже для всіх x можна подати у вигляді наступної рівності:

$$f(x) = A_0 + \int\limits_{\mathbb{R}} \varphi(x + t)\widehat{\overline{\psi}}(t)\, dt \overset{\mathrm{df}}{=} A_0 + \varphi * \widehat{\overline{\psi}}(x), \tag{1}$$

де A_0 — деяка стала, інтеграл розуміється як границя інтегралів по симетричних проміжках, що розширюються, $\varphi \in \mathfrak{N}$ ($\mathfrak{N} \subset \widehat{L}$),

$$\widehat{\overline{\psi}}(t) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\mathbb{R}} \overline{\psi}(x)e^{-ixt}\, dx. \tag{2}$$

Якщо $\psi_1 \in \mathfrak{A}$, $\psi_2 \in \mathfrak{A}'$, то перетворення $\widehat{\overline{\psi}}(t)$ сумовне на дійсній осі.

Наслідуючи О.І. Степанця, [2, с. 149], функцію $\varphi(\cdot)$ в зображенні (1) будемо називати $\overline{\psi}-$ похідною функції $f(\cdot)$ і позначати $f^{\overline{\psi}}(\cdot)$.

В ролі $\mathfrak{N}$ виступає одинична куля $\widehat{S}_L$: $\widehat{S}_L = \{\varphi \in \widehat{L} : ||\varphi(t)||_{\widehat{L}} \leqslant 1\}$, або класи $\widehat{H}_{\omega_L}$: $\widehat{H}_{\omega_L} = \{\varphi \in \widehat{L} : ||\varphi(\cdot+t) - \varphi(\cdot)||_{\widehat{L}} \leqslant \omega(|t|)\}$, де $\omega(t)$ — фіксований модуль неперервності [3, с. 20].

Агрегатом наближення функцій з класів $\widehat{L}^{\overline{\psi}}\mathfrak{N}$ є оператори

$$V_{\sigma,c}(f;x) = V_{\sigma,c}(f;x;\Lambda) = A_0 + f^{\overline{\psi}} * \widehat{\lambda_{\sigma,c}\overline{\psi}}(x), \tag{3}$$

де $f \in \widehat{L}^{\overline{\psi}}\mathfrak{N}$, $\widehat{\lambda_{\sigma,c}\overline{\psi}}$ перетворення вигляду (2) функції $\lambda_{\sigma,c}(t)\overline{\psi}(t)$, у якій

$$\lambda_{\sigma,c}(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leqslant |t| \leqslant c \\ \frac{\sigma-|t|}{\sigma-c}, & c \leqslant |t| \leqslant \sigma, \qquad \sigma > c \geqslant 1. \\ 0, & \sigma \leqslant |t|, \end{cases} \tag{4}$$

Як випливає з робот О.І. Степанця (зокрема, [4]), за деяких умов $V_{\sigma,c}(f;x)$ належать до множини ε_σ цілих функцій експоненціального типу $\leqslant \sigma$. У періодичному ж випадку, при $\sigma = n \in \mathbb{N}$ і $c = n - p$, $p \in \mathbb{N}$, $p < n$, оператори $V_{\sigma,c}(f;x)$ співпадають з відомими сумами Валле Пуссена. Тому оператори $V_{\sigma,c}(f;x)$ одержали назву оператори Валле Пуссена.

Метою роботи є знаходження асимптотичних формул при $\sigma \to \infty$ верхніх граней відхилень

$$\mathcal{E}(\widehat{L}^{\overline{\psi}}\mathfrak{N}; V_{\sigma,c}) = \sup_{f \in \widehat{L}^{\overline{\psi}}\mathfrak{N}} \|f(x) - V_{\sigma,c}(f,x)\|_{\widehat{L}}. \tag{5}$$

Предметом дослідження є апроксимативні характеристики операторів Валле Пуссена на класах $\widehat{L}^{\overline{\psi}}\mathfrak{N}$.

Виділимо із $\mathfrak{A}$ підмножини $\mathfrak{A}_0$ і $\mathfrak{A}_C$ [4, с. 193]. Кожній функції $\psi \in \mathfrak{A}$ співставимо пару функцій $\eta(t) = \psi^{-1}\left(\frac{1}{2}\psi(t)\right)$, $\mu(t) = \frac{t}{\eta(t)-t}$, $t \geqslant 1$. Тоді $\mathfrak{A}_0 = \{\psi : \ \psi \in \mathfrak{A}, \ 0 < \mu(t) \leqslant K_1 < \infty\}$, $\mathfrak{A}_C = \{\psi : \ \psi \in \mathfrak{A}, \ 0 < K_2 \leqslant \mu(t) \leqslant \leqslant K_3 < \infty\}$, де $K_i = \text{const}$, $i = \overline{1,3}$ (які можливо залежать від $\psi(\cdot)$).

Основна частина

Покладемо $h = h(\sigma) = \sigma - c$, $\Theta \stackrel{\text{df}}{=} \lim\limits_{\sigma\to\infty} \frac{h}{\sigma}$.

Теорема 1. *Нехай* $\psi_1 \in \mathfrak{A}_0$ *і* $\psi_2 \in \mathfrak{A}_0'$, $\mathfrak{A}_0' = \mathfrak{A}_0 \bigcap \mathfrak{A}'$. *Дійсні числа* σ *і* $h = h(\sigma)$, $\sigma > h \geqslant 1$ *обрані так, що* $0 \leqslant \Theta < 1$. *Тоді при* $\sigma \to \infty$

$$\mathcal{E}(\widehat{L}^{\overline{\psi}}\widehat{S}_L; V_{\sigma,\sigma-h}) = \frac{2}{\pi}\int\limits_{\sigma}^{\infty} \frac{\psi_2(t)}{t}\, dt + \frac{4}{\pi^2}|\overline{\psi}(\sigma)| \ln\frac{\sigma}{h} + O(1)|\overline{\psi}(\sigma)|, \tag{6}$$

$$\mathcal{E}(\widehat{L}^{\overline{\psi}}\widehat{H}_{\omega_L};V_{\sigma,\sigma-h})=\Theta_\omega\left(\frac{1}{\pi}\int\limits_0^1\omega\left(\frac{2t}{\sigma}\right)\int\limits_1^\infty\psi_2(\sigma s)\sin st\ ds\ dt+\right.$$

$$\left.+\frac{2|\overline{\psi}(\sigma)|}{\pi^2}\ln\frac{\sigma}{h}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\omega\left(\frac{2t}{\sigma}\right)\sin t\ dt\right)+O(1)|\overline{\psi}(\sigma)|\omega\left(\frac{1}{\sigma}\right),\qquad(7)$$

де $\Theta_\omega\in[1/2,1]$, $\Theta_\omega=1$, *коли* $\omega(t)$ *опуклий модуль неперервності,* $O(1)$ *— величини, рівномірно обмежені по* σ *і* h *.*

Зауваження 1. *Нехай* $\psi_2\in\mathfrak{A}_C$. *Тоді [2, с. 214, 216] мають місце оцінки:* $\int\limits_\sigma^\infty\frac{|\psi_2(s)|}{s}\,ds\leqslant K|\psi_2(\sigma)|$, $\frac{1}{\pi}\left|\int\limits_0^1\omega\left(\frac{2t}{\sigma}\right)\int\limits_0^\infty\psi_2(\sigma s)\sin st\ dsdt\right|=O(1)\omega\left(\frac{1}{\sigma}\right)\int\limits_\sigma^\infty\frac{|\psi_2(s)|}{s}ds.$ *Отже, якщо* $\psi_1\in\mathfrak{A}_0$ *і* $\psi_2\in\mathfrak{A}_C$, *то формули (6) і (7) набувають вигляду:*

$$\mathcal{E}(\widehat{L}^{\overline{\psi}}\widehat{S}_L;V_{\sigma,\sigma-h})=\frac{4}{\pi^2}|\overline{\psi}(\sigma)|\ln\frac{\sigma}{h}+O(1)|\overline{\psi}(\sigma)|,\qquad(8)$$

$$\mathcal{E}(\widehat{L}^{\overline{\psi}}\widehat{H}_{\omega_L};V_{\sigma,\sigma-h})=\frac{2\Theta_\omega|\overline{\psi}(\sigma)|}{\pi^2}\ln\frac{\sigma}{h}\int\limits_0^{\pi/2}\omega\left(\frac{2t}{\sigma}\right)\sin t\ dt+O(1)|\overline{\psi}(\sigma)|\omega\left(\frac{1}{\sigma}\right).\qquad(9)$$

За умови $\Theta=0$ *асимптотичні співвідношення (8) і (9) дають розв'язок задачі Колмогорова-Нікольського для операторів Валле Пуссена на класах* $\widehat{L}^{\overline{\psi}}\widehat{S}_L$ *і* $\widehat{L}^{\overline{\psi}}\widehat{H}_{\omega_L}$ *відповідно.*

Аналог теореми 1 в рівномірний метриці був доведен у роботі [5]. У періодичному випадку (наближення сумами Валле Пуссена) — в роботах В.І. Рукасова і С.О. Чайченка [6, 7]. Наближення операторами Фур'є (випадок $c=\sigma-1$) $\overline{\psi}$-інтегралів локально сумовних функцій в рівномірний метриці було досліджено О.І. Степанцем та І.В. Соколенком [8, 9].

Доведення.

Скористаємося схемою, яку запропоновано в роботі [2, с. 219 – 259] з врахуванням специфіки випадку, що розглядається.

Поряд з операторами Валле Пуссена в [1, с. 1551 – 1552] означені оператори $V^*_{\sigma,c}(f;x)=V^*_{\sigma,c}(f;x;\Lambda^*)=A_0+f^{\overline{\psi}}*\widehat{\lambda^*_{\sigma,c}\overline{\psi}}(x)$, при цьому

$$\lambda^*_{\sigma,c}(t)=\begin{cases}\lambda_{\sigma,c}, & |t|\in[0,c]\cup[\sigma,\infty),\\ 1-\frac{|t|-c}{\sigma-c}\frac{\overline{\psi}(\sigma\mathrm{sign}(t))}{\overline{\psi}(t)}, & c\leqslant|t|\leqslant\sigma.\end{cases}\qquad(10)$$

Нехай $f \in \widehat{L}^{\overline{\psi}}\mathfrak{N}$, тоді, згідно до рівностей (1) – (4) і 10

$$f(x) - V_{\sigma,c}(f,x) \stackrel{df}{=} \rho_{\sigma,c}(f,x) = \int\limits_{\mathbb{R}} f^{\overline{\psi}}(x+t)(1-\widehat{\lambda^*_{\sigma,c}(t)})\overline{\psi}(t)dt +$$

$$+\int\limits_{\mathbb{R}} f^{\overline{\psi}}(x+t)\widehat{d}_{\sigma,c}(t) \stackrel{df}{=} \rho^*_{\sigma,c}(f,x) + \Delta_{\sigma,c}(f,x), \qquad (11)$$

де $\widehat{d}_{\sigma,c}(t) = \int\limits_c^\sigma \frac{s-c}{2(\sigma-c)\pi}[(\overline{\psi}(s)-\overline{\psi}(\sigma))e^{-ist} + (\overline{\psi}(-s)-\overline{\psi}(-\sigma))e^{ist}]ds.$

Спростимо спочатку перший доданок з правої частини рівності (11). Для цього виділимо головні частини і оцінимо залишки. Нехай a — довільне додатне число, $h = \sigma - c$. Згідно з теоремою 1 роботи [1, с. 1552] і співвідношенням (10), після інтегрування частинами, маємо

$$\rho^*_{\sigma,\sigma-h}(f,x) = \frac{-\psi_1(\sigma)}{\pi} \int\limits_{\frac{a}{\sigma}\leqslant|t|\leqslant\frac{\pi}{h}} \delta(x,t)\frac{2\sin\frac{(2\sigma-h)t}{2}\sin\frac{ht}{2}}{ht^2}\, dt +$$

$$+\frac{\psi_2(\sigma)}{\pi} \int\limits_{\frac{a}{\sigma}\leqslant|t|\leqslant\frac{\pi}{h}} \delta(x,t)\frac{2\cos\frac{(2\sigma-h)t}{2}\sin\frac{ht}{2}}{ht^2}\, dt +$$

$$+\frac{1}{\pi}\int\limits_{|t|\leqslant\frac{a}{\sigma}} \delta(x,t)\int\limits_\sigma^\infty \psi_2(s)\sin st\; ds\; dt + b^{\psi_1}_{\mathfrak{N}}(f,x) + b^{\psi_2}_{\mathfrak{N}}(f,x), \qquad (12)$$

де $\delta(x,t) = f^{\overline{\psi}}(x+t) - f^{\overline{\psi}}(x)$, якщо $f \in \widehat{L}^{\overline{\psi}}\widehat{H}_{\omega_L}$ і $\delta(x,t) = f^{\overline{\psi}}(x+t)$, якщо $f \in \widehat{L}^{\overline{\psi}}\widehat{S}_L$; $b^{\psi_1}_{\mathfrak{N}}(f,x) = \alpha^{\psi_1}_{\mathfrak{N}}(f,x) + \beta^{\psi_1}_{\mathfrak{N}}(f,x) + R^{\psi_1}_{\mathfrak{N}}(f,x)$, при цьому

$$\alpha^{\psi_1}_{\mathfrak{N}}(f,x) \stackrel{df}{=} \frac{-\psi_1(\sigma)}{\pi} \int\limits_{|t|\leqslant\frac{a}{\sigma}} \delta(x,t)\frac{2\sin\frac{(2\sigma-h)t}{2}\sin\frac{ht}{2}}{ht^2}\, dt,$$

$$\beta^{\psi_1}_{\mathfrak{N}}(f,x) \stackrel{df}{=} \frac{\psi_1(\sigma)}{\pi} \int\limits_{|t|\geqslant\frac{\pi}{h}} \delta(x,t)\frac{2\sin\frac{(2\sigma-h)t}{2}\sin\frac{ht}{2}}{ht^2}dt,$$

$$R^{\psi_1}_{\mathfrak{N}}(f,x) \stackrel{df}{=} \int\limits_{\mathbb{R}} \frac{\delta(x,t)}{t}\int\limits_\sigma^\infty \psi_1'(s)\sin st\; dsdt, \qquad (13)$$

та

$$b^{\psi_2}_{\mathfrak{N}}(f,x) = \frac{\psi_2(\sigma)}{\pi}\left(\int\limits_{|t|\leqslant\frac{a}{\sigma}} \delta(x,t)\left(\frac{2\cos\frac{(2\sigma-h)t}{2}\sin\frac{ht}{2}}{ht^2} - \frac{\cos\sigma t}{t}\right)\, dt +\right.$$

$$\left.+\int\limits_{|t|\geqslant\frac{\pi}{h}} \delta(x,t)\frac{2\cos\frac{(2\sigma-h)t}{2}\sin\frac{ht}{2}}{ht^2}dt + \int\limits_{|t|\geqslant\frac{a}{\sigma}} \frac{\delta(x,t)}{t}\int\limits_\sigma^\infty \psi_2'(s)\cos st\; dsdt\right). \qquad (14)$$

Доведемо справедливість співвідношень

$$||b^{\psi_i}_{\mathfrak{N}}(f,x)||_{\widehat{L}} = \begin{cases} O(1)|\psi_i(\sigma)|, & \forall f \in \widehat{L}^{\overline{\psi}}\widehat{S}_L, \\ O(1)|\psi_i(\sigma)|\omega\left(\frac{1}{\sigma}\right), & \forall f \in \widehat{L}^{\overline{\psi}}\widehat{H}_{\omega_L} \end{cases} \quad i = 1,2. \qquad (15)$$

В подальшому вважатимемо, що $f^{\overline{\psi}} \in \widehat{H}_{\omega_L}$, при цьому фактично також буде розглянутий випадок, коли $f^{\overline{\psi}} \in \widehat{S}_L$. Використовуючи оцінки норм

$$\left\|\int f(x+t)K(t)\ dt\right\|_{\widehat{L}} \leqslant \|f\|_{\widehat{L}} \int |K(t)|\ dt, \quad f \in \widehat{L},\ K \in L(a,b), \tag{16}$$

отримаємо

$$\alpha_{\mathfrak{N}}^{\psi_1}(f,x) \leqslant K|\psi_1(\sigma)|\omega(1/\sigma). \tag{17}$$

Для того, щоб оцінити другий доданок рівності (13), представимо його у вигляді $\beta_{\mathfrak{N}}^{\psi_1}(f,x) = \frac{\psi_1(\sigma)}{\pi}(I_1 - I_2)$, де

$$I_1 \overset{\mathrm{df}}{=} \int\limits_{|t| \geqslant \frac{\pi}{h}} \delta(x,t)\frac{\cos(\sigma-h)t}{ht^2}\ dt,\ I_2 \overset{\mathrm{df}}{=} \int\limits_{|t| \geqslant \frac{\pi}{h}} \delta(x,t)\frac{\cos\sigma t}{ht^2}\ dt$$

і одержимо спочатку оцінку інтеграла $I_1^{(+)} \overset{\mathrm{df}}{=} \int\limits_{\pi/h}^{\infty} \delta(x,t)\frac{\cos(\sigma-h)t}{ht^2}\ dt.$

Для цього будемо використовувати метод, який запропоновано у роботі О.І. Степанця [2, с. 209 – 213]. Нам знадобиться аналог леми 5.2.3 з цієї роботи.

Лема 1. *Нехай* $\varphi(t)$ *— сумовна на множині* $\mathcal{I}$ *функція. Тоді, якщо* $\mathcal{I} = \{x : a \leqslant x \leqslant b\}$ *і* $x_k,\ k = \overline{1,N},\ a \leqslant x_1 < x_2 < \ldots < x_N \leqslant b$ *— деякий набір точок, для яких*

$$\int\limits_{x_k}^{x_{k+1}} \varphi(t)\ dt = 0, \qquad k = 1,2,\ldots,N-1, \tag{18}$$

$\varphi > 0$ $(\varphi < 0)$ *майже скрізь на* (x_k, c_k), $\varphi < 0$ $(\varphi > 0)$ *майже скрізь на* (c_k, x_{k+1}), $c_k \in (x_k, x_{k+1})$, *то* $\forall f \in \widehat{H}_{\omega_L}$

$$\left\|\int\limits_a^b f(x+t)\varphi(t)\ dt\right\|_{\widehat{L}} \leqslant \left\|\int\limits_a^{x_1} f(x+t)\varphi(t)\ dt\right\|_{\widehat{L}} + \\ + \frac{\omega(\Delta)}{2}\int\limits_{x_1}^{x_N} |\varphi(t)|\ dt + \left\|\int\limits_{x_N}^{b} f(x+t)\varphi(t)\ dt\right\|_{\widehat{L}}.$$

Якщо $\mathcal{I} = \{x : x \geqslant a\}$, *а* $x_k,\ k = 1,2,\ldots,\ a \leqslant x_1 < x_2 < \ldots$ *— деякий набір точок, для яких умова (18) виконана для довільного натурального* k, *то* $\forall f \in \widehat{H}_{\omega_L}$

$$\left\|\int\limits_a^{\infty} f(x+t)\varphi(t)\ dt\right\|_{\widehat{L}} \leqslant \left\|\int\limits_a^{x_1} f(x+t)\varphi(t)\ dt\right\|_{\widehat{L}} + \omega(\Delta)\int\limits_{x_1}^{\infty} |\varphi(t)|\ dt.$$

В останніх співвідношеннях $\Delta = \sup_k(x_{k+1} - x_k)$.

Доведення цієї леми аналогічно до доведення леми 5.2.3 [2, с. 212 – 213].

Нехай $\Phi_1(x) = \int\limits_x^\infty \frac{\cos(\sigma-h)t}{ht^2}\,dt$. Функція $1/t^2$ монотонно спадає при $t>0$, тому функція $\Phi_1(x)$ між кожними двома додатними нулями функції $\cos(\sigma-h)t$ буде мати свій єдиний нуль. Позначимо через $x_1,\ x_2,\ \ldots$ множину нулів функції $\Phi_1(x)$ з проміжку $(\frac{\pi}{h},\infty)$, занумероване їх у порядку зростання. Оскільки $\int\limits_{x_k}^{x_{k+1}} \frac{\cos(\sigma-h)t}{ht^2}\,dt = 0$, то, застосовуючи лему 1, одержуємо

$$\|I_1^{(+)}\|_{\widehat{L}} \leqslant \left\| \int\limits_{\pi/h}^{x_1} \delta(x,t)\frac{\cos(\sigma-h)t}{ht^2}\,dt\right\|_{\widehat{L}} + \omega(\Delta)\int\limits_{x_1}^{\infty}\left|\frac{\cos(\sigma-h)t}{ht^2}\right|\,dt \leqslant$$
$$\leqslant \max_{\pi/h\leqslant t\leqslant x_1}\|\delta(x,t)\|_{\widehat{L}}\int\limits_{\pi/h}^{x_1}\left|\frac{\cos(\sigma-h)t}{ht^2}\right|\,dt + \omega(\Delta)\int\limits_{x_1}^{\infty}\left|\frac{\cos(\sigma-h)t}{ht^2}\right|\,dt,$$

причому $\Delta = \sup\limits_k (x_{k+1}-x_k) \leqslant \frac{2\pi}{\sigma-h},\ \ x_1 - \frac{\pi}{h} < \frac{2\pi}{\sigma-h}$.

Зважаючи на те, що: 1) $\omega(\lambda t) \leqslant (\lambda+1)\omega(t)$ для довільного модуля неперервності та $\lambda > 0$ і 2) за умови $0 \leqslant \Theta < 1$ має місце нерівність $\omega\left(\frac{1}{\sigma-h}\right) \leqslant K\omega\left(\frac{1}{\sigma}\right)$, знаходимо

$$\|I_1^{(+)}\|_{\widehat{L}} \leqslant K\omega\left(\frac{1}{\sigma-h}\right)\left(\int\limits_{\pi/h}^{\frac{\pi}{h}+\frac{2\pi}{\sigma-h}} \frac{dt}{ht^2} + \int\limits_{\pi/h}^{\infty}\frac{dt}{ht^2}\right) \leqslant K\omega\left(\frac{1}{\sigma}\right). \tag{19}$$

Розмірковуючи подібним чином, встановлюємо

$$\|I_2^{(+)}\|_{\widehat{L}} \stackrel{df}{=} \left\|\int\limits_{\pi/h}^{\infty}\delta(x,t)\frac{\cos\sigma t}{ht^2}dt\right\|_{\widehat{L}} \leqslant K\omega\left(\frac{1}{\sigma}\right). \tag{20}$$

З співвідношень (19), (20) та їм аналогічних для $t\in(-\infty,-\pi/h)$ маємо

$$\left\|\beta_{\mathfrak{N}}^{\psi_1}(f,x)|\right\|_{\widehat{L}} \leqslant K|\psi_1(\sigma)|\omega(1/\sigma), \quad \forall f\in \widehat{L}^{\overline{\psi}}\widehat{H}_{\omega_L}. \tag{21}$$

Оцінимо тепер величину $R_{\mathfrak{N}}^{\psi_1}(f,x)$. Для цього будемо використовувати твердження 5.4.1 [2, с. 224]. Зауважимо, що хоча воно доведено лише для випадку натуральних значень σ, але твердження залишається вірним і для дійсних чисел $\sigma>0$, оскільки при його доведенні не враховувався факт $\sigma\in\mathbb{N}$. Беручи до уваги інформацію о нулях $\overline{x}_k$ функції $\Phi_2(x) = \int\limits_x^\infty \frac{1}{t}\int\limits_1^\infty \psi_1'(\sigma s)\sin st\ ds$ та застосовуючи другу частину леми 1, одержуємо

$$\|I_3\|_{\widehat{L}} \stackrel{df}{=} \left\|\int\limits_0^\infty \frac{\delta(x,t)}{t}\int\limits_\sigma^\infty \psi_1'(s)\sin st\ ds\ dt\right\|_{\widehat{L}} \leqslant$$

$$\leqslant \sigma \left\| \int_0^{\overline{x}_1} \frac{\delta(x,t/\sigma)}{t} \int_1^{\infty} \psi_1'(\sigma s) \sin st\ dsdt \right\|_{\widehat{L}} + \frac{\omega(\Delta)}{\pi} \int_{\overline{x}_1}^{\infty} \left| \frac{\sigma}{t} \int_1^{\infty} \psi_1'(\sigma s) \sin st\ ds \right| dt. \tag{22}$$

В силу монотонності функції $\psi_1'(\sigma s)$ та періодичності тригонометричних функцій, маємо

$$\left| \frac{\sigma}{t} \int_1^{\infty} \psi_1'(\sigma s) \sin st\ ds \right| \leqslant \left| \frac{\sigma}{t} \int_1^{1+2\pi/t} \psi_1'(\sigma)\ ds \right| \leqslant \frac{K\sigma|\psi_1'(\sigma)|}{t^2} \leqslant K \frac{|\psi_1(\sigma)|}{t^2}. \tag{23}$$

Оскільки $\Delta \leqslant \frac{2\pi}{\sigma}$, то, застосовуючи оцінки (16) і (23) до нерівності (22), отримаємо $\|I_3\|_{\widehat{L}} \leqslant K\omega(1/\sigma)|\psi_1(\sigma)|$. Зрозуміло, що така ж сама оцінка справедлива і для інтеграла по проміжку $t < 0$, тому

$$\|R_{\mathfrak{N}}^{\psi_1}(f,x)\|_{\widehat{L}} \leqslant K\omega(1/\sigma)|\psi_1(\sigma)|. \tag{24}$$

Отже, враховуючи оцінки (17), (21) та (24), бачимо, що $||b_{\widehat{H}_{\omega_L}}^{\psi_1}(f,x)||_{\widehat{L}} = = O(1)|\psi_1(\sigma)|\omega\left(\frac{1}{\sigma}\right)$.

Розмірковуючи аналогічним чином, переконуємося, що, за умов теореми, мають місце співвідношення (15).

Для завершення дослідження величини $\rho_{\sigma,\sigma-h}^*(f,x)$ нам треба спростити два перших доданка рівності (12). За допомогою леми 1 переконуємося в справедливості наступної рівності:

$$\int\limits_{a/\sigma \leqslant |t| \leqslant \pi/h} \delta(x,t) \frac{-2\sin\left(\frac{(2\sigma-h)t}{2} - \frac{\beta\pi}{2}\right)\sin\frac{ht}{2}}{ht^2}\, dt =$$

$$= -\int\limits_{a/\sigma \leqslant |t| \leqslant \pi/h} \delta(x,t) \frac{\sin(\sigma t - \frac{\beta\pi}{2})}{t}\, dt + O(1)\zeta(\mathfrak{N}), \tag{25}$$

де $\zeta(\mathfrak{N}) = \omega\left(\frac{1}{\sigma}\right)$, якщо $f \in \widehat{L}^{\overline{\psi}}\widehat{H}_{\omega_L}$ і $\zeta(\mathfrak{N}) = 1$, якщо $f \in \widehat{L}^{\overline{\psi}}\widehat{S}_L$; через $O(1)$ позначена величина, рівномірно обмежена щодо σ, h і β.

Поклавши у співвідношенні (25) спочатку $\beta = 0$, а потім $\beta = 1$, згідно з рівностями (12) і (15), остаточно одержимо

$$\rho_{\sigma,\sigma-h}^*(f,x) = \frac{-\psi_1(\sigma)}{\pi} \int\limits_{\frac{a}{\sigma} \leqslant |t| \leqslant \frac{\pi}{h}} \delta(x,t) \frac{\sin t}{t} dt + \frac{\psi_2(\sigma)}{\pi} \int\limits_{\frac{a}{\sigma} \leqslant |t| \leqslant \frac{\pi}{h}} \delta(x,t) \frac{\cos t}{t} dt +$$

$$+ \frac{1}{\pi} \int\limits_{|t| \leqslant \frac{a}{\sigma}} \delta(x,t) \int_{\sigma}^{\infty} \psi_2(s) \sin st ds dt + O(1)|\overline{\psi}(\sigma)|\zeta(\mathfrak{N}). \tag{26}$$

Далі знайдемо оцінку доданка $\Delta_{\sigma,\sigma-h}$ з правої частини співвідношення (11). Розмірковуючи як і при доведенні леми 2 роботи [6, с. 166 – 168], маємо

$$||\Delta_{\sigma,\sigma-h}||_{\widehat{L}} = E(f^{\overline{\psi}})_{\widehat{L}} \int\limits_{\mathbb{R}} |\widehat{d}_{\sigma,\sigma-h}|dt, \tag{27}$$

де $E(f^{\overline{\psi}})_{\widehat{L}} = \inf\limits_{\varphi\in W^2_{\sigma-h}} \|f^{\overline{\psi}}(\cdot) - \varphi(\cdot)\|_{\widehat{L}}$, $W^2_\sigma = \{\varphi \in \varepsilon_\sigma : \int\limits_{\mathbb{R}} \frac{|\varphi(t)|^2}{(1+|t|)^2} dt < \infty\}$,

$$\int\limits_{\mathbb{R}} |\widehat{d}_{\sigma,\sigma-h}|dt \leqslant K \sum_{i=1}^{2} (\psi_i(\sigma-h) - \psi_i(\sigma)). \tag{28}$$

Оскільки $\forall\psi \in \mathfrak{A}_0$ за умови $\Theta \in [0,1)$ справедлива нерівність $\psi(\sigma-h) \leqslant \leqslant K\psi(\sigma)$, то, згідно зі співвідношеннями (27), (28) та нерівностями Джексона $E(f^{\overline{\psi}})_{\widehat{L}} \leqslant 1$, якщо $f \in \widehat{L}^{\overline{\psi}}\widehat{S}_L$ і $E(f^{\overline{\psi}})_{\widehat{L}} \leqslant \omega(\frac{1}{\sigma-h})$, $\forall f \in \widehat{L}^{\overline{\psi}}\widehat{H}_{\omega_L}$, знаходимо:

$$\|\Delta_{\sigma,\sigma-h}(f,x)\|_{\widehat{L}} = O(1)|\overline{\psi}(\sigma)|\zeta(\mathfrak{N}), \quad \forall f \in \widehat{L}^{\overline{\psi}}\mathfrak{N}. \tag{29}$$

Згідно до рівності $-a\sin\alpha + b\cos\alpha = -\sqrt{a^2+b^2}\sin(\alpha-\gamma)$, $\gamma = \mathrm{arctg}\frac{b}{a}$ і співвідношень (11), (26) та (29), отримуємо

$$\rho_{\sigma,\sigma-h}(f,x) = \frac{-|\overline{\psi}(\sigma)|}{\pi} \int\limits_{a/\sigma\leqslant|t|\leqslant\pi/h} \delta(x,t)\frac{\sin(\sigma t - \gamma_\sigma)}{t}dt+$$

$$+\frac{1}{\pi}\int\limits_{|t|\leqslant a/\sigma} \delta(x,t)\int\limits_0^\infty \psi_2(s)\sin st ds dt + O(1)|\overline{\psi}(\sigma)|\zeta(\mathfrak{N}), \gamma_\sigma = \mathrm{arctg}\frac{\psi_1(\sigma)}{\psi_2(\sigma)}. \tag{30}$$

Спираючись на (30) знайдемо асимптотичні рівності для величин (5).

Нехай

$$x_k = \tfrac{k\pi+\gamma_\sigma}{\sigma},\ t_k = x_k - \tfrac{\pi}{2\sigma},\ k = 0, \pm1, \pm2, \ldots,\ \gamma_\sigma \in \mathbb{R},\ \sigma > 0. \tag{31}$$

Через k_0 позначимо те значення k, для якого t_{k_0} є найближча справа від точки $(a+\pi)/\sigma$ точка, в якій $\sin(\sigma t - \gamma_\sigma) = 1$, а через k_1 — найбільше зі значень k таких, що $t_k < \pi/h$. Далі, через k_2 позначимо таке число, що точка t_{k_2} буде найближча зліва від точки $-(a+\pi)/\sigma$ серед тих, в яких $\sin(\sigma t - \gamma_\sigma) = -1$, а через k_3 — найменше зі значень k, що задовольняють умову $t_k > -\pi/h$, і покладемо $l_{\sigma,h}(t) = x_k$, $t \in [t_k, t_{k+1}]$, $k = k_0, \ldots, k_1 - 1$, $k = k_3, k_3+1, \ldots, k_2 - 1$,

$$i_{3,1} = [t_{k_3}, t_{k_2}] \cup [t_{k_0}, t_{k_1}]. \tag{32}$$

Далі, повторюючи міркування з монографії [2, с. 232 – 234] та використовуючи замість леми 5.1.3 лему 1, отримуємо, що для довільного числа $a>0$, $\gamma_\sigma\in\mathbb{R}$ і обраних згідно до умови теореми дійсних чисел σ та h

$$\int\limits_{\frac{a}{\sigma}\leqslant|t|\leqslant\frac{\pi}{h}}\delta(x,t)\frac{\sin(\sigma t-\gamma_\sigma)}{t}dt=\int\limits_{i_{3,1}}\delta(x,t)\frac{\sin(\sigma t-\gamma_\sigma)}{l_{\sigma,h}(t)}dt+O(1)\zeta(\mathfrak{N}). \tag{33}$$

Тому, згідно до співвідношень (30) і (33), маємо

$$\rho_{\sigma,\sigma-h}(f,x)=\frac{-|\overline{\psi}(\sigma)|}{\pi}\int\limits_{i_{3,1}}\delta(x,t)\frac{\sin(\sigma t-\gamma_\sigma)}{l_{\sigma,h}(t)}\ dt+$$

$$+\frac{1}{\pi}\int\limits_{|t|\leqslant\frac{a}{\sigma}}\delta(x,t)\int\limits_{\sigma}^{\infty}\psi_2(s)\sin st\ dsdt+O(1)|\overline{\psi}(\sigma)|\zeta(\mathfrak{N}). \tag{34}$$

Перейдемо безпосередньо до одержання рівностей (6) та (7). Розглянемо спочатку випадок $f\in\widehat{L}^{\overline{\psi}}\widehat{S}_L$. Застосовуючи нерівність (16) до співвідношення (34), отримуємо

$$\mathcal{E}(\widehat{L}^{\overline{\psi}}\widehat{S}_L,V_{\sigma,\sigma-h})\leqslant\frac{|\overline{\psi}(\sigma)|}{\pi}\int\limits_{i_{3,1}}\left|\frac{\sin(\sigma t-\gamma_\sigma)}{l_{\sigma,h}(t)}\right|dt+$$

$$+\int\limits_{|t|\leqslant\frac{a}{\sigma}}\frac{1}{\pi}\left|\int\limits_{\sigma}^{\infty}\psi_2(s)\sin stds\right|dt+O(1)|\overline{\psi}(\sigma)|. \tag{35}$$

Покажемо, що останнє співвідношення насправді є рівністю. Для цього використаємо наступне твердження з роботи [10].

Лема А ([10, лема 3, с. 29]). *Нехай* $K\in L[a,b]$. *Тоді*

$$\mathcal{E}(K)\overset{df}{=}\sup\nolimits_{\varphi\in\widehat{S}_L}\int\limits_a^b\left|\int\limits_a^b\varphi(x-t)K(t)dt\right|\ dx\geqslant\int\limits_a^b|K(t)|\ dt. \tag{36}$$

Покладемо

$$K(t)=\begin{cases}\int\limits_{\sigma}^{\infty}\psi_2(s)\sin st\ ds\ dt, & |t|<\frac{a}{\sigma},\\ \frac{\sin(\sigma t-\gamma_\sigma)}{l_{\sigma,h}(t)}, & t\in i_{3,1},\\ 0, & t\notin(-a/\sigma,a/\sigma)\bigcup i_{3,1}.\end{cases} \tag{37}$$

Тоді зі співвідношень (35) – (37) отримуємо

$$\mathcal{E}(\widehat{L}^{\overline{\psi}}\widehat{S}_L, V_{\sigma,\sigma-h}) = \frac{|\overline{\psi}(\sigma)|}{\pi}\int\limits_{i_{3,1}}\left|\frac{\sin(\sigma t-\gamma_\sigma)}{l_{\sigma,h}(t)}\right| dt+$$

$$+\int\limits_{|t|\leqslant\frac{a}{\sigma}}\frac{1}{\pi}\left|\int\limits_{\sigma}^{\infty}\psi_2(s)\sin st\,ds\right| dt+O(1)|\overline{\psi}(\sigma)|. \tag{38}$$

В роботі [5, с. 397] показано, що

$$\int\limits_{i_{3,1}}\left|\tfrac{\sin(\sigma t-\gamma_\sigma)}{l_{\sigma,h}(t)}\right| dt=\tfrac{4}{\pi}\ln\tfrac{\sigma}{h}+O(1). \tag{39}$$

$$\tfrac{1}{\pi}\int\limits_{|t|\leqslant\frac{a}{\sigma}}\left|\int\limits_{\sigma}^{\infty}\psi_2(s)\sin st\,ds\right| dt=\tfrac{2}{\pi}\int\limits_{\sigma}^{\infty}\tfrac{|\psi_2(t)|}{t}\,dt+O(1), \tag{40}$$

Поєднуючи співвідношення (38) – (40), завершуємо доведення рівності (6).

Розглянемо випадок $f\in\widehat{L}^{\overline{\psi}}\widehat{H}_{\omega_L}$. Згідно зі співвідношенням (34)

$$\mathcal{E}(\widehat{L}^{\overline{\psi}}\widehat{H}_{\omega_L}, V_{\sigma,\sigma-h})\leqslant\sup_{\varphi\in\widehat{H}_{\omega_L}}\left\|\frac{|\overline{\psi}(\sigma)|}{\pi}\int\limits_{i_{3,1}}(\varphi(t)-\varphi(0))\frac{\sin(\sigma t-\gamma_\sigma)}{l_{\sigma,h}(t)}dt\right\|_{\widehat{L}}+$$

$$+\sup_{\varphi\in\widehat{H}_{\omega_L}}\left\|\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\frac{a}{\sigma}}^{\frac{a}{\sigma}}(\varphi(t)-\varphi(0))\int\limits_{\sigma}^{\infty}\psi_2(s)\sin st ds dt\right\|_{\widehat{L}}+O(1)|\overline{\psi}(\sigma)|\omega\left(\frac{1}{\sigma}\right).$$

Тому, виходячи із побудови функції $l_{\sigma,h}(t)$, маємо

$$\mathcal{E}(\widehat{L}^{\overline{\psi}}\widehat{H}_{\omega_L}, V_{\sigma,\sigma-h})\leqslant\left(\sum_{k=k_3}^{k_2-1}\frac{1}{|x_k|}\sup_{\varphi\in\widehat{H}_{\omega_L}}\left|\int\limits_{t_k}^{t_{k+1}}\varphi(t)\sin(\sigma t-\gamma_\sigma)\,dt\right|+\right.$$

$$\left.+\sum_{k=k_0}^{k_1-1}\frac{1}{x_k}\sup_{\varphi\in\widehat{H}_{\omega_L}}\left|\int\limits_{t_k}^{t_{k+1}}\varphi(t)\sin(\sigma t-\gamma_\sigma)\,dt\right|\right)\frac{|\overline{\psi}(\sigma)|}{\pi}+$$

$$+\frac{1}{\pi}\sup_{\varphi\in\widehat{H}_{\omega_L}}\int\limits_{-\frac{a}{\sigma}}^{\frac{a}{\sigma}}(\varphi(t)-\varphi(0))\int\limits_{\sigma}^{\infty}\psi_2(s)\sin st\,ds dt+O(1)|\overline{\psi}(\sigma)|\omega\left(\frac{1}{\sigma}\right).$$

Повторюючи міркування роботи [2, с. 239 – 240], знаходимо

$$\mathcal{E}(\widehat{L}^{\overline{\psi}}\widehat{H}_{\omega_L}, V_{\sigma,\sigma-h}) \leqslant \frac{|\overline{\psi}(\sigma)|}{\pi}\int\limits_0^{\pi/2\sigma}\omega(2t)\sin\sigma t\,dt\left(\sum_{k=k_3}^{k_2-1}\frac{1}{|x_k|}+\sum_{k=k_0}^{k_1-1}\frac{1}{x_k}\right)+$$

$$+\frac{1}{\pi}\left|\int\limits_0^{\frac{a}{\sigma}}\omega(2t)\int\limits_\sigma^\infty\psi_2(s)\sin st\,ds\,dt\right|+O(1)|\overline{\psi}(\sigma)|\omega\left(\frac{1}{\sigma}\right). \qquad (41)$$

Покажемо, що у випадку, коли $\omega(t)$ опуклий модуль неперервності $\exists\ \varphi^*(t)\in\widehat{H}_{\omega_L}$ для якої нерівність (41) обертається на рівність. Покладемо

$$\varphi_1(t)=\begin{cases}\frac{1}{4}\omega(2t), & t\in[0,\frac{\pi}{2\sigma}),\\ -\frac{1}{4}\omega(2|t|), & t\in(-\frac{\pi}{2\sigma},0],\\ 0, & t\notin(-\pi/2\sigma,\pi/2\sigma).\end{cases} \qquad (42)$$

Тоді шукана функція $\varphi^*(t)$ визначається рівністю $\varphi^*(t)=\varphi_1'(t)$. Користуючись схемою доведення роботи [2, стор. 258 – 259], переконуємося, що функція $\varphi^*(t)\in\widehat{H}_{\omega_L}$ і для неї має місце (41). Якщо ж $\omega(t)$ — довільний (не обов'язково опуклий) модуль неперервності, то співвідношення (41) буде рівністю, якщо його праву частину помножити на деяку величину $\Theta_\omega\in[\frac{1}{2},1]$.

Оскільки

$$\sum_{k=k_3}^{k_2-1}\tfrac{1}{|x_k|}+\sum_{k=k_0}^{k_1-1}\tfrac{1}{x_k}=\sigma\left(\tfrac{2}{\pi}\ln\tfrac{\sigma}{h}+O(1)\right),$$

$\left|\int\limits_a^1\omega\left(\frac{2t}{\sigma}\right)\int\limits_1^\infty\psi_2(\sigma s)\sin st\,ds\,dt\right|=O(1)\psi_2(\sigma)\omega\left(\frac{1}{\sigma}\right)$, то згідно зі співвідношенням (41) рівність (7), а з нею і теорема 1 доведені.

□

Література

1. *Stepanets A.I.* Approximation of locally integrable function on the real line / A.I. Stepanets, Wang Kunyang, Zhang Xirong // Український математичний журнал. — 1999. — Т. 51, №11. — С. 1549–1561.
2. *Степанец А.И.* Методы теории приближений: в 2 т. — Киев: Институт математики НАН Украины, 2002. — Т.1. — 426 с.
3. *Дрозд В.В.* Одновременное приближение функций и их производных операторами Фурье в среднем / В.В. Дрозд // Одновременное приближение функций и их производных операторами Фурье. — Киев, 1989. — 59 с. — (препр./ АН УССР. Ин-т математики; 89.17).

4. *Степанец А.И.* Приближение в пространствах локально интегрируемых функций / А.И. Степанец // Український математичний журнал. — 1994. — Т. 46, №5. — С. 597 – 625.
5. *Рукасов В.И.* Приближение непрерывных функций небольшой гладкости операторами Валле Пуссена / В.И. Рукасов, Е.С. Силин // Український математичний журнал. — 2005.— Т. 57, №3 — С. 394–400.
6. *Рукасов В.И.* Приближение ψ-интегралов периодических функций в равномерной и интегральной метриках / В.И. Рукасов, С.О. Чайченко // Екстремальні задачі теорії функцій та суміжні питання: Праці Ін-ту математики НАН України. — 2003. — С. 156 – 191.
7. *Рукасов В.И.* Приближение непрерывных периодических функций суммами Валле Пуссена (небольшая гладкость) / В.И. Рукасов, С.О. Чайченко // Теорія наближення функцій та суміжні питання. — Київ, 2002. — С. 134 – 150. — (Праці Ін-ту математики НАН України; Т. 35).
8. *Степанецъ О.І.* Наближення операторами Фур'є $\overline{\psi}$-інтегралів функцій, заданих на дійсній осі / О.І. Степанець, І.В. Соколенко // Український математичний журнал. — 2004. — Т. 56, №7. — С. 960–965.
9. *Соколенко І.В.* Наближення операторами Фур'є $\overline{\psi}$-інтегралів неперервних функцій, заданих на дійсній осі / І.В. Соколенко // Український математичний журнал. — 2004. — Т. 56, №5. — С. 663 – 676.
10. *Степанец А.И.* Одновременное приближение функций и их производных операторами Фурье в равномерной метрике / А.И. Степанец, В.В. Дрозд // Одновременное приближение функций и их производных операторами Фурье. — Киев, 1989. — 59 с. — (препр./ АН УССР. Ин-т математики; 89.17).

УДК 512.552

Кайдан Н.В., Щенсневич Ю.Ю.

[1] *кандидат фізико-математичних наук, старший викладач кафедри алгебри, ДВНЗ «ДДПУ»*

[2] *студент 3 курсу фізико-математичного факультету, ДВНЗ «ДДПУ»*

e-mail: kaydannv@mail.ru

СКІНЧЕННІ ЛАНЦЮГОВІ КІЛЬЦЯ

Розглядається поняття узагальненого кільця Галуа. Доведена теорема, яка показує аналогію між кільцями Галуа і полями Галуа.

Ключові слова: *скінченні кільця, кільця Галуа, ланцюгові кільця.*

Вступ

Теорія кілець Галуа була розвинена в роботах [1], [5] і [9]. Пізніше, в [10] вивчалось застосування цих кілець в теорії кодування і криптографії [8] (псевдовипадкові послідовності, засновані на лінійних рекурентних послідовностях над кільцями Галуа). Розвиток теорії неасоціативних кілець Галуа є достатньо цікавим, головним чином з точки зору можливості нових застосувань в цих областях.

Кільце A називається ланцюговим справа (зліва), якщо правий (лівий) регулярний модуль A_A $({}_AA)$ є ланцюговим. Кільце називається ланцюговим, якщо воно ланцюгове справа і зліва.

Кільце A називається напівланцюговим справа (зліва), якщо правий (лівий) регулярний модуль A_A $({}_AA)$ є напівланцюговим. Кільце називається напівланцюговим, якщо воно напівланцюгове справа і зліва.

Модуль M називається дистрибутивним, якщо всі його підмодулі K, L, N $\qquad K \cap (L + N) = K \cap L + K \cap N$.

Отже, підмодуль та фактормодуль дистрибутивного модуля є дистрибутивними. Модуль називається напівдистрибутивним якщо він є прямою сумою дистрибутивних модулів.

Кільце A називається напівдистрибутивним справа (зліва), якщо правий (лівий) регулярний модуль A_A $({}_AA)$ є напівдистрибутивним. Напівдистрибутивне справа (зліва) кільце називається напівдистрибутивним.

Таким чином, кожний ланцюговий модуль є дистрибутивним модулем і кожний напівланцюговий модуль є напівдистрибутивним. [7]

Теорема 1. *Нехай A – артінове слабопервинне напівдистрибутивне кільце, R – його радикал Джекобсона.*

Наступні умови рівносильні для кільця A

(1) *кільце A скінченне;*

(2) *факторкільце A/R скінченне;*

(3) *існує локальний ідемпотент $e \in A$ кільця A такий, що кільце eAe скінченне.*

Отже, найбільш вивченими і найбільш важливими в теорії і застосуванні скінченних ланцюгових кілець є кільця Галуа.

Про одну конструкцію в теорії кілець.

Основні відомості з теорії кілець містяться в [2]. Нехай A — асоціативне кільце з $1 \neq 0$, $\sigma : A \to A$ автоморфізм кільця A. Розглянемо множину пар (a, b), де $(a, b) \in A$ і задамо на цій множині додавання і множення за такими правилами:

$$(a_1, b_1) + (a_2, b_2) = (a_1 + a_2, b_1 + b_2)$$

$$(a_1, b_1)(a_2, b_2) = (a_1a_2, a_1b_2 + b_1a_2^{\sigma})$$

Це кільце будемо позначати через $H(A)$. Нехай A – асоціативне кільце з $1 \neq 0$, тоді елемент $(0, 0)$ є нулем цього кільця, а одиницею цього кільця є елемент $(1, 0)$. Покажемо, що якщо A — комутативне кільце і σ тотожній автоморфізм, то кільце $H(A)$ — комутативне, тобто

$$(a_1, b_1)(a_2, b_2) = (a_1a_2, a_1b_2 + b_1a_2)$$

$$(a_2, b_2)(a_1, b_1) = (a_2a_1, a_2b_2 + b_2a_1)$$

Якщо A – комутативне кільце, а σ автоморфізм кільця A, який не є тотожнім, то кільце $H(A)$ некомутативне.

Нехай кільце A буде полем. Розглянемо випадок, коли $A = K$, де K є довільним полем і $\sigma : K \to K$ – автоморфізм цього поля. Нехай $(\alpha, \beta) \in H(K)$ довільний елемент кільця $H(K)$, $\quad \alpha, \beta \in K$.

Знайдемо всі оборотні елементи. Нехай елемент (α_1, β_1) має правий обернений, тобто

$(\alpha_1, \beta_1) \cdot (\alpha_2, \beta_2) = (\alpha_1\alpha_2, \alpha_1\beta_2 + \beta_1\alpha_2^{\sigma}) = (1, 0);$

$\alpha_1\alpha_2 = 1; \quad \alpha_1\beta_2 + \beta_1\alpha_2^{\sigma} = 0;$

$\alpha_2 = \alpha_1^{-1}, \quad \alpha_1\beta_2 + \beta_1(\alpha_1^{-1})^{\sigma} = 0$

$\beta_2 = -\frac{\beta_1(\alpha_1^{-1})^{\sigma}}{\alpha_1}.$

Оборотній елемент до елементу (α_1, β_1) буде $(\alpha_1^{-1}, -\frac{\beta_1(\alpha_1^{-1})^{\sigma}}{\alpha_1})$, тобто він існує тоді і тільки тоді, коли $\alpha_1 \neq 0$.

$$(\alpha_1,\beta_1)(\alpha_1^{-1},-\frac{\beta_1(\alpha_1^{-1})^\sigma}{\alpha_1})=(1,-\frac{\alpha_1\beta_1(\alpha_1^{-1})^\sigma}{\alpha_1}+\beta_1(\alpha_1^{-1})^\sigma)=(1,0)$$

$$(\alpha_1^{-1},-\frac{\beta_1(\alpha_1^{-1})^\sigma}{\alpha_1})(\alpha_1,\beta_1)=(1,\alpha_1^{-1}\beta_1-\frac{\beta_1(\alpha_1^{-1})^\sigma}{\alpha_1}\alpha_1^\sigma)=(1,0)$$

Таким чином, елементи які є оборотніми мають першу ненульову координату і тільки вони. Значить, всі необоротні елементи мають першу координату нульову.

R – двосторонній ідеал, який складається зі всіх необоротних елементів кільця A:

$$R=\{(0,0),(0,1),(0,x),(0,x+1)\}$$
$$(\alpha,\beta)R\subseteq R;\qquad R(\alpha,\beta)\subseteq R.$$

Елементи $(0,\beta)\in H(K)$ утворюють двосторонній ідеал R. Дійсно, $(\alpha_1,\beta_1)(0,\beta)=(0,\alpha_1\beta)$ і $(0,\beta)(\alpha_1,\beta_1)=(0,\beta\alpha_1^\sigma)$ утворюють двосторонній ідеал. Таким чином R є радикалом кільця $H(K)$ і $R^2=0$, тобто для будь-яких $(0,\beta_1),(0,\beta_2)\in R$ маємо, що $(0,\beta_2),(0,\beta_2)=(0,0)$

Таким чином ми отримали, що $H(K)\supset R\supset 0$ є ланцюговим кільцем. [6]

Кільця Галуа.

Кільцем Галуа називається скінченне комутативне кільце R з одиницею e, в якому множина всіх дільників нуля має вид $p\cdot R$ для деякого простого числа p. [10]

Позначення: $R=GR(q^n,p^n)$ (іноді $R=GR(r,p^n)$) [9].

Найпростіші приклади: $GF(q)=GR(q,p),\quad \mathbb{Z}_{p^n}=GR(p^n,p^n)$.

Теорема 2. [*10*] *Нехай* R *– кільце Галуа з множиною дільників нуля* $\mathfrak{N}=pR$. *Тоді виконуються наступні твердження:*
R^* *- мультипликативна група (група оборотних елементів) кільця* R, $R^*=R\setminus\mathfrak{N}$.
$\mathfrak{N}$ *– єдиний максимальний ідеал кільця* R, $R/\mathfrak{N}=GF(q)$, $q=p^r,\quad r\in\mathbb{N}$.
Характеристика кільця R *має наступний вигляд:* $charR=p^n,\quad n\in\mathbb{N}$.
Гратка всіх ідеалів кільця R *утворює ланцюг:*

$$R=\mathfrak{N}^0\supset\mathfrak{N}^1=pR\supset...\supset\mathfrak{N}^{n-1}=p^{n-1}R\supset\mathfrak{N}^n=p^nR=0$$

Для $t\in\overline{0,n}$ *виконуються рівності:* $|\mathfrak{N}^t|=q^{n-t}$, *зокрема*

$$|R|=q^n,\quad |R^*|=q^{n-1}(q-1).$$

Для кільця Галуа R характеристики p^n поле $\overline{R} = R/pR$ називається полем лишків. Вочевидь, що природний епіморфізм кілець $R \to \overline{R}$ індукує епіморфізм кілець поліномів $R[x] \to \overline{R}[x] \cong R[x]/pR[x]$. Відображення полінома $A(x) = \sum a_i x^i \in R[x]$ при цьому епіморфізмі будемо позначати через $\overline{A}(x) : \overline{A}(x) = \sum \overline{a}_i x^i \in \overline{R}[x]$. Унітарний поліном $F(x) \in R[x]$ називається поліномом Галуа над R, якщо $\overline{F}(x)$ – незведений поліном над полем $\overline{R}$. Вочевидь, що в $R[x]$ існує поліном Галуа будь-якого степеня.

Теорема 3. [*10*] *Нехай R – кільце Галуа характеристики p^n, яке складається з q^n елементів, $F(x)$ – поліном Галуа над R степеня m. Тоді кільце $S = R[x]/F(x)$, є кільцем Галуа с параметрами $charS = p^n, \quad |S| = q^{mn}$.*

В позначеннях теореми 3 можна вважати, що вихідне кільце Галуа R з q^n елементів є підкільце побудованого кільця Галуа S з q^{mn} елементів. Тоді будемо казати, що S — розширення Галуа степеня m кільця R.

Наслідок 1. *Для будь-якого кільця Галуа R і будь-якого натурального m існує розширення Галуа S кільця R степеня m.*

Наслідок 2. *Для будь-якого простого p і $m, n \in \mathbb{N}$ існує кільце Галуа S з p^{mn} елементів характеристики p^n.*

Лема 1. *Нехай поліном $A(x) \in R[x]$ і елемент $\alpha \in S$ такі, що $\overline{A}(\overline{\alpha}) = \overline{0}$ і $\overline{A}'(\overline{\alpha}) \neq \overline{0}$. Тоді в кільце S існує єдиний корінь β полінома $A(x)$, такий, що $\overline{\beta} = \overline{\alpha}$.*

Лема 2. *Для будь-якого елемента $\alpha \in S$, якщо $\overline{S} = \overline{R}[\overline{\alpha}]$, то $S = R[\alpha]$ і*

$$S = \{A(\alpha) : A(x) \in R[x], \quad degA(x) < m\}. \tag{1}$$

Доведення лем представлено в [10].

Наступна теорема показує, що існує глибока аналогія між кільцями Галуа і полями Галуа.

Теорема 4. [*10*] *Нехай S – розширення Галуа степеня m кільця Галуа R і $F(x)$ – поліном Галуа над R степеня k. Тоді виконуються наступні твердження:*
(а) Поліном $F(x)$ має корінь в S в тому і лише в тому випадку, якщо $k|m$.
(б) Якщо $k|m$, то $F(x)$ має в S рівно k різних коренів $\alpha_1, ..., \alpha_k$, ці корні попарно не порівняні по модулю ідеалу pS і $F(x) = (x - \alpha_1) \cdot ... \cdot (x - \alpha_k)$.
(в) Для будь-якого елементу $\alpha \in S$ рівність $S = R[\alpha]$ виконується тоді і тільки тоді, коли α – корінь поліному Галуа над R степеня m.

Доведення. (a) Поле $\overline{S} = S/pS$ розглянемо як розширення степеня m поля $\overline{R} = R/pR$. Якщо $\alpha \in S$ і $F(\alpha) = 0$, то $\overline{F}(\overline{\alpha}) = \overline{0}$. Отже, $\overline{\alpha}$ – корінь в $\overline{S}$ незвідного полінома $\overline{F}(x) \in \overline{R}[x]$, і тому $k|m$. Зворотне твердження слідує з (б).
(б) Так як $\overline{F}(x)$ – незвідний поліном над полем $\overline{R}$ і $[\overline{S} : \overline{R}] = m$, то за умови $k|m$ поліном $\overline{F}(x)$ має в полі $\overline{S}$ рівно k різних коренів: $a_1, ..., a_k$. Так як $\overline{F}'(a_s) \neq \overline{0}$ для $s \in \overline{1,k}$, то за лемою 1 в кільці S існують корні $\alpha_1, ..., \alpha_k$, полінома $F(x)$, такі, що $\overline{\alpha}_s = a_s, \quad s \in \overline{1,k}$. Отже, ці корені попарно різні за модулем pS. Тому $F(x) = (x - \alpha_1) \cdot ... \cdot (x - \alpha_k)$ і в кільці S поліном $F(x)$ не має інших коренів.
(в) Нехай $\alpha \in S$ і α – корінь поліному Галуа $G(x) \in R[x]$ степеня m. Тоді $\overline{\alpha}$ – корінь в $\overline{S}$ незвідного поліному $\overline{G}(x) \in \overline{R}[x]$ степеня $m = [\overline{S} : \overline{R}]$, і тому $\overline{S} = \overline{R}[\overline{\alpha}]$. Рівність $S = R[\alpha]$ випливає з леми 2 і виконується рівність 1. Це означає, що елемент α^m виглядає наступним чином: $\alpha^m = A(\alpha)$, де $A(x) \in R[x], \quad degA(x) < m$. Тоді α – корінь унітарного полінома $G(x) = x^m - A(x)$ степеня m. $G(x)$ – поліном Галуа, так як $\overline{G}(x)$ незвідний над $\overline{R}$, оскільки $\overline{\alpha}$ – його корінь в $\overline{S}$ і $[\overline{S} : \overline{R}] = m$. □

Наслідок 3. *Якщо S – кільце Галуа характеристики p^n, яке складається з p^{mn} елементів, тоді $S \cong \mathbb{Z}_{p^n}[x]/F(x)$, де $F(x)$ – довільний поліном Галуа степеня m над $\mathbb{Z}_{p^n}$.*

Наслідок 4. *Два кільця Галуа ізоморфні тоді і тільки тоді, коли їх потужності і характеристики рівні.*

Наслідки 3 і 4 виводяться з теореми 4 таким самим чином, яким доводяться аналогічні теореми для полів Галуа, якщо відмітити, що в кільці Галуа S, з наслідку 3, підкільце S_0, яке породжене одиницею, є кільце Галуа, ізоморфне $\mathbb{Z}_{p^n}$, та S – розширення Галуа кільця S_0 степеня m.

Наслідок 4 робить коректним позначення $S = GR(q^n, p^n)$ для кільця Галуа S з q^n елементів, яке має характеристику p^n. Зокрема, $GF(p^r) = GR(p^r, p), \quad \mathbb{Z}_{p^n} = GR(p^n, p^n)$.

Висновки

Скінченні кільця є дуже важливою і цікавою алгебраїчною структурою. Найбільш вивченими і найбільш важливими в теорії і застосуванні скінченних ланцюгових кілець є кільця Галуа. Кільце Галуа, як і поле Галуа, визначається однозначно, з точність до ізоморфізму, кількістю елементів та характеристикою. Для доведення цього факту та опису будови кілець Галуа використовується метод редукції до полів Галуа. Нами було наведено доведення теореми, яка показує аналогію між кільцями Галуа і полями Галуа.

Література

1. *Janusz G.J.* Separable algebras over commutative rings /G.J. Janusz// Trans. Amer. Math. Soc. (1996) 122, — 1996. — P. 461–478.
2. *Hazewinkel M.* Algebras, rings and modules / M. Hazewinkel, N. Gubareni and V. Kirichenko//Vol. 1. Mathematics and its Applications, 575. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, — 2004. — xii+380 pp.
3. *Krull W.* Algebraische Theorie der Ringe II / W. Krull //Math. Ann. (1924) 91,— 1924. — P. 1–46.
4. *McDonald B. R.* Finite rings with identity / B.R. McDonald // Wiley, New York, — 1974. — 429 p.
5. *Raghavendran R.* Finite associative rings / R. Raghavendran // Compos. Math. — Vol. 21, №2. — 1969. — P. 195–219.
6. *Кайдан Н.В.* Про одну конструкцію в теорії кілець /Н.В.Кайдан, О.В.Ніколаєва // Тринадцята міжнародна наукова конференція імені академіка М. Кравчука, Київ: Матеріали конф. Т. 1. — К.: НТУУ «КПІ» — 2010. — С. 184.
7. *Кайдан Н.В.* Про слабопервинні скінченні кільця /Н.В. Кайдан// Вісник Київського університету, випуск №3, 2008. Серія: фізико-математичні науки. — К.: — 2008. — — С. 266.
8. *Нечаев А.А.* Линейные рекуррентные последовательности над кольцом Галуа /А.А. Нечаев, А.С. Кузьмин// Алгебра и логика — Т.34, №2, — 1995. — С. 1–17.
9. *Нечаев А.А.* Конечные кольца главных идеалов /А.А. Нечаев// Матем. сб. (1973) 91, №3. — 1973. — С. 350–366.
10. *Нечаев А.А.* Код Кердока в циклической форме /А.А. Нечаев// Дискретная математика (1989) 1, №4. — 1989. — С. 123–139.

УДК 512.54

Пащенко З.Д., Валюх К.В.

[1] *кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри алгебри, ДВНЗ «ДДПУ»*

[2] *студентка 5 курсу фізико-математичного факультету, ДВНЗ «ДДПУ»*

e-mail: pashchenko_zd@mail.ru; ksusha_valuh@mail.ru

СУПЕРРОЗ'ЯЗНІСТЬ І СИЛОВСЬКІ СИСТЕМИ

В статті описано властивості силовських множин, розглядаються квазінормальні та суперрозв'язні підгрупи з силовськими системами. Одержано ознаки суперрозв'язності груп.

Ключові слова: *силовські підгрупи, квазінормальні підгрупи, супердодавання, суперрозв'язні підгрупи, силовські множини, силовські системи.*

Вступ

Вивчення групових операцій або, інакше, вивчення груп з точністю до ізоморфізму, є задачею теорії груп. Ця теорія завершила б свій розвиток, якщо б вдалося скласти каталог усіх можливих груп з точністю до ізоморфізму. Але поки що такий каталог не скаладено і мало ймовірно, що це практично можливо. Хоча дана робота присвячена саме цьому напряму.

У теорії скінченних груп важливе місце займають результати, пов'язані з дослідженням існування доповнень до виділених систем підгруп. У класичних роботах Шура, Цассенхауза, Гашюца, Л.А. Шеметкова встановлюються умови, при яких існує доповнення до нормальної підгрупи. У 1978 році в роботі [4] для отримання існування доповнень до нормальної підгрупи Л.А. Шеметков почав розглядати додавання.

Відомо, що скінченні розв'язні групи можна охарактеризувати як скінченні групи, у яких доповнювальні всі силовські підгрупи. Ця теорема Ф. Хола [6] стала джерелом розвитку одного з напрямів теорії груп, що полягає в дослідженні будови груп з виділеними системами доповнюваних підгруп.

Проте умова існування доповнень до окремих підгруп є достатньо сильним обмеженням. Далеко не всі підгрупи володіють доповненнями. Разом з тим кожна підгрупа володіє мінімальним додаванням. Тому для дослідження будови скінченних груп з системами підгруп, що додаються, необхідно вводити додаткові обмеження на мінімальні додавання. Таким обмеженням є існування супердодавання.

Важливим у класі розв'язних груп є підклас суперрозв'язних груп — груп, які володіють нормальним рядом з циклічними факторами. Дослідження суперрозв'язних груп, які володіють супердодаванням, є метою даної статті.

Основна частина

Квазінормальною називають підгрупу K групи G, яка переставна зі всіма підгрупами групи G. Ясно, що нормальні підгрупи завжди квазінормальні. Найменша підгрупа H називається *мінімальним додаванням* до підгрупи K групи G, якщо $G = HK$.

Мінімальне додавання H до підгрупи K групи G назвемо супердодаванням, якщо H_1K є підгрупою для довільної підгрупи H_1 із H. Ясно, що нормальні і квазінормальні підгрупи володіють супердодаваннями. Підгрупу, що володіє супердодаванням, називають *напівнормальною* підгрупою.

Нехай p — просте число. Скінченну групу, порядок якої є степінь числа p називають *p-групою.* Скінченна група називається примарною, якщо вона є p-групою для деякого простого p.

Елементи x, y групи G називаються *спряженими*, якщо існує $a \in G$, що $y = a^{-1}xa$ (позначається $y = x^a$). Підгрупа $P^a = \{x^a | x \in P\}$ називається *спряженою* до підгрупи $P \subset G$.

Силовською p–підгрупою скінченної групи G називають таку p–підгрупу, індекс якої не ділиться на p. Безпосередньо з теореми отримуємо

Теорема 1. (Теорема Силова) *Нехай скінченна група G має порядок $p^m s$, де p – просте число і p не ділить s. Тоді:*

- *існує силовська p–підгрупа і її порядок дорівнює p^m;*
- *кожна p–підгрупа міститься в деякій силовській p–підгрупі;*
- *будь-які дві силовські p–підгрупи спряжені;*
- *число силовських p–підгруп конгруентне одиниці за модулем p і ділить s.*

Теорема 2. *Нехай p — найбільший простий дільник порядку групи G і P — її силовська p-підгрупа. Якщо P володіє супердодаванням в G, то P — нормальна підгрупа групи G.* [3]

Наслідок 1. *Якщо в групі G всі силовські підгрупи мають супердодавання, то G суперрозв'язна.*

Доведення. Нехай P — силовська p-підгрупа для найбільшого простого дільника p порядка групи G і нехай $\pi(G) = \{p, q_1, q_2, \ldots, q_t\}$ і $q_1 < q_2 < \ldots < q_t < p$. За умовою $G = Q_1H_1$, де Q_1 — силовська q_1-підгрупа в G, H_1 — її супердодавання.

Нехай Q_2 — силовська q_2-підгрупа із H_1. Так як Q_2 — силовська q_2-підгрупа в G, то Q_2 напівнормальна в G. За лемою 1 Q_2 напівнормальна в H_1, тобто $H_1 = Q_2H_2$, де H_2 – супердодавання Q_2 в H_1. За лемою 2 добуток Q_1Q_2 є напівнормальною в G підгрупо і $G = (Q_1Q_2)H_2$, причому H_2 є супердодавання до Q_1Q_2 в G. Через t кроків одержимо, що $H = Q_1Q_2 \dots Q_t$ — напівнормальна в G підгрупа, де Q_i — силовська q_i-підгрупа для $i = 1, \dots, t$. Ясно, що $G = PH$ і $P \in S_G(H)$.

Нехай P_1 — підгрупа простого порядку із P, нормальна в P. Із того, що H напівнормальна в G випливає, що HP_1 — підгрупа групи G. Так як $P \lhd G$, то $P_1 \lhd HP_1$ і $P_1 \lhd G$. Отже, в групі G міститься нормальна підгрупа P_1 простого порядку p. За лемою 1 умова твердження, яке доводиться, розповсюджується і на факторгрупу G/P_1. За індукцією G/P_1 суперрозв'язна. Тепер G суперрозв'язна. Наслідок доведено. □

Якщо G — група порядку $p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_n^{\alpha_n}$, то прийнято позначати $\pi(G) = \{p_1, p_2, \dots, p_n\}$. Множина Σ, що складається з попарно переставних силовських p-підгруп з G, в точності по одній підгрупі для кожного $p \in \pi(G)$, разом з самою групою G, називається *силовською системою* групи G.

Силовською множиною групи назвемо множину силовських підгруп, узятих по одній для кожного простого дільника порядку групи, разом з одиничною підгрупою.

Таким чином, якщо G — група порядку $p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_n^{\alpha_n}$, то множина $\Sigma = \{E, G_{p_1}, G_{p_2}, \dots, G_{p_n}\}$ буде силовською множиною. Тут E — одинична підгрупа групи G, G_{p_i} — силовська p_i-підгрупа групи G і всі числа $p_1, p_2, \dots, p_n$ різні.

З теореми Силова випливає, що кожна група G містить силовську множину Σ. Якщо додатково $G_{p_i}G_{p_j} = G_{p_j}G_{p_i}$ для всіх підгруп з Σ, то силовська множина перетворюється на силовську систему.

Відомо, що будь-яка розв'язна група має силовську систему, і навпаки, якщо в групі є силовська система, то група розв'язна. Крім того, якщо Σ і Σ' — силовські системи розв'язної групи G, то $\Sigma^g = \Sigma'$ для деякого $g \in G$.

Нехай Ω — деяка множина підгруп групи G і N — нормальна підгрупа групи G. Скористаємося наступними позначеннями:

$$\Omega N = \{XN | X \in \Omega\},$$
$$\Omega N/N = \{XN/N | X \in \Omega\},$$
$$\Omega \cap N = \{X \cap N | X \in \Omega\},$$
$$\Omega^\theta = \{X^\theta | X \in \Omega\},$$

де θ — деякий гомоморфізм групи G в деяку групу G^θ.

Нехай Ω — деяка множина підгруп групи G. Підгрупа H групи G називається Ω*-квазінормальною*, якщо $HX = XH$, для всіх $X \in \Omega$. Якщо Ω — множина всіх підгруп групи G, то Ω-квазінормальна підгрупа є квазінормальною.

Лема 1. *Нехай G_p — силовська p-підгрупа групи G і $N \triangleleft G$. Тоді $G_p \cap N$ — силовська p-підгрупа групи N, а G_pN/N — силовська p-підгрупа факторгрупи G/N.* [5]

Властивості силовських множин описано в наступних лемах.

Лема 2. *Нехай N — нормальна підгрупа групи G.*

- *Якщо Σ — силовська множина групи G, то $\Sigma N/N$ є силовською множиною факторгрупи G/N.*
- *Якщо Σ — силовська множина групи G, то $\Sigma \cap N$ є силовською множиною підгрупи N.*
- *Якщо факторгрупа G/N має силовську множину $\overline{\Sigma}$, то знайдеться в групі G така силовська множина Σ, що $\overline{\Sigma} = \Sigma N/N$.*
- *Якщо нормальна підгрупа H групи G має силовську множину Σ_H, то знайдеться в групі G така силовська множина Σ, що $\Sigma_H = \Sigma \cap H$.*
- *Якщо Σ — силовська множина групи G і θ — деякий гомоморфізм групи G в групу G^θ, то Σ^θ є силовською множиною групи G^θ.* [5]

Лема 3. *Нехай Σ — силовська множина групи G і $H-\Sigma$ — квазінормальна підгрупа групи G. Тоді вірні наступні твердження:*

- *якщо θ — гомоморфізм групи G, тоді підгрупа H^θ є Σ^θ-квазінормальною в групі G^θ;*
- *якщо $G \geqslant K \geqslant H$ і K — нормальна підгрупа групи G, то підгрупа $H\Sigma \cap K$ — квазінормальна в групі K;*
- *якщо N – довільна нормальна підгрупа групи G, то в факторгрупі G/N підгрупа HN/N буде $\Sigma N/N$-квазінормальною.* [5]

Лема 4. *Нехай група G з силовською множиною Σ, H — підгрупа групи G. Якщо підгрупа H^x є Σ-квазінормальна, то сама підгрупа H буде $\Sigma^{x^{-1}}$ — квазінормальною для будь-якого елемента x групи G.* [5]

Нехай Σ — силовська множина групи G. Вище перетин $\Sigma \cap N$ визначався для нормальної підгрупи N групи G. У цьому випадку за лемою 2 перетин є силовськиою множиною групи N. Якщо H — довільна, не обов'язково нормальна, підгрупа групи G, то припустимо $\Sigma \cap H = \{X \cap H | X \in \Sigma\}$. Відзначимо, що в цьому випадку $\Sigma \cap H$ може не бути силовською множиною групи H.

Лема 5. *Нехай G — група, Σ — її силовська множина. Якщо $H - \Sigma$ — квазінормальна підгрупа групи G, причому $H \cap \Sigma = \{E\}$ і індекс H в групі G примарний, то G — примарна група.* [5]

Лема 6. *Нехай N — нормальна підгрупа групи G. Якщо A/N — циклічна p-підгрупа факторгрупи G/N, то існує елемент $h \in A$ такий, що $\langle h \rangle - p$-підгрупа і $\langle h \rangle N = A$.* [5]

Будемо використовувати запис Σ_G для позначення деякої силовської множини групи G. Має місце наступна теорема.

Теорема 3. *Нехай H, K — надрозв'язні підгрупи групи G. І нехай Σ_H і Σ_K — силовські системи підгруп H і K, і $G = HK$. Якщо циклічні примарні підгрупи з H є Σ_K — квазінормальні і циклічні примарні підгрупи з K є Σ_H-квазінормальні, то група G суперрозв'яна.*

Так як квазінормальна підгрупа переставна зі всіма іншими підгрупами, то із лем 2-6 та теореми 3 випливають наступні твердження.

Наслідок 2. *Нехай H і K — суперрозв'яні підгрупи групи G такі, що $G = HK$. І нехай H квазінормальна в K і K квазінормальна в H. Тоді G суперрозв'яна.*

Наслідок 3. *Нехай група $G = HK$, де H, K — суперрозв'яні пігрупи групи G взаємно простих порядків з силовськими системами Σ_H і Σ_K відповідно. Якщо H і циклічні підгрупи з H є Σ_K — квазінормальні, K і циклічні підгрупи з K є Σ_H-квазінормальні, то група G суперрозв'яна.*

Наслідок 4. *Нехай група $G = HK$, де H, K — суперрозв'яні підгрупи групи G з силовськими системами Σ_H і Σ_K відповідно. Якщо елементи силовських систем Σ_H і Σ_K попарно переставні, циклічні підгрупи з H є Σ_K-квазінормальні, циклічні підгрупи з K є Σ_H-квазінормальні, то група G суперрозв'яна.*

Висновки

В статті досліджено суперрозв'язність групи, у якої силовські підгрупи володіють супердодаванням. За допомогою введеного поняття силовська множина розглянуто ознаку суперрозв'язності факторизовних груп з переставними циклічними підгрупами з факторів. Одержано наслідки цього твердження, що можуть вважатися самостійними ознаками суперрозв'язності групи.

Література

1. *Каргаполов М.И.* Основы теории групп / М.И. Каргаполов, Ю.И. Мерзляков // М.: Наука, 1977. — 238 с.
2. *Курносенко Н.М.* О факторизации конечных групп сверхразрешимыми и нильпотентными подгруппами / Н.М. Курносенко // Вопросы алгебры. — Гомель: Изд-во ГГУ им. Ф. Скорины. Вып. 12, 1998. — С. 113–122.
3. *Подгорная В.В.* Минимальные добавления к подгруппам конечных групп. Курс лекций — Гомель: Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины, 2003. — 65 с.
4. *Шеметков Л.А.* Формации конечных групп / Л.А. Шеметков // М.: Наука, 1978. — 272 с.
5. *Doerk K., Hawkes T.* Finite soluble groups Walter de Gruyter. — Berlin – New York, 1992. — 889 p.
6. *Hall P.* A characteristic property of soluble groups / P. Hall // J. London Math. Soc. — 1937. — №12. — P. 198–200.

УДК 512.33

Рябухо О.М., Турка Т.В., Судіна К.О., Плюшко Г.В.

[1] *кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри алгебри, ДВНЗ «ДДПУ»*

[2] *кандидат фізико-математичних наук, старший викладач кафедри алгебри, ДВНЗ «ДДПУ»*

[3] *студентка 4 курсу фізико-математичного факультету, ДВНЗ «ДДПУ»*

[4] *студентка 4 курсу фізико-математичного факультету, ДВНЗ «ДДПУ»*

e-mail: tvturka@mail.ru

НАПІВГРУПИ ВІДПОВІДНОСТЕЙ ГРУП ТА НАПІВГРУП

Описано умови ідемпотентності елементів і максимальні підгрупи $\mathcal{D}$–класу напівгрупи відповідностей скінченної групи. Доведена теорема про регулярність напівгрупи відповідностей.

Ключові слова: *напівгрупа відповідностей, ідемпотентність, максимальна підгрупа, регулярність.*

Вступ

Нехай G — універсальна алгебра. Якщо підалгебру з $G\times G$ розглядати як бінарне відношення на G, то множина $S(G)$ всіх підалгебр з $G\times G$ є напівгрупою відносно деморганівського добутку відношень. Напівгрупа $S(G)$ називається *напівгрупою відповідностей* алгебри G.

Задачу вивчення напівгруп відповідностей свого часу ставив Курош (див. [1]).

У роботі [3] показано, що коли G — група, то елементи напівгрупи $S(G)$ можна ототожнити з п'ятірками вигляду $(H_1, G_1, H_2, G_2, \varphi)$, де $H_1 \lhd G_1 < G$, $H_2 \lhd G_2 < G$, а φ — ізоморфізм факторгрупи G_1/H_1 на факторгрупу G_2/H_2. При цьому відповідний елемент напівгрупи $S(G)$ — як підмножина із $G\times G$ — має вигляд

$$(H_1, G_1, H_2, G_2, \varphi) = \bigcup_{a\in G_1} (aH_1 \times \varphi(aH_1)).$$

Множини вигляду $aH_1 \times bH_2$, де $bH_2 = \varphi(aH_1)$, будемо називати блоками елемента $A = (H_1, G_1, H_2, G_2, \varphi)$.

1. Ідемпотентність та регулярність

Лема 1. *Для довільного ідемпотента $A = (H_1, G_1, H_2, G_2, \varphi)$ напівгрупи $S(G)$ і довільного елемента $b \in G_2$ існує тільки один клас суміжності групи G_1 за підгрупою H_1, який має непорожній перетин з bH_2.*

Доведення. Справді, нехай $bH_2 \cap a'H_1 \neq \varnothing$ і $bH_2 \cap a''H_1 \neq \varnothing$. Розглянемо підмножини $aH_1 \times bH_2$, $a'H_1 \times b'H_2$, $a''H_1 \times b''H_2$ з A. Тоді

$$(aH_1 \times bH_2) \circ (a'H_1 \times b'H_2) = aH_1 \times b'H_2$$

$$(aH_1 \times bH_2) \circ (a''H_1 \times b''H_2) = aH_1 \times b''H_2$$

звідки $b'H_2 = b''H_2$. Але тоді $a'H_1 = a''H_1$. □

Теорема 1. *Нехай G — група. Якщо елемент $(H_1, G_1, H_2, G_2, \varphi)$ напівгрупи відповідностей $S(G)$ є ідемпотентом, то виконуються такі умови:*
1) $H_1(G_1 \cap G_2) = G_1$, $H_2(G_1 \cap G_2) = G_2$;
2) для довільного $g \in G_1 \cap G_2$ $\varphi(gH_1) = gH_2$.

Доведення. Нехай елемент $A = (H_1, G_1, H_2, G_2, \varphi)$ є ідемпотентом. Тоді для довільного блоку $aH_1 \times bH_2$ із A маємо:

$$(aH_1 \times bH_2) \circ (aH_1 \times bH_2) = (aH_1 \times bH_2).$$

Звідси випливає, що $bH_2 \cap aH_1 = \varnothing$. Отже, для кожного класу суміжності aH_1 групи G_1 за підгрупою H_1 знайдеться такий елемент $c \in aH_1 \cap bH_2 \subseteq G_1 \cap G_2$, що $aH_1 = cH$. Але тоді $H_1(G_1 \cap G_2) \subseteq H_1 G_1 = G_1$. Аналогічно доводиться, що $H_2(G_1 \cap G_2) = G_2$. Це доводить умову 1).

Для довільного $g \in G_1 \cap G_2$ елемент A містить блоки вигляду $aH_1 \times gH_2$ і $gH_1 \times bH_2$. Оскільки $g \in gH_1 \times gH_2$, то $gH_1 \cap gH_2 \neq \varnothing$, а тому

$$(aH_1 \times gH_2) \circ (gH_1 \times bH_2) = (aH_1 \times bH_2).$$

З іншого боку, з ідемпотентності елемента A маємо:

$$(aH_1 \times gH_2) \circ (aH_1 \times gH_2) = aH_1 \times gH_2.$$

Отже, A містить блоки $aH_1 \times bH_2$ і $aH_1 \times gH_2$. Оскільки, перші компоненти блоків однакові, то $bH_2 = gH_2$. Аналогічно доводиться, що $aH_1 = gH_1$. Але тоді $\varphi(gH_1) = \varphi(aH_1) = bH_2 = gH_2$, що доводить умову 2).

Умови теореми 1 не є достатніми. Розглянемо такий приклад: $G = G_1 = G_2 = Z_2 \oplus Z_2$, $H_1 = \{(0,0), (1,0)\}$, $H_2 = \{(0,0), (0,1)\}$. Тоді $G_1/H_1 \simeq G_2/H_2 \simeq Z_2$. Група Z_2 має тільки тотожній автоморфізм, тому ізоморфізм $\varphi : G_1/H_1 \to G_2/H_2$ визначений однозначно. Для елемента $A = (H_1, G_1, H_2, G_2, \varphi)$ умови теореми виконуються, бо $H_1(G_1 \cap G_2) = H_1 G = G$, $H_2(G_1 \cap G_2) = G$, $\varphi((0,0)H_1) = (0,0)H_2$, $\varphi((1,1)H_1) = (1,1)H_2$. Але $A \neq G \times G$, а $A \circ A = G \times G$. Тому A не є ідемпотентом. □

Теорема 2. *Напівгрупа відповідностей $S(G)$ — регулярна.*

Доведення. Нехай елемент A напівгрупи $S(G)$ має вигляд:

$$A = a_1H_1 \times b_1H_2 + a_2H_1 \times b_2H_2 + ... + a_kH_1 \times b_kH_2.$$

Розглянемо елемент

$$B = b_1H_2 \times a_1H_1 + b_2H_2 \times b_2H_1 + ... + b_kH_2 \times a_kH_1.$$

Для довільного i маємо:

$$(a_iH_1 \times b_iH_2) \circ (b_iH_2 \times a_iH_1) \circ (a_iH_1 \times b_iH_2) = \tag{1}$$

$$= (a_iH_1 \times a_iH_1) \circ (a_iH_1 \times b_iH_2) = a_iH_1 \times b_iH_2 = S(G).$$

Із рівності 1 та леми 1 випливає, що $A \circ B \circ A = A$. Отже, елемент A є регулярним. Оскільки елемент A — довільний, то напівгрупа $S(G)$ є регулярною. □

Нагадаємо, що напівгрупа називається *ідемпотентною (або зв'язкою)*, якщо всі її елементи є ідемпотентами.

Наслідок 1. *Якщо G — група, то напівгрупа відповідностей $S(G)$ буде зв'язкою тоді і тільки тоді, коли $|G| \leqslant 2$.*

Доведення. Якщо $|G| > 2$, то група G має нетривіальний автоморфізм φ. Виберемо такий елемент $g \in G$, що $\varphi(g) \neq g$. Розглянемо в $S(G)$ елемент $A = \{(g, \varphi(g)) | g \in G\}$. Для цього елемента $H_1 = H_2 = E$, $G_1 = G_2 = G$. Позаяк $\varphi(gH_1) = \varphi(g) \neq g = gH_2$, то для A не виконується умова 2 теореми 1. Тому A не є ідемпотентом.

Якщо $|G| \leqslant 2$, то легко перевіряється, що $S(G)$ є звязкою. □

Наступне твердження стосується довільних універсальних алгебр.

Твердження 1. *Якщо алгебра G має власну підалгебру H, то напівгрупа відповідностей $S(G)$ не є інверсною.*

Доведення. Нехай H — власна підалгебра алгебри G. Тоді кожен із елементів $H \times H$ та $G \times G$ є ідемпотентом напівгрупи $S(G)$. Але

$$(H \times H) \circ (G \times G) = H \times G \neq G \times H = (G \times G) \circ (H \times H).$$

Отже, в $S(G)$ є ідемпотентти, які не комутують, а тому $S(G)$ не є інверсною. □

Наслідок 2. *Нехай G — напівгрупа. Напівгрупа відповідностей $S(G)$ буде інверсною тоді і тільки тоді, коли $|G| = 1$.*

Доведення. Нехай $|G| > 1$. Якщо в G є ідемпотент e, то в G є власна піднапівгрупа $\{e\}$. Якщо в G немає ідемпотента, то всі елементи мають нескіченний порядок. Тоді для довільного елемента $a \in G$ циклічна піднапівгрупа $\langle a \rangle = \{a^2, a^4, \ldots\}$ є власною. □

2. Максимальні підгрупи $\mathcal{D}$-класу напівгрупи відповідностей

Для довільного ідемпотетна $e \in S$ через G_e позначимо максимальну підгрупу з S, для якої e є одиницею.

Теорема 3. *Нехай G — скінченна група, а елемент $e = (H_1, G_1, H_2, G_2, \varphi)$ напівгрупи відповідностей $S(G)$ є ідемпотентом. Тоді*

$$G_e = \{(H_1, G_1, H_2, G_2, \psi\varphi) | \psi \in \ Aut(G_1/H_1)\} =$$

$$= \{(H_1, G_1, H_2, G_2, \varphi\psi) | \psi \in \ Aut(G_2/H_2)\}.$$

Зокрема, якщо $G_1 = G_2 = G$, $H_1 = H_2 = H$, $\varphi = \varepsilon$ — тотожний автоморфізм, то

$$G_e = \{(G, H, G, H, \psi) | \psi \in \ Aut(G/H)\}.$$

Доведення. Легко перевіряється, що елемент $f = (H_1, G_1, H_1, G_1, \varepsilon)$, де ε — тотожний автоморфізм факторгрупи G_1/H_1, буде ідемпотентом.

В [4] показано, що елементи $A' = (H_1', G_1', H_2', G_2', \varphi')$ і $A'' = (H_1'', G_1'', H_2'', G_2'', \varphi'')$ належать одному $\mathcal{D}$–класу напівгрупи $S(G)$ тоді і тільки тоді, коли $G_1'/H_1' \simeq G_2'/H_2' \simeq G_1''/H_1'' \simeq G_2''/H_2''$. Якщо $G_1'/H_1' \simeq F$, то будемо казати, що відповідний $\mathcal{D}$–клас визначається фактором F.

Тому ідемпотенти e і f будуть $\mathcal{D}$–еквівалентні. За теоремою Гріна (див. [2], теор. 2.20) максимальні підгрупи G_e і G_f ізоморфні. Тому має сенс спочатку розібратися із заключною частиною теореми.

Отже, нехай $e = (G, H, G, H, \varepsilon)$, де ε — тотожний автоморфізм факторгрупи G/H. За наслідком 1 із теореми 1 з [4] $\mathcal{H}$–клас $\mathcal{H}(e)$, який збігається з G_e, містить $|\mathrm{Aut}(G/H)|$ елементів. Тому для доведення заключної частини теореми досить показати, що кожен елемент вигляду $A = (G, H, G, H, \varphi)$, де $\varphi \in Aut(G/H)$, належить G_e. Маємо:

$$(gH, \varphi(gH)) \circ (\varphi(gH), gH) = (gH, gH). \qquad (2)$$

З іншого боку, якщо $gH \neq g'H$, то $gH \cap g'H = \varnothing$, звідки $\varphi(gH) \cap \varphi(g'H) = \varnothing$ і

$$(gH, \varphi(gH)) \circ (\varphi(g'H), g'H) = \varnothing. \tag{3}$$

Із рівностей 2 і 3 випливає, що для елемента $A^{-1} = (G, H, G, H, \varphi^{-1})$ буде $A \circ A^{-1} = e$. Тому $A \in G_e$.

Нехай тепер $e = (G_1, H_1, G_2, H_2, \varphi)$ — довільний ідемпотент. Із уже доведеного випливає, що

$$|G_e| = |\{(G_1, H_1, G_2, H_2, \varphi\psi) | \psi \in \mathrm{Aut}(G_2/H_2)\}|. \tag{4}$$

З іншого боку, оскільки для елемента $A = (G_1, H_1, G_2, H_2, \varphi\psi)$ та ідемпотента $e = (G_1, H_1, G_2, H_2, \varphi)$ четвірка (G_1, H_1, G_2, H_2) одна і та ж, то за наслідком 1 із теореми 1 з [4] $A \in \mathcal{H}(e)$. Оскільки $\mathcal{H}(e) = G_e$, то разом із 4 це завершує доведення теореми. □

Наслідок 3. *Якщо в напівгрупі відповідностей $S(G)$ ідемпотент e належить $\mathcal{D}$-класу, який визначається фактором F, то $G_e = \mathrm{Aut}\ F$.*

Література

1. *Курош А.Г.* Общая алгебра. Лекции 1969–70 учебного года / А.Г. Курош. — М.: Наука, 1974. — 160 с.
2. *Клиффорд А.* Алгебраическая теория полугрупп / А. Клиффорд, Г. Престон // Том 1. — Изд-во «Мир», Москва, 1972. — 283 с.
3. *Ганюшкін О.Г.* Порядок напівгрупи відповідностей скінченної групи / О.Г. Ганюшкін, Т.В. Турка // Вісник Київського університету, випуск № 3. Серія: фіз.-мат. науки, 2009. — С. 9–13.
4. *Турка Т.* Відношення Гріна на напівгрупі відповідностей скінченної групи / Т. Турка // Вісник Київського університету, випуск № 4. Серія: фіз.-мат. науки, 2010. — С. 38–42.
5. *Рябухо О.М.* Напівгрупа відповідностей скінченної групи / О.М. Рябухо, Т.В. Турка, Л.П. Литвиненко // Збірник наукових праць фізико-математичного факультету СДПУ. — 2012. — Випуск 2. — С. 69–72.

УДК 512.623.314(091)

Рябухо О.М., Мазніва Н.С.

[1] *кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри алгебри, ДВНЗ «ДДПУ»*

[2] *студентка 5 курсу фізико-математичного факультету, ДВНЗ «ДДПУ»*

e-mail: ren_elena@mail.ru

РОЗВИТОК ТЕОРІЇ ҐАЛУА В РОБОТАХ М.Г. ЧЕБОТАРЬОВА

В статті наведений огляд основних робіт М.Г. Чеботарьова з теорії Ґалуа, зроблений аналіз його досліджень та описані перспективи застосувань.

Ключові слова: *теорія Ґалуа, група Ґалуа, незвідний многочлен, рівняння з наперед заданою групою.*

Вступ

15 червня 2014 року науковий математичний світ відзначає 130-ту річницю з дня народження видатного математика і педагога, вихованця Київського Університету св. Володимира М.Г.Чеботарьова.

Миколай Григорович Чеботарьов народився 15 червня 1894 року в Кам'янець-Подільську. У 1912 році він закінчив місцеву гімназію і разом з батьками переїхав до Києва. В цьому ж році він був прийнятий у Київського університету на фізико-математичний факультет. Це був рік розквіту наукового алгебраїчного семінару Д.О. Граве, у роботі якого вже приймали участь О.Ю. Шмідт, М.Ф. Кравчук, Б.М. Делоне та інші. До роботи семінару активно долучився і М.Г. Чеботарьов. Влітку, 1913 року, після закінчення першого курсу він переклав з німецької мови на російську велику частину підручника Вебера з алгебри. Це було знайомство з теорію Галуа, яку професор Д.О.Граве на той час читав студентам третього курсу.

У 1916 році після закінчення університету М.Г. Чеботарьов був залишений для підготовки до професорського звання, готувався до магістерських екзаменів, які складав у 1918р.

Наукову діяльність М.Г. Чеботарьова можна розділити на три періоди: київський (1918-1921рр.), одеський (1921-1927рр.) і казанський (1927-1947рр.). До київського періоду відносяться дослідження питань з різних розділів математики: виділення алгебраїчної частини в абелевих інтегралах, задача, обернена задачі Чірнгаузена, про поверхні переносів, визначення щільності множин простих чисел, які належать до заданого класу підстановок та інші.

У кінці 1921р. Чеботарьов переїхав до Одеси. Там він працював секретарем науково-дослідницької кафедри при Одеському інституті народної освіти та продовжив наукові дослідження, над якими почав роботу ще в Києві.

Вагомим алгебраїчним дослідженням М.Г. Чеботарьова київського і початку одеського періоду його творчості є робота, яка присвячена вирішенню проблеми Фробеніуса [1]. Цю роботу в 1926р. Чеботарьов представив в Українську академію наук як докторську дисертацію, яку захистив у 1927 р. Його опонентами були Д.О. Граве, М.Ф. Кравчук і Г.В. Пфейффер. Після захисту дисертації Чеботарьов був запрошений в Казанський університет, де працював до кінця життя.

Найбільш плідною і багатогранною була науково-педагогічна діяльність М.Г. Чеботарьова в казанський період. У Казані він створив першокласну математичну школу, яка розвивалася за різними напрямками. Чеботарьов, як і його вчитель Граве, вимагав самостійної творчої роботи від студентів, починаючи з молодших курсів. Його учні працювали в усіх напрямках, за якими працював він сам. Більшість із них стали видатними радянськими вченими: Д.І. Адо, М.М. Мейман, Л.І. Гаврілов та інші. Вони з великим успіхом розробили ідеї свого вчителя в області теорії безперервних груп, напівпростих алгебр Лі, теорії поліномів, що продовжуються та інші. До приїзду Чеботарьова в Казань цими питаннями там ніхто не займався.

У Казані М.Г.Чеботарьов був беззмінним директором науково-дослідницького інституту математики і механіки, а з 1943 р. — головою Казанського фізико-математичного суспільства. В 1929 р. М.Г. Чеботарьов був обраний членом-кореспондентом АН СРСР, а у 1943 р. йому було присвоєно звання заслуженого діяча науки РРФСР. М.Г. Чеботарьов лауреат Державної премії СРСР, нагороджений орденом Леніна, двома орденами Трудового Червоного Прапору і медалями. Помер М.Г. Чеботарьов 24 червня 1947 р. в Москві у зеніті своєї творчої діяльності.

У 1947 р. президіям АН СРСР заснував премію ім. М.Г.Чеботарьова, яка «присуджується» один раз в три роки за кращу роботу з математики. Його іменем названо науково-дослідницький інститут математики і механіки при Казанському університеті.

Дана робота присвячена дослідженню наукової спадщини М.Г. Чеботарьова.

Мета дослідження полягає у вивченні основних положень теорії Ґалуа в роботах Чоботарьова, зокрема, дослідженню задачі про знаходження рівнянь з наперед заданою групою Ґалуа.

Рівняння з наперед заданою групою

Задача про знаходження рівнянь з наперед заданою групою Ґалуа вперше була поставлена в загальному вигляді Д. Гільбертом [2] в кінці XIX ст. Ним же у 1892р. вона була розв'язана для випадку симетричних і знакозмінних груп. Розв'язання Гільберта базується на його ж теоремі про незвідність, згідно з якою, якщо одночлен від декількох змінних незвідний над даним полем, то можна для одних із цих змінних підібрати такі значення, що після підстановки їх многочлен залишається незвідним відповідно останніх змінних над тим же полем.

Ця теорема є типовою теоремою «існування», тому розв'язання Гільберта не давало практичного способу знаходження шуканих рівнянь.

М. Бауер (1907р.) розв'язав задачу для симетричних груп в такий спосіб, який дійсно виконується на практиці. Для свого розв'язання даної задачі він використав теорему Дедекінда про зв'язки між розкладанням лівої частини рівняння на незвідні за простим модулем множники і циклами підстановок його групи Ґалуа.

Важливі результати у цьому напрямку були отримані Е.Нетер (1918р.) для випадку, коли деяка система функцій, які залежать від заданої групи, має так названий раціональний базис. Метод Нетер також заснований на вживанні теореми Гільберта про незвідність многочлена відповідно деяких змінних.

Незалежно від Бауера Чеботарьов для розв'язання задачі знаходження рівнянь з наперед заданою групою Ґалуа використовує теорему Дедекінда. В першій своїй роботі [3] (1926р.), присвяченої знаходженню алгебраїчних рівнянь з наперед заданою групою Ґалуа, він показав, що для випадку симетричної групи, якщо тільки можна знайти циклічні групи підстановок, які містяться в симетричній групі, але не містяться в жодній з її підгруп, то можна так скорегувати спосіб Бауера, що з його допомогою одержати всі можливі рівняння з симетричною групою, а також розв'язати задачу для груп, які допускають раціональний базис. При цьому побудова шуканих рівнянь виконується за скінченну кількість дій.

Крім того в цій же роботі [3] Чеботарьов довів теорему Дедекінда без використання теорії ідеалів. Нагадаємо теорему Дедекінда.

Якщо незвідний многочлен n-ого степеня

$$f(x) = x^n + p_1 x^{n-1} + \ldots + p_{n-1}x + p_n \tag{1}$$

має розклад на k незвідних множників за модулем p, (p не належить p дискримінантур многочлена)

$$f(x) \equiv f_1(x) \cdot f_2(x) \cdot \ldots \cdot f_k(x) \qquad (\mathrm{mod}\ p) \tag{2}$$

з відповідними степенями $n_1, n_2, \ldots, n_k (n_1+n_2+\ldots+n_k = n)$ то в групі Ґалуа цього рівняння міститься підстановка, яка складається із циклів порядків $n_1, n_2, \ldots, n_k$.

Доведення цієї теореми у Чеботарьова складається з двох частин: спочатку доводиться існування в групі Ґалуа підстановки циклів $n_1, \ldots, n_k$, а потім можливість такого способу нумерувати корені рівняння (1) і конгруенції (2), щоб група конгруенції була дільником групи рівняння.

Метод Чеботарьова на відміну від методу Бауера дає можливість побудувати всі рівняння з симетричною групою. Згідно способу Чеботарьова необхідно взяти підстановку циклу n-ого порядку, $n-1$-ого і транспозицію. Подальші міркування основані на теоремі Фробеніуса, оберненій теоремі Дедекінда. Якщо група Галуа рівняння (1) містить підстановку, яка складається із циклів порядків $n_1, \ldots, n_k$, то існує нескінченна множина таких простих чисел, що відповідна конгруенція (2) розкладається в добуток незвідних за модулем p множників степенів $n_1, n_2, \ldots, n_k$. Будь-яке рівняння без афекту, тобто з симетричною групою, містить підстановки трьох вказаних Чеботарьовим циклічних типів, отже, існує нескінченна множина простих модулів, за якими ліва частина рівняння або залишається незвідною, або розкладається на лінійний множник і множник $(n-1)$-го степеня, або на квадратний множник і $n-2$ лінійних. Труднощі побудови рівнянь з наперед заданою несиметричною групою, як показав Чеботарьов, полягають в тому, що при побудові рівнянь, до групи яких входили б підстановки заданих циклічних типів, можливий випадок, коли в цю групу входять і підстановки циклічного типу, які не містяться в заданій групі.

У роботі [3] Чеботарьов формулює задачу таким чином. Нехай $P = p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_m$ — добуток вибраних простих модулів, $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — вирахування класів за модулем p, які підібрані так, щоб рівняння

$$f(x) = x^n + a_n x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_0 = 0 \tag{3}$$

мало групу, яка містить підстановки заданих циклічних типів. $z(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — функція, яка належить до заданої групи і задовольняє рівняння

$$F(z) = z^k + b_1 z^{k-1} + \ldots + b_{k-1}z + b_k = 0 \tag{4}$$

коефіцієнти якого $b_1, b_2, \ldots, b_k$ є цілими раціональними функціями від $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Конгруенція $F(z) \equiv 0$ за кожним з модулів $p_1, p_2, \ldots, p_k$, а отже, і за модулем P має раціональний корінь.

Якщо замість $a_1, a_2, \ldots, a_n$ взяти $A_1 = a_1 + \alpha_1 P$, $A_2 = a_2 + \alpha_2 P$, $\ldots$, $A_n = a_n + \alpha_n P$, то коефіцієнти $b_1, b_2, \ldots, b_k$ рівняння (4) будуть раціональними функціями від $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$. Позначимо їх $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_k$ і тоді конгруенція

$$\overline{F(z)} = z^k + \beta_1 z^{k-1} + \ldots + \beta_{k-1} z + \beta_k \equiv 0 \pmod p$$

буде мати раціональні корені при всіх значеннях $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$. Розв'язання задачі зводиться до знаходження чисел $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ так, щоб рівняння $\overline{F(z)} = 0$ мало раціональні корені. Остання задача в загальному випадку не розв'язана. Чеботарьов показав, що задача легко розв'язується в окремому випадку, коли функції

$$a_1(x_1, x_2, \ldots, x_n), \ldots, a_n(x_1, x_2, \ldots, x_n), z(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

володіють раціональним базисом, тобто коли існують такі раціональні функції $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$, через які раціонально виражаються всі раціональні функції $a_1, a_2, \ldots, a_n, z$. Такі функції знайдені лише для $n = 1$ і $n = 2$. Чеботарьов розглядає тільки той випадок, коли раціональний базис існує. Тоді необхідною і достатньою умовою того, що група рівнянь (3) була заданою групою або її дільником, є раціональність величин $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$.

У 1934 р. М.Г. Чеботарьов у великій статті [4], яка присвячена проблемам сучасної теорії Галуа, зробив глибокий аналіз існуючих розв'язків задачі про знаходження алгебраїчних рівнянь з наперед заданою групою Галуа. Він встановив зв'язки між розв'язками описаної задачі і питанням вивчення полів раціональних функцій; сформулював задачу в більш загальній формі — у вигляді трьох задач:

1. Знайти будь-які рівняння, група яких була б ізоморфною групі Галуа;

2. Знайти загальну параметричну форму коефіцієнтів рівняння, група якого була б ізоморфною групі G або її підгрупі. Подання коефіцієнтів в цій формі має бути необхідною і достатньою умовою того, щоб група рівняння була ізоморфною групі G або її підгрупі.

3. Знайти спосіб для визначення рівнянь, група яких ізоморфна групі G, причому цей спосіб повинен охоплювати всі рівняння цього роду, якщо його достатньо продовжити.

Висновки

У результаті проведених історично-математичних досліджень можна стверджувати, що наукова спадщина М.Г. Чеботарьова збагатила вітчизняну і світову науку.

Роботи знаного математика відрізнялися чіткістю постановки проблеми, пошуками нових методів розв'язання задач, доведенням розв'язків до повного алгоритму.

У своєму відгуку про М.Г. Чеботарьова у зв'язку з висуненням його кандидатури у члени АН УРСР у 1938 р. Д.О. Граве писав: «...Знаменитый французский математик Э. Галуа был убит на дуэли в возрасте 21 года, и, несмотря на это, ему удалось создать теорию, которая в продолжении более 100 лет занимает умы лучших представителей математики. Начиная с вопросов алгебры, она постепенно вошла в новые части математики. Чеботарев посвящает теории Ґалуа книги. Этим он показал глубокое понимание исторических перспектив хода развития математики....»

Теорія Ґалуа беззаперечно не втратила своєї актуальності і має широке коло застосувань. Зокрема в сучасних системах захисту інформації використовуються алгоритми, що ґрунтуються на властивостях груп точок еліптичних кривих у полях Ґалуа [8]. Саме з їх допомогою будуються найефективніші на сьогодні алгоритми тестування простоти і розкладу чисел на множники.

Література

1. *Чеботарев Н.Г.* Определение плотности совокупности простых чисел, принадлежащих к заданому классу подстановок. — Собр. соч. т. I, 1949. — С. 26–65.
2. *Чеботарев Н.Г.* К задаче нахождения алгебраических уравнений с наперед заданой группой. — Собр. соч. т. I, 1949. — С. 87–94.
3. *Чеботарев Н.Г.* Исследование о плотности простых чисел. — Собр. соч. т. I, 1949. — С. 102–118.
4. *Чеботарев Н.Г.* Об одной алгебраической проблеме Гильберта. — Собр. соч. т. I, 1949. — С. 267–281.
5. *Чеботарев Н.Г.* Алгебра I (Алгебра полиномов и полей), в кн.: Математика в СССР за 30 лет. — М., 1948. — С. 89–105.
6. *Чеботарев Н.Г.* Проблемы современной теории Галуа. — Труды всесоюзного математического съезда т. I, 1934. — С. 164–205.
7. *Чеботарев Н.Г.* Основы теории Галуа. ч. I. — ГТТИ, М.–Л., 1934. ч. II. — ОНТИ, 1937. — 160 с.
8. *Колеснікова О.О.* Реалізація шифру Ель-Гамаля на еліптичній кривій / О.О. Колеснікова, Є.М. Пірус, О.М. Рябухо // Збірник наукових праць фізико-математичного факультету СДПУ. — 2011. — Випуск 1. — С. 73–77.

УДК 512.562

Кадубовський О.А., Хабарова К.В., Сапсай Ю.В

[1] *кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри геометрії та МВМ, ДВНЗ «ДДПУ»*

[2] *студентка 4 курсу фізико-математичного факультету, ДВНЗ «ДДПУ»*

[3] *вихователь ГПД, Нижньомлинська ЗОШ І-ІІІ ступенів*

e-mail: kadubovs@ukr.net

ДВОКОЛЬОРОВІ ХОРДОВІ n-ДІАГРАМИ МІНІМАЛЬНОГО РОДУ З $k = 9$ ЦИКЛАМИ ПЕВНОГО КОЛЬОРУ

В роботі розглядається клас планарних двокольорових хордових діаграм з n хордами, що мають точно $k \leqslant n$ циклів певного кольору. Для $k = 9$ і натуральних $n \geqslant 9$ встановлено формули підрахунку числа нееквівалентних таких діаграм відносно дії циклічної групи.

Ключові слова: *двокольорова хордова діаграма мінімального роду, цикл, циклічна група.*

Вступ

Конструкції, схожі до кола з відміченими точками, зокрема хордові діаграми, ефективно використовують в багатьох галузях науки, зокрема математиці, фізиці, біології.

Нагадаємо, що хордовою діаграмою порядку n або, коротко, n-діаграмою називають конфігурацію на площині, що складається з кола, $2n$ точок на ньому (які є вершинами правильного $2n$-кутника) та n хорд, що сполучають вказані точки. Хордові діаграми називають ізоморфними, якщо одну можна одержати з іншої в результаті повороту. Діаграми називають еквівалентними, якщо їх можна сумістити за допомогою повороту, дзеркального відбиття, або ж їх композиції.

Питаннями переліку певних класів хордових діаграм займалась ціла низка відомих математиків, зокрема автори робіт [1–6]. Задачі про підрахунок числа неізоморфних та нееквівалентних n-діаграм були повністю розв'язані в роботах [4], [5]. Формули для підрахунку числа неізоморфних планарних (роду 0), тороїдальних (роду 1) n-діаграм та $2m$-діаграм максимального роду m встановлено в [4].

Підрахунок числа неізоморфних, зокрема двокольорових, n-діаграм *фіксованого роду* є досить складною і в загальному випадку до сьогодні *не розв'язаною задачею.*

Добре відомо (напр. [11], [12]), що двокольорові хордові O- і N-діаграми знаходять своє застосування в топології, зокрема при топологічній класифікації функцій певного класу на замкнених орієнтовних та відповідно не орієнтовних поверхнях фіксованого роду.

Формули підрахунку числа неізоморфних та нееквівалентних двокольорових O- і N-діаграм відповідно встановлено в роботі [9]. В [10] встановлено формули для підрахунку числа неізоморфних та нееквівалентних O-діаграм, які мають один чорний (або ж білий) цикл. Задача про підрахунок числа неізоморфних O-діаграм максимального роду (з одним чорним та одним білим циклом) повністю розв'язана в [8].

Задачі про підрахунок числа неізоморфних та нееквівалентних планарних O-діаграм (мінімального роду 0) з n хордами повністю розв'язані в роботі [6]. Проте, до сьогодні залишається нерозв'язаною задача про підрахунок числа неізоморфних двокольорових O-діаграм роду 0 з фіксованим числом $1 \leqslant k \leqslant n$ циклів певного кольору.

Перші результати, повязані з підрахунком числа неізоморфних O-діаграм мінмального роду (з n хордами) для випадків натуральних $1 \leqslant k \leqslant 8$ і $n \geqslant k$ одержано в роботах [11, 12, 13].

В даній роботі для випадку $k = 9$ і натуральних $n \geqslant 9$ встановлено формули підрахунку числа неізоморфних таких діаграм.

Крім того, більш пильні спостереження за величинами $p(n;k)$ (для натуральних $k \leqslant 9$ і $n \geqslant k$), дозволили виявити закономірність та висунути гіпотезу на випадок довільних натуральних $n \geqslant k \geqslant 2$.

Основні поняття та попередні відомості

Означення 1. *Коло з $2n$ точками на ньому, що є вершинами правильного $2n$ кутника, дуги якого почергово розфарбовані у два кольори (чорний і білий) та фіксованою нумерацією вершин за годинниковою стрілкою, будемо називати двокольоровим $2n$-шаблоном – рис. 1 a).*

2-кольоровою *хордовою n-діаграмою будемо називати n-діаграму, побудовану на основі двокольорового $2n$-шаблону.*

Означення 2. *2-кольорову n-діаграму, яка не містить (містить) хорди, що сполучають вершини з номерами однакової парності, називають O-діаграмою (N-діаграмою) – рис. 1 b), c).*

Означення 3. *O-діаграму з n хордами, яка не має хорд, що перетинаються, будемо називати діаграмою мінімального роду (роду 0) або ж планарною O-діаграмою – рис. 1 d).*

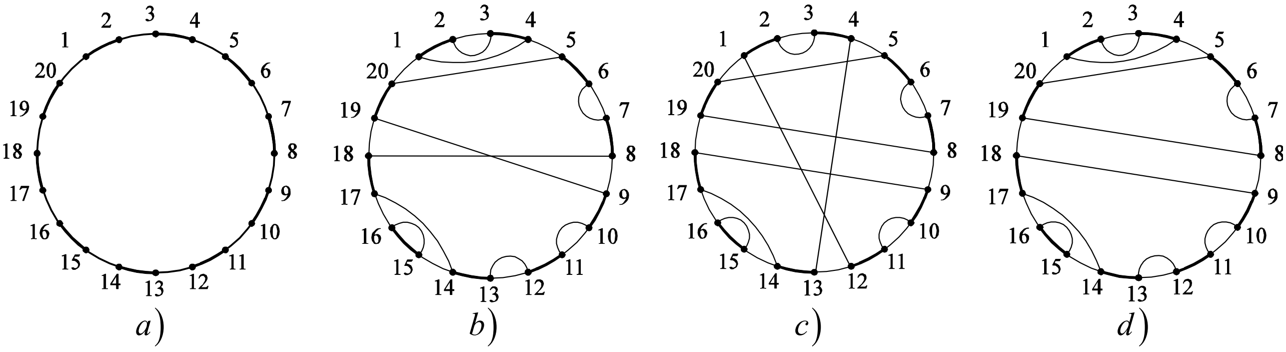

Рис. 1:
a) двокольоровий 20-шаблон;
b) N-діаграма (з 10 хордами), яка має 7 білих та 3 чорних циклів;
c) O-діаграма (з 10 хордами), яка має 6 білих та 3 чорних циклів;
d) планарна O-діаграма (з 10 хордами), яка має 7 білих та 4 чорних циклів

Означення 4. *«Чорним» («білим») циклом 2-кольорової діаграми називатимемо послідовність хорд та чорних (білих) дуг, які утворюють гомеоморфний образ (орієнтованого) кола — рис. 1 $b) - d)$.*

Означення 5. *Множину планарних O-діаграм з n хордами, які мають точно k ($1 \leqslant k \leqslant n$) білих ($n-k+1$ чорних) циклів позначатимемо $\Im_{k,n}$.*

Як з'ясувалось (див. напр. [12]), число діаграм з класу $\Im_{k,n}$ дорівнює числу Нараяна

$$|\Im_{k,n}| = N(n;k) = \frac{1}{n} C_n^k \cdot C_n^{k-1}.$$

Більше того, в [11] показано, що число неізоморфних діаграм з класу $\Im_{k,n}$ співпадає з числом нееквівалентних (відносно дії циклічної групи порядку n) комбінаторних об'єктів з класу $NC_n(k)$, добре відомих як «non-crossing partition of $[n]$ with k blocks» [6]. Зауважимо також, що з огляду на природну бієкцію між елементами множин $\Im_{k,n}$ та $NC_n(k)$, діаграму з класу $\Im_{k,n}$ та відповідне їй розбиття взагалі доцільно ототожнювати.

Основна частина

Теорема 1. *Для довільного натурального $n \geqslant 9$ число неізоморфних діаграм з класу $\Im_{9,n}$ можна обчислити за допомогою співвідношень*

$$P_{9,n}^* = \frac{1}{n}\left(\frac{1}{n} C_n^9 \cdot C_n^8 + \sum_{j|(n;9),\ j\neq 1} \phi(j) \cdot \frac{n-9+j}{n} \cdot C_{\frac{n}{j}}^{\frac{9}{j}} \cdot C_{\frac{n}{j}}^{\frac{9}{j}-1} + \right.$$

$$\left. + \sum_{j|(n;8),\ j\neq 1} \phi(j) \cdot \frac{8+j}{n} \cdot C_{\frac{n}{j}}^{\frac{8}{j}+1} \cdot C_{\frac{n}{j}}^{\frac{8}{j}}\right), \qquad (1)$$

де $(a;b)$ *– найбільший спільний дільник натуральних* a *і* b *;* $\phi(q)$ *– функція Ейлера; а підсумовування у другому і третьому доданках ведеться за всіма дільниками (за винятком 1-ці) чисел* $(n;9)$ *і* $(n;8)$ *відповідно.*

Доведення. Всі типи діаграм з класу $\Im_{9,n}$, які самосуміщаються при повороті (в напрямку за годинниковою стрілкою) на певний кут $\omega_{i,n} = \frac{2\pi}{2n} \cdot 2i$, $i = 1, \ldots, n-1$ наведено на рис. 2, 3.

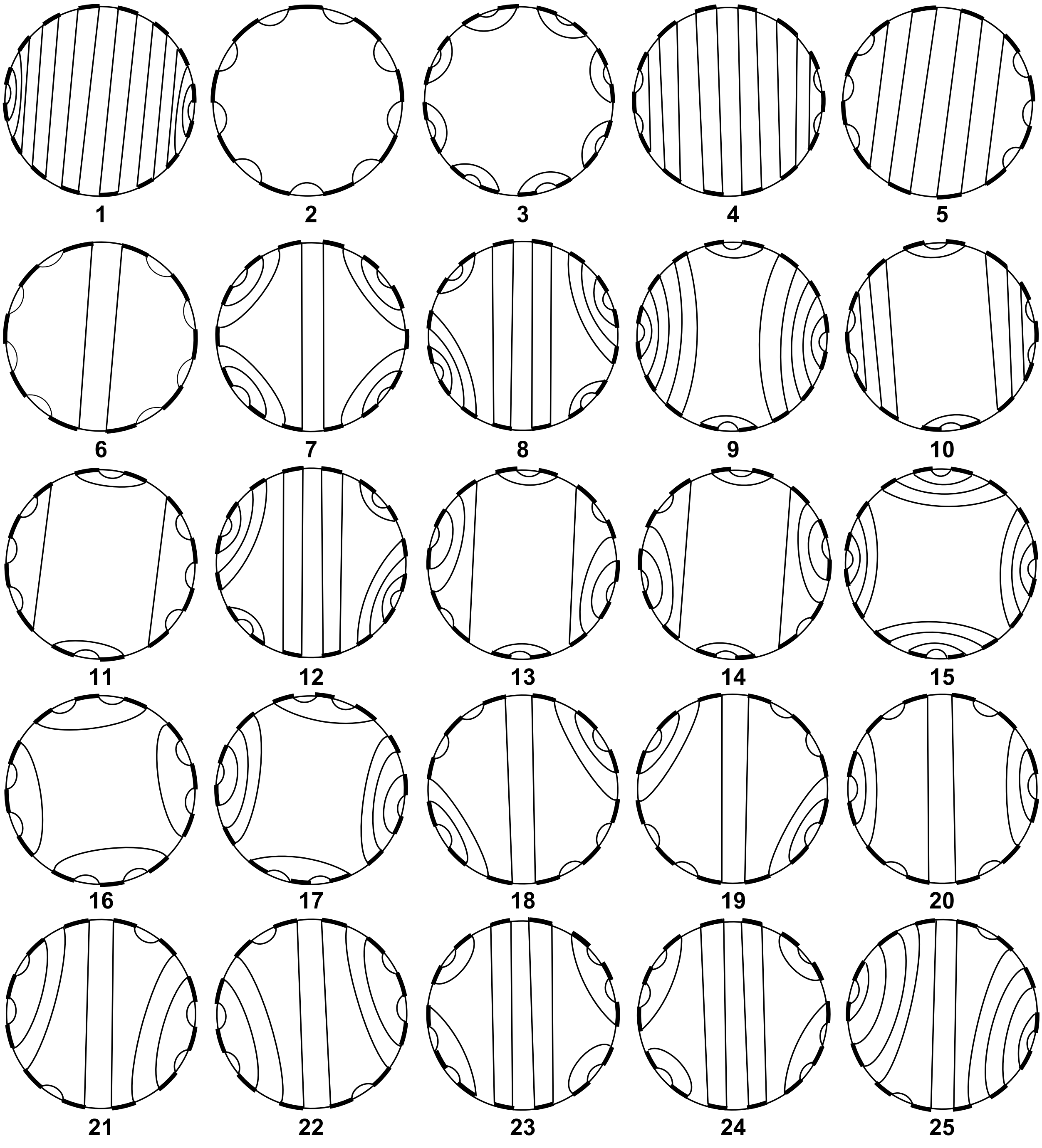

Рис. 2: 25 з 39 можливих типів діаграм з класу $\Im_{9,n}$, які самосуміщаються при повороті на певний кут

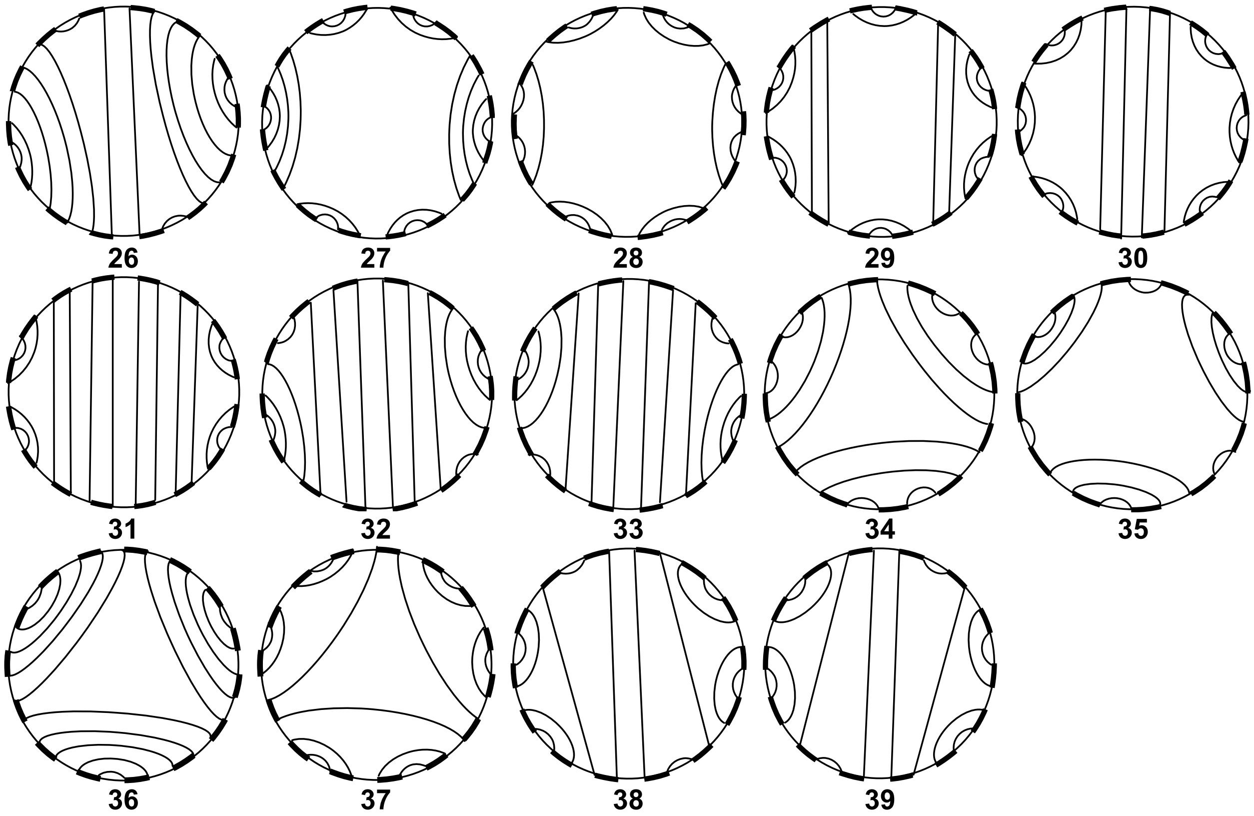

Рис. 3: 14 з 39 можливих типів діаграм з класу $\Im_{9,n}$, які самосуміщаються при повороті на певний кут

Позначимо через $A_j(n)$ число діаграм j-го типу, а через $A^*_{j,n}$ — число неізоморфних діаграм j-го типу ($j = 1, ..., 39$). Тоді

$$P^*_{9,n} = \frac{1}{n}\Big(\frac{1}{n}C^9_n \cdot C^8_n - \sum_{j=1}^{39} A_i(n)\Big) + \sum_{j=1}^{39} A^*_{j,n} \qquad (2)$$

З іншого боку, якщо позначити

$$p(n;9) = n \cdot \sum_{j=1}^{39} A^*_{j,n} - \sum_{j=1}^{39} A_i(n), \qquad (3)$$

то (2) можна подати у вигляді

$$P^*_{9,n} = \frac{1}{n}\Big(\frac{1}{n}C^9_n \cdot C^8_n + p(n;9)\Big). \qquad (4)$$

Число неізоморфних діаграм для кожного з 39 зазначених типів обчислимо за лемою Бернсайда.

В подальшому через $a_j(n,i)$ будемо позначати число діаграм j-го типу, які самосуміщаються при повороті на кут $\omega_{i,n} = \frac{2\pi \cdot i}{n}$, $j = 1, ..., 39$, $i = 1, \ldots, n-1$.

1) Діаграми 1-го типу самосуміщаються при повороті на певний кут $\omega_{i,n}$ лише за умов, коли n ділиться на 2, а поворот здійснюється на кут, кратний куту $\omega = \pi$ (при $i = \frac{n}{2}$). Оскільки

$$a_1(n,2) = \begin{cases} 0, & n \neq 2k \\ 8C^8_{\frac{n}{2}}, & n = 2k, \end{cases} \text{ то } A^*_{1,n} = \begin{cases} \frac{1}{n}A_1(n), & n \neq 2k \\ \frac{1}{n}\left(A_1(n) + 8C^8_{\frac{n}{2}}\right), & n = 2k \end{cases} \quad (5)$$

2) Діаграми 2-го типу самосуміщаються при повороті на певний кут $\omega_{i,n}$ лише за умов, коли n ділиться на 3 або на 9, а поворот здійснюється на кут, кратний куту $\omega = \frac{2\pi}{3}$ або куту $\omega = \frac{2\pi}{9}$. Оскільки

$$a_2(n,3) = \begin{cases} 0, & n \neq 3k \\ C^3_{\frac{n}{3}}, & n = 3k, \end{cases} \qquad a_2(n,9) = \begin{cases} 0, & n \neq 9k \\ C^1_{\frac{n}{9}}, & n = 9k, \end{cases} \quad \text{то}$$

$$A^*_{2,n} = \begin{cases} \frac{1}{n}A_2(n), & n \neq 3k \\ \frac{1}{n}\left(A_2(n) + \phi(3)C^3_{\frac{n}{3}}\right), & n = 3k \\ \frac{1}{n}\left(A_2(n) + \phi(3)C^3_{\frac{n}{3}} + \phi(9)C^1_{\frac{n}{9}}\right), & n = 9k \end{cases} \quad (6)$$

3) Діаграми 3-го типу самосуміщаються при повороті на певний кут $\omega_{i,n}$ лише за умов, коли n ділиться на 2, на 4 або на 8, а поворот здійснюється на кут, кратний куту $\omega = \pi$ (при $i = \frac{n}{2}$), куту $\omega = \frac{\pi}{2}$ (при $i = \frac{n}{4}$), куту $\omega = \frac{\pi}{4}$ (при $i = \frac{n}{8}$). Оскільки

$$a_3(n,2) = \begin{cases} 0, & n \neq 2k \\ 2C^8_{\frac{n}{2}}, & n = 2k, \end{cases} \qquad a_3(n,4) = \begin{cases} 0, & n \neq 4k \\ 2C^4_{\frac{n}{4}}, & n = 4k, \end{cases}$$

$$a_3(n,8) = \begin{cases} 0, & n \neq 8k \\ 2C^2_{\frac{n}{8}}, & n = 8k, \end{cases} \quad \text{то}$$

$$A^*_{3,n} = \begin{cases} \frac{1}{n}A_3(n), & n \neq 2k \\ \frac{1}{n}\left(A_3(n) + 2C^8_{\frac{n}{2}}\right), & n = 2k \\ \frac{1}{n}\left(A_3(n) + 2C^8_{\frac{n}{2}} + \phi(4)2C^4_{\frac{n}{4}}\right), & n = 4k \\ \frac{1}{n}\left(A_3(n) + 2C^8_{\frac{n}{2}} + \phi(4)2C^4_{\frac{n}{4}} + \phi(8)2C^2_{\frac{n}{8}}\right), & n = 8k \end{cases} \quad (7)$$

4) Діаграми 4-го типу самосуміщаються при повороті на певний кут $\omega_{i,n}$ лише за умов, коли n ділиться на 2, а поворот здійснюється на кут, кратний куту $\omega = \pi$ (при $i = \frac{n}{2}$). Оскільки

$$a_4(n,2) = \begin{cases} 0, & n \neq 2k \\ 7C^7_{\frac{n}{2}}, & n = 2k, \end{cases} \text{ то } A^*_{4,n} = \begin{cases} \frac{1}{n}A_4(n), & n \neq 2k \\ \frac{1}{n}\left(A_4(n) + 7C^7_{\frac{n}{2}}\right), & n = 2k \end{cases} \quad (8)$$

5) Діаграми 5-го типу самосуміщаються при повороті на певний кут $\omega_{i,n}$ лише за умов, коли n ділиться на 2, а поворот здійснюється на кут, кратний куту $\omega = \pi$ (при $i = \frac{n}{2}$). Оскільки

$$a_5(n,2) = \begin{cases} 0, & n \neq 2k \\ 6C^6_{\frac{n}{2}}, & n = 2k, \end{cases} \text{ то } A^*_{5,n} = \begin{cases} \frac{1}{n}A_5(n), & n \neq 2k \\ \frac{1}{n}\left(A_5(n) + 6C^6_{\frac{n}{2}}\right), & n = 2k \end{cases} \tag{9}$$

6) Діаграми 6-го типу самосуміщаються при повороті на певний кут $\omega_{i,n}$ лише за умов, коли n ділиться на 2, а поворот здійснюється на кут, кратний куту $\omega = \pi$. Оскільки

$$a_6(n,2) = \begin{cases} 0, & n \neq 2k \\ 5C^5_{\frac{n}{2}}, & n = 2k, \end{cases} \text{ то } A^*_{6,n} = \begin{cases} \frac{1}{n}A_6(n), & n \neq 2k \\ \frac{1}{n}\left(A_6(n) + 5C^5_{\frac{n}{2}}\right), & n = 2k \end{cases} \tag{10}$$

7) Діаграми 7-го типу самосуміщаються при повороті на певний кут $\omega_{i,n}$ лише за умов, коли n ділиться на 2, а поворот здійснюється на кут, кратний куту $\omega = \pi$. Оскільки

$$a_7(n,2) = \begin{cases} 0, & n \neq 2k \\ 7C^7_{\frac{n}{2}}, & n = 2k, \end{cases} \text{ то } A^*_{7,n} = \begin{cases} \frac{1}{n}A_7(n), & n \neq 2k \\ \frac{1}{n}\left(A_7(n) + 7C^7_{\frac{n}{2}}\right), & n = 2k \end{cases} \tag{11}$$

8) Діаграми 8-го типу самосуміщаються при повороті на певний кут $\omega_{i,n}$ лише за умов, коли n ділиться на 2, а поворот здійснюється на кут, кратний куту $\omega = \pi$. Оскільки

$$a_8(n,2) = \begin{cases} 0, & n \neq 2k \\ 8C^8_{\frac{n}{2}}, & n = 2k, \end{cases} \text{ то } A^*_{8,n} = \begin{cases} \frac{1}{n}A_8(n), & n \neq 2k \\ \frac{1}{n}\left(A_8(n) + 8C^8_{\frac{n}{2}}\right), & n = 2k \end{cases} \tag{12}$$

9) Діаграми 9-го типу самосуміщаються при повороті на певний кут $\omega_{i,n}$ лише за умов, коли n ділиться на 2, а поворот здійснюється на кут, кратний куту $\omega = \pi$. Оскільки

$$a_9(n,2) = \begin{cases} 0, & n \neq 2k \\ 8C^8_{\frac{n}{2}}, & n = 2k, \end{cases} \text{ то } A^*_{9,n} = \begin{cases} \frac{1}{n}A_9(n), & n \neq 2k \\ \frac{1}{n}\left(A_9(n) + 8C^8_{\frac{n}{2}}\right), & n = 2k \end{cases} \tag{13}$$

10) Діаграми 10-го типу самосуміщаються при повороті на певний кут $\omega_{i,n}$ лише за умов, коли n ділиться на 2, а поворот здійснюється на кут, кратний куту $\omega = \pi$. Оскільки

$$a_{10}(n,2) = \begin{cases} 0, & n \neq 2k \\ 7C^7_{\frac{n}{2}}, & n = 2k, \end{cases} \text{ то } A^*_{10,n} = \begin{cases} \frac{1}{n}A_{10}(n), & n \neq 2k \\ \frac{1}{n}\left(A_{10}(n) + 7C^7_{\frac{n}{2}}\right), & n = 2k \end{cases} \tag{14}$$

11) Діаграми 11-го типу самосуміщаються при повороті на певний кут $\omega_{i,n}$ лише за умов, коли n ділиться на 2, а поворот здійснюється на кут, кратний куту $\omega = \pi$. Оскільки

$$a_{11}(n,2) = \begin{cases} 0, & n \neq 2k \\ 6C^6_{\frac{n}{2}}, & n = 2k, \end{cases} \text{ то } A^*_{11,n} = \begin{cases} \frac{1}{n}A_{11}(n), & n \neq 2k \\ \frac{1}{n}\left(A_{11}(n) + 6C^6_{\frac{n}{2}}\right), & n = 2k \end{cases} \quad (15)$$

12) Діаграми 12-го типу самосуміщаються при повороті на певний кут $\omega_{i,n}$ лише за умов, коли n ділиться на 2, а поворот здійснюється на кут, кратний куту $\omega = \pi$. Оскільки

$$a_{12}(n,2) = \begin{cases} 0, & n \neq 2k \\ 8C^8_{\frac{n}{2}}, & n = 2k, \end{cases} \text{ то } A^*_{12,n} = \begin{cases} \frac{1}{n}A_{12}(n), & n \neq 2k \\ \frac{1}{n}\left(A_{12}(n) + 8C^8_{\frac{n}{2}}\right), & n = 2k \end{cases} \quad (16)$$

13) Діаграми 13-го типу самосуміщаються при повороті на певний кут $\omega_{i,n}$ лише за умов, коли n ділиться на 2, а поворот здійснюється на кут, кратний куту $\omega = \pi$. Оскільки

$$a_{13}(n,2) = \begin{cases} 0, & n \neq 2k \\ 7C^7_{\frac{n}{2}}, & n = 2k, \end{cases} \text{ то } A^*_{13,n} = \begin{cases} \frac{1}{n}A_{13}(n), & n \neq 2k \\ \frac{1}{n}\left(A_{13}(n) + 7C^7_{\frac{n}{2}}\right), & n = 2k \end{cases} \quad (17)$$

14) Діаграми 14-го типу самосуміщаються при повороті на певний кут $\omega_{i,n}$ лише за умов, коли n ділиться на 2, а поворот здійснюється на кут, кратний куту $\omega = \pi$. Оскільки

$$a_{14}(n,2) = \begin{cases} 0, & n \neq 2k \\ 7C^7_{\frac{n}{2}}, & n = 2k, \end{cases} \text{ то } A^*_{14,n} = \begin{cases} \frac{1}{n}A_{14}(n), & n \neq 2k \\ \frac{1}{n}\left(A_{14}(n) + 7C^7_{\frac{n}{2}}\right), & n = 2k \end{cases} \quad (18)$$

15) Діаграми 15-го типу самосуміщаються при повороті на певний кут $\omega_{i,n}$ лише за умов, коли n ділиться на 2 або на 4, а поворот здійснюється на кут, кратний куту $\omega = \pi$ або кут, кратний куту $\omega = \frac{\pi}{2}$. Оскільки

$$a_{15}(n,2) = \begin{cases} 0, & n \neq 2k \\ 4C^8_{\frac{n}{2}}, & n = 2k, \end{cases} \qquad a_{15}(n,4) = \begin{cases} 0, & n \neq 4k \\ 4C^4_{\frac{n}{4}}, & n = 4k, \end{cases} \quad \text{то}$$

$$A^*_{15,n} = \begin{cases} \frac{1}{n}A_{15}(n), & n \neq 2k \\ \frac{1}{n}\left(A_{15}(n) + 4C^8_{\frac{n}{2}}\right), & n = 2k \\ \frac{1}{n}\left(A_{15}(n) + 4C^8_{\frac{n}{2}} + \phi(4)4C^4_{\frac{n}{4}}\right), & n = 4k \end{cases} \quad (19)$$

16) Діаграми 16-го типу самосуміщаються при повороті на певний кут $\omega_{i,n}$ лише за умов, коли n ділиться на 2 або на 4, а поворот здійснюється на кут, кратний куту $\omega = \pi$ або кут, кратний куту $\omega = \frac{\pi}{2}$. Оскільки

$$a_{16}(n,2) = \begin{cases} 0, & n \neq 2k \\ 3C^6_{\frac{n}{2}}, & n = 2k, \end{cases} \quad a_{16}(n,4) = \begin{cases} 0, & n \neq 4k \\ 3C^3_{\frac{n}{4}}, & n = 4k, \end{cases} \quad \text{то}$$

$$A^*_{16,n} = \begin{cases} \frac{1}{n}A_{16}(n), & n \neq 2k \\ \frac{1}{n}\left(A_{16}(n) + 3C^6_{\frac{n}{2}}\right), & n = 2k \\ \frac{1}{n}\left(A_{16}(n) + 3C^6_{\frac{n}{2}} + \phi(4)3C^3_{\frac{n}{4}}\right), & n = 4k \end{cases} \tag{20}$$

17) Діаграми 17-го типу самосуміщаються при повороті на певний кут $\omega_{i,n}$ лише за умов, коли n ділиться на 2, а поворот здійснюється на кут, кратний куту $\omega = \pi$. Оскільки

$$a_{17}(n,2) = \begin{cases} 0, & n \neq 2k \\ 7C^7_{\frac{n}{2}}, & n = 2k, \end{cases} \text{ то } A^*_{17,n} = \begin{cases} \frac{1}{n}A_{17}(n), & n \neq 2k \\ \frac{1}{n}\left(A_{17}(n) + 7C^7_{\frac{n}{2}}\right), & n = 2k \end{cases} \tag{21}$$

18) Діаграми 18-го типу самосуміщаються при повороті на певний кут $\omega_{i,n}$ лише за умов, коли n ділиться на 2, а поворот здійснюється на кут, кратний куту $\omega = \pi$. Оскільки

$$a_{18}(n,2) = \begin{cases} 0, & n \neq 2k \\ 6C^6_{\frac{n}{2}}, & n = 2k, \end{cases} \text{ то } A^*_{18,n} = \begin{cases} \frac{1}{n}A_{18}(n), & n \neq 2k \\ \frac{1}{n}\left(A_{18}(n) + 6C^6_{\frac{n}{2}}\right), & n = 2k \end{cases} \tag{22}$$

19) Діаграми 19-го типу самосуміщаються при повороті на певний кут $\omega_{i,n}$ лише за умов, коли n ділиться на 2, а поворот здійснюється на кут, кратний куту $\omega = \pi$. Оскільки

$$a_{19}(n,2) = \begin{cases} 0, & n \neq 2k \\ 6C^6_{\frac{n}{2}}, & n = 2k, \end{cases} \text{ то } A^*_{19,n} = \begin{cases} \frac{1}{n}A_{19}(n), & n \neq 2k \\ \frac{1}{n}\left(A_{19}(n) + 6C^6_{\frac{n}{2}}\right), & n = 2k \end{cases} \tag{23}$$

20) Діаграми 20-го типу самосуміщаються при повороті на певний кут $\omega_{i,n}$ лише за умов, коли n ділиться на 2, а поворот здійснюється на кут, кратний куту $\omega = \pi$. Оскільки

$$a_{20}(n,2) = \begin{cases} 0, & n \neq 2k \\ 6C^6_{\frac{n}{2}}, & n = 2k, \end{cases} \text{ то } A^*_{20,n} = \begin{cases} \frac{1}{n}A_{20}(n), & n \neq 2k \\ \frac{1}{n}\left(A_{20}(n) + 6C^6_{\frac{n}{2}}\right), & n = 2k \end{cases} \tag{24}$$

21) Діаграми 21-го типу самосуміщаються при повороті на певний кут $\omega_{i,n}$ лише за умов, коли n ділиться на 2, а поворот здійснюється на кут, кратний куту $\omega = \pi$. Оскільки

$$a_{21}(n,2) = \begin{cases} 0, & n \neq 2k \\ 6C^6_{\frac{n}{2}}, & n = 2k, \end{cases} \text{ то } A^*_{21,n} = \begin{cases} \frac{1}{n}A_{21}(n), & n \neq 2k \\ \frac{1}{n}\left(A_{21}(n) + 6C^6_{\frac{n}{2}}\right), & n = 2k \end{cases} \tag{25}$$

22) Діаграми 22-го типу самосуміщаються при повороті на певний кут $\omega_{i,n}$ лише за умов, коли n ділиться на 2, а поворот здійснюється на кут, кратний куту $\omega = \pi$. Оскільки

$$a_{22}(n,2) = \begin{cases} 0, & n \neq 2k \\ 6C^{6}_{\frac{n}{2}}, & n = 2k, \end{cases} \text{ то } A^{*}_{22,n} = \begin{cases} \frac{1}{n}A_{22}(n), & n \neq 2k \\ \frac{1}{n}\left(A_{22}(n) + 6C^{6}_{\frac{n}{2}}\right), & n = 2k \end{cases} \tag{26}$$

23) Діаграми 23-го типу самосуміщаються при повороті на певний кут $\omega_{i,n}$ лише за умов, коли n ділиться на 2, а поворот здійснюється на кут, кратний куту $\omega = \pi$. Оскільки

$$a_{23}(n,2) = \begin{cases} 0, & n \neq 2k \\ 7C^{7}_{\frac{n}{2}}, & n = 2k, \end{cases} \text{ то } A^{*}_{23,n} = \begin{cases} \frac{1}{n}A_{23}(n), & n \neq 2k \\ \frac{1}{n}\left(A_{23}(n) + 7C^{7}_{\frac{n}{2}}\right), & n = 2k \end{cases} \tag{27}$$

24) Діаграми 24-го типу самосуміщаються при повороті на певний кут $\omega_{i,n}$ лише за умов, коли n ділиться на 2, а поворот здійснюється на кут, кратний куту $\omega = \pi$. Оскільки

$$a_{24}(n,2) = \begin{cases} 0, & n \neq 2k \\ 7C^{7}_{\frac{n}{2}}, & n = 2k, \end{cases} \text{ то } A^{*}_{24,n} = \begin{cases} \frac{1}{n}A_{24}(n), & n \neq 2k \\ \frac{1}{n}\left(A_{24}(n) + 7C^{7}_{\frac{n}{2}}\right), & n = 2k \end{cases} \tag{28}$$

25) Діаграми 25-го типу самосуміщаються при повороті на певний кут $\omega_{i,n}$ лише за умов, коли n ділиться на 2, а поворот здійснюється на кут, кратний куту $\omega = \pi$. Оскільки

$$a_{25}(n,2) = \begin{cases} 0, & n \neq 2k \\ 7C^{7}_{\frac{n}{2}}, & n = 2k, \end{cases} \text{ то } A^{*}_{25,n} = \begin{cases} \frac{1}{n}A_{25}(n), & n \neq 2k \\ \frac{1}{n}\left(A_{25}(n) + 7C^{7}_{\frac{n}{2}}\right), & n = 2k \end{cases} \tag{29}$$

26) Діаграми 26-го типу самосуміщаються при повороті на певний кут $\omega_{i,n}$ лише за умов, коли n ділиться на 2, а поворот здійснюється на кут, кратний куту $\omega = \pi$. Оскільки

$$a_{26}(n,2) = \begin{cases} 0, & n \neq 2k \\ 7C^{7}_{\frac{n}{2}}, & n = 2k, \end{cases} \text{ то } A^{*}_{26,n} = \begin{cases} \frac{1}{n}A_{26}(n), & n \neq 2k \\ \frac{1}{n}\left(A_{26}(n) + 7C^{7}_{\frac{n}{2}}\right), & n = 2k \end{cases} \tag{30}$$

27) Діаграми 27-го типу самосуміщаються при повороті на певний кут $\omega_{i,n}$ лише за умов, коли n ділиться на 2, а поворот здійснюється на кут, кратний куту $\omega = \pi$. Оскільки

$$a_{27}(n,2) = \begin{cases} 0, & n \neq 2k \\ 8C^{8}_{\frac{n}{2}}, & n = 2k, \end{cases} \text{ то } A^{*}_{27,n} = \begin{cases} \frac{1}{n}A_{27}(n), & n \neq 2k \\ \frac{1}{n}\left(A_{27}(n) + 8C^{8}_{\frac{n}{2}}\right), & n = 2k \end{cases} \tag{31}$$

28) Діаграми 28-го типу самосуміщаються при повороті на певний кут $\omega_{i,n}$ лише за умов, коли n ділиться на 2, а поворот здійснюється на кут, кратний куту $\omega=\pi$. Оскільки

$$a_{28}(n,2)=\begin{cases}0, & n\neq 2k\\ 7C^{7}_{\frac{n}{2}}, & n=2k,\end{cases} \text{ то } A^{*}_{28,n}=\begin{cases}\frac{1}{n}A_{28}(n), & n\neq 2k\\ \frac{1}{n}\left(A_{28}(n)+7C^{7}_{\frac{n}{2}}\right), & n=2k\end{cases} \quad (32)$$

29) Діаграми 29-го типу самосуміщаються при повороті на певний кут $\omega_{i,n}$ лише за умов, коли n ділиться на 2, а поворот здійснюється на кут, кратний куту $\omega=\pi$. Оскільки

$$a_{29}(n,2)=\begin{cases}0, & n\neq 2k\\ 8C^{8}_{\frac{n}{2}}, & n=2k,\end{cases} \text{ то } A^{*}_{29,n}=\begin{cases}\frac{1}{n}A_{29}(n), & n\neq 2k\\ \frac{1}{n}\left(A_{29}(n)+8C^{8}_{\frac{n}{2}}\right), & n=2k\end{cases} \quad (33)$$

30) Діаграми 30-го типу самосуміщаються при повороті на певний кут $\omega_{i,n}$ лише за умов, коли n ділиться на 2, а поворот здійснюється на кут, кратний куту $\omega=\pi$. Оскільки

$$a_{30}(n,2)=\begin{cases}0, & n\neq 2k\\ 8C^{8}_{\frac{n}{2}}, & n=2k,\end{cases} \text{ то } A^{*}_{30,n}=\begin{cases}\frac{1}{n}A_{30}(n), & n\neq 2k\\ \frac{1}{n}\left(A_{30}(n)+8C^{8}_{\frac{n}{2}}\right), & n=2k\end{cases} \quad (34)$$

31) Діаграми 31-го типу самосуміщаються при повороті на певний кут $\omega_{i,n}$ лише за умов, коли n ділиться на 2, а поворот здійснюється на кут, кратний куту $\omega=\pi$. Оскільки

$$a_{31}(n,2)=\begin{cases}0, & n\neq 2k\\ 8C^{8}_{\frac{n}{2}}, & n=2k,\end{cases} \text{ то } A^{*}_{31,n}=\begin{cases}\frac{1}{n}A_{31}(n), & n\neq 2k\\ \frac{1}{n}\left(A_{31}(n)+8C^{8}_{\frac{n}{2}}\right), & n=2k\end{cases} \quad (35)$$

32) Діаграми 32-го типу самосуміщаються при повороті на певний кут $\omega_{i,n}$ лише за умов, коли n ділиться на 2, а поворот здійснюється на кут, кратний куту $\omega=\pi$. Оскільки

$$a_{32}(n,2)=\begin{cases}0, & n\neq 2k\\ 7C^{7}_{\frac{n}{2}}, & n=2k,\end{cases} \text{ то } A^{*}_{32,n}=\begin{cases}\frac{1}{n}A_{32}(n), & n\neq 2k\\ \frac{1}{n}\left(A_{32}(n)+7C^{7}_{\frac{n}{2}}\right), & n=2k\end{cases} \quad (36)$$

33) Діаграми 33-го типу самосуміщаються при повороті на певний кут $\omega_{i,n}$ лише за умов, коли n ділиться на 2, а поворот здійснюється на кут, кратний куту $\omega=\pi$. Оскільки

$$a_{33}(n,2)=\begin{cases}0, & n\neq 2k\\ 7C^{7}_{\frac{n}{2}}, & n=2k,\end{cases} \text{ то } A^{*}_{33,n}=\begin{cases}\frac{1}{n}A_{33}(n), & n\neq 2k\\ \frac{1}{n}\left(A_{33}(n)+7C^{7}_{\frac{n}{2}}\right), & n=2k\end{cases} \quad (37)$$

34) Діаграми 34-го типу самосуміщаються при повороті на певний кут $\omega_{i,n}$ лише за умов, коли n ділиться на 3, а поворот здійснюється на кут, кратний куту $\omega = \frac{2\pi}{3}$ (при $i = \frac{n}{3}$). Оскільки

$$a_{34}(n,3) = \begin{cases} 0, & n \neq 3k \\ 4C^4_{\frac{n}{3}}, & n = 3k, \end{cases} \text{ то } A^*_{34,n} = \begin{cases} \frac{1}{n}A_{34}(n), & n \neq 3k \\ \frac{1}{n}\left(A_{34}(n) + \phi(3)4C^4_{\frac{n}{3}}\right), & n = 3k \end{cases} \tag{38}$$

35) Діаграми 35-го типу самосуміщаються при повороті на певний кут $\omega_{i,n}$ лише за умов, коли n ділиться на 3, а поворот здійснюється на кут, кратний куту $\omega = \frac{2\pi}{3}$. Оскільки

$$a_{35}(n,3) = \begin{cases} 0, & n \neq 3k \\ 4C^4_{\frac{n}{3}}, & n = 3k, \end{cases} \text{ то } A^*_{35,n} = \begin{cases} \frac{1}{n}A_{35}(n), & n \neq 3k \\ \frac{1}{n}\left(A_{35}(n) + \phi(3)4C^4_{\frac{n}{3}}\right), & n = 3k \end{cases} \tag{39}$$

36) Діаграми 36-го типу самосуміщаються при повороті на певний кут $\omega_{i,n}$ лише за умов, коли n ділиться на 3, а поворот здійснюється на кут, кратний куту $\omega = \frac{2\pi}{3}$. Оскільки

$$a_{36}(n,3) = \begin{cases} 0, & n \neq 3k \\ 5C^5_{\frac{n}{3}}, & n = 3k, \end{cases} \text{ то } A^*_{36,n} = \begin{cases} \frac{1}{n}A_{36}(n), & n \neq 3k \\ \frac{1}{n}\left(A_{36}(n) + \phi(3)5C^5_{\frac{n}{3}}\right), & n = 3k \end{cases} \tag{40}$$

37) Діаграми 37-го типу самосуміщаються при повороті на певний кут $\omega_{i,n}$ лише за умов, коли n ділиться на 3, а поворот здійснюється на кут, кратний куту $\omega = \frac{2\pi}{3}$. Оскільки

$$a_{37}(n,3) = \begin{cases} 0, & n \neq 3k \\ 5C^5_{\frac{n}{3}}, & n = 3k, \end{cases} \text{ то } A^*_{37,n} = \begin{cases} \frac{1}{n}A_{37}(n), & n \neq 2k \\ \frac{1}{n}\left(A_{37}(n) + \phi(3)5C^5_{\frac{n}{3}}\right), & n = 3k \end{cases} \tag{41}$$

38) Діаграми 38-го типу самосуміщаються при повороті на певний кут $\omega_{i,n}$ лише за умов, коли n ділиться на 2, а поворот здійснюється на кут, кратний куту $\omega = \pi$ (при $i = \frac{n}{2}$). Оскільки

$$a_{38}(n,2) = \begin{cases} 0, & n \neq 2k \\ 7C^7_{\frac{n}{2}}, & n = 2k, \end{cases} \text{ то } A^*_{38,n} = \begin{cases} \frac{1}{n}A_{38}(n), & n \neq 2k \\ \frac{1}{n}\left(A_{38}(n) + 7C^7_{\frac{n}{2}}\right), & n = 2k \end{cases} \tag{42}$$

39) Діаграми 39-го типу самосуміщаються при повороті на певний кут $\omega_{i,n}$ лише за умов, коли n ділиться на 2, а поворот здійснюється на кут, кратний куту $\omega = \pi$. Оскільки

$$a_{39}(n,2) = \begin{cases} 0, & n \neq 2k \\ 7C^7_{\frac{n}{2}}, & n = 2k, \end{cases} \text{ то } A^*_{39,n} = \begin{cases} \frac{1}{n}A_{39}(n), & n \neq 2k \\ \frac{1}{n}\left(A_{39}(n) + 7C^7_{\frac{n}{2}}\right), & n = 2k \end{cases} \tag{43}$$

З урахуванням співвідношень (5) – (43) маємо справедливість співвідношення (44).

$$p(n;9) =$$

$$= \begin{cases} 0, & n \neq 2k \neq 3p \\ 5C^{5}_{\frac{n}{2}} + 45C^{6}_{\frac{n}{2}} + 105C^{7}_{\frac{n}{2}} + 70C^{8}_{\frac{n}{2}}, & n = 2k \neq 3p \\ \phi(3)(C^{3}_{\frac{n}{3}} + 8C^{4}_{\frac{n}{3}} + 10C^{5}_{\frac{n}{3}}), & n = 3k \neq 2p \\ 5C^{5}_{\frac{n}{2}} + 45C^{6}_{\frac{n}{2}} + 105C^{7}_{\frac{n}{2}} + 70C^{8}_{\frac{n}{2}} + \phi(4)(6C^{4}_{\frac{n}{4}} + 3C^{3}_{\frac{n}{4}}), & n = 4k \neq 3p \\ 5C^{5}_{\frac{n}{2}} + 45C^{6}_{\frac{n}{2}} + 105C^{7}_{\frac{n}{2}} + 70C^{8}_{\frac{n}{2}} + & \\ \qquad + \phi(3)(C^{3}_{\frac{n}{3}} + 8C^{4}_{\frac{n}{3}} + 10C^{5}_{\frac{n}{3}}), & n = 6k \\ 5C^{5}_{\frac{n}{2}} + 45C^{6}_{\frac{n}{2}} + 105C^{7}_{\frac{n}{2}} + 70C^{8}_{\frac{n}{2}} + & \\ \qquad + \phi(4)(6C^{4}_{\frac{n}{4}} + 3C^{3}_{\frac{n}{4}}) + \phi(8)2C^{2}_{\frac{n}{8}}, & n = 8k \neq 3p \\ \phi(3)(C^{3}_{\frac{n}{3}} + 8C^{4}_{\frac{n}{3}} + 10C^{5}_{\frac{n}{3}}) + \phi(9)C^{1}_{\frac{n}{9}}, & n = 9k \neq 2p \\ 5C^{5}_{\frac{n}{2}} + 45C^{6}_{\frac{n}{2}} + 105C^{7}_{\frac{n}{2}} + 70C^{8}_{\frac{n}{2}} + & \\ \qquad + \phi(3)(C^{3}_{\frac{n}{3}} + 8C^{4}_{\frac{n}{3}} + 10C^{5}_{\frac{n}{3}}) + \phi(4)(6C^{4}_{\frac{n}{4}} + 3C^{3}_{\frac{n}{4}}), & n = 12k \\ 5C^{5}_{\frac{n}{2}} + 45C^{6}_{\frac{n}{2}} + 105C^{7}_{\frac{n}{2}} + 70C^{8}_{\frac{n}{2}} + & \\ \qquad + \phi(3)(C^{3}_{\frac{n}{3}} + 8C^{4}_{\frac{n}{3}} + 10C^{5}_{\frac{n}{3}}) + \phi(9)C^{1}_{\frac{n}{9}}, & n = 18k \\ 5C^{5}_{\frac{n}{2}} + 45C^{6}_{\frac{n}{2}} + 105C^{7}_{\frac{n}{2}} + 70C^{8}_{\frac{n}{2}} + & \\ \qquad + \phi(3)C^{3}_{\frac{n}{3}} + \phi(4)(6C^{4}_{\frac{n}{4}} + 3C^{3}_{\frac{n}{4}}) + \phi(8)2C^{2}_{\frac{n}{8}}, & n = 24k \\ 5C^{5}_{\frac{n}{2}} + 45C^{6}_{\frac{n}{2}} + 105C^{7}_{\frac{n}{2}} + 70C^{8}_{\frac{n}{2}} + \phi(4)(6C^{4}_{\frac{n}{4}} + 3C^{3}_{\frac{n}{4}}) + & \\ \qquad + \phi(3)(C^{3}_{\frac{n}{3}} + 8C^{4}_{\frac{n}{3}} + 10C^{5}_{\frac{n}{3}}) + \phi(9)C^{1}_{\frac{n}{9}}, & n = 36k \\ 5C^{5}_{\frac{n}{2}} + 45C^{6}_{\frac{n}{2}} + 105C^{7}_{\frac{n}{2}} + 70C^{8}_{\frac{n}{2}} + \phi(4)(6C^{4}_{\frac{n}{4}} + 3C^{3}_{\frac{n}{4}}) + & \\ \qquad + \phi(3)(C^{3}_{\frac{n}{3}} + 8C^{4}_{\frac{n}{3}} + 10C^{5}_{\frac{n}{3}}) + \phi(8)2C^{2}_{\frac{n}{8}} + \phi(9)C^{1}_{\frac{n}{9}}, & n = 72k \end{cases} \tag{44}$$

За допомогою безпосередньої перевірки не важко встановити справедливість наступних тотожностей

$$\begin{aligned} C^{1}_{\frac{n}{9}} &= \tfrac{n-9+9}{n} \cdot C^{\frac{9}{9}}_{\frac{n}{9}} \cdot C^{\frac{9}{9}-1}_{\frac{n}{9}}, && k = 9, j|(n;9), j = 9 \\ C^{3}_{\frac{n}{3}} + 8C^{4}_{\frac{n}{3}} + 10C^{5}_{\frac{n}{3}} &= \tfrac{n-9+3}{n} \cdot C^{\frac{9}{3}}_{\frac{n}{9}} \cdot C^{\frac{9}{3}-1}_{\frac{n}{9}}, && k = 9, j|(n;9), j = 3 \\ \\ 2C^{2}_{\frac{n}{8}} &= \tfrac{9-1+8}{n} \cdot C^{\frac{9-1}{8}+1}_{\frac{n}{8}} \cdot C^{\frac{9-1}{8}}_{\frac{n}{8}}, && k = 9, j|(n;8), j = 8 \\ 6C^{4}_{\frac{n}{4}} + 3C^{3}_{\frac{n}{4}} &= \tfrac{9-1+4}{n} \cdot C^{\frac{9-1}{4}+1}_{\frac{n}{4}} \cdot C^{\frac{9-1}{4}}_{\frac{n}{4}}, && k = 9, j|(n;8), j = 4 \\ 5C^{5}_{\frac{n}{2}} + 45C^{6}_{\frac{n}{2}} + 105C^{7}_{\frac{n}{2}} + 70C^{8}_{\frac{n}{2}} &= \tfrac{9-1+2}{n} \cdot C^{\frac{9-1}{2}+1}_{\frac{n}{2}} \cdot C^{\frac{9-1}{2}}_{\frac{n}{2}}, && k = 9, j|(n;8), j = 2 \end{aligned} \tag{45}$$

З урахуванням співвідношень (4), (44), (45) має місце формула (1).

З урахуванням результатів, одержаних в роботах [11] – [13] (для випадків $k=2;3;4;5;6;7;8$) та справедливості наступних рівностей

$$\begin{aligned}
C^1_{\frac{n}{8}} &= \tfrac{n-8+8}{n}\cdot C^{\frac{8}{8}}_{\frac{n}{8}}\cdot C^{\frac{8}{8}-1}_{\frac{n}{8}}, && k=8, j|(n;8), j=8\\
C^2_{\frac{n}{4}}+3C^3_{\frac{n}{4}} &= \tfrac{n-8+4}{n}\cdot C^{\frac{8}{4}}_{\frac{n}{8}}\cdot C^{\frac{8}{4}-1}_{\frac{n}{8}}, && k=8, j|(n;8), j=4\\
C^4_{\frac{n}{2}}+15C^5_{\frac{n}{2}}+45C^6_{\frac{n}{2}}+35C^7_{\frac{n}{2}} &= \tfrac{n-8+2}{n}\cdot C^{\frac{8}{2}}_{\frac{n}{8}}\cdot C^{\frac{8}{2}-1}_{\frac{n}{8}}, && k=8, j|(n;8), j=2\\
2C^2_{\frac{n}{7}} &= \tfrac{8-1+7}{n}\cdot C^{\frac{8-1}{7}+1}_{\frac{n}{7}}\cdot C^{\frac{8-1}{7}}_{\frac{n}{7}}, && k=8, j|(n;7), j=7
\end{aligned}\tag{46}$$

$$\begin{aligned}
C^1_{\frac{n}{7}} &= \tfrac{n-7+7}{n}\cdot C^{\frac{7}{7}}_{\frac{n}{7}}\cdot C^{\frac{7}{7}-1}_{\frac{n}{7}}, && k=7, j|(n;7), j=7\\
2C^2_{\frac{n}{6}} &= \tfrac{7-1+6}{n}\cdot C^{\frac{7-1}{6}+1}_{\frac{n}{6}}\cdot C^{\frac{7-1}{6}}_{\frac{n}{6}}, && k=7, j|(n;6), j=6\\
3C^3_{\frac{n}{3}}+6C^4_{\frac{n}{3}} &= \tfrac{7-1+3}{n}\cdot C^{\frac{7-1}{3}+1}_{\frac{n}{6}}\cdot C^{\frac{7-1}{3}}_{\frac{n}{6}}, && k=7, j|(n;6), j=3\\
4C^4_{\frac{n}{2}}+20C^5_{\frac{n}{2}}+20C^6_{\frac{n}{2}} &= \tfrac{7-1+2}{n}\cdot C^{\frac{7-1}{2}+1}_{\frac{n}{6}}\cdot C^{\frac{7-1}{2}}_{\frac{n}{6}}, && k=7, j|(n;6), j=2
\end{aligned}\tag{47}$$

$$\begin{aligned}
C^1_{\frac{n}{6}} &= \tfrac{n-6+6}{n}\cdot C^{\frac{6}{6}}_{\frac{n}{6}}\cdot C^{\frac{6}{6}-1}_{\frac{n}{6}}, && k=6, j|(n;6), j=6\\
C^2_{\frac{n}{3}}+3C^3_{\frac{n}{3}} &= \tfrac{n-6+3}{n}\cdot C^{\frac{6}{3}}_{\frac{n}{6}}\cdot C^{\frac{6}{3}-1}_{\frac{n}{6}}, && k=6, j|(n;6), j=3\\
C^3_{\frac{n}{2}}+8C^4_{\frac{n}{2}}+10C^5_{\frac{n}{2}} &= \tfrac{n-6+2}{n}\cdot C^{\frac{6}{2}}_{\frac{n}{6}}\cdot C^{\frac{6}{2}-1}_{\frac{n}{6}}, && k=6, j|(n;6), j=2\\
2C^2_{\frac{n}{5}} &= \tfrac{6-1+5}{n}\cdot C^{\frac{6-1}{5}+1}_{\frac{n}{5}}\cdot C^{\frac{6-1}{5}}_{\frac{n}{5}}, && k=6, j|(n;5), j=5
\end{aligned}\tag{48}$$

$$\begin{aligned}
C^1_{\frac{n}{5}} &= \tfrac{n-5+5}{n}\cdot C^{\frac{5}{5}}_{\frac{n}{5}}\cdot C^{\frac{5}{5}-1}_{\frac{n}{5}}, && k=5, j|(n;5), j=5\\
2C^4_{\frac{n}{2}} &= \tfrac{5-1+4}{n}\cdot C^{\frac{5-1}{4}+1}_{\frac{n}{4}}\cdot C^{\frac{5-1}{4}}_{\frac{n}{4}}, && k=5, j|(n;4), j=4\\
3C^3_{\frac{n}{2}}+6C^4_{\frac{n}{2}} &= \tfrac{5-1+2}{n}\cdot C^{\frac{5-1}{2}+1}_{\frac{n}{4}}\cdot C^{\frac{5-1}{2}}_{\frac{n}{4}}, && k=5, j|(n;4), j=2
\end{aligned}\tag{49}$$

$$\begin{aligned}
C^1_{\frac{n}{4}} &= \tfrac{n-4+4}{n}\cdot C^{\frac{4}{4}}_{\frac{n}{4}}\cdot C^{\frac{4}{4}-1}_{\frac{n}{4}}, && k=4, j|(n;4), j=4\\
C^2_{\frac{n}{2}}+3C^3_{\frac{n}{2}} &= \tfrac{n-4+2}{n}\cdot C^{\frac{4}{2}}_{\frac{n}{2}}\cdot C^{\frac{4}{2}-1}_{\frac{n}{2}}, && k=4, j|(n;4), j=2\\
2C^2_{\frac{n}{3}} &= \tfrac{4-1+3}{n}\cdot C^{\frac{4-1}{3}+1}_{\frac{n}{3}}\cdot C^{\frac{4-1}{3}}_{\frac{n}{3}}, && k=4, j|(n;3), j=3
\end{aligned}\tag{50}$$

$$\begin{aligned}
C^1_{\frac{n}{3}} &= \tfrac{n-3+3}{n}\cdot C^{\frac{3}{3}}_{\frac{n}{3}}\cdot C^{\frac{3}{3}-1}_{\frac{n}{3}}, && k=3, j|(n;3), j=3\\
2C^2_{\frac{n}{2}} &= \tfrac{3-1+2}{n}\cdot C^{\frac{3-1}{2}+1}_{\frac{n}{2}}\cdot C^{\frac{3-1}{2}}_{\frac{n}{2}}, && k=3, j|(n;2), j=2
\end{aligned}\tag{51}$$

$$C^{1}_{\frac{n}{2}} \;=\; \tfrac{n-2+2}{n}\cdot C^{\frac{2}{2}}_{\frac{n}{2}}\cdot C^{\frac{2}{2}-1}_{\frac{n}{2}}, \qquad k=2, j|(n;2), j=2 \tag{52}$$

справедливим є твердження

Теорема 2. *Для натуральних* $1 < k \leqslant 9$ *і* $n \geqslant k$ *число неізоморфних діаграм з класу* $\Im_{k,n}$ *можна обчислити за допомогою співвідношень*

$$P^{*}_{k,n} = \frac{1}{n}\Bigg(\frac{1}{n}C^{k}_{n}\cdot C^{k-1}_{n} + \sum_{j|(n;k),\ j\neq 1}\phi(j)\cdot\frac{n-k+j}{n}\cdot C^{\frac{k}{j}}_{\frac{n}{j}}\cdot C^{\frac{k}{j}-1}_{\frac{n}{j}} + + \sum_{j|(n;k-1),\ j\neq 1}\phi(j)\cdot\frac{k-1+j}{n}\cdot C^{\frac{k-1}{j}+1}_{\frac{n}{j}}\cdot C^{\frac{k-1}{j}}_{\frac{n}{j}}\Bigg), \tag{53}$$

де $(a;b)$ *– найбільший спільний дільник натуральних* a *і* b*;* $\phi(q)$ *– функція Ейлера (кількість натуральних чисел, які менші за* q *та є взаємнопростими з* q*) а підсумовування у другому і третьому доданках ведеться за всіма дільниками (за винятком 1-ці) чисел* $(n;k)$ *і* $(n;k-1)$ *відповідно.*

Таким чином є всі підстави висунути гіпотезу стосовно узагальненої формули підрахунку числа неізоморфних діаграм з класу $\Im_{k,n}$. А саме

Теорема 3. (Гіпотеза на випадок натуральних $n \geqslant k \geqslant 2$**)**
Для натуральних $n \geqslant k \geqslant 2$ *число неізоморфних діаграм з класу* $\Im_{k,n}$ *можна обчислити за допомогою співвідношень*

$$P^{*}_{n,k} = \frac{1}{n}\left(N(n;k) + \sum_{j|(n,k),\ j\neq 1}\phi(j)\cdot\left(\frac{n-k}{j}+1\right)\cdot N\left(\frac{n}{j};\frac{n-k}{j}+1\right) + + \sum_{j|(n,k-1),\ j\neq 1}\phi(j)\cdot\left(\frac{k-1}{j}+1\right)\cdot N\left(\frac{n}{j};\frac{k-1}{j}+1\right)\right), \tag{54}$$

де $N(p;q)$ *— числа Нараяна, що визначаються за формулою*

$$N(p;q) = \frac{1}{p}C^{q}_{p}C^{q-1}_{p}. \tag{55}$$

Висновки

З урахуванням співпадіння початкових значень величини $P^{*}_{n,k}$ (при $11 \geqslant n \geqslant k > 1$) з членами відповідної послідовності $A209805$ [7], одержаних автором виключно програмним шляхом, висунута нами гіпотеза є доволі небезпідставно.

На нашу думку, цілком досяжним здається одержання й строгого доведення висунутої гіпотези (для загального випадку $n \geqslant k \geqslant 2$).

Література

1. *Walsh T.R.S.* Counting rooted maps by genus I, II / T.R.S. Walsh, A.B. Lehman // Journal of Combinatorial Theory, Series B. — 1972. — Vol. 13, №2,3. — P. 192–218, 122–141.
2. *Riordan J.* The distribution of crossings of chords joining pairs of $2n$ points on a circle / J. Riordan // Mathematics of Computation. — 1975. — Vol. 29, № 129. — P. 215–222.
3. *Harer J.* The Euler characteristic of the moduli space of curves / J. Harer, D. Zagier // Inventiones mathematical. — 1986. — Vol. 85. — P. 457–485.
4. *Cori R.* Counting non-isomorphic chord diagrams / R. Cori, M. Marcus // Theoretical Computer Science. — 1998. — Vol. 204. — P. 55–73.
5. *Stoimenow A.* On the number of chord diagrams / A. Stoimenov // Discrete Mathematics. — 2000. — Vol. 218, №1–3. — P. 209–233.
6. *Callan D., Smiley L.* Non-crossing Partitions under Rotation and Reflection, 2005, publ. electronically at `http://arXiv.org/abs/math/0510447v3`
7. The OEIS Foundation Inc., «The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences», published electronically at `http://oeis.org`.
8. Кадубовський О. Про один клас хордових діаграм максимального роду / О. Кадубовський // Вісник Київського університету Серія: фізико-математичні науки. — 2006. — Вип. 1. — С. 17—27.
9. *Кадубовський О.А.* Двокольорові O- і N-діаграми / О.А. Кадубовський, О.В. Сторожилова, Н.В. Сторожилова // Пошуки і знахідки. СЕРІЯ: фізико-математичні науки. — 2010. — Том I, Вип. 10. — С. 41–50.
10. *Кадубовський О.А.* Двокольорові -діаграми з одним чорним циклом / О.А. Кадубовський, Ю.С. Саприкіна, С.Ю. Мазур // Пошуки і знахідки. СЕРІЯ: фізико-математичні науки. —2010. — Том I, Вип. 10. — С. 51–60.
11. *Кадубовський О.* Про число топологічно нееквівалентних функцій з однією виродженою критичною точкою типу сідла на двовимірній сфері / О. Кадубовський // Геометрія та топологія функцій: Збірник праць Інституту математики НАН України. — 2010. — Т. 7, № 4. — С. 87–107.
12. *Кадубовський О.А.* Про один клас гладких функцій на двовимірній сфері / О.А. Кадубовський // Вісник СДПУ. Математика. — 2010. — Вип. 1(4). — С. 39–57.
13. *Кадубовський О.А.* Двокольорові хордові діаграми мінімального роду / О.А. Кадубовський, Ю.В. Гладищук // Збірник наукових праць фізико-математичного факультету СДПУ. — 2011. — Випуск 1. — С. 49–60.

ФІЗИКА

УДК 620.3

Уколов А.И., Надточий В.А., Винокурова А.С., Калимбет А.З.

[1] *аспирант кафедры физики, ГВУЗ «ДГПУ»*

[2] *доктор физ.-мат. наук, профессор, заведующий кафедрой физики, ГВУЗ «ДГПУ»*

[3] *студентка 5 курса физико-математичного факультета, ГВУЗ «ДГПУ»*

[4] *старший преподаватель кафедры физики, ГВУЗ «ДГПУ»*

e-mail: ukolov_aleksei@mail.ru

СВОЙСТВА НАНОСТРУКТУР, СФОРМИРОВАННЫХ НА ПОВЕРХНОСТИ Ge ДИФФУЗИОННЫМ МАССОПЕРЕНОСОМ

В работе показана возможность создания наноструктур на поверхности Ge в температурном интервале $300-400\,\mathrm{K}$, свойства которых изучены методами оптической, атомно-силовой микроскопии (АСМ) и рамановской спектроскопии комбинационного рассеяния света (КРС). Использование КРС позволило установить, что после снятия внешнего деформирующего кристалл давления остаточные напряжения в вырощеных наноструктурах не обнаруживаются, что способствует сохранению их длительной стабильности в процессе испытаний и хранения.

Ключевые слова: *наноструктура, дефекты, дислокации, напряжение, релаксация.*

Введение

Еще сравнительно недавно [1] существовало широко распространенное мнение о свойствах германия и кремния как о чрезвычайно хрупких материалах при температурах ниже 700К. Испытание указаных кристаллов деформированием в температурном интервале 300-400К на стандартных машинах кинематического типа не позволяло обнаружить сколь-либо заметную микропластичность даже при разрушающих напряжениях, что теоретически объяснялось невозможностью преодаления высоких потенциальных барьеров Пайерлса кристаллической решетки для движения дислокаций. Еще более удивительным является проявление диффузии при низких температурах, показаной экспериментально в ряде работ [2,3]. Было установлено в [2,3], что микропластическая деформация имеет диффузионно-дислокационную природу и проявляется при малых и средних напряжениях исключительно в тонких приповерхностных слоях кристаллов. Эти первые основополагающие работы дали возможность в дальнейшем использовать низкотемпературную поверхностную диффузию, стимулированную градиентами напряжений, для модификации приповерхностных слоев и создания низкоразмерных атомных струкур [4], в которых могут проявляться квантовые эффекты.

Основная часть

В данной работе диффузионный массоперенос в монокристаллах Ge обеспечивали созданием градиентов напряжения как вдоль поверхности, так и вдоль дислокаций из приповерхностного слоя на поверхность. В результате атомной диффузии были получены массивы островков нанометровых размеров, свойства которых изучены методами атомно-силовой микроскопии и рамановской спектроскопии комбинационного рассеяния света.

В экспериментах использовали монокристаллы германия марки ГЭ – 45г3. Образцы имели форму прямоугольных параллелепипедов с размерами $3 \times 4 \times 10$ мм. После вырезания проводили их химико-механическое и химическое полирование и тем самым удаляли дефектный слой толщиной 100 мкм. Образцы устанавливали на наконечнике ультразвукового (УЗ) облучателя и деформировали одноосным сжатием. Структурные исследования деформированных образцов выполняли на оптическом микроскопе МЕТАМ-Р1 и зондовом микроскопе Nano Scope IIIa Demension 3000TM (Veeco Inc).

Для измерения остаточных напряжений в образованных на поверхности трехмерных атомных структурах использовали методику КРС. Спектры микро-КРС были получены при комнатной температуре в геометрии обратного рассеяния с использованием спектрометра Horiba Jobin Yvon T64000 с конфокальным микроскопом UV-Visible-NIR Olympus BX41. Возбуждение спектров КРС осуществлялось Ar-Kr лазером (длина волны возбуждения λ_{exc}=488нм). При измерениях КРС лазерный луч фокусировался на образце в пятно диаметром < 1 мкм.

Структуры на рис. 1 свидетельствуют о проявлении атомной диффузии при создании градиента напряжений в направлении от бокового ребра образца к средней части боковой поверхности. Первые признаки проявления диффузионного процесса проявляются в виде «языков» вблизи микросколов (концентраторов) на стыке двух боковых поверхностей (рис.1,а). При повышении температуры образуется своеобразная система полос из точечных дефектов (рис.1,б), которая распространяется в поверхностном слое в направлении спада напряжения. Одновременное со сжатием УЗ облучение интенсифицирует диффузионный процесс (рис.1,в), так что при увеличении числа циклов нагружения и времени деформирования дефекты распространяются на всю боковую поверхность. Сканирование зондом АСМ перпендикулярно дефектным полосам обнаруживает волновой рельеф на поверхности из подъемов и впадин относительно среднего уровня [4]. Растровая микроскопия [5] показывает, что массоперенос вещества от ребра в очень тонком приповерхностном слое (десятки нанометров) приводит к повышению концентрации вакансий у ребра, объединяющихся в поры, а также микросколов. С помощью оптической микроскопии при больших увеличениях в диффузионных зонах обнаруживаются также вакансионно-приместные кластеры, упрочняющие приповерхностный слой и блокирующие рост дислокационных петель. Увеличение длительности силового воздействия на образец Ge может вызвать зарождение новых дислокаций в приповерхностном слое, а также рост уже имеющихся после выращивания кристалла коротких дислокационных петель (А-кластеров). Зарождение дислокаций при низких температурах в Ge происходит по гетерогенному механизму [3]. Наиболее вероятными их источниками являются включения типа Ge_xO_y. Роль точечных дефектов для зарождения и роста межузельных петель может быть двоякая: петли могут зарождаться и увеличиваться в размерах, или уменьшаться и растворяться [6].

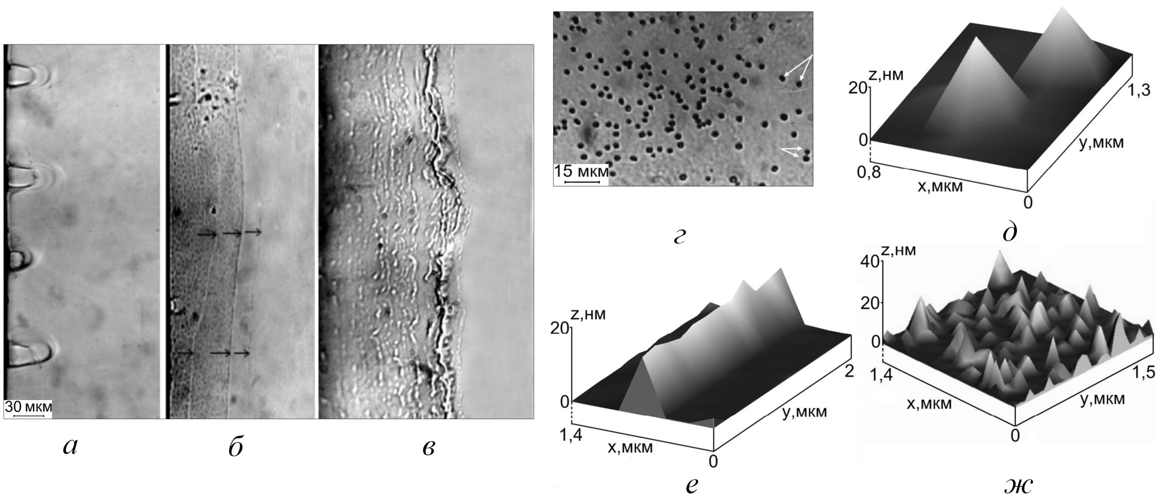

Рис. 1: Структуры, снятые на боковой поверхности (111) образцов Ge, деформированных циклами сжатия вдоль [110] до σ_m =12 кгс/мм^2 со скоростью $\acute{\varepsilon} = 10^{-4}$ c^{-1}: а – 3 цикла сжатия-разгрузки при 300К; б,в – 3 цикла деформирования при 400К без УЗ облучения и с одновременным УЗ облучением соответственно при мощности облучения 5 Вт, частоте 22,5кГц; г – дислокационная структура на боковой поверхности (111) у торца Ge после программного нагружения при 300К; д – наноостровки на поверхности Ge в местах выхода дислокационной полупетли; е – гребни, сформированные из совокупности островков на стадии созревания, источниками которых являются дислокационные полупетли, линейно ориентированные вдоль полосы с пересыщением по межузлиям; ж – массив наноостровков

На рис. 1,г представлен оптический снимок дислокаций при указанных условиях деформирования. Наблюдаются дислокационные петли, которые использовались как каналы ускоренной атомной диффузии из напряженной области, окружающей дислокацию, на поверхность. Этому диффузионному процессу способствовал действующий градиент напряжения, как результат деформирования кристалла с защемленными торцами, и одновременное УЗ – облучение. Массоперенос вещества из прилегающей к дислокации напряженной области на поверхность и одновременно вдоль нее приводит к образованию островков (рис.1,∂) вблизи выходов дислокационной полупетли [4]. Обнаруженное явление — формирование островков на деформированной поверхности (111) во многом аналогично явлению островковой эпитаксии, которое в последнее время интенсивно изучается экспериментально и теоретически. Чередующиеся полосы бугорков и впадин на поверхности можно рассматривать как области растягивающих и сжимающих напряжений, где происходит пересыщение по межузлиям и вакансиям. В таком случае дислокационная петля межузельного типа будет иметь возможность достраиваться атомами и удлиняться вдоль полосы растяжения. Таким образом возникает преимущественная ориентация полупетель вдоль одного направления, на основе которых могут зарождаться островки, а при их росте и объединении – организовываться в гребни (рис.1,е). Если же группирование точечных дефектов в полосы не происходит, то зарождение островков носит неупорядоченный характер. В результате такого процесса роста образуются массивы островков, представленные на рис.1,ж.

При создании массивов наноразмерных структур типа квантовых точек для приборного применения рассматривают важные параметры, определяющие качество изделий, таких как размеры, форма, плотность, однородность и наличие упругих напряжений в составе островка [7]. Наличие остаточных механических напряжений после деформирования кристаллов, а также возможное формирование различных кристаллических, нанокристаллических или аморфных фаз на поверхности деформированных образцов Ge исследуют при помощи методики КРС [8]. Из результатов, полученных в [8] следует, что под действием сосредоточенной нагрузки в области отпечатка индентора на полученных спектрах КРС появляются дополнительные максимумы (рис.2,а), которые не наблюдаются на спектре не деформированного Ge на графике (1) рис.2,а. Фазовые переходы, которые вызвали появление пиков (148, 177, 189, 211, 227,244, и 271 см$^{-1}$) на графике (3) в спектрах КРС, полученных из центральной части отпечатка индентора, возникают при высоком давлении от 10 до 2,7 ГПа и соответствуют различным металлическим состояниям. Проявление новой полосы интенсивности в спектре КРС на частоте $\omega = 293$ см$^{-1}$ (график (2) рис. 2,а), полученном из области модифицированной структуры в более совершенной части отпечатка, может быть вызвано двумя причинами [8].

Во-первых, этот пик может соответствовать гексагональной алмазной фазе. С другой стороны этот пик можно интерпретировать как смещение и асимметричное расширение рамановской полосы стабильной кубической алмазной фазы. Это может указывать на присутствие нанокристаллической кубической алмазной структуры материала. Таким образом, переход материала в ближайшее метастабильное состояние под действием механического напряжения должен проявляться появлением полосы интенсивности на частоте $\omega = 293$ см$^{-1}$ в спектре КРС. Кроме того, напряженное состояние в островке Ge должно сопровождаться наблюдением пика на частоте $\omega = 316$ см$^{-1}$ [9].

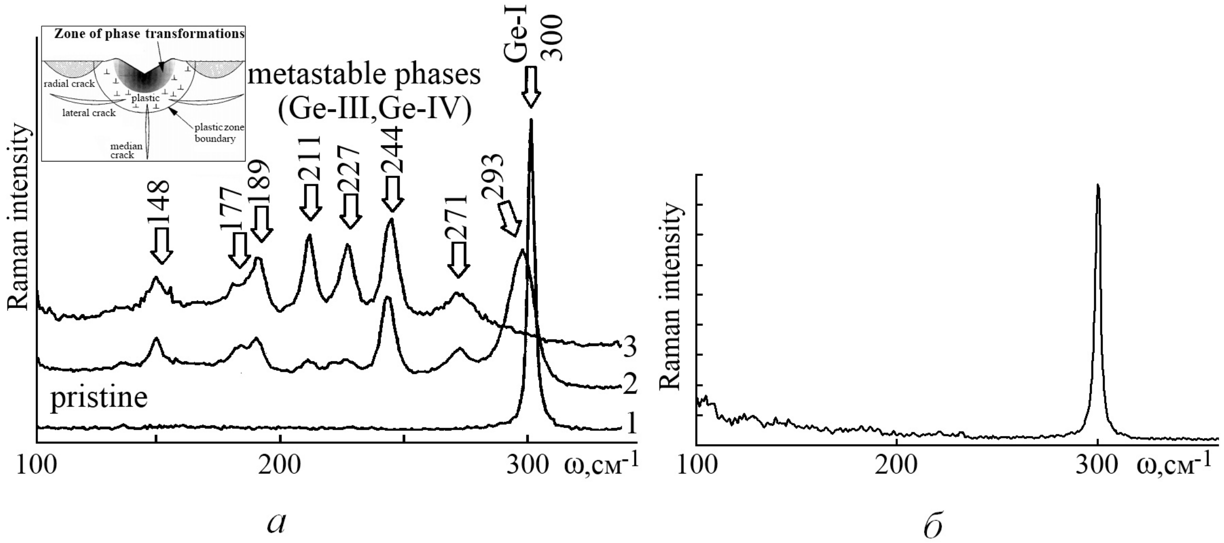

Рис. 2: а - рамановские спектры Ge на недеформированной поверхности (1), в окрестности (2) и в центре (3) отпечатка от индентора Виккерса; б - спектр микро-КРС из области гребня на поверхности Ge

Нами снимались спектры КРС для наноструктур типа гребня. Спектры записывали в точках на отрезке длиной 5 мкм по поверхности поперек гребней с шагом 0,1мкм, то-есть было выполнено 50 измерений. На всех полученных графиках наблюдался только один пик интенсивности на частоте $\omega = 300$ см$^{-1}$ (рис.2,б), что соответствует типичной кубической алмазной структуре Ge. Этот факт свидетельствует о том, что уровни напряжений, способные вызвать активные процессы самодиффузии в основании наноструктуры в виде гребня Ge (рис. 1,е), не вызывают фазовых переходов материала. Нет проявлений также напряжений на частоте $\omega = 293$ см$^{-1}$ слева от пика $\omega = 300$ см$^{-1}$ и справа от него при ω =316 см$^{-1}$. Отсутствие напряжений в гребне дает возможность ожидать сохранения стабильности его структурного состояния длительное время.

Выводы

Таким образом, в результате экспериментальных исследований получен новый вид наноструктурных образований типа массивов островков и гребней нанометровой высоты на поверхности монокристаллического Ge при создании диффузионного массопереноса, стимулированного действием деформации и одновременного УЗ облучения в температурном интервале $300-400$ K. С помощью спектроскопии комбинационного рассеяния света показано отсутствие остаточных напряжений в наноструктуре типа гребня на поверхности Ge. При отсутствии остаточных напряжений свойства наноструктуры могут сохраняться длительное время. Выращенные таким образом наноструктуры могут представлять интерес для создания перспективных микроэлектронных приборов с использованием квантовых эффектов.

Литература

1. *Концевой Ю.А.* Пластичность и прочность полупроводниковых материалов и структур / Ю.А. Концевой, Ю.М. Литвинов, Э.А. Фаттахов. — М.: Радио и связь, 1982. — 239 с.
2. *Nadtochiy V.* Structure changes caused by the stress gradient in subsurface layers of germanium single crystals / V. Nadtochiy, I. Zhikharev, M. Golodenko, M. Nechvolod // Sol. Stat. Phenomena. — 2003. — Vol.94. — P. 253–256.
3. *Надточий В.А.* Микропластичность алмазоподобных кристаллов (Si, Ge, GaAs, InAs)/ Надточий В.А. Дис. … д-ра физ.-мат. наук: 01.04.07. — Харьков,2006. — 471 с.
4. *Надточий В.А.* Исследование поверхности деформированного монокристалла германия методом атомно-силовой микроскопии / В. А. Надточий, А. И. Уколов, В. П. Алехин // Деформация и разрушение материалов. — 2012. — №4. — С. 26–33.
5. *Уколов О.І.* Дифузійно-дислокаційна мікропластичність монокристалів Ge нижче температурної межі крихкого руйнування / О.І. Уколов, В.О. Надточій, М.К. Нечволод // Фіз. і хім. твердого тіла. — 2010. — Т.11, №3. — С. 575–579.
6. *Ефременко А.Н.* Генерация дислокационных петель в нагруженных материалах частицами второй фазы / А.Н. Ефременко, В.В. Слезов, В.В. Яновский // Металлофизика. —1990. — Vol.12, №1. — С. 91–100.
7. Кремний-германиевые наноструктуры с квантовыми точками: механизмы образования и электрические свойства / О.П. Пчеляков, Ю.Б. Болховитянов, А.В. Двуреченский, Л.В. Соколов, А.И. Никифоров, А.И.

Якимов, Б. Фойхтлендер // ФТП. — 2000. — Т. 34, №11. — С.1281–1289.

8. *Kailer A.* Raman microspectroscopy of nanocrystalline and amorphous phases in hardness indentations/ A. Kailer, G. N. Klaus, Yu. G. Gogotsi // J. Raman Spectrosc. — 1999. — Vol.30. — P. 939–946.
9. Свойства самоорганизованных SiGe-наноструктур, полученных методом ионной имплантации / Ю.Н. Пархоменко, А.И. Белогорохов, Н.Н. Герасименко [и др.] // ФТП. — 2004. — Т.38,№5. — С. 593–599.

УДК 621.315.592

Уколов А.И., Надточий В.А., Сысоев Д.В.

[1] *аспирант кафедры физики, ГВУЗ «ДГПУ»*

[2] *доктор физ.-мат. наук, профессор, заведующий кафедрой физики, ГВУЗ «ДГПУ»*

[3] *студент 5 курса физико-математичного факультета, ГВУЗ «ДГПУ»*

e-mail: ukolov_aleksei@mail.ru

ИЗМЕРЕНИЕ ДИФФУЗИОННОЙ ДЛИНЫ НОСИТЕЛЕЙ ЗАРЯДА В ПРИПОВЕРХНОСТНЫХ СЛОЯХ МОНОКРИСТАЛЛА ГЕРМАНИЯ

В работе показана возможность практического использования фотоэлектрического метода для определения диффузионной длины неосновных носителей заряда в приповерхностных слоях полупроводников. Выполнены теоретические расчеты концентрации нерановесных носителей заряда за пределами области их генерации.

Ключевые слова: *германий, дефекты, дислокации, диффузионная длина.*

Введение

Дефекты структуры в полупроводниковых кристаллах (дислокации, кластеры из точечных дефектов, границы раздела), являясь эффективными центрами рекомбинации, могут существенно изменять концентрацию носителей заряда и их основные характеристики — время жизни τ, диффузионную длину пробега L_D, подвижность μ и коэффициент диффузии D. Указанные дефекты могут создаваться при различных видах обработки поверхности: при резании, шлифовании и полировании, облучении частицами высоких энергий (ионами, протонами, электронами). Поскольку большинство полупроводниковых приборных структур реализуется именно в тонких приповерхностных слоях, важным представляется вопрос контроля их степени дефектности.

Основная часть

В данной работе для измерения диффузионной длины неосновных носителей заряда L_D использован фотоэлектрический метод, основанный на облучении поверхности кристалла сфокусированным световым лучом в узкую полосу или круглое пятно. В качестве источников света использовали лампу накаливания или твердотельньный лазер. Известно [1], что излучение вольфрамовой нити накаливания можно считать слабопоглощающимся в кристалле Ge и поэтому проникает вглубь образца до 5 мм, поскольку большая часть спектра находится в инфракрасном диапазоне. Излучение от лазерного источника происходит на длине волны λ=640 нм и глубина генерации неравновесных носителей заряда составляет всего $0,5$ мкм. Эти данные важны для анализа области генерации этими источниками неравновесных носителей заряда (рис.1).

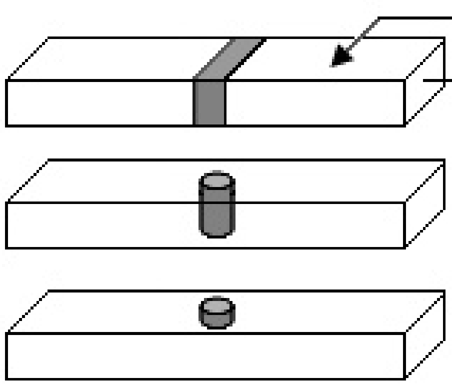

Рис. 1: Геометрия области генерации неравновесных носителей заряда в полупроводниковом образце Ge: а,б — от нити накаливания; в — от полупроводникового гетеролазера на основе $AlGaAs$

В случае (рис.1,а), теория которого описана в [2], очень узкая область полупроводника освещается световой полосой, так что во всем объеме освещенной области происходит равномерная генерация электронов и дырок. При этом на геометрические размеры освещенной области накладываются ограничения $l >> w$ и $x >> L_D$, где l — длина, а w – ширина световой полосы на поверхности кристалла, x — расстояние от световой полосы до коллекторного зонда. Эти ограничения затрудняют применение данного метода для малых по площади структур или тонких дефектных слоев на поверхности кристаллов. Однако этот вопрос можно решить, сфокусировав поток освещения в пятно очень малого диаметра. В таком случае изменится зависимость распределения концентрации неосновных носителей заряда, например Δn для $p - Ge$ от расстояния x.

Определим концентрацию избыточных электронов $\Delta\, n$ в результате точечного освещения полупроводника из решения уравнения непрерывности

$$\frac{\partial \Delta n}{\partial t} = -\frac{\Delta n}{\tau_n} + \frac{1}{e}\mathrm{div} j_n + g, \tag{1}$$

где $\Delta\, n\, /\, \tau_n$ – слагаемое, учитывающее рекомбинацию носителей; $\mathrm{div} j/e$ – дивергенция потока неосновных носителей; g – скорость генерации носителей светом. В стационарном случае $\partial \Delta n/\partial t = 0$ и распределение концентрации неосновных носителей вдоль оси x в неосвещенной части образца (g=0), сводится к уравнению

$$-\frac{\Delta n}{\tau_n} + \frac{1}{e}\mathrm{div} j_n = 0. \tag{2}$$

Так как

$$\mathrm{div} j_n = e\mu_n \mathrm{Egrad}\Delta n + eD_n \mathrm{div}(\mathrm{grad}\Delta n), \tag{3}$$

$$\mathrm{div}(\mathrm{grad}\Delta n) + \frac{L_E}{L_D^2}\mathrm{grad}\Delta n - \frac{\Delta n}{L_D^2} = 0, \tag{4}$$

где L_E - дрейфовая длина неосновных носителей заряда. Тогда распределение концентрации неравновесных носителей заряда по плоскости:

$$\frac{\partial^2 \Delta n}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Delta n}{\partial y^2} + \frac{L_E}{L_D^2}(\frac{\partial \Delta n}{\partial x} + \frac{\partial \Delta n}{\partial y}) - \frac{\Delta n}{L_D^2} = 0. \tag{5}$$

В случае, когда носители заряда генерируются круглым световым пятном ($x = y$), уравнение (5) преобразуется к виду:

$$2\frac{\partial^2 \Delta n}{\partial x^2} + 2\frac{\partial \Delta n}{\partial x} - \frac{\Delta n}{L_D^2} = 0, \tag{6}$$

$$\frac{\partial^2 \Delta n}{\partial x^2} + \frac{\partial \Delta n}{\partial x} - 2\frac{\Delta n}{L_D^2} = 0. \tag{7}$$

Общим решением этого уравнения является

$$\Delta n = C_1 \exp^{\alpha_1 x} + C_2 \exp^{\alpha_2 x}, \tag{8}$$

при $x \geqslant 0$ и $L_E \to 0$

$$\Delta n = C \exp^{\frac{x}{\sqrt{2} L_D}}. \tag{9}$$

Полученное выражение (9) использовали для определения L_D для примеров (б,в), а для примера (а) формулу [2]

$$\Delta n = C \exp^{\frac{x}{L_D}}. \tag{10}$$

Уменьшение величины Δn вблизи поверхности в результате создания дефектов структуры и увеличения скорости рекомбинации в приповерхностном слое [3] сказывается только на расстоянии не более L_D вдоль поверхности от области генерации, что учитывалось выбором величины x при измерениях. Экспериментальную проверку выполнения равенства (9) проводили на образцах $p{-}Ge$ с удельным сопротивлением $\rho{=}40$ Ом$\cdot$см, размерами $3{\times}4{\times}10$ мм с введенными в приповерхностный слой деформационными дефектами по методике [3]. Измерения выполнены при различной геометрии области генерации неравновесных носителей заряда на разработанном устройстве [4], позволяющем определять основные параметры рекомбинации носителей заряда на одном измерительном столике, используя необходимые методики. В отличие от [2], в устройстве измерения L_D (рис.2) применен изготовленный авторами высокостабильный по частоте модулятор интенсивности света (рис.2,в) на основе камертонного генератора. Использован камертон (1) с собственной частотой колебаний $f_0 = 294$ Гц.

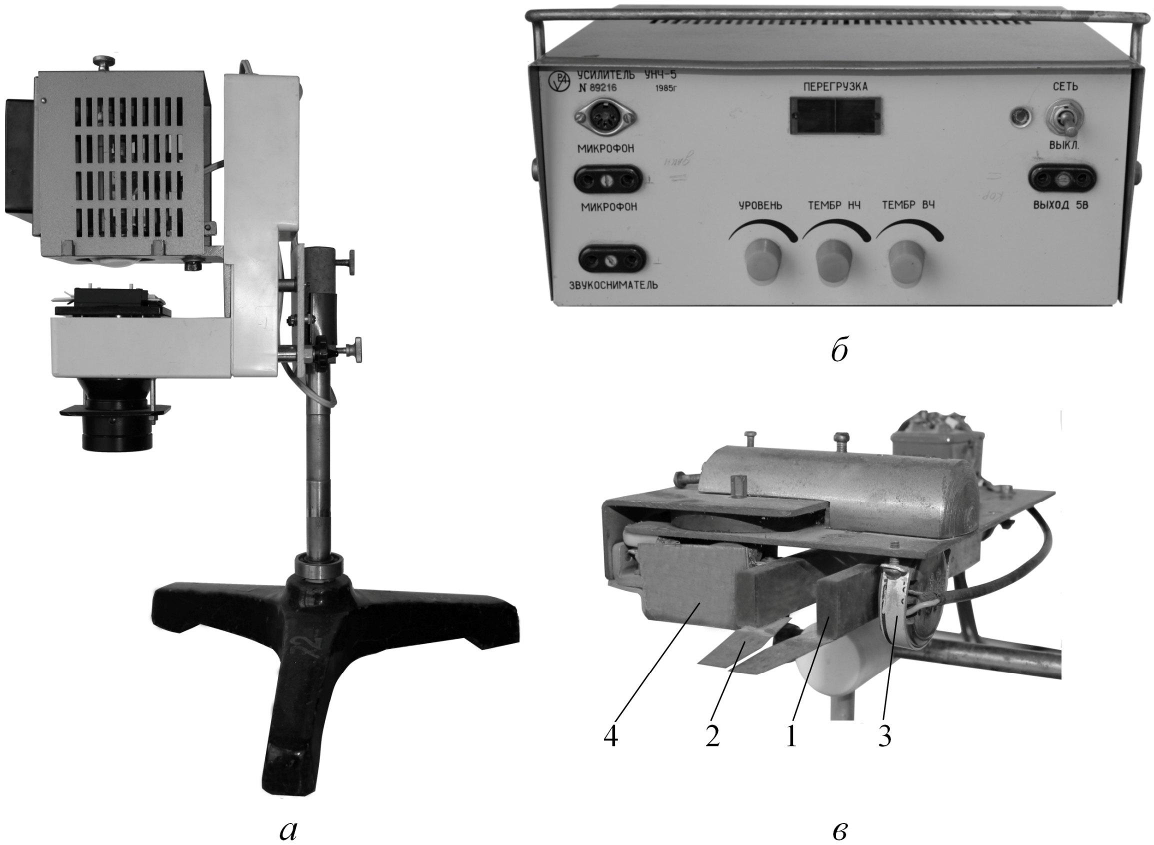

Рис. 2: Используемые приборы для оптических измерений L_D: а – осветитель с конденсором, щелевой диафрагмой и объективом; б – усилитель УНЧ-5; в – камертонный прерыватель

На концах его вибраторов были напаяны тонкие пластинки (2), между которыми создавался узкий зазор в виде щели. По обеим сторонам вблизи вибраторов крепились малогабаритный динамический микрофон (3) и электромагнит (4); микрофон включали на вход низкочастотного усилителя (рис.2,б), а к его выходу — в цепь обратной связи - электромагнит, чем обеспечивали самовозбуждение генератора. При соблюдении определенных условий [5] в подобного вида автогенераторах [5] можно добиться практически реализуемой стабильности частоты на порядок более высокий, чем в LC — и RC — генераторах. При узкой полосе пропускания усилителя существенно повышается соотношение сигнал/шум.

По полученным данным построены графики зависимостей логарифма напряжения в коллекторной цепи lgU от координаты x (рис.3). Для определения изменений концентрации неосновных носителей $\Delta n \sim \lg U$, связанной с рекомбинацией в приповерхностном слое, измерения проводили в интервале $0 < x < L_D$.

На рис.3 наблюдаются небольшие разбросы значений $\lg U$ при различных условиях генерации неравновесных носителей заряда.

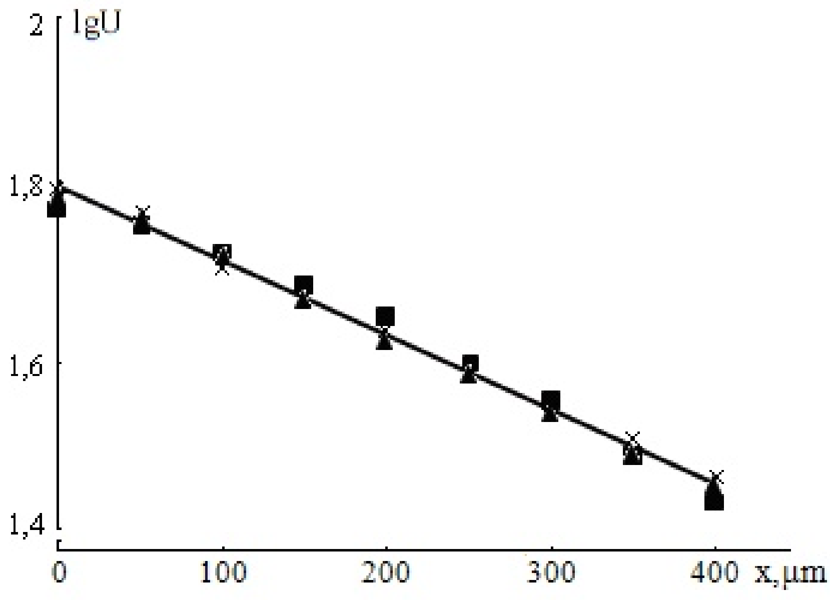

Рис. 3: График зависимости $\lg U(x)$ при различной геометрии области генерации неравновесных носителей заряда: ■ – освещение тонкой полосой света ω =0,1мм с плоской областью генерации неравновесных носителей заряда, × – освещение малым световым пятном с цилиндрической областью генерации по всей толщине образца, ▲ – освещение малым световым пятном с цилиндрической областью генерации на глубине до $0,5$ мкм

Выводы

Таким образом, в работе показана возможность применения фотоэлектрического метода для измерения параметров неравновесных носителей заряда в тонких приповерхностных слоях с повешенной концентрацией структурных дефектов. Переход к точечному освещению образца позволяет получать такую информацию на малых по площади структурах, таких как полупроводниковые интегральные схемы.

Литература

1. *Козелкин В.В.* Основы инфракрасной техники / В.В. Козелкин, И.Ф. Усольцев. — М.: Высшая школа, 1985. — 463 с.
2. *Павлов Л. П.* Методы измерения параметров полупроводниковых материалов / Л.П. Павлов. — М.: Высшая школа, 1987. — 239 с.
3. *Nadtochiy V.* Microplasticity and electrical properties of subsurface layers of diamond-like semiconductors strained at low temperatures / V. Nadtochiy, N. Golodenko, N. Nechvolod // Functional Materials. — 2003. — V.10, №4. — P. 702–706.
4. *Надточий В.А.*Устройство для измерения параметров рекомбинации неравновесных носителей заряда в приповерхностных слоях монокристаллов Ge / В.А. Надточий, А.И. Уколов // Вісник Харківського національного ун-ту, серія «Фізика». — 2012. — №1020, в.17. — С. 87–90.
5. *Лугвин В. Г.* Элементы современной низкочастотной электроники / В.Г. Лугвин. — М.: Энергия, 1970. — 88 с.

УДК 512.562

Шурыгина Л.С., Шурыгин Е.Г.

[1] *кандидат педагогических наук, доцент кафедры физики, ГУВЗ «ДГПУ»*

[2] *ассистент кафедри математики, ГВУЗ «ДГПУ»*

e-mail: fiziksgpu@yandex.ru

ПАРАДОКСЫ ВРЕМЕНИ В СОВРЕМЕННОЙ НАУКЕ

В работе анализируются понятия «стрелы времени» и необратимости. Показано, что на всех уровнях структурной организации материи необратимость процессов связана со свойством неустойчивости соответствующих систем и процессов. Приведены материалы для создания проблемных ситуаций при изучений этих понятий.

Ключевые слова: *асимметрия времени, необратимость, стрела времени, второй закон термодинамики.*

> Итак, что же в конце концов есть время, это неуловимое понятие, которое озадачивало Св. Августина, ввело в заблуждение Ньютона, вдохновляло Эйнштейна, мучило Хайдеггера?
>
> *М. Кастельс*

Введение

В Нобелевской лекции академика В.Л. Гинзбурга в списке особенно важных и интересных проблем физики и астрофизики начала XXI века выделены три «великие» проблемы [1]. Одна из них — возрастание энтропии, необратимость и «стрела времени», т.е. вопрос, связанный со вторым началом термодинамики. В другой Нобелевской лекции один из отцов–основателей синергетики И.Р. Пригожин утверждает: «В истории науки второй закон термодинамики сыграл выдающуюся роль, далеко выходящую за рамки явлений, для объяснения сущности которых он был предназначен» [2].

«Увеличение энтропии отличает будущее от прошлого, поэтому существует стрела времени» [3, 92]. В школьном курсе и в общем курсе физики для высших учебных заведений содержание понятий необратимости и второго начала соответствует классической (равновесной) термодинамике. Появление во второй половине XX века неравновесной термодинамики и синергетики не учитывается, в то время как анализ понятия времени и необратимости пронизывает творчество И.Р. Пригожина.

Анализ противоречия мировоззренческих представлений классической механики и классической (равновесной) термодинамики может стать источником проблемных ситуаций при изучении данного материала. Это активизирует познавательную деятельность учащихся и повысит интерес к изучению физики.

Основная часть

Фундаментальные законы физики, законы классической, квантовой механики, теории относительности, обратимы во времени. Например, второй закон Ньютона

$$m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \vec{F}$$

инвариантен относительно обращения времени $t \to -t$. Структура уравнений механики такова, что при обращении скорости всех точек системы она будет эволюционировать назад во времени, проходя через все состояния в которых побывала в прошлом. Обратимые законы таковы, что по известным одному состоянию и действующим силам можно предсказать будущее и полностью восстановить прошлое. Т.е. в классической механике будущее и прошлое эквивалентны. Время является просто параметром.

Квантовая механика в этом отношении ситуацию не изменила. Обращая ход времени в уравнении Шредингера и в комплексно-сопряженном ему получаем

$$\frac{\hbar}{i}\frac{\partial\Psi}{\partial t} = \hat{H}\Psi, \qquad -\frac{\hbar}{i}\frac{\partial\Psi^*}{\partial t} = \hat{H}\Psi^*$$

Отсюда следует, что плотность вероятности $|\Psi|^2 = \Psi\Psi^*$ возможных состояний при изменении знака времени не меняется. Необратимость в квантовой механике появляется лишь при измерении, а оно уравнением Шредингера не описывается.

Но, теории в которых время обратимо, не могут описывать процессы эволюции, процессы возникновения качественно новых состояний. В то время как процессы развития, эволюции мы наблюдаем на всех структурных уровнях организации материи. Как согласовать обратимость фундаментальных законов с наблюдаемой повсюду необратимостью природных процессов? Это противоречие И.Р. Пригожин назвал парадоксом времени. С ним тесно связаны квантовый и космологический парадоксы. «Задано ли будущее или находится в процессе непрестанного становления? В этом вопросе заключена глубокая дилемма для всего человечества, поскольку время — фундаментальное измерение нашего существования» [4, 9].

Согласованием обратимости законов механики с необратимостью нашего окружения в конце XIX века занимался Людвиг Больцман. Рассматривая совокупность движущихся и сталкивающихся молекул он показал, что столкновения приводят к установлению равновесия, т.е. являются механизмом, ответственным за выполнение второго начала. Но в то время его работа подверглась ожесточенной критике. Одно из самых важных возражений — поскольку движение по траектории обратимо во времени, то при изменении знака скорости молекул система должна вернуться в свое прошлое, в первоначальное состояние. Под напором критики Л. Больцман заменил предложенную им микроскопическую интерпретацию второго начала статистической. Изолированная система самопроизвольно переходит в равновесное состояние потому, что оно более вероятно. Т.е. необратимые процессы всего лишь более вероятны, чем обратимые.

Однако такая интерпретация не вносит полной ясности. Например, малая вероятность состояния не означает, что оно вообще невозможно. Усовершенствовав технику измерений можно было бы фиксировать все менее и менее вероятные события, что обесценило бы второе начало. Р. Смолуховский писал: «Если бы мы могли продолжить наблюдения неограниченно долго, то все процессы казались бы нам обратимыми» (Цитируется по [4, 26]). Кроме того, если можно было бы наблюдать за движением каждой молекулы системы, то, в соответствии с обратимостью законов динамики, состояние системы менялось бы обратимо. Из вышеизложенного следует, как подчеркивал М. Борн, что необратимость является результатом введения нашего незнания в фундаментальные законы физики, она объясняется тем, что мы вносим приближения в описание природы. «Время — это иллюзия» — говорил А. Эйнштейн.

Существовала и другая точка зрения. М. Планк считал абсурдным полагать, что справедливость второго начала зависит от нашего искусства проводить наблюдения или эксперименты. Но сторонников такого мнения было меньше.

Осознание того, что существование необратимых процессов не связано с точностью экспериментов и полнотой имеющейся у нас инфомации, пришло лишь во второй половине XX века вместе с появлением физики неустойчивых систем и теории хаоса. Причина необратимости — неустойчивость динамических процессов. Столкновение молекул в системе, которую рассматривал Л. Больцман, — неустойчивый процесс. Анализ устойчивости (неустойчивости) траекторий, стационарных состояний основан на исследовании поведения малых отклонений от анализируемого решения.

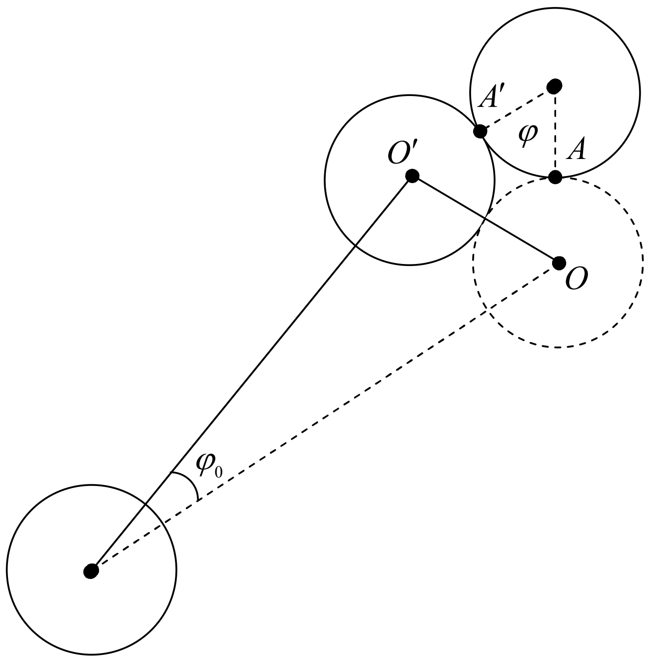

Рис. 1:

Рассмотрим роль неустойчивости в развитии системы на примере столкновения шаров (рис. 1).

Пусть направление движения одного из шаров отклонилось от заданного на маленький угол $\varphi_0 \sim 10^{-7}$. Выясним как будет меняться угол отклонения при последующих соударениях. Шар с радиусом r между соударениями проходит путь $l >> r$. За время между двумя последовательными столкновенимя центр шара сместится на расстояние $OO' \approx l\varphi_0$. Того же порядка и смещение точки соприкосновения шаров при ударе: $\varphi \approx \dfrac{AA'}{r} \approx \dfrac{l\varphi_0}{r}$. После z столкновений

$$\varphi_z \sim \left(\frac{l}{r}\right)^z \varphi_0 \qquad (1)$$

(Здесь φ и φ_0 радианные меры соответствующих углов). Если $\dfrac{l}{r} \sim 10$, то после нескольких соударений направление движения шара не будет иметь ничего общего с невозмущенным, малейшее возмущение быстро нарастает.

Пусть $s = vt$ — длина пути, который проходит шар за время t, v — скорость движения. Если z — число столкновений за время t, l — среднее растояние. между столкновениями, то $s = zl$. Следовательно, $vt = zl$ и $z = \dfrac{vt}{l}$. Подставляя это выражение в соотношение (1) и логарифмируя, получаем

$$\ln\frac{\varphi}{\varphi_0}\approx\frac{vt}{l}\ln\frac{l}{r}.$$

Если ввести обозначение $K=\frac{v}{l}\ln\frac{l}{r}$, то данное выражение можно переписать следующим образом: $\varphi\approx\varphi_0 e^{Kt}$. Если $K<0$ — движение устойчиво, начальное отклонение быстро затухает. Если $K>0$ — движение неустойчиво. Устойчивость (неустойчивость) — внутреннее свойство системы. Однако проявляется оно при наличии малых внешних воздействий.

Совокупность сталкивающихся молекул, находящихся в ограниченном объеме, — неустойчивая система. Движение молекул в таких системах очень чувствительно к малейшим возмущениям — со временем они (возмущения) экспоненциально нарастают. Если система находится в ограниченном пространстве, неустойчивые траектории не могут разойтись больше, чем на размер этой области и начинают перемешиваться. Описание системы с использованием понятия траектории становится бессмысленным, неадекватным. Чтобы траекторное описание имело смысл, она должна оставаться «почти одной и той же» при незначительном изменении начальных условий. Для глобально неустойчивых систем траекторное описание — недопустимая идеализация. Для таких систем имеет смысл говорить лишь о вероятности нахождения частицы в том или ином элементе объема. Вероятностное описание нарушает симметрию во времени. Обратимость в классической механике — следствие траекторного описания.

Но, поскольку в глобально неустойчивых системах траектории невоспроизводимы, обратимость в механическом смысле не имеет места. В таких системах устойчивыми могут быть средние значения. Обратимые термодинамические процессы, при которых система в любой момент времени находится в равновесии, возможны.

Таким образом, для неустойчивых систем процессы необратимы и на микро- и на макроскопическом уровне. Необратимость не зависит от возможностей наблюдателя. В устойчивых системах при устойчивых траекториях частиц процессы были бы обратимы как на микро-, так и на макроуровне.

При описании неустойчивых систем вероятность приобретает объективный смысл. «Субъективная интерпретация соответствует случаю, когда отдельные траектории неизвестны. Вероятность (и в конечном счете связанная с ней необратимость) при таком подходе имеет своим истоком наше незнание. К счастью, существует другая, объективная интерпретация: вероятность возникает в результате альтернативного описания, возможного лишь для сильно неустойчивых динамических систем.

При таком подходе вероятность становится объективным свойством, порождаемым, так сказать, внутри динамики и отражающим фундаментальную структуру динамической системы» [5, 343]. Т.е. необратимость не вызвана какими-либо приближениями, которые добавляются к фундаментальным законам.

Кроме того, необратимые процессы в неравновесных нелинейных системах могут быть конструктивными. Если в равновесной термодинамике необратимые процессы (диффузия, вязкость и т.п.) приводили систему в равновесие, то в ситуации далекой от равновесия они могут вызывать появление когерентности, появление упорядоченных структур-процессов. Например, термодиффузия, ячейки Бенара, генерация лазерного излучения. Необратимый поток тепла через смесь газов при термодиффузии приводит к разделению смеси, т.е. к упорядочению. Концентрация одной компоненты становится выше у горячей стенки сосуда, концентрация другой – у холодной.

Ячейки Бенара можно наблюдать в слое жидкости, налитой в плоский сосуд. Жидкость подогревают снизу. Пока разность температур верхнего и нижнего слоя меньше некоторого значения, определенного для данной системы, механизм передачи тепла — теплопроводность. При увеличении разности температур внезапно, при некотором критическом значении ΔT_k, поведение жидкости резко меняется. Возникает структура в виде совокупности шестиугольных конвективных образований, структур-процессов, которые называются ячейками Бенара. Структуры возникают после того как однородное состояние жидкости становится неустойчивым. Причина потери устойчивости: вследствии теплового расширения плотность жидкости в нижних слоях становится меньше, чем в верхних, а сила тяжести направлена сверху вниз. Если у нижней поверхности капелька жидкости немного сместится вверх, она попадет в более холодный слой с большей плотностью. Поэтому Архимедова выталкивающая сила увеличится, она будет больше веса капли. Начнется восходящее движение. От верхней поверхности по аналогичной причине начнется движение нисходящее. Возникают нисходящие и восходящие самосогласованные потоки. По сравнению с однородным равновесным состоянием это — более высокоорганизованная структура. Отдельная конвективная ячейка содержит не менее 10^{20} молекул, которые движутся согласованно, когерентно, несмотря на хаотичное тепловое движение.

Таким образом, в природе существует два вида необратимых процессов:

— разрушение структур вблизи состояния равновесия;

— возникновение структур вдали от положения равновесия в открытых нелинейных системах.

Значит, стрелу времени нельзя ассоциировать только с увеличением беспорядка и переходом в равновесие. При определенных условиях она обеспечивает возможность спонтанного возникновения упорядоченных структур-процессов, переход в качественно новое состояние.

Выводы

Для снятия противоречия между фундаментальными законами физики и необратимостью природных процессов в учебные курсы следует ввести понятие неустойчивости динамических систем. По мнению Д.С. Чернавского это понятие будет одним из основных в науке XXI века. Кроме того, для современного мировоззрения важным является представление о том, что в открытых системах или их частях идут как необратимые процессы установления равновесия, так и необратимая самоорганизация с усложнением структур. «Для полного понимания необратимости следует учитывать сразу оба процесса: самоорганизацию с небольшим уменьшением энтропии и деградацию порядка с термализацией энергии и рождением энтропии в гораздо более мощном темпе. Полное понимание необратимости невозможно без понимания как разрушения, так и упорядочения» [6, 467].

Литература

1. *Гинзбург В.Л.* Физический минимум — какие проблемы физики и астрофизики представляются особенно важными и интересными в начале XXI века / Специальное заседание редакционной коллегии журнала «Успехи физических наук», приуроченное к 90-летию со дня рождения В.Л. Гинзбурга / В.Л. Гинзбург // УФН. — 2007. — Т. 177, № 4 — с. 348.
2. *Пригожин И.* Время,структура и флуктуации (Нобелевская лекция) / И. Пригожин // УФН. — 1980. — Т. 131.
3. *Пригожин И.* Современная термодинамика. От тепловых двигателей до диссипативных структур / И. Пригожин, В. Кондепуди; пер с англ. Ю.А. Данилова, В.В. Белого. — М.: Мир, 2002. — 461 с.
4. *Пригожин И.* Конец определенности. Время, хаос и новые законы природы / И.Р. Пригожин. — Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика». — 2000. — 208 с.
5. *Пригожин И.* Порядок из хаоса: Новый диалог человека с природой / И.Р. Пригожин, И. Стенгерс. — М.: Прогресс, 1986. — 432 с.
6. *Кадомцев Б.Б.* Динамика и информация / Б.Б. Кадомцев // УФН. — 1994 — Т. 164, № 5 — С. 449–530.

ІНФОРМАТИКА ТА МЕТОДИКА ЇЇ ВИКЛАДАННЯ

УДК 004:003.26

Пірус Є.М., Дікарєв С.С.

[1] *старший викладач кафедри алгебри, ДВНЗ «ДДПУ»*

[2] *студент 5 курсу фізико-математичного факультету, ДВНЗ «ДДПУ»*

e-mail: pirus@ukr.net

ПРОГРАМНА РЕАЛІЗАЦІЯ АЛГОРИТМІВ АСИМЕТРИЧНИХ МЕТОДІВ ШИФРУВАННЯ ІНФОРМАЦІЇ ЗАСОБАМИ СЕРЕДОВИЩА ПРОГРАМУВАННЯ LAZARUS

Дана робота присвячена вивченню проблеми практичної реалізації алгоритмів криптографічних систем з відкритим ключем та побудови програм реалізацій алгоритмів таких криптосистем засобами середовища програмування Lazarus. Об'єктом дослідження є криптографічні системи з відкритим ключем. Предметом дослідження виступають криптографічні протоколи та математичний апарат, які дозволяють реалізовувати криптографічні системи з відкритим ключем на основі поняття однонаправленої функції.

Ключові слова: *алгоритм, шифр, однонаправлена функція, протокол, шифрування інформації.*

Вступ

Інформацію, яка має певну цінність, треба захищати від двох небезбек — природних (інформація може бути пошкоджена або знищена при поломках апаратури, внаслідок шумів у каналах зв'язку, і т.п.) і від зловмисників. Захистом від першої небезбеки — головним чином, від пошкодження інформації при передачі — займається теорія кодування. Тут головний метод захисту — ще до передачі таким чином перетворити (закодувати) текст, ввівши в нього додаткові символи, щоб навіть у разі пошкодження не дуже великої частини символів можна було з великою ймовірністю відновити початковий текст. Найпростіший спосіб — продублювати кожен символ кілька разів. Таким чином, із можливими втратами інформації борються за рахунок надлишковості тексту, що передається.

Головна проблема теорії кодування — як поєднати надійність, швидкість передачі і зручність кодування. Іншими словами, як передавати інформацію швидко, дешево і надійно.

Захист інформації від зловмисників розпадається на 2 проблеми: захист від підміни або несанкціонованої модифікації (охорона *аутентичності* або *інтегральності* інформації) і захист від несанкціонованого доступу або відтворення (охорона *конфіденційності*, таємності, секретності інформації або прав власності). Обидві проблеми виникають як при зберіганні інформації, так і при її передачі, і мають багато дуже різних аспектів — організаційних, технічних, юридичних, тощо.

Є дуже багато різних пасивних методів захисту при зберіганні, коли сама інформація не змінюється, а лише робиться більш складним несанкціонований доступ до неї: грифи, сейфи, ключі і т.п. Один із методів пасивного захисту інформації при передачі — приховування самого факту передачі.

Предметом *криптографії* є активні методи захисту аутентичності і конфіденційності інформації при її зберіганні чи передачі *відкритими* каналами зв'язку. Це робиться за допомогою перетворення (шифрування) інформації для унеможливлення як несанкціонованого доступ до неї, так і незаконної її модифікації. При цьому вважається, що хоча у перетвореному вигляді повідомлення і може стати доступним зловмиснику, але він не зможе витягти з нього захищену інформацію.

Протягом тисячоліть криптографія була мистецтвом засекречування важливої державної інформації при передачі її по захищених каналах зв'язку, а криптоаналіз був двоїстим криптографії мистецтвом розкриття такої інформації. Тому криптологія, що об'єднує в собі криптологію та криптоаналіз історично раніше перебували майже виключно у військових і дипломатичних відомств. Однак у нинішній період здійснення у всьому світі комп'ютерної революції , коли величезна кількість персональної, фінансової, комерційної та технологічної інформації зберігається на комп'ютерних банках даних і пересилається по інформаційних комп'ютерних мережах, надзвичайно важливим є те обставина, що в суспільстві з'являється найгостріша потреба у громадянській криптографії.

Серед вимог, які висуваються до шифрів, головними є *ефективність* (шифрування і дешифрування повинні відбуватися швидко) і *надійність* (зловмисник не повинен встигнути зламати шифр за той час, доки зашифрована інформація має лишатися таємною). Позаяк одночасно і повністю ці вимоги задовольнити не вдається, при виборі конкретного шифру доводиться шукати компромісу. В одних випадках термін засекреченості інформації (наприклад, біржової) вимірюється кількома годинами чи навіть хвилинами, тому на шифрування і передачу відводяться лічені секунди. У той же час деякі державні чи комерційні таємниці повинні зберігатися десятиліттями, зате можна не поспішати при шифруванні.

Криптографія — це галузь, яка вивчає тайнопис (криптографію) та методи її розкриття (криптоаналіз), яка за влучним висловом Рональда Ривеста, професора — Массачусетського технологічного інституту — і одного з авторів знаменитої криптосистеми RSA, є повитухою всієї «computer science» взагалі.

Побудова сучасної криптології як науки грунтується на сукупності фундаментальних понять і фактів математики, фізики, теорії інформації та складності обчислень, природно дуже складних для всебічного і глибокого осмислення навіть професіоналами. Однак, незважаючи на органічно притаманну їй складність, багато теоритичних досягнень криптології, зараз широко використовуються в нашому насиченому інформаційними технологіями житті, наприклад: в пластикових smart-картки, в електронній пошті, в системах банківських платежів, при електронній торгівлі через Internet, в системах електронного документообігу, при веденні баз даних, системах електронного голосування та ін.

З іншого боку, саме загальна потреба і широкий спектр можливостей практичного використання стимулюють теоретичні та прикладні дослідження не тільки в цій галузі знань і у відповідних галузях математики, фізики, теорії інформації та теорії обчислень, але також наполегливо спонукають до вдосконалення юридичних та правових норм і механізмів на державному, міжнародному і загальнолюдському рівні, що часто породжує відкриті обговорення в пресі або палкі дебати в парламентах різних країн, і навіть змушують обговорювати пов'язані з цим питання на наради глав великих держав.

Дана робота присвячена вивченню проблеми практичної реалізації алгоритмів криптосистем з відкритим ключем та побудови програм реалізацій алгоритмів таких криптосистем засобами середовища програмування Lazarus.

Об'єкт дослідження — криптографічні системи з відкритим ключем.

Предмет дослідження — криптографічні протоколи та математичний апарат, які дозволяють реалізовувати криптографічні алгоритми з відкритим ключем на основі поняття однонаправленої функції.

Мета дослідження полягає у вивченні криптографічних систем з відкритим ключем та реалізація навчальних варіантів таких систем засобами середовища програмування Lazarus.

У 1976 році американці Уітфілд Діффі та Мартін Геллман (Diffi W., Hellman M.) в статті «Нові напрямки в криптографії» запропонували новий принцип побудови криптосистем, які не вимагають не тільки передачі ключа приймаючому сповіщення, але й збереження в тайні методу шифрування. Ці шифри дозволяють легко зашифрувати та дешифрувати текст і їх дозволяється використовувати багато разів.

В 1974 році Меркл (Merkle) винайшов механізм узгодження криптографічного ключа шляхом явних асиметричних обчислень, які отримали назву головоломка Меркла. Асиметричність головоломки Меркла полягає в тому, що її обчислювальна складність для законних учасників протоколу узгодження ключа і для перехоплювачів зовсім різна: легальні учасники легко проробляють обчислення, а нелегальні — ні. Головоломка Меркла представляє собою першу ефективну реалізацію однонаправленої функції з секретом.

Тільки зараз стало відомо, що Кокс (Cocks), британський криптограф, винайшов першу криптосистему з відкритим ключем в 1973 році. Алгоритм щифрування Кокса, який отримав назву *алгоритму з несекретним ключем шифрування*, використовує складність розкладу цілого числа на прості множники і співпадає з системою RSA. Тільки в 1997 році група з електронного захисту засобів зв'язку розсекретила алгоритм Кокса.

В 1978 році Р. Рівест, А. Шамір и Л. Адлеман (R.L.Rivest, A.Shamir, L.Adleman) запропонували приклад функції, яка має ряд гарних властивостей. На її основі була побудована реально використовувана система шифрування, ця криптоситсема отримала назву RSA (по першим літерам прізвищ авторів).

Основні означення та зауваження

Поняття *однобічної функції* введене в 1975 Діффі і Геллманом. Під цим розуміється таке бієктивне відображення $f : X \to Y$, що значення $f(x)$ обчислюються «легко», а для випадково вибраного y значення оберненої функції $f^{-1}(y)$ обчислюється «важко». Іншими словами, *однобічною* називається функція $f : X \to Y$, яка задовольняє такі дві умови:

а) існує поліноміальний алгоритм обчислення $f(x)$;
б) не існує поліноміального алгоритму інвертування функції $f(x)$ (тобто знаходження якого–небудь розв'язку рівняння $f(x) = y$ відносно x).

Часом вимагають більше: для майже всіх випадково вибраних y «важко» знайти навіть яку-небудь часткову характеризацію $x = f^{-1}(y)$.

Більш строге означення виглядає наступним чином. Нехай Σ — скінченний алфавіт. Для довільної функції $f : \Sigma^* \to \Sigma^*$ через $m(n)$ позначимо найменше m, для якого $f(\Sigma^n) \subseteq \bigcup_{i=1}^{m} \Sigma^i$. Функція f називається *чесною*, якщо існує такий поліном $p(n)$, що $p(m(n)) \geqslant n$ для всіх n.

Чесна функція f називається *однобічною*, якщо

а) існує поліноміальний алгоритм обчислення $f(x)$;

б) які б поліном $p(n)$ і поліноміальну ймовірносну машину Тьюрінґа A ми не взяли, для всіх достатньо великих n і випадково вибраного слова $x \in \Sigma^n$ виконується нерівність

$$\mathbf{P}\{f(A(f(x))) = f(x)\} < 1/p(n)\,.$$

Друга умова означає, що кожна поліноміальна ймовірносна машина Тьюрінґа може знайти який–небудь розв'язок рівняння $f(x) = y$ лише із зникомою ймовірністю. А «чесність» потрібна, щоб функція f не занадто «стискала» вхідні дані (якщо y набагато коротше за x, то машині може просто не вистачити часу, щоб виписати розв'язок x).

До нинішнього часу для жодної функції немає строгого доведення її однобічності.

1–й конкретний приклад «практично» однобічної функції запропонував Purdy в 1974 р. — це функція $f : \mathbb{Z}_p \to \mathbb{Z}_p$, де $p = 2^{64} - 59$, а $f(x)$ має вигляд

$$f(x) = x^{2^{24}+17} + a_1 x^{2^{24}+3} + a_2 x^3 + a_3 x^2 + a_4 x + a_5,$$

де $a_1, \ldots, a_5$ — довільні 19-цифрові числа.

Для існування стійких (з обчислювальної точки зору) криптосистем з відкритим ключем необхідне існування однобічних функцій.

Під *шифром* (або *криптосистемою*) будемо розуміти сукупність *алгоритму шифрування* E і *алгоритму дешифрування* D разом із певною родиною (простором) так званих *ключів*. Алгоритми шифрування і дешифрування визначають загальну структуру шифру, а ключ задає конкретні параметри цієї структури. Наприклад, у шифрі циклічного зсуву ключем є величина зсуву.

Ключ k складається з двох компонент: ключа шифрування k_1 і ключа дешифрування k_2. У симетричних криптосистемах зв'язок між компонентами настільки простий (наприклад, у шифрах перестановки це дві взаємно обернені підстановки), що зазвичай вказують лише першу з них. Однак в асиметричних криптосистемах відновлення однієї компоненти за іншою є складною математичною задачею.

Якщо *криптотекст* c одержується в результаті застосування до відкритого повідомлення m алгоритму шифрування E з ключем k, то пишемо $c = E_k(m)$. Аналогічно запис $m = D_k(c)$ означає, що повідомлення m одержане з криптограми c за допомогою алгоритму дешифрування D з ключем k.

Асиметричними називаються криптосистеми, в яких для шифрування і дешифрування використовуються різні ключі, причому ключі пов'язані таким чином, що визначення одного з них за відомим іншим є з обчислювальної точки зору дуже важкою задачею. Тому один із ключів можна не тримати в таємниці і зробити загальнодоступним (звідси — інша назва таких криптосистем: *криптосистеми з відкритим ключем*). Системи з відкритим ключем шифрування використовуються головним чином для передачі секретної інформації, а з відкритим ключем дешифрування — для різних протоколів ідентифікації абонентів і підтвердження аутотентичності повідомлень.

Асиметрична криптосистема визначається трьома алгоритмами. Це

а) алгоритм K генерації ключів (на вхід подається випадкове число або набір символів r, на виході одержуємо пару $(k_1, k_2) = K(r)$, яка складається з ключа шифрування k_1 і ключа дешифрування k_2). Один з цих ключів розголошується і є відкритим, інший є секретним і тримається в таємниці;
б) алгоритм шифрування E_{k_1} і
в) алгоритм дешифрування D_{k_2}.

Очевидно, що для будь–якого відкритого тексту m має виконуватися рівність $D_{k_2}(E_{k_1}(m)) = m$. Усі три алгоритми є відкритими і загальнодоступними.

Недоліком асиметричних систем є набагато менша, ніж у симетричних, швидкість шифрування–дешифрування. Тому у випадках великих об'ємів конфіденційної інформації вони часто використовуються лише для створення чи шифрування перед передачею відкритим каналом зв'язку секретних ключів, які потім використовуються в симетричних системах.

Основна частина

Основні задачі, для розв'язання яких використовуються криптосистеми з відкритим ключем:

1. Забезпечення *конфіденційності* інформації при її пересиланні.
2. Підтвердження *цілісності* або *аутентичності* (тобто що повідомлення не було підмінене чи сфальшоване під час пересилання).
3. *Ідентифікація* (підтвердження, що повідомлення було вислане саме вказаним адресатом).
4. Запобігання можливості відмови учасника інформаційного обміну від переданого повідомлення.
5. Обмін секретними ключами (зокрема, для користування криптосистемами із секретними ключами).
6. Жеребкування на відстані.

7. Поділ таємниці (наприклад, стартового коду балістичної ракети).
8. Доведення без розголошення.
9. Створення систем гасел для контролю повноважень при доступі до даних.

Ці завдання розв'язуються за допомогою спеціальних *протоколів*, тобто процедур, які вказують послідовність і тип повідомлень, якими обмінюються між собою адресати.

Основною метою дослідження є побудова учбових протоколів криптосистем з відкритим ключем (асиметричних систем) та програмна реалізація цих протоколів криптосистем засобами середовища програмування Lazarus. Основною задачею була побудова бібліотеки обробки цілих чисел великої розмірності, побудова арифметичних процедур обробки цілих чисел, в записі яких використовується досить значна кількість цифр.

В якості учбових протоколів криптосистем з відкритим ключем для їх вивчення були вибрані:

а) протокол обміну ключами Діффі-Геллмана;
б) протокол RSA;
в) протокол Ель-Гамаля;
г) протокол Рабіна.

Опишемо більш досконало тільки RSA – протокол.

Спеціалісти-комп'ютерщики із Массачусетського технологічного інституту Рональд Л. Райвест, Аді Шамір і Леонард Адлеман (R.L.Rivest, A.Shamir, L.Adleman) розробили метод, який дозволяє реалізувати систему Діффі – Геллмена на основі використання простих чисел – метод отримання цифрових підписів і комерційних криптографічних систем – RSA шифр.

Розглянемо основні кроки протоколу **криптосистеми $\boldsymbol{RSA}$**.

Алгоритм генерування ключів. Вибирають два досить великі прості числа p і q. Тоді для $n = p \cdot q$ значення функції Ойлера дорівнює $\varphi(n) = (p-1)\cdot(q-1) = n - p - q + 1$. Далі випадковим чином вибирають число e, яке не перевищує $\varphi(n)$ і взаємно просте з ним. Для e, використовуючи алгоритм Евкліда, знаходять елемент d такий, що $d < \varphi(n)$ і $ed \equiv 1(\mathrm{mod}\ \varphi(n))$, тобто елемент d – обернений до елемента e в мультиплікативній групі $\mathbb{Z}^*_{\varphi(n)}$.

Відкритим ключем є числа n та e.

Таємним ключем є d, p, q.

Алгоритм шифрування. Шифрування відбувається блоками так, щоб кожен блок позначав число, яке не перевищує n. Алгоритм шифрування E полягає у піднесенні M до степеня e за модулем n: $C = E(M) = M^e \pmod{n}$.

Алгоритм дешифрування D полягає у піднесенні C до степеня d за модулем n, тобто $M = D(C) = C^d \pmod{n}$.

Для ілюстрації свого методу Райвест, Шамір і Адлеман зашифрували деяку фразу, для чого спочатку перетворили її у цифрову форму x, замінюючи букву a англійського алфавіту на 01, букву b – на 02 і т.д., букву z – на 26, пропуск між словами – на 00, а потім зашифрували описаним алгоритмом з

$$n = 114381625757888867669325779976146612010218296721242362562561842935706935245733897830597123563958705058989075147599290026879543541$$

і $e = 9007$, причому було відомо, що прості числа p і q були, відповідно, 64 і 65-цифровими. Першому, хто дешифрує криптотекст

$$C = 9686961375462206147714092225435588290575999112457431987469512093081629822514570835693147662288398962801339199055182994515781515 4$$

було обіцяно винагороду в 100 доларів США. Тільки через 17 років у 1994 р. Аткінс, Графф Ленстра і Лейленд (D.Atkins, M.Graff, A.K.Lenstra, P.C.Leyland) дешифрували цю фразу (числа p та q виявилися таким:

$$p = 3490529510847650949147849619903898133417764638493387843990820577,$$

$$q = 32769132993266709549961988190834461413177642967992942539798288533,$$

а вихідне повідомлення було досить безглуздою фразою «the magic words are squeamish ossifrade». Дешифрування зайняло 220 днів і задіяно було близько 1600 комп'ютерів, об'єднаних сіткою Internet.

Проаналізуємо питання стійкості системи *RSA*. У процесі зламання *RSA* шифру криптоаналітику необхідно розв'язувати наступну задачу: відомо числа e, n, C, де n є добутком двох невідомих простих чисел p та q, і НСД$(e, \varphi(n)) = 1$. Потрібно знайти таке число x, що $x^e \equiv C \pmod{n}$. На даний момент не існує ефективного алгоритму для розв'язання цієї задачі, але і не доведено, що такого алгоритму не існує. Цю задачу можна звести до наступної: за відомими e, n, де $n = pq$ (p та q невідомі) і НСД$(e, \varphi(n)) = 1$, знайти таке d, що для всіх цілих x виконується $x^{ed} \equiv x \pmod{n}$, яка, у свою чергу, призводиться до обчислювання $\varphi(n)$. Останню задачу можна розв'язувати або використовуючи факторизацію модуля $n = pq$, або спробувати обійтися без розкладу на прості множники.

Задача розкладу натурального числа на прості множники (*задача факторизації*) еквівалентна задачі пошуку хоча б одного простого дільника числа n

і такого ефективного алгоритму також так і не знайдено. Звичайно можна перебирати всі прості множники числа до $\sqrt{n}$. Але, наприклад, для числа, яке записується 100 десятковими цифрами, знайдеться не менше $4 \cdot 10^{42}$ простих чисел, що не перевищують $\sqrt{n}$. Комп'ютеру, що виконує мільйон ділень за секунду (при навіть дуже грубій оцінці) потрібно буде не менше, ніж 10^{35} років. Відомі і більш ефективні способи розкладу цілих чисел на множники, але і вони працюють дуже повільно. Так, на сьогодні найефективніші алгоритми факторизації потребують часу $\exp c\sqrt{\ln n \ln\ln n}$. На межі сучасних можливостей є факторизація чисел із 150 десятковими цифрами. Серед останніх досягнень у цій області можна згадати про успіх Ленстра та Монассі, які розклали 155-значне число на три простих числа. Для цього вони використали 1000 об'єднаних ЕОМ та шість тижнів їх машинного часу. Обчислення здійснювалися за допомогою алгоритму англійського математика Дж. Полларда. Факторизація чисел із більшою кількістю цифр – задача майбутнього. Тому числа p та q вибирають:

1) достатньо великими (не менше 100 десяткових знаків), не дуже близькими одне до одного, але, у той же час, щоб вони не дуже відрізнялися одне від одного;

2) p і q повинні бути такими, щоб найбільший спільний дільник чисел $p-1$ і $q-1$ був невеликим, наприклад, 2;

3) p та q повинні бути сильно простими числами (натуральне число називається сильно простим, якщо число, яке більше за нього на одиницю, має великий простий дільник, число, яке менше за нього на одиницю, також має великий простий дільник, причому, якщо від цього останнього простого дільника відняти одиницю, то отримаємо число, яке також має великий простий дільник.

Якщо хоча б одна із умов не зберігається, то існують досить ефективні алгоритми факторизації числа n.

Спроби обійтись без факторизації призводять до наступної задачі: за відомими e, n, де $n = pq$ (p та q невідомі) і НСД$(e, \varphi(n)) = 1$, знайти таке число d, що $ed - 1$ ділиться на $\psi(n)$, де $\psi(n) =$НСК$(p-1, q-1)$. Еквівалентність цієї і вихідної задач випливає із того, що якщо $n = pq$, де p, q – різні прості числа, то $x^t \equiv x \pmod{n}$ для всіх цілих x тоді і тільки тоді, коли $t \equiv 1 \pmod{\psi(n)}$. При знаходженні такого d, що $ed - 1$ ділиться на $\psi(n)$, число $m = ed - 1$ використовується для факторизації n за допомогою так званої ймовірнісної процедури. І знову приходимо до такої ж складної обрахункової задачі, як і факторизація числа.

Висновки

Досліджено алгоритми побудови учбових протоколів криптосистем з відкритим ключем, також досліджено криптостійкість таких протоколів. Досліджено проблеми реалізації алгоритмів обробки чисел зі значною кількістю цифр в записі.

Література

1. *Алферов А.П.* Основи криптографії / А.П. Алферов, А.Ю.Зубов, А.С.Кузьмин, А.В. Черемушкин. — М.: Гелиос АРВ, 2002. — 480 с.
2. *Виноградов И.М.* Основы теории чисел / И.М. Виноградов. — М.: Наука, 1981. — 176 с.
3. *Ахо А.* Построение и анализ вычислительных алгоритмов / А. Ахо, Дж. Хопкорофт, Дж. Ульман. — М.: Мир, 1979. — 536 с.
4. *Василенко О.Н.* Теоретико-числовые алгоритмы в криптографии / О.Н. Василенко. — М.: МЦМО, 2003. — С. 43–48.
5. *ElGamal T.* A public key cryptosystem and a signature scheme based on discrete logaritms / T. ElGamal // IEEE Transactions on Information Theory. — Vol. 31, 1985. — P. 469–472.
6. *Merkle M.H.* Hidding information and signatures in trapdoor knapsacks / M.H. Merkle, M.E. Hellman // IEEE Transactions on Information Theory. — Vol. 24, 1978. — P. 525–530.

УДК 373.5

Головатюк В.С., Мельник Е.О., Пилипенко А.С., Пилипенко В.Ю.

[1] *студентка 5 курса физико-математического факультета, ГВУЗ «ДГПУ»*

[2] *студентка 4 курса физико-математического факультета, ГВУЗ «ДГПУ»*

[3] *учитель информатики Славянской ООШ I-III ступеней №10*

[4] *старший преподаватель кафедры алгебры, ГВУЗ «ДГПУ»*

e-mail: vladislav.pilipenko@gmail.com

ОСОБЕННОСТИ И ПРОБЛЕМЫ ПЕРЕХОДА УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ НА СВОБОДНОЕ ПРОГРАММНОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ

В работе рассматриваются вопросы внедрения свободного ПО в учебный процесс, сложности в использовании, адаптации учеников и преподавателей. Приведены основные шаги для перехода на свободное ПО с минимальными потерями.

Ключевые слова: *программное обеспечение, свободное программное обеспечение, переход, внедрение, использование.*

Вступление

За более чем полувековую историю развития вычислительной техники программное обеспечение развилось от вспомогательного компонента до самостоятельной индустрии, способной направлять развитие не только науки и техники, но и человеческой цивилизации в целом.

В современных условиях программное обеспечение является неотделимой частью и одной из наиболее важных опор для построения глобального информационного общества, поэтому в современном мире появились и активно развиваются такие феномены, как «свободное программное обеспечение» и «программное обеспечение с открытым исходным кодом».

Свободное программное обеспечение (далее СПО) является лицензионным так же, как любые коммерческие продукты, распространяемые под несвободной лицензией. Законность использования СПО подтверждается присоединением пользователя к публичному лицензионному соглашению, которое доступно в сети Интернет. На сегодняшний день существуют полноценные аналоги практически всех закрытых платных программ: операционные системы, пакет офисных приложений, антивирусное программное обеспечение, архиваторы, средства разработки, графические редакторы, программное обеспечение для обработки фотоизображений, продукты для автоматизации процесса управления организацией и многое другое. Разработкой СПО занимаются как крупные компании-разработчики, так и отдельные группы программистов по всему миру.

Свободное программное обеспечение, в любом случае, может свободно устанавливаться и использоваться на любых компьютерах. Использование такого ПО свободно везде: в школах, офисах, вузах, на личных компьютерах и во всех организациях и учреждениях, оно может использоваться в любых целях, включая коммерческие, совершенно безвозмездно, его использование регулируется лицензионными соглашениями, устанавливающими объем прав и обязанностей правомочного пользователя программы. Условия так называемой свободной лицензии действуют по всему миру и дают пользователю значительный объем прав, но при этом могут вступать в противоречие с действующим законодательством в каждой отдельной стране.

Основная часть

Использование СПО расширяет информационное пространство образовательного учреждения свободного от лицензий и других отчислений, и ориентировано для создания динамической учебной среды между преподавателем и учеником.

Но имеются причины, касающиеся непосредственно школ. Во-первых, свободное программное обеспечение позволяет сохранять бюджетные деньги. Кроме того, все программное обеспечение, установленное в школе, должно быть доступно для копирования ученикам, чтобы они могли брать его домой и передавать другим.

Приобщение учеников к использованию свободного программного обеспечения и участию в жизни сообщества свободного программного обеспечения — практический урок общественной жизни.

Грамотное и эффективное внедрение СПО — комплексный процесс, который заключается не только в самой установке дистрибутивов. Прежде всего, необходимо провести анализ IT-инфраструктуры школы, инвентаризацию имеющихся лицензий на программное обеспечение, перераспределение аппаратного обеспечения и бессрочных лицензий на проприетарные (полусвободные) программы в зависимости от потребностей школы, выбрать наиболее подходящий дистрибутив СПО, учитывая задачи и специфику конкретного учреждения, а также особенности оборудования.

При этом необходимо понимать, что после установки и настройки СПО школе необходима поддержка.

На сегодня в школе, как и в некоторых других сегментах рынка, преобладают закрытые операционные системы и платформы (MS-DOS, Windows), и прикладные программные продукты (Microsoft Office, Photoshop, CorelDraw и др.) Школьные программы и учебники разработаны с учетом платного ПО, однако денежных средств для школ на их приобретение не предусмотрено.

Если учитывать, что во многих офисах различных фирм из платного ПО используется только ОС Windows и антивирусные программы, а остальные заменяются свободно-распространяемыми, то обучение школьников этим программам становится актуальным.

При установке Linux-систем не возникает никаких сложностей, она устанавливается без проблем и нареканий. В некоторых сборках вместе с программным обеспечением.

Огромным преимуществом является практическое отсутствие компьютерных вирусов для этой операционной системы. Но существует несколько сложностей при переходе на операционную систему Linux, с которыми можно столкнуться в процессе перехода на СПО:

- проблемное подключение интерактивных досок, установка для них программного обеспечения под ОС Linux;
- большое количество образовательных учебных ресурсов на оптических носителях, выпущенных специально под различные версии операционных систем Windows, которые требуют обращения к диску;
- условная сложность при настройке периферийного оборудования;
- неготовность некоторых преподавателей переучиваться к применению новой операционной системы, разорвать стереотипы, хотя меню этих альтернативных программ с платными версиями практически идентичны.

Переходить или не переходить на свободное программное обеспечение, это самостоятельное решение администрации образовательного учреждения или каждого гражданина, но использовать в качестве альтернативного варианта другую операционную систему, кроме Windows, в современном обществе просто необходимо.

В настоящее время переход на свободное и открытое программное обеспечение является не только «идеей» и методом экономии денежных средств, но и насущной необходимостью. Аналитики разного уровня признали свою ошибку в недооценивании масштаба использования такого ПО и вынуждены констатировать его бурный рост.

Для решения поставленной задачи необходимо следовать определенной методике, которая позволит осуществить переход с минимальными потерями.

Вот ее основные шаги:

1. Обследование существующего положения в учебном заведении.
2. Выработка концепции перехода.
3. Специализированные структуры по внедрению и поддержке СПО.
4. Проведение обучения преподавателей и сотрудников.
5. Составление плана поэтапного внедрения СПО в учебный процесс.
6. Переход.

Свободное программное обеспечение целесообразно использовать на уроках информатики, в профильном обучении, на занятиях по программам дополнительного образования. Анализ учебных программ профильного обучения показывает, что одним из распространенных направлений является программирование.

Как правило, учитель стремится использовать современные языки и системы программирования, при этом возникает необходимость выбора и приобретения ПО. И поскольку о финансировании со стороны государства вообще и отделов образования в частности пока речи не идет, то проблема приобретения лицензионного ПО остается открытой. Использование СПО позволяет снять указанную проблему.

В пакете СПО поставляются несколько систем программирования (в том числе Kdevelop, Lazarus, Gambas на языках C++, Pascal, BASIC соответственно), что дает положительный эффект в использовании СПО при возможности выбора языка программирования.

Второй момент, СПО позволяют ученикам узнать, как работает программное обеспечение потому, что исходный код у него является открытым, в отличие от ОС Windows и ПО Microsoft, где исходный код закрыт. Ученикам предоставляется возможность читать исходный код программ, которые они используют каждый день.

Все это может способствовать правильному определению дальнейших жизненных планов и выбору профессии.

Все вышеперечисленное дает положительный эффект применения СПО в образовании.

Выводы

Анализ литературы показал, что в последние годы актуальными становятся вопросы применения свободного программного обеспечения в образовании. Свободное программное обеспечение становится распространенной моделью бизнеса, инструментом для проведения научных исследований и поддержки учебного процесса, носителем передовых технологий и экспериментальной площадкой для инноваций.

На наш взгляд, использование свободного программного обеспечения является прекрасной альтернативой, значительно расширяющей не только возможности преподавания информатики в школе, но и использование этого ПО в профессиональной деятельности педагогов.

Литература

1. Переход с Windows на Linux. Д. Аллен, Э. Скотт, Г. Дьюис, Дж. Стайл, Т. Такк. — Русская Редакция, БХВ Петербург, 2005. — 478 с.
2. *Маттиас Калле Далхаймерб, Мэтт Уэлш* — Запускаем Linux. — Символ-Плюс, 2008. — 992 с.
3. *Пилипенко В.Ю.* Потенціал мультимедійних технологій у навчальному середовищі вищої школи // Духовність особистості: методологія, теорія і практика. — Луганськ, 2013. — С. 157–168.

УДК 373.5

Головатюк В.С., Пилипенко В.Ю., Пилипенко Г.С., Шевцова К.С.

[1] *студентка 5 курсу фізико-математичного факультету, ДВНЗ «ДДПУ»*

[2] *старший викладач кафедри алгебри, ДВНЗ «ДДПУ»*

[3] *вчитель інформатики Слов'янської ЗОШ I-III ступенів №10*

[4] *студентка 4 курсу фізико-математичного факультету, ДВНЗ «ДДПУ»*

e-mail: vladislav.pilipenko@gmail.com

КОМП'ЮТЕРНА МЕРЕЖА НАВЧАЛЬНОГО ЗАКЛАДУ ЯК ЗАСІБ ПІДВИЩЕННЯ ЕФЕКТИВНОСТІ ЙОГО ДІЯЛЬНОСТІ

У статті досліджується вибір підходів для впровадження та використання комп'ютерної мережі і програмного забезпечення в навчальний процес в загальноосвітній школі для досягнення ефективного навчання школярів та взаємної співпраці між учителями та учнями для більш ефективного викладання матеріалу.

Ключові слова: *мережа, комп'ютерна мережа, програмне забезпечення, навчальний процес, загальноосвітня школа.*

Вступ

Галузь інформаційних технологій є однією з багатьох у світі, що динамічно розвиваються. Розвиток і широке застосування інформаційних технологій будь-якими прошарками суспільства є глобальною тенденцією світового розвитку. Їх використання має рішуче значення для підвищення рівня життя громадян і конкурентноздатної національної економіки, розширення можливостей її інтеграції в світову економічну систему, зростання ефективності державного управління і місцевого самоврядування.

Разом з тим, інформаційні технології мають велике значення і в житті звичайної людини, заперечувати це вже ніхто не буде. Інформаційні технології стимулюють розвиток різноманітних галузей діяльності людини.

На цей час інформаційні технології — це засоби обміну інформацією, отримання останніх новин в сучасному світі, так саме потоки інформації та їх технічне виснаження, які використовуються для роботи та навчання. Основними засобами інформаційних технологій на сьогоднішній день є інтернет, телебачення, радіомовлення і, звичайно, мобільний зв'язок.

Однак, унікальним явищем сучасності виступає всесвітня мережа Інтернет, до основних функцій якої належать пізнавальна, розважальна і комунікативна.

Слід зазначити той факт, що широке входження інтернету в життя і побут людини відбувалося набагато швидше масового засвоєння таких засобів як телебачення, радіо, мобільний зв'язок.

Значення роботи полягає в тому, щоб показати корисний вплив комп'ютеризації на якість навчання дітей в школі, легкості доступу до інформації у вчителів і підтримання зв'язку через комп'ютерну мережу між викладачами, дирекцією для контролю над процесом навчання і виховання учнів, що є важливим фактом для формування знань у підростаючого покоління.

Основна частина

Досвід проведення впровадження мережевого програмного забезпечення в ЗОШ №10 м. Слов'янська. Проект по введенню локальної мережі в школі був затверджений і почав діяти у 2013 році.

Для початку була зібрана педагогічна рада, на якій було проведено бесіду з учителями щодо впровадження мережевого забезпечення у школі, де педагогам пояснили переваги і можливості мережевого програмного забезпечення. Вони були готові до таких змін, бо нещодавно підтвердили володіння комп'ютерною технікою на високому рівні, прийнявши активну участь у державній цільовій програмі впровадження ІКТ у навчально-виховний процес «100 відсотків».

Педагогічному колективу було пояснені цілі і задачі даного впровадження. Було зазначено, що шкільні комп'ютери будуть знаходитись по всій школі: у кабінеті директора, заступників директора з НВР та АГЧ, практичного психолога, в учительській, бібліотеці та предметних кабінетах. Всі вони будуть поєднані локальною мережею, за допомогою якої буде здійснюватись технічна підтримка навчальної, виховної та господарчої діяльності школи, в такому випадку мережа буде технічною основою інформаційної бази школи.

Взагалі-то в шкільних комп'ютерних класах найчастіше за все використовується організація локальної мережі за допомогою сервера. Його функція — зберігання і розсилка файлів з програмним забезпеченням, з даними, необхідними для організації навчального процесу. У сервера будуть обмежені варіанти доступу: для директора та адміністратора — повний доступ до інформації, для всіх інших — звичайний. Доступ обмежений паролем. У школярів — вільний доступ без пароля до ще більш обмеженого об'єму інформації. Учні працюють за робочими станціями. Плюс в тому, що звичайно, всі учні можуть обмінюватись файлами, але всі вони будуть проходити через сервер.

Наступним кроком був інструктаж щодо користування мережею. Всьому персоналу запропоновано програмне забезпечення, за допомогою якого можливо проводити онлайн-конференції, сеанси чату, зберігати всю інформацію у сервері-сховищі. Це, як показує практика, дуже зручно для використання мережі великою кількістю людей. За деякий час вся інформація була внесена до бази і запропонована для користування під особливим варіантом доступу — обмежений паролем та іменний доступ кожного з користувачів. В цю електронну базу увійшли як всі методичні матеріали, відомості про всіх працівників школи, так і нормативно-правова база, основні накази та документи.

Чати будуть корисні, щоб повідомити про пригоди і різні ситуації директора та адміністрації. Це ж набагато швидше відправити повідомлення: «Шановний пане директор, зайдіть, будь ласка до 10-Б», не покидаючи клас, ніж покидати аудиторію і йти в кабінет до директора. Взагалі то даний підхід є дуже корисним для економії часу і більш ефективного виховання та навчання учнів. Ще позитивним моментом є легкість звітування перед батьками щодо успішності та навчання учнів.

Висновки

В ході проведених досліджень ми з'ясували, що мережа Інтернет дозволяє найбільш широко використовувати інформацію наукового, ділового, пізнавального і розважального характеру. Передача даних за допомогою мережі Інтернет можлива на будь-які відстані і з відмінною якістю.

Розглянули переваги і недоліки локальної мережі. Вона об'єднує комп'ютери, встановленні в одному приміщенні або в одній будівлі. І з'ясували, що встановлена в школі локальна мережа є дуже зручною і вигідною, не потребує щомісячної оплати і є теж дуже функціональною для шкільних потреб.

Локальна мережа може об'єднувати декілька комп'ютерів і давати можливість користувачам спільно використовувати ресурси комп'ютерів, а також підключених до мережі периферійних пристроїв.

Встановлена локальна мережа дає змогу використовувати спеціальне програмне забезпечення для організації чатів, відеоконференцій. Створення електронного сховища інформації дозволяє всім комп'ютерам мати доступ до інформації закладу. Чати дозволяють мати зв'язок між педагогами в різних кабінетах. За допомогою відеоконференцій у локальній мережі з'являється можливість проведення педагогічної ради, коли вчителі знаходяться у різних кабінетах.

Виконуючи цю роботу, ми з'ясували, як і яке потрібно використовувати програмне забезпечення для локальної мережі і як можливо покращити навчання та виховання дітей в школі за допомогою комп'ютерної мережі.

Використовуючи досвід введення комп'ютерної мережі в загальноосвітній школі, ми зробили висновок, що введення комп'ютерної мережі в користування педагогічного колективу школи покращує, дисциплінує і організовує взаємну діяльність педагогів, результатом якої є саме те, до чого ми прагнемо, а саме — якісні знання учнів. Бо якісні знання учнів — найбільша нагорода для будь-якого вчителя-патріота своєї справи!

Література

1. *Куроуз Дж., Росс К.* Компьютерные сети. 2-е изд. — СПб.: Питер, 2004. — 765 с.
2. *Олифер В.Г., Олифер Н.А.* Компьютерные сети. Принципи, технологии, протоколы: Учебник для вузов. 4-е изд. — СПб,: Питер, 2010. — 944 с.
3. *Велихов А.В., Строчников К.С., Леонтьев Б.К.* Компьютерные сети: Учебное пособие по администрированию локальных и объединенных сетей. — 2-е изд. — М. Познавательная книга Пресс, 2004. — 320 с.
4. *Рустамян О.М.* Психологічні аспекти впровадження інформаційно-комунікаційних технологій в навчально-виховному процесі // Інформаційно-комунікаційні технології навчання: психолого-педагогічні та дидактичні аспекти впровадження: матеріали обласної науково-практичної Інтернет-конференції, Кіровоград, 13 квітня 2011 р. // Упоряд. Л.Голодюк. — Кіровоград, 2011. — 81 с.
5. *Жук Ю.О.* Деякі психолого-педагогічні проблеми використання засобів нових інформаційних технологій у навчальному процесі середнього закладу освіти // Комп'ютер у школі та сім'ї. — №4, 2008. — С. 7–10.

УДК 378:004.77

Федоренко О.Г.

[1] *асистент кафедри алгебри, ДВНЗ «ДДПУ»*

e-mail: bestbest@ukr.net

ВИКОРИСТАННЯ ХМАРНИХ ТЕХНОЛОГІЙ ДЛЯ ОРГАНІЗАЦІЇ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ МАЙБУТНІХ ВЧИТЕЛІВ

В роботі визначено основні напрямки організації самостійної роботи майбутніх вчителів з використанням інформаційно-комунікаційних технологій. Зокрема розглядаються хмарні технології, їх переваги та недоліки при використанні в навчальному процесі взагалі і при організації самостійної роботи зокрема.

Ключові слова: *самоосвітня компетентність, хмарні технології.*

Вступ

Сучасний світ неможливо уявити без інформаційної підтримки будь-якої сфери людської діяльності. Інформаційні технології привнесли в наше життя не тільки зручність, динамізм та обізнаність, але й вимагають від нас перебудови нашої діяльності задля їх ефективного та гармонійного використання. А тому, проблема підготовки всіх без винятків суб'єктів інформаційно-комунікаційних технологій є однією з головних завдань сучасної освіти на будь-якому рівні. Поява в початковій освіті такого навчального предмету як «Сходинки до інформатики», перш за все, несе в собі мету розуміння учнями основ самої інформатики та основ інформаційно-комунікаційних технологій (ІКТ). ІКТ — це ті технології, які будуть допомагати їм в подальшому навчанні на будь-якому освітньо-кваліфікаційному рівні. А отже, наступна задача полягає в тому, щоб підготувати до професійної діяльності майбутніх учителів, яким необхідно буде навчати вже інформаційно обізнаних учнів. Для розв'язку цієї проблеми існує велика кількість підходів методичного характеру, які тим чи іншим способом формують у майбутніх учителів інформаційно-комунікаційну компетентність.

Велика кількість методів формування інформаційно-комунікаційної компетентності пов'язана з широким використанням в навчанні саме інформаційно-комунікаційних технологій. Використання їх в аудиторній, позааудиторній, дистанційній, а особливо, самостійній формі навчання, дозволяє сформувати не тільки інформаційно-комунікаційну компетентність майбутніх вчителів, а й самоосвітню компетентність, яка є необхідною складовою майбутнього фахівця.

Широке застосування інформаційно-комунікаційних технологій під час навчального процесу надає наочні приклади їх використання, викриває їх позитивні та негативні моменти, перебудовує саму форму навчання.

Яскравим прикладом ІКТ є хмарні технології. Розвиток комп'ютерних мереж, їх ресурсів та сервісів дозволяє створювати не тільки довідкові системи, системи збереження інформації та її пошуку, а також інформаційні системи, які можна використовувати як в професійній, так й в навчальній діяльності. Поява хмарних технологій видозмінила не тільки інформаційно-освітній простір, а й форми подання інформації, до мультимедійних можливостей комп'ютерів додалась масовість інформації, її швидкозмінність та актуальність. Всі наведені якості дозволяють розглядати хмарні технології як суттєвий крок до створення інформаційно-освітнього середовища на будь якому освітньо-кваліфікаційному рівні.

Дослідження форм, методів та задач самостійної роботи розглядали в своїх роботах В. Андрєєва, О. Гавришиної, В. Догонової, С.Єлканова, М. Заборщикової, Е. Мірошниченко, О. Федорової та ін. Питання використання комп'ютерних технологій в навчальному процесі відображено у великій кількості досліджень як вітчизняних так і закордонних фахівців. Зокрема в працях В. Бикова, М. Жалдака, О. Жильцова, Ю. Жука, В. Ізвозчикова, В. Клочко, А. Коломієць, О. Кузнєцова, В. Монахова, Н. Морзе, О. Муковіз, Л. Панченко та ін. розглядається питання використання інформаційно-комунікаційних технологій в навчанні, а в роботах О. Адаменко [4], Г. Алексанян, Л. Панченко та ін. питання використання хмарних технологій в освіті.

Тим не менш, залишається невисвітленим проблема формування самоосвітньої компетентності засобами інформаційно-комунікаційних технологій взагалі та хмарних технологій зокрема.

Мета дослідження полягає у визначенні ролі хмарних технологій для формування самоосвітньої компетентності майбутніх вчителів.

Основна частина

Розвиток комп'ютерних комунікацій дозволив створити з великої кількості розрізнених обчислювальних ресурсів спільну, динамічну, наукомістку систему. Ця система здатна надати не тільки бізнесовій частині користувачів сучасні, потужні та надійні засоби створення інформаційного середовища комерційної діяльності, але й для освітнього сегменту надає сервіси, на основі яких можна створювати інформаційно-освітнє середовище. Поява терміну «хмарні технології» відбулася набагато пізніше створення саме цих технологій. Розрізнену систему послуг, які базувались на технології клієнт-сервер і які використовували в своїй основі гіпертекстовий формат представлення даних, необхідно було об'єднати з маркетингової точки зору та з точки зору стандартизації. Користуючись цими чинниками компанія Google у особі генерального директора Еріка Шмідта проголосила концепцію «cloud computing», в основі якої лежить ідея перенесення основного навантаження по створенню, підтримці, безпеці та обробці ресурсів, які використовуються користувачами, в інформаційну інфраструктуру дата-центрів виробників мережевих сервісів. Хоча перші дослідження з цього питання виконувались ще в 60-ті роки XX ст.

Виділяють п'ять основних характеристик хмарних технологій:

- самообслуговування за вимогою (користувач може отримувати в необхідному об'ємі та керувати необхідними обчислювальними ресурсами без допомоги адміністратора);
- мережева доступність (хмарний сервіс повинен бути доступним з будь-якого пристрою в будь-якій точці світу та в будь-який час);
- вимірювані сервіси (оплачується тільки та обчислювальна потужність, яку користувач дійсно використовує);
- еластичність (можливість моментальної зміни кількості й часу використання обчислювальних ресурсів);
- незалежність від апаратного забезпечення (надання хмарних послуг не повинно залежати від працездатності конкретного апаратного вузла).

Наведені характеристики не тільки визначають, які з технологій можна віднести до хмарних, а які ні, та підкреслюють переваги хмарних технологій. По-перше, це економічна вигода, що випливає з відсутності необхідності підтримувати працездатність власних обчислювальних ресурсів та сервісного обслуговування й оплачувати невикористані ресурси. По-друге, це інформаційна безпека ваших даних, адже для їх збереження використовуються не локальні пристрої збереження даних, а цілі технології безпечного збереження даних. По-третє, це безперебійна доступність, яка виражається не тільки в тому, що хмарні сервіси працюють постійно, а й в тому, що доступ до них виконується на базі будь-якої платформи без обмежень. Таким чином, хмарні технології постають у якості нової платформи для побудови як загальнодоступного так і індивідуального інформаційного навчального середовища.

Початок 21 століття характеризується збільшенням можливостей для навчання. Американський вчений К.Бонк в своїй книзі «Світ відкрито: як веб-технології революціонують освіту» надав 10 ключових трендів відкритого світу, що впливають на освіту [1]. Одним з цих трендів є девіз «Студенти як викладачі», який характеризується тим, що від студентів вимагається більша ініціатива, вони повинні вміти самостійно вивчати матеріал, який буде корисний для їх освіти. Іншими словами, самоосвітня компетентність являє собою той фундамент, що дозволить не тільки підготувати майбутнього фахівця в своїй професійній сфері, а й змінити сутність та форми навчання.

Аналіз досліджень Н. Воропай [2] та О. Ножовніка [3], присвячених аналізу структури самоосвітньої компетентності фахівців різних напрямів дозволяє стверджувати, що процес професійного становлення та самовдосконалення майбутніх фахівців розглядається в єдності чотирьох етапів, а саме:

- мотиваційного (усвідомлення професійної спрямованості процесу саморозвитку);
- когнітивного (оволодіння необхідними знаннями);
- процесуального (планування й реалізація самоосвітньої діяльності);
- контролюючого (оцінка отриманих результатів).

На основі аналізу досліджень вчених стає зрозумілим, що самоосвітня компетентність майбутніх учителів виявляється в процесі взаємодії структурних компонентів: мотиваційно-стимулюючого, інформаційно-змістовного, планово-організаційного та рефлексивного-контролюючого.

Ефективність організації самоосвітньої діяльності майбутніх вчителів з урахуванням змісту навчального матеріалу залежить від наявності умов:

- підготовка викладача (аналіз змісту інформації, вивчення індивідуальних реальних навчальних можливостей, створення динамічних навчальних груп, розробка системи завдань);
- підготовка майбутніх вчителів (сприйняття мети діяльності, позитивне ставлення до неї, оволодіння базисними знаннями з навчального предмету, засвоєння вмінь самоосвітньої діяльності, аналіз і структурування навчального матеріалу, використання адекватних до нього способів діяльності);
- організація самоосвітньої діяльності як системи, що характеризується контролем за процесом та результатами діяльності; взаємодією між суб'єктами навчання, спрямованими на перетворення майбутнього фахівця із об'єкта в суб'єкт навчального процесу.

Для вирішення питання організації самоосвітньої діяльності майбутніх учителів трудового навчання технологічного факультету ДВНЗ «Донбаський державний педагогічний університет» в рамках навчальної дисципліни «Сучасні інформаційні технології» були розроблені завдання для самостійної роботи, що передбачають використання хмарних технологій в якості предмету та засобу навчання. Завдання передбачали виконання загальнодоступними засобами від Google (система пошуку, електронна пошта, контакти, календар, диск, блог) певної низки завдань, які були пов'язані між собою та створювали певне інформаційно-освітнє середовище із заздалегідь вибраної теми, яка стосувалась майбутньої професії.

Слід зазначити, що така форма організації самостійної роботи викликала цікавість не тільки з точки зору вивчення сучасних інформаційних технологій, але й з професійної точки зору, адже студенти створювали для майбутньої професійної діяльності навчальні матеріали. Їх впевненість у тому, що навчальні матеріали, які підготовлені таким чином, будуть більш цікавими, ніж традиційні наочні та підготовлені на паперовій основі, була підкріплена під час проходження навчальної педагогічної практики.

Висновки

Самоосвітня діяльність та, як результат, самоосвітня компетентність є однією з ключових компетентностей майбутнього фахівця. Структура самоосвітньої компетентності передбачає різносторонню діяльність для її формування, а тому будь-який з видів самоосвітньої діяльності підвищує рівень самоосвітньої компетентності. Слід зазначити, що хмарні технології дозволяють з невеликими затратами сформувати інформаційно-освітнє середовище, яке спонукає майбутніх учителів до плідного, цікавого та результативного навчання.

До подальших досліджень слід віднести питання визначення ефективності використання хмарних технологій для організації самостійної роботи майбутніх учителів, а також розробки методичних вказівок з використання хмарних технологій для організації самостійної роботи.

Література

1. *Bonk C. J.* The World is Open: How Web Technology is Revolutionizing Education / Curtis J. Bonk. — San Francisco, CA, USA: Jossey-Bass Inc., 2009. — 480 p.
2. *Воропай Н. А.* Формування самоосвітньої компетентності у майбутніх учителів початкових класів засобами інформаційно-комунікаційних технологій [текст]: дис. ... на здоб. наук. ступеня канд. пед. наук : [спец.] 13.00.04 «Теорія і методика проф. освіти» / Воропай Наталя Анатоліївна; Херсонський держ. ун-т. — Херсон, 2011. — 240 с.
3. *Ножовнік О. М.* Формування самоосвітньої компетенції майбутніх фахівців з міжнародної економіки у процесі вивчення іноземних мов [текст] : автореф. дис. ... на здоб. наук. ступеня канд. пед. наук : [спец.] 13.00.04 «Теорія і методика проф. освіти» / Олег Миколайович Ножовнік ; Київ. ун-т ім. Б. Грінченка. — К., 2011. — 20 с.
4. *Адаменко О. В.* Хмарні технології аналізу даних / О. В. Адаменко, Л. Ф. Панченко // Хмарні технології в освіті : Матер. Всеукр. наук.-метод. сем. — Кривий Ріг : Видавничий відділ КМІ, 2012. — С. 143–144.

УДК 378:004

Гордєєва Н.Л., Величко В.Є.

[1] *студентка 5 курсу фізико-математичного факультету, ДВНЗ «ДДПУ»*

[2] *докторант кафедри ТтаПІ, ДЗ «ЛНУ імені Тараса Шевченка»*

e-mail: gordeyeva_-_natalya@ukr.net, vladislav.velichko@gmail.com

ВИКОРИСТАННЯ СОЦІАЛЬНИХ МЕРЕЖ В УНІВЕРСИТЕТСЬКІЙ ОСВІТІ

В роботі визначено основні напрямки використання соціальних мереж в університетській освіті. Наведені основні переваги використання соціальних мереж та проблеми переосмислення ролі викладача та студента в освітній діяльності при використанні соціальних мереж.

Ключові слова: *електронна освіта, соціальні мережі в освіті.*

Вступ

У 90-ті роки XX століття розвиток Інтернету перетворився на фактор глобального значення. Важливість використання ресурсів і технологій мережі Інтернет в освіті сьогодні не потребує спеціальних доказів. Всі розвинені країни світу мають більш-менш великі програми використання ресурсів мережі Інтернет в сфері освіти. Переважна більшість країн, що розвиваються, незважаючи на труднощі, проблеми і побоювання, прагнуть взяти посильну участь у формуванні світового освітнього співтовариства, що є, по суті, екстериторіальним завданням, і скористатися їхніми можливостями для власного розвитку. При цьому актуальним завданням для кожної країни, і світової спільноти в цілому, стає систематизація та аналіз досвіду використання Інтернету в освіті, як у його позитивному значенні, так і по відношенню до труднощів і небажаних наслідків.

Під загальнодоступними соціальними мережами розуміють спільноти в Інтернеті, які не мають обмежень ні за якими параметрами і не мають ніякої тематичної спеціалізації. Такі соціальні мережі дають можливість досить швидко встановити неформальний контакт. У соціальних мережах люди виявляються більш відкритими, ніж в реальному житті, більшою мірою готовими ділитися інформацією.

У сучасному світі інформаційних технологій способи роботи швидко змінюються, наділяючи великою конкурентною перевагою тих, хто використовує нові інструменти, які пропонують контекстний, швидкий і спрощений обмін інформацією та спосіб співпраці. В освіті одним з таких підходів є E–Learning 2.0. Технологія створення соціальної мережі як моделі навчання [1].

Основна частина

E–Learning 2.0 відноситься до концепції впровадження інструментів і технологій Web 2.0. E–Learning 2.0 – це сукупність технологій і практичних рішень для навчального процесу, яка здатна еволюціонувати разом з навчальним закладом. Завдяки своїй простоті та відкритості підхід E–Learning 2.0 допомагає сфокусувати колективний розум на вирішенні навчальних завдань через компетенції, впорядкувати і оптимізувати створення каналів комунікації викладача зі слухачами та середовища спілкування для студентів.

Відомо, що середньостатистичний студент проводить в онлайнових соціальних мережах від 5 хвилин до 2 годин на день, кожен п'ятий користувач таких мереж витрачає на це більше однієї години на день [2]. Забезпечена зручними інструментами для розміщення, пошуку, класифікації даних і зв'язків між слухачами та об'єктами, соціальна мережа, створена на основі технології E–Learning 2.0 дозволяє вирішувати цілий комплекс завдань, пов'язаних з навчальним процесом і навчанням. А отже постає питання щодо продуктивного використання всіх можливостей соціальних мереж.

Дослідження використання інформаційно-комунікаційних технологій в новітніх формах організації навчального процесу, зокрема дистанційній формі навчання, присвячені дослідження О. Андреєва, С. Архангельского, Т. Гусакової, Н. Кузнецової, В. Кухаренка, В. Олійника, Є. Полат, П. Стефаненка, П. Таланчука, А. Хуторського, Б. Шуневича та ін. Можливостями використання соціальних сервісів в освітньому процесі та їх ролі в формуванні сучасного світогляду досліджені в роботах Є. Бондаренка, М. Григорян, С. Дауна, Е. Диких, Н. Дубової, В. Кухаренка, Г. Можаєвої, Н. Морзе, Є. Патаракіна, Л. Рулиєне, Дж. Сіменса, А. Фещенко, Б. Ярмахова та ін.

Розглянемо основні підходи до використання соціальних мереж при навчанні. Дистанційне навчання сьогодні набуває особливої актуальності, оскільки з розвитком Інтернету і забезпеченістю студентів персональними комп'ютерами та мобільними пристроями поліпшується обмін інформацією як між викладачем і студентами, так і студентів між собою. Все це сприяє активізації та модернізації процесу навчання, а розробка та супровід особистих навчальних ресурсів викладачів або вузівських порталів тільки покращує навчальну діяльність.

У той же час при використанні соціальних мереж у окремих викладачів практично не виникають технічні труднощі з організації навчальної діяльності, а навіть навпаки, працювати в мережі інтуїтивно зрозуміліше ніж в корпоративній системі. Викладач, будучи фахівцем у своїй галузі знань, може відчувати труднощі при створенні або використанні спеціалізованого сайту. Друга складність не завжди сайт для навчання є цікавим і відвідуваним студентами. Практика показує, що студентів дуже важко привчити до використання навчального сайту. Тому існує пропозиція використання як інструменту електронних освітніх технологій вже створені і працюючі соціальні мережі. Які ж переваги дає студентам і викладачам використання соціальних мереж з навчальною метою:

- Сьогодні молоді люди значний час проводять в соціальних мережах, а отже і спілкування в них (а також і отримання знань) для них стає не нудним вивченням предмета, а звичним і приємним заняттям, що призводить до більш ефективного освоєння матеріалу.
- Студент, спілкуючись у соціальній мережі з викладачем, веде себе менш скуто, що дозволяє йому ставити запитання по предмету, не боячись для оточуючих виглядати не освіченим чи смішним.
- Студенти мають можливість спілкуватися в реальному часі не тільки з викладачем, але і між собою. Можуть організовувати своєрідні конференції, особливо перед здачею заліку або іспиту.
- Викладач для студента психологічно стає не тільки викладачем, а й просто учасником соціальної мережі взаємодія на вертикальному рівні змінюється на взаємодію на горизонтальному рівні. Це викликає більшу довіру з боку студента, підвищує довіру до викладача і покращує процес засвоєння інформації.
- У викладача значно розширюється час спілкування з аудиторією, так як можна швидко оповіщати про події в навчальному процесі. При цьому з'являється можливість проведення виховної роботи з відстаючими студентами, та тими, хто не відвідує занять.

Системи мережевого спілкування, такі як Facebook, ВКонтакте, Одноклассники; мікроблоги на кшталт Twitter; ресурси Wiki, MSN, YouTube і Flickr, є загальнодоступними. Аналогічно тому, як це відбувалося з інформаційно-комунікаційними технологіями, які були впроваджені в освітній процес протягом останніх чотирьох десятиліть. Необхідно впустити соціальне співробітництво в аудиторії для вивчення переваг і недоліків нового способу взаємодії. Нові проекти, такі як спільноти для вчителів, показали, що соціальна співпраця може використовуватись не тільки для обміну дидактичними методами та ідеями. Вони також дозволяють обговорювати деякі питання приватного характеру.

Наведені міркування допоможуть виділити питання про те, який досвід міг би бути корисний для навчання з точки зору студента, необхідно менше приділяти увагу звичайній публікації матеріалів і наступним їх оцінюванням. Це допоможе переосмислити значення і роль кожного з суб'єктів навчальної діяльності, кожен учасник курсу може бути настільки ж викладачем, наскільки і студентом. Викладач зможе перестати бути просто «джерелом знань» і перетворитися на наставника. Використовуючи рольову модель культури аудиторії, зв'язуючись з студентами в індивідуальному порядку і працюючи з їх особистими потребами, одночасно з цим направляючи дискусії і діяльність всієї групи студентів до досягнення загальних навчальних цілей.

Безумовно, система не нав'язує такий тип поведінки, але все ж саме цей тип поведінки вона підтримує найкраще. У майбутньому, по мірі стабілізації технічної інфраструктури, подальші нововведення в області «педагогічної підтримки» стануть основним напрямком у розвитку навчальної електронної системи яка основана на соціальних сервісах.

Висновки

Соціальні мережі охоплюють переважну більшість людей, що навчаються. Участь у різноманітних групах за вподобаннями, дозволяє згуртувати певне коло однодумців, які не тільки обмінюються інформацією, досвідом та ін., а й будують навколо себе певне навчальне середовище. Освіта не може бути осторонь цих процесів, і якщо вже неможливо викреслити із сьогодення таке соціальне явище, як соціальні мережі, то необхідно в повній мірі використовувати як технічні можливості, що надає технологія Web 2.0 так і соціальний феномен їх існування та організованості.

Література

1. *Фещенко А. В.* Социальные сети в образовании: анализ опыта и перспективы развития // Открытое дистанционное образование. — 2011. — № 3. — С. 43–46.
2. *Можаева Г. В., Фещенко А. В.* Использование виртуальных социальных сетей в обучении студентов-гуманитариев // Режим доступа: http://ido.tsu.ru/files/pub2010/Mojaeva_Feschenko_Ispolzovanie_virtualnyh_social_nyh_setei.pdf. — 2010.

МЕТОДИКА ВИКЛАДАННЯ МАТЕМАТИКИ В ЗОШ ТА ВНЗ

УДК 373.5.016:514:004

Чуйко О.В., Астахова Н.С.

[1] *кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри геометрії та МВМ, ДВНЗ «ДДПУ»*

[2] *студентка 5 курсу фізико-математичного факультету, ДВНЗ «ДДПУ»*

e-mail: astakhova.nataliya@mail.ru

ФОРМУВАННЯ ПІЗНАВАЛЬНОЇ САМОСТІЙНОСТІ УЧНІВ ПРИ ВИВЧЕННІ ГЕОМЕТРІЇ З ВИКОРИСТАННЯМ КОМП'ЮТЕРНО-ОРІЄНТОВАНИХ ЗАСОБІВ НАВЧАННЯ

У статті розглядається проблема формування пізнавальної самостійності учнів старшої школи. Особливу увагу приділено використанню інформаційних технологій для заохочення до навчання. В статті аналізуються комп'ютерно-орієнтовані засоби, затверджені Міністерством освіти і науки України, та їх практичне застосування для навчання геометрії у старшій школі.

Ключові слова: *Інформаційно-комунікаційні технології, геометрія, засіб навчання, старша школа, пізнавальний інтерес.*

Вступ

Сучасна реформа освіти України передбачає модернізацію самого змісту освіти, а також методів і засобів навчання. Проте, як свідчить шкільна практика, існують певні протиріччя між ростом об'єму навчальної інформації та способами її засвоєння; інтелектуалізацією роботи та недостатнім рівнем пізнавальної самостійності. Школа не завжди вчить школярів самостійно розмірковувати, знаходити вихід із проблемних ситуацій, приймати особистісні рішення та діяти відповідно до прийнятих рішень. Саме цим пояснюється низький рівень самостійності мислення, нездатність учнів організувати своїми силами самостійну пізнавальну діяльність, а як наслідок цього недостатній рівень їх пізнавальної самостійності при оволодінні шкільною програмою в цілому та математики конкретно.

Це говорить про актуальність проблеми розвитку пізнавальних інтересів школярів для сучасної побудови навчального процесу. Звісно, ця проблема не нова, над нею працювало багато вчених, серед них Н.Бібік, В.Лозова, О.Киричук, А.Кульчицька, Н.Морозова, З.Огороднійчук, Г.Щукіна та інші. Проблема формування пізнавального інтересу і організація цього процесу відображена в роботах М.Скаткіна, Г.Щукіної, А.Матюшкіна, Л.Аристової, В.Біблера, А.Брушлинського, Г.Давидової.

Математика в школі традиційно вважається складним для вивчення предметом, вона служить опорним предметом для вивчення суміжних дисциплін. І, нарешті, все більше спеціальностей, що вимагають високого рівня освіти, пов'язані з безпосереднім застосуванням математики (економіка, фінанси, хімія, інформатика, техніка, біологія). Таким чином, зростає роль математичної підготовки в загальній освіті сучасної людини. Одним з найскладніших в шкільному курсі математики (серед усього шкільного курсу) завжди вважалась геометрія.

Одним із потужних засобів вирішення завдань сучасної освіти виступають сучасні інформаційно-комунікаційні технології (ІКТ).

Питанням впровадження засобів нових ІКТ у навчання математики займаються Є.Вінниченко, М.Головань, Ю.Горошко, М.Жалдак, зокрема, геометрії: Т.Архіпова, О.Вітюк, Н.Кульчицька та ін.

Відповідно до Національної доктрини розвитку освіти [1], одним із основних напрямків оновлення змісту шкільної освіти є особистісна орієнтація освіти, основною метою якої є розвиток всіх форм самостійності учнів. Тому в нашій роботі розглядається актуальність використання педагогічних програмних засобів (ППЗ) в навчальній діяльності учнів старшої школи. Зокрема при вивченні геометрії та дослідження рівня пізнавальної самостійності учнів при навчанні з використанням ППЗ.

Основна частина

Однією з головних умов успішного перебігу навчального процесу і свідченням його правильної організації є наявність інтересу. Пізнавальний інтерес не є чимось зовнішнім, додатковим стосовно навчання. Пізнавальний інтерес — це глибинний внутрішній мотив, заснований на властивій людині вродженій пізнавальній потребі [3]. Відсутність інтересу у школярів є показником серйозних недоліків в організації навчання.

Пізнавальну самостійність науковці розглядають як один із видів самостійності, що характеризується вмінням сприймати й самостійно ставити нове запитання, створювати нову проблему та розв'язувати її власними силами (П.Блонський, Д.Богоявленська, М.Махмутов, О.Савченко та ін.), а також як свідому вмотивованість дій, їх обґрунтованість, здатність людини бачити об'єктивні підстави для того, щоб діяти відповідно до власних переконань (А.Матюшкін, А.Смирнов, С.Рубінштейн та ін.).

В дослідженнях М.Жалдака розглядається проблема підвищення ефективності навчання геометрії за допомогою інформаційно-комунікаційних технологій. Інформаційно-комунікаційні технології — це узагальнююче поняття, що описує різні методи, способи і алгоритми збору, зберігання, обробки, подання та передачі інформації.

Можна застосовувати найрізноманітніші форми роботи з використанням ІКТ. Це віртуальні підручники, програми для формування практичних умінь та навичок, інтерактивні навчаючі системі, навчальні програми імітаційно-моделюючого типу. Переваги розроблених відповідно до Державних стандартів освіти навчальних програм очевидні.

Слід зазначити, що коли говорять про необхідність застосування ІКТ в навчально-виховному процесі, то передбачають застосування основних педагогічних програмних засобів, які доцільно використовувати саме на уроках математики. Програми GRAN1, GRAN-2D, GRAN-3D відносяться до імітаційно-моделюючих програм. Використання цих ППЗ дає можливість учням вирішувати окремі завдання, не знаючи відповідного аналітичного апарату та ін. Учень може розв'язувати рівняння, нерівності та їх системи, не знаючи формул для знаходження коренів, методу виключення змінних, методу інтервалів та ін.; обчислювати похідні й інтеграли, не пам'ятаючи таблиць; досліджувати функції, не знаючи алгоритмів їх дослідження. Разом з тим, завдяки можливостям графічного супроводу комп'ютерного розв'язання завдання, учень чітко й легко розв'яже досить складні завдання, впевнено буде володіти відповідною системою понять і правил. Використання подібних програм дає можливість у багатьох випадках зробити розв'язання завдання настільки доступним, як простий розгляд рисунків або графічних зображень. Відповідні програми роблять окремі розділи й методи математики доступними, зрозумілими, легкими і зручними для використання. Як відзначає М.Жалдак, програма GRAN1 розроблялась спеціально для підтримки шкільного курсу математики, вона призначена для графічного аналізу функцій. Педагогічний програмний засіб GRAN-2D відноситься до розряду програм динамічної геометрії. Програма GRAN-2D використовується для графічного аналізу геометричних об'єктів на площині. Також GRAN-2D дозволяє створювати макроконструкції — сукупність об'єктів базового типу, що призначені для спрощення комбінацій об'єктів, які часто використовуються.

Програма GRAN-3D дає змогу оперувати моделями просторових об'єктів, які вивчаються в курсі стереометрії, а також забезпечує засобами аналізу й ефективного отримання відповідних чисельних характеристик різних об'єктів у тривимірному просторі [2].

Під час педагогічного експерименту, що проходив на базі Донецької загальноосвітньої школи I-III ступенів №120 були використані саме такі програмні педагогічні засоби. Це дало змогу проводити дослідження геометричних об'єктів із візуалізацією отриманих чи прогнозованих результатів, розв'язувати задачі на побудову в площині, досліджувати властивості геометричних фігур, перетворювати і редагувати зображення, переміщувати креслення тощо. Та головна практична значимість дослідження в тому, що використання засобів ІКТ дозволило підвищити якість процесу навчання геометрії, формувати вміння самостійної пізнавальної діяльності учнів, творчий взаємозв'язок вчителя з учнем і оптимальне керування навчанням.

Завданням цього експерименту було визначити чи справді використання ІКТ може вплинути на розвиток та формування пізнавальної самостійності. На початку проведення експерименту були визначені рівень успішності учнів, прагнення і мотиви навчання, зокрема у вивченні математики взагалі. Наступним етапом було спостереження та порівняння успіхів на уроках алгебри та геометрії. Було виявлено, що завдання на уроках геометрії викликали більше утруднень ніж на уроках алгебри. Наступним етапом проведення експерименту було впровадження комп'ютерно-орієнтованих засобів на уроках геометрії. При вивченні геометрії за допомогою програми GRAN-3D та програми GRAN-2D учні проявляли стійкий інтерес до використання описаних програмних засобів, що відкрили для них широкі можливості не лише для побудови геометричних тіл, розгляду їх зображень у динаміці, розгляду зсередини, але й вивільнили їх час для зосередження уваги на з'ясуванні проблеми, дали поштовх до розвитку мотивації вивчення окремих розділів геометрії та до глибокого, осмисленого засвоєння навчального матеріалу в цілому. Користь використання саме цих програм була досить значною.

У той же час можна виділити і декілька негативних сторін використання ППЗ. Так, застосування цих програм дає змогу учням, не знаючи та не запам'ятовуючи формул, правильно розв'язувати задачі. Проте застосовуючи їх, учитель не тільки дає знання, але й вказує їх межі.

Висновки

На практиці було виявлено, що використання педагогічних програмних засобів дійсно впливає на формування та рівень пізнавальної самостійності учнів при вивченні геометрії.

Треба опановувати ці програми і активно впроваджувати їх при вивченні математики.

Література

1. Національна доктрина розвитку освіти // Освіта. — 2002. — №26. — 24.04—1.05.
2. *Жалдак М.І.* Математика з комп'ютером: посібник для вчителів / Жалдак М.І., Ю.В.Горошко, Є.Ф.Вінниченко; НПУ ім. М.П.Драгоманова. — К.: 2009. — 282с.
3. *Лозова В.І.* Цілісний підхід до формування пізнавальної активності школярів / Валентина Іванівна Лозова. — [2-е вид., допов.] — Х. : ОВС, 2000. — 164 с.

УДК 373.5.016:51:044

Глазова В.В., Каун В.В.

[1] *кандидат педагогічних наук, старший викладач кафедри геометрії та МВМ, ДВНЗ «ДДПУ»*

[2] *студентка 5 курсу фізико-математичного факультету, ДВНЗ «ДДПУ»*

e-mail: KaynV@yandex.ua, veraglazova@mail.ru

ВИКОРИСТАННЯ КОМП'ЮТЕРНИХ ТЕХНОЛОГІЙ В ЕВРИСТИЧНОМУ НАВЧАННІ МАТЕМАТИКИ

У статті розглядаються особливості використання комп'ютерних технологій в евристичному навчанні математики. Визначено специфіку формування в учнів математичних творчих здібностей, обґрунтовано важливість використання інформаційно-комунікаційних технологій у навчанні математики, розглянуто принципи застосування програмних засобів в загальноосвітніх школах на уроках математики.

Ключові слова: *евристичне навчання, комп'ютерні технології, методика навчання, математика.*

Вступ

На сьогоднішній день головною задачею методики навчання математики є пошук нових методів та концепцій побудови навчального процесу, які б дозволили зорієнтувати учня на спільну діяльність з вчителем. Ведеться пошук педагогічних технологій, які б змогли призвести до змін у навчальному процесі, а саме переорієнтувати навчання на особистість учня і дозволити йому творчо розвиватися. Одним з таких підходів є метод евристичного навчання математики з використанням інформаційно-комунікаційних технологій

(ІКТ). Спираючись на те, що базою евристичного навчання є творче мислення, а комп'ютерні технології виступають у ролі допоміжної платформи, то цей підхід може активно використовуватись під час навчання математики, що дасть змогу учням розвивати свої математичні творчі здібності.

На сучасному етапі дослідженням, розробкою евристичних прийомів та методів як психолого-педагогічною проблемою займалися В. Андрєєв, Ю. Кулюткін, О. Скафа, А. Хуторський та інші. В своїх дослідженнях Ю. Кулюткін засвідчив всю значущість використання евристичних методів і прийомів у навчальній роботі, яка передбачає самостійне виведення учнями формул і закономірностей, розв'язування нестандартних задач з математики, виконання практичних і лабораторних робіт [4]. О. Скафа розробила класифікацію евристик, в основу якої було покладено рівень узагальнення прийому та рівень узагальнення мети (прийоми досягнення визначених цілей). Також були розроблені засоби евристичного навчання у вигляді евристико-дидактичних конструкцій [3, с. 70].

Використанню ІКТ в евристичному навчанні математики були присвячені дослідження: Н. Апатової, Н. Балик, А. Верланя, К. Власенко, А. Єршова, М. Жалдака, Н. Морзе, О. Скафи та інших.

Основна частина

Евристика — це наука про творчість, про творчу діяльність людей з метою отримання нових результатів у досліджуваних ними галузях [1, с. 676].

Евристичні форми та методи навчання математики сприяють самостійному створенню нових гіпотез та припущень учнями, які базуються на вмінні будувати означення понять і використовувати їх, висловлювати та обґрунтовувати судження, розв'язувати математичні задачі. Отримані гіпотези та припущення, обов'язково повинні бути підтверджені або спростовані згідно вже відомих теорем і загальнонаукових методів пізнання. Форми та методи евристичного навчання збільшують можливості у використанні дидактичних засобів, що є дуже важливим аспектом у підготовчій та супровідній для творчості діяльності.

Форми та методи евристичного навчання математики не можуть дати оптимального результату без допоміжних засобів. Найбільш ефективними засобами є комп'ютерні технології.

Якщо розглядати евристичне навчання математики як комп'ютерно-зорієнтовану систему, то треба врахувати те, що учень самостійно обирає основні складові, за допомогою яких він будуватиме освітній продукт. Тобто, при виборі навчальної комп'ютерної програми повинні бути враховані наступні аспекти: можливість вибору завдання, власного шляху та можливих варіантів його розв'язання. Основу програмного забезпечення повинні складати запрограмовані ситуації, що спонукало б учнів до використання евристичних підходів, які дають основу для самостійного винаходу прийомів, методів розв'язання задач. Важливо, щоб ця робота була проведена до того, як відповідні питання будуть розглянуті вчителем. По завершенню роботи учень повинен сам оцінити результати, які він отримав, спираючись на вимоги, що були висунуті. Таким чином, в учнів формуються евристичні прийоми, що сприяє розширенню та поглибленню змісту матеріалу, який вивчається [2].

На сьогоднішній день розроблена значна кількість програмних засобів, які за допомогою комп'ютера, дозволяють розв'язувати різноманітні математичні задачі з різними рівнями складності. Це такі програми, як $Derive, Gran1, Gran2D, Gran3D, DG$ і ін. В середніх загальноосвітніх навчальних закладах для вивчення курсу математики використовуються комплекти програм $GRAN, DG$. Вони мають найбільш зручний та зрозумілий інтерфейс у використанні для учнів, не потребують спеціальних знань з курсу інформатики.

Результат експерименту, який проводився в загальноосвітній школі №13 м. Слов'янськ на базі 10–11 класів, засвідчив, що учні за допомогою програм $Gran1, Gran2D$ з легкістю розв'язують окремі задачі без знання формул, правил розкладу, алгоритмів тощо. Сприятливим фактором у засвоєнні системи понять і правил є графічний супровід при розв'язанні задач. Саме він у багатьох випадках надав учням можливість зрозуміти задачу на рівні простого розгляду рисунків або графічних зображень. Як показала практика, математика може стати доступною для всіх.

При такому вивченні математики стало можливим наочне представлення поняття, яке вивчається. Відтак, розвивається образне мислення, просторова уява, більш глибоко розуміється сутність досліджуваного явища [4].

Використання зазначених програмних засобів, також є актуальним і при поглибленому вивченні математики. Вони надають можливість проводити необхідні чисельні експерименти, швидко виконати потрібні обчислення або графічні побудови, перевірити істинність або хибу гіпотези, використати той або той метод розв'язання задачі [2].

Висновки

Проведена дослідницька робота показала, що на результат засвоєння і отримання знань учнями на уроках математики, впливає не лише зміст матеріалу, а й метод його безпосереднього вивчення та засвоєння.

Тобто, головним завданням було зробити навчальний процес не лише ефективним, а й цікавим, зорієнтувати мислення учнів у творчому напрямку. Для цього на уроках математики був використаний евристичний метод навчання із застосуванням комп'ютерних технологій. Запропонований метод, у комплексі з ІКТ, на уроці дозволив не лише засвоїти готовий навчальний матеріал, а й сприяв творчому розвитку учнів у математичному напрямку, самостійному проведенню експериментів, створенню власних теорій та внесенню своїх пропозиції щодо побудови освітнього процесу.

Література

1. Философский словарь / Под ред. И.Т. Фролова. — 4-е изд. — М., 1980. — 720 с.
2. *Скафа О.І.* Задача як форма і засіб формування евристичної діяльності / О.І. Скафа // Рідна школа. — 2003. — №6. — С. 43–47.
3. Розвиток інтелектуальних умінь і творчих здібностей учнів та студентів у процесі навчання дисциплін природничо-математичного циклу «ІТМ*плюс — 2012»: матеріали міжнародної науково-методичної конференції (6–7 грудня 2012 р., м. Суми): У 3-х частинах. Частина 3 / упорядник Чашечникова О.С. — Суми : видавничо-виробниче підприємство «Мрія» ТОВ, 2012. — 98 с.
4. *Кулюткін Ю.К.* Евристичні методи в структурі рішень, М.: Педагогіка, 1970. — 320 с.

УДК 378.061:51

Сергєєва А. С., Труш Н. І.

[1] *студентка 5 курсу фізико-математичного факультету, ДВНЗ «ДДПУ»*

[2] *кандидат педагогічних наук, доцент кафедри геометрії та МВМ, ДВНЗ «ДДПУ»*

e-mail: sergeeva.alina@bk.ru, nelya_trush@ukr.net

МЕХАНІЗМИ НАБУТТЯ МЕТОДИЧНОЇ КОМПЕТЕНТНОСТІ МАЙБУТНІМИ ВЧИТЕЛЯМИ МАТЕМАТИКИ

У статті з'ясовуються можливості реалізації компетентнісно-орієнтованого підходу в процесі підготовки майбутніх вчителів математики, охарактеризовані механізми формування методичних компетентностей студентів математичних спеціальностей.

Ключові слова: *методична підготовка, методична діяльність, компетентність, компетенція.*

Вступ

Суттєві зміни у суспільстві кінця XX – початку XXI ст. спричинили зміну освітньої парадигми. Трансформація загальних цілей освіти, зумовлена глобальною метою забезпечення входження людини у соціум і її продуктивною адаптацією у ньому, породжує необхідність вирішення питання про забезпечення освітою більш повного особистісно та соціально орієнтованого результату.

Проблеми якості освіти та управління якістю підготовки фахівців останнім часом активно розробляються. Національна доктрина розвитку освіти до пріоритетних напрямів державної політики щодо розвитку освіти відносить «підготовку кваліфікованих кадрів, здатних до творчої праці, професійного розвитку, освоєння та впровадження наукоємних та інформаційних технологій, конкурентоспроможних на ринку праці; забезпечення високої якості вищої освіти ... шляхом ... запровадження гнучких освітніх програм та інформаційних технологій навчання» [4].

Результатом фахової підготовки майбутнього вчителя мають стати не окремі знання, навички й уміння, а спроможність і готовність молодих фахівців до ефективної, продуктивної, самостійної професійної діяльності, до активного надбання досвіду такої діяльності. На цих аспектах підготовки концентрується увага при компетентнісному підході в освіті.

Людина стає спеціалістом внаслідок оволодіння соціально-особистісними, загальнонауковими, інструментальними та фаховими компетенціями, що передбачають здатність і готовність використовувати знання для вирішення проблем у власній професійній діяльності в умовах невизначеності [5, с. 5].

Категоріальний апарат і теоретичне обґрунтування компетентнісного підходу в освіті нині розробляються російськими (А. Маркова, Л. Митіна, Н. Кузьміна, А. Хуторський та ін.), вітчизняними (Н. Бібік, Л. Ващенко, І. Єрмаков, О. Локшина, О. Овчарук, Л. Паращенко, О. Пометун, О. Савченко та ін.), зарубіжними науковцями (Дж. Рамен, Р. Уайт, Д. Хаймс, І. Блауберг та ін.).

Слід зазначити, що однозначність відсутня навіть у визначенні основних категорій. Аналіз наукових досліджень із проблеми формування компетентностей і компетенцій фахівця виявив розходження в їхньому розумінні. У представленій роботі під компетентністю будемо розуміти здатність особистості до виконання професійних обов'язків через сформовані знання, вміння, навички, досвід діяльності, а під компетенцією — інтегровану характеристику фахівця, виражену через потенційну готовність до застосування набутих у процесі навчання знань, умінь, навичок, досвіду діяльності. Аналіз контексту вживання поняття «компетенції» дозволяє розуміти його як соціально закріплений освітній результат. Тобто компетенції можуть бути виведені як реальні вимоги до засвоєння сукупності знань, способів діяльності, досвіду, якостей особистості, яка діє в соціумі.

Одним із найбільш важливих питань фахової підготовки майбутнього вчителя математики є питання його методичної підготовки. Останнім часом науковою спільнотою активно вивчаються проблеми компетентнісного підходу у вирішенні даного питання.

Окремим аспектам формування методичної компетентності майбутнього вчителя математики присвячена значна кількість досліджень (І. Акуленко,О. Ларіонова, О. Лебедєва, І. Малова, В. Моторіна, О. Скафа, С. Скворцова, Н. Стефанова, Н. Тарасенкова та ін.).

Однак аналіз реального навчального процесу засвідчує, що зміст освіти залишається недостатньо спрямованим на набуття учнями та студентами ключових компетентностей, які мають стати основою процесу оцінювання навчальних досягнень у системі освіти.

Проведена нами діагностика й аналіз результатів різних видів діяльності студентів математичних спеціальностей продемонстрували, що в основному процес навчання здійснюється традиційно, що забезпечує студентів значним багажем предметних знань, але не сприяє розвитку у них вмінь виходити за межі навчальних ситуацій, у яких формуються ці знання.

Виходячи із вище сказаного, можна констатувати існування суперечності між рівнем теоретичних досліджень питань компетентнісного підходу в освіті та рівнем розробки механізмів упровадження його у реальний навчальний процес.

Стаття присвячена аналізу механізмів упровадження компетентнісного підходу у процес фахової підготовки майбутніх вчителів математики.

Основна частина

Реалізація цілей і завдань якісної підготовки майбутнього вчителя математики зумовлює необхідність пошуку шляхів і засобів удосконалення його методичної підготовки, яка є важливою ланкою в структурі його професійно-педагогічного становлення й розвитку.

Основною метою методичної підготовки майбутнього вчителя є формування методичної компетентності. Компетентність як характеристика особистості, що формується в процесі навчальної діяльності, є інтегрованим результатом набуття компетенцій – таких «відчужених від суб'єкта, соціально заданих норм до освітньої підготовки того, хто навчається, що є необхідними для його якісної діяльності в певній сфері» [2, с. 409]. Зміст поняття «методична компетентність» може бути розкритим через систему методичних компетенцій з урахуванням їх компонентів та можливостей діагностики їх сформованості.

Напевно, впровадження компетентнісно-орієнтованого підходу потребує одночасної перебудови як змісту так і форм організації навчального процесу. Причому його суб'єкти та об'єкт мають задовольняти ряду вимог.

- Педагог зобов'язаний глибоко розуміти важливість обраного підходу, мати мотивацію і бажання до нововведень (не секрет, що значна кількість вузівських викладачів негативно ставляться до інновацій) та бути спроможним спроектувати нову технологію навчання.
- Студент повинен мати внутрішню мотивацію й ставитись відповідально до навчання, прагнути досягнення особистісно значимих результатів (не тільки хороших оцінки, які дають право на отримання стипендії), розуміти специфіку майбутньої професійної діяльності, бути налаштованим на активну взаємодію з викладачем та іншими студентами.
- Навчальний матеріал повинен являти собою системне, узагальнене, можливо, міждисциплінарне знання, представлене у різноманітних формах пошукової, мислительної діяльності, продуктивного творчого процесу. Категорія «знання» має тлумачитись як накопичені передумови до виконання дій, як «процедурні знання».

- Форми організації навчального процесу мають бути поповненими такими видами, які дозволяють залучити студентів до співробітництва та сумісної творчості, до різноманітних форм відносин та спілкування.

Традиційно формування методичної компетентності вважається прерогативою курсу «Методика навчання математики». Однак досвід проектування процесу підготовки майбутніх вчителів математики дозволяє зробити висновки про певну обмеженість можливостей даного курсу. Процес формування методичних компетенцій, як необхідну умову, передбачає володіння студентами системою математичних, психологічних, педагогічних знань, умінь і особистого досвіду в їхньому застосуванні під час викладання шкільної математики.

Аналіз відомого досвіду [1] та результати власного дослідження свідчать про можливості прилучати студентів до діяльності методичного характеру не тільки у процесі опрацювання відповідного навчального курсу. Робота може здійснюватись у кілька етапів.

- Під час вивчення основних математичних курсів окремі методичні компетенції можуть формуватись у фоновому режимі. Це стає можливим за умови включення у систему задач відповідного курсу спеціальних завдань (за своєю суттю, методичних), які дозволяють студентам навчитись бачити шкільну математику з висоти наукових та прикладних інтересів. Авторами статті започаткована сумісна робота з викладачами курсу «Алгебра і теорія чисел», спрямована на організацію діяльності студентів з використання категорій та алгоритмів курсу алгебри до розв’язання шкільних задач та до залучання студентів до створення систем задач, що можуть використовуватись у роботі з учнями.
- Вже з першого-другого курсів студенти залучаються до підготовки та проведення математичних конкурсів та олімпіад, заохочується їх участь у проведенні контролюючих заходів у педагогічному ліцеї. Подібні заходи дозволяють сформувати у студентів досвід використання у процесі навчання так званої «вертикальної» педагогіки (Р. Г. Хазанкін).
- Особлива роль відводиться курсу «Елементарна математика». Викладачі приділяють увагу не тільки узагальненим прийомам розв’язання класів задач, а й аналізу можливих прийомів побудови системи задач, способів узагальнення тощо. Комплекси для самостійної та індивідуальної роботи містять завдання аналітико-синтетичного характеру, завдання на конструювання систем задач з заданими характеристиками, вибір опорних чи ключових задач до заданої теми.

- Формування методичної компетентності майбутнього вчителя математики виступає однією з провідних цілей та активно відбувається у процесі опанування курсу «Методика навчання математики» та курсів за вибором методичного спрямування. Основою для визначення методичних компетенцій учителя математики є основні фахові й відповідні їм типові задачі методичної діяльності вчителя математики. У монографії [3] вводяться наступні групи методичних компетентностей (у нашому розумінні «компетенцій») майбутніх вчителів математики, що забезпечують реалізацію функції:

1) з аналітико-синтетичної діяльності;

2) з планування й конструювання;

3) з організації й керування діяльністю учнів у процесі навчання математики;

4) з оцінювання власної діяльності й діяльності учнів.

У кожній групі виділяємо конкретні види компетенцій, які слугують орієнтиром у роботі над курсом, дозволяють студентам ознайомитись з перспективами своєї діяльності, виступають основою при здійсненні моніторингу досягнень студентів.

Одним із основних засобів, що дозволяють формувати методичні компетенції є система методичних завдання. Методичні завдання — це такі завдання, які спрямовані на оволодіння прийомами методичної роботи із запропонованим математичним навчальним змістом (поняттям, теоремою, задачею тощо). Авторами розроблено систему методичних завдань для кожної з названих чотирьох груп методичних компетенцій. Використання таких завдань дозволяє сформувати ціннісне ставлення до категорій методики математики; виробити у студентів критичне ставлення до результатів попередньої роботи та мотивувати вдосконалення своєї професійної діяльності.

Сучасний процес навчання важко уявити без використання інформаційних технологій. Використовуючи блоково-модульне структурування програмового матеріалу курсу «Методика навчання математики», розроблене проектне середовище, для якого додана електронна оболонка навчально-методичного комплексу дисципліни. Отримана модель дозволяє перейти на рівень технології навчання, яку коротко охарактеризуємо.

Перш за все студенти ознайомлюються із загальними цілями і завданнями курсу, ключовими, загальноосвітніми та предметними компетенціями, які будуть розвиватись впродовж навчання.

Відбувається також знайомство студентів з особливостями структури електронного навчально-методичного комплексу, можливостями сайту, на якому він розміщений.

Наступним етапом є сумісна робота викладача та студентів над окремими навчальними та змістовими модулями. До кожного модуля студент отримує розроблену викладачами матрицю, у якій в рядках подаються компетенції, що мають бути сформованими, а у стовпцях пізнавальні рівні навченості за Б. Блумом (знання, розуміння, використання, аналіз, синтез, оцінювання), кожний студент отримує також таблицю з розширеними і уточненими характеристиками категорій навчальних цілей. До кінця вивчення модуля студент для кожної компетенції відмічає відповідну клітинку у матриці, на основі самооцінки дає розгорнуту характеристику своїх навчальних досягнень. У результаті різних планових контролюючих заходів викладач заносить у матрицю свою оцінку та порівнює її з самооцінкою студента. Якщо виявляється неспівпадіння, то викладач пояснює студенту свою позицію. Це сприяє виявленню наявного обсягу й рівня засвоєння сукупності методичних знань, навичок, умінь, ціннісних орієнтацій та досвіду виконання молодим фахівцем різних видів методичної діяльності. Тим самим підвищується оцінна культура студента, що для майбутнього вчителя є особливо важливим.

Виходячи з об'єктивної необхідності використання інноваційних форм організації навчального процесу у майбутній професійній діяльності, залучаємо студентів до створення різного роду методичних моделей: від моделювання окремого виду діяльності на уроці до створення предметно-математичної моделі випускника загальноосвітньої школи. Студенти беруть участь у розробці проектів, які у майбутньому можуть запропонувати і своїм учням. На практичних та лабораторних заняттях з методики навчання математики використовуються інтерактивні методи, дискусії, ділові ігри, перегляд та аналіз відео презентацій уроків різних вчителів та ін.

Поєднання теоретичної та практичної підготовки забезпечують максимізацію суб'єктного досвіду студентів у здійсненні різних видів методичної діяльності.

Висновки

Компетентнісний підхід на сьогоднішній день є однією із актуальних проблем освіти і може розглядатися як вихід із проблемної ситуації, що виникла через протиріччя між необхідністю забезпечити якість освіти та неможливістю вирішити цю проблему традиційним шляхом.

Акценти в методичній підготовці вчителя математики мають бути перенесені з вивчення стандартних, інваріантних станів на механізми оволодіння новими, прилучення до перспективних моделей педагогічного досвіду й готовності до набуття власного в широкій і різноманітній практиці.

Література

1. *Акуленко І. А.* Компетентнісно орієнтована методична підготовка майбутнього вчителя математики профільної школи (теоретичний аспект) : монографія / І. А. Акуленко. — Черкаси : Видавець Чабаненко Ю., 2013. — 460 с.
2. *Бібік Н. М.* Компетенції / Н. М. Бібік // Енциклопедія освіти / АПН України; гол. ред. В. Г. Кремень. — К. : Юрінком Інтер, 2008. — С. 409.
3. *Кузьмінський А. І.* Наукові засади методичної підготовки майбутнього вчителя математики : монографія / А. І. Кузьмінський, Н. А. Тарасенкова, І. А. Акуленко. — Черкаси : ЧНУ імені Богдана Хмельницького, 2009. — 320 с.
4. Національна доктрина розвитку освіти України у XXI столітті // Освіта України. — 2001. — № 29. — С. 4–6 // Ліга-Закон : [Електронний ресурс]. — Режим доступу: http://search.ligazakon.ua/l_doc2.nsf/link1/U347_02.html.
5. *Чернова Ю. К.* Технология реализации компетентностного подхода в образовании и в производственной деятельности : монография / Чернова Ю. К., Антипова О. И. — Самара : СНЦ РАН, 2009. — 286 с.

УДК 37.016:[514.122+514.142]

Кадубовський О.А., Алдошина А.В.

[1] *кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри геометрії та МВМ, ДВНЗ «ДДПУ»*

[2] *студентка 5 курсу фізико-математичного факультету, ДВНЗ «ДДПУ»*

e-mail: kadubovs@ukr.net, anastasiya.aldos@mail.ru

ПРО ЗМІСТОВЕ НАПОВНЕННЯ ТЕМИ «ВЗАЄМНЕ РОЗТАШУВАННЯ ПРЯМИХ І ПЛОЩИН У ПРОСТОРІ» ЗАДАЧАМИ КЛАСИФІКАЦІЙНОГО ХАРАКТЕРУ

Висвітлюється авторський досвід впровадження дослідницьких задач на прикладі вивчення «Теорії прямих і площин у просторі» шляхом змістового її наповнення задачами класифікаційного характеру. В якості таких задач в роботі вперше наведена класифікація прямих простору за ознакою взаємного розташування відносно координатних осей і площин декартової системи координат.

Ключові слова: *науково-дослідницька діяльність, задачі класифікаційного характеру, класифікація прямих простору.*

Вступ

Постановка проблеми. Загально визнано, що всебічний розвиток майбутніх вчителів ЗОШ та викладачів ВНЗ, зокрема формування професійних компетентностей, є одними з головних завдань, які сьогодні стоять перед вітчизняними педагогічними ВНЗ. Тому відповідними програмами підготовки фахівців передбачається формування універсальних знань, умінь і навичок, які будуть необхідними для адаптації випускників педагогічних ВНЗ до нових суспільних умов та повноцінної їх самореалізації.

На превеликий жаль, результати діагностик рівня залишкових знань (за результатами ККР) свідчать про те, що значна частина студентів, зокрема математичних спеціальностей педагогічних ВНЗ, мають труднощі з виконанням саме творчих завдань та розв'язанням нетипових і дослідницьких задач.

Одна з причин, на думку А.І. Савенкова, полягає у тому, що «... традиційне навчання у вишах будується не так на методах самостійного, творчого і дослідницького пошуку, як на репродуктивній діяльності, спрямованій на засвоєння готових, раніше добутих істин. І саме тому навчання студентів втрачає головну рису дослідницької поведінки — пошукової активності. Як результат — втрата допитливості, здібності самостійно мислити, що практично унеможливлює процеси самонавчання, самовиховання, а отже, і саморозвитку.» [11]

Незважаючи на тривалий і поширений досвід викладання `аналітичної геометрії` у ВНЗ та «елементів аналітичної геометрії» і «методу координат» в ЗОШ, слід також визнати, що на сьогодні ще залишається ряд актуальних проблем (зокрема й зазначена «традиційність у навчанні»), пов'язаних із навчанням та викладанням цього розділу математики.

Однією з таких проблем, яка особливо гостро постала останнім часом, є значне зменшення тижневого аудиторного навантаження студентів. У зв'язку з цим — зменшення аудиторних годин, що відводяться навчальними планами на лекційні та практичні заняття. І як наслідок — «аудиторне озброєння» теоретичним «мінімумом» та навичками розв'язання переважно типових задач. Таким чином, викладач вимушений «передавати» досвід з розв'язування дослідницьких задач у позааудиторний час. Такий вид роботи, як правило, реалізується під час індивідуальних консультацій, пов'язаних із виконанням (в ідеалі — захистом) індивідуальних довгострокових завдань, які крім типових задач передбачають і задачі дослідницького характеру. Проте, як свідчить досвід, наявність розв'язків необхідної кількості задач стає самоціллю і далеко не завжди на користь дослідницьких задач.

Але ж «дослідницькі задачі корисні тим, що не містять алгоритмічних підходів і завжди потребують пошуку нових ідей, які стимулюють пізнавальні інтереси студентів, формують навички проведення аналізу, систематизації, висунення гіпотез, допомагають оволодіти дедуктивним методом, активізують самостійну пошукову діяльність.» [12]

Таким чином, проблема вибору методів навчання у контексті розвитку дослідницької компетентності при вивченні геометрії є як ніколи актуальною.

Спробі вирішення (принаймні частково) зазначеної проблеми й присвячена дана стаття, в якій висвітлюється досвід впровадження дослідницьких задач на прикладі вивчення теми «Взаємне розташування прямих і площин у просторі».

Аналіз актуальних досліджень, присвячених *різним аспектам організації науково-дослідної діяльності студентів; проблемам формування дослідницьких умінь студентів; співробітництву викладачів і студентів у наукових дослідженнях*, достатньо повно висвітлений в [13].

Особливу нашу увагу привернула до себе монографія [5], в якій висвітлено теоретико-методологічні засади узагальнення та систематизації знань студентів з аналітичної геометрії.

Більш детально зупинимося на аналізі *дидактичного забезпечення теми.* Традиційно, вивчення та виклад тем «Пряма у просторі», «Взаємне розташування прямих у просторі» та «Взаємне розташування прямих і площин

у просторі» супроводжується розглядом частинних випадків розташування прямої відносно фіксованої декартової системи координат (ДСК).
Якісний та кількісний аналіз теоретичного і дидактичного матеріалу, який міститься в більшості розповсюджених та рекомендованих підручниках і збірниках задач, дозволяє констатувати наступне:

1) Задачі, які відносяться до суттєво різних положень прямої у просторі (за ознакою взаємного розташування відносно координатних осей і площин ДСК), здебільшого, вичерпуються розглядом лише тих випадків, коли пряма є паралельною (співпадає) до певної координатної осі або ж є паралельною (належить) до певної координатної площини [1, 2, 3, 6, 7, 8, 9, 10].

2) Прямим загального положення майже не приділяється увага. Винятком, частково позбавленим зазначеної вади, є наприклад збірники [2, 7, 8, 14], в яких у загальному вигляді пропонуються й задачі на дослідження критеріїв взаємного розташування прямих і площин простору.

3) Загалом, в тому чи іншому вигляді, зустрічаються щонайбільше 85 із 133 суттєво різних (у зазначеному вище контексті) типів прямих. Проте сам факт типізації прямих, як правило, затушовується.

Класифікація прямих простору за вказаною ознакою в явному вигляді до сьогодні залишалась не висвітленим питанням навіть в теоретичному аспекті.

Отже, **метою** статті є висвітлення авторського досвіду щодо впровадження дослідницьких задач на прикладі вивчення теми «Пряма і площина у просторі» шляхом змістовного її наповнення класифікацією прямих за ознакою взаємного розташування відносно координатних осей і площин ДСК.

Основна частина

Перш ніж викласти суть класифікації прямих простору за ознакою взаємного розташування відносно координатних осей і площин ДСК наведемо `загальні рекомендації стосовно впровадження` відповідних типів прямих під час вивчення тем «Взаємне розташування прямих у просторі» та «Взаємне розташування прямих і площин у просторі», які відноситься до обов'язкового змістового модуля «Теорія прямих і площин у просторі»:

1. З основними класами прямих (їх всього 7) пропонованої класифікації студентів необхідно ознайомити вже на перших заняттях теми (можливо навіть під час лекційного заняття). Ознайомлення з певними із суттєво різних типів прямих пропонованої класифікації (надалі – типи прямих) також може відбуватись з перших практичних занять, присвячених вивченню зазначених тем. Різноманіття тематичних задач повинно досягатися не за рахунок розгляду аналогічних задач з різними числовими даними або ж різних способів задання прямих і площин, а за рахунок розгляду відповідних типів прямих.

2. Безпосереднє ознайомлення з певним типом прямих доцільно розпочинати із задач на побудову прямої, заданої канонічним рівнянням із числовими даними; а вже потім запропонувати виявити залежності або закономірності у розташуванні однотипових прямих.

3. Далі необхідно розглянути типові задачі про особливості розташування прямих (заданих канонічними рівнянням з числовими даними): з'ясування питань щодо їх співпадіння, паралельності, перетину або ж мимобіжності. Після чого, в якості частинних випадків, слід розглянути випадки, коли однією із таких прямих є координатна вісь.

Потім для прямої $l: \frac{x-x_0}{l_1} = \frac{y-y_0}{l_2} = \frac{z-z_0}{l_3}$ (заданої канонічним рівнянням в загальному вигляді) встановити відповідні (необхідні та/або достатні) умови її співпадіння, паралельності, перетину або ж мимобіжності з координатною віссю OX (OY, OZ). Так, наприклад, необхідними і достатніми умовами співпадіння прямої l з віссю OX (яка «є представником» типу прямих $a_{1,1}$) є наступні

$$l \equiv OX \cong a_{1,1} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 \in R, & y_0 = z_0 = 0 \\ l_1 \neq 0, & l_2 = l_3 = 0. \end{cases}$$

Здібним студентам слід запропонувати отримання відповідних аналітичних умов для решти типів таких прямих у вигляді індивідуальних завдань.

4. Деталізовану класифікацію прямих (з усіма 133 суттєво різними типами) доцільно навести на останньому практичному занятті, присвяченому систематизації, узагальненням та конкретизації набутих знань.

5. Коло задач на встановлення критеріїв приналежності прямої (заданої канонічним рівнянням в загальному вигляді) до певного типу прямих можна значно розширити, за рахунок отримання аналогічних критеріїв на випадок прямої, заданої як перетин площин (заданих загальними рівняннями).

6. Наведену класифікацію прямих доцільно доповнити (або ж принаймні запропонувати на самостійне опрацювання) аналогічною класифікацією площин простору (за такою ж самою ознакою).

7. Найбільш здібним студентам можна запропонувати й одержання відповідних аналітичних умов для кожного із суттєво різних типів площин.

Класифікація прямих простору за ознакою взаємного розташування відносно координатних осей і площин ДСК

Пропонована нижче класифікація представлена за допомогою наочної схеми 1 з подальшою деталізацією в термінах введених позначень.

I. P **– множина прямих, паралельних до координатних площин**

1.1) A – клас прямих, паралельних до координатних осей: A_1, A_2, A_3 – підкласи прямих, що є паралельними до координатних осей OX, OY і OZ відповідно;

1.2) B – клас прямих, що перетинають дві піввісі різних координатних осей: B_1, B_2, B_3 – підкласи прямих, що перетинають піввісі осей OY і OZ, піввісі осей OZ і OX та піввісі осей OX і OY відповідно;

1.3) C – клас прямих, що паралельні одній з координатних площин, не є паралельними до відповідних координатних осей та не перетинають третю вісь: C_1, C_2, C_3 – підкласи прямих, що є паралельними до площин YOZ, ZOX та XOY відповідно;

1.4) D – клас прямих, що перетинають координатну піввісь (початок координат), є паралельними (належать) відповідній площині та не є паралельними до жодної з двох інших координатних осей: D_1, D_2, D_3 — підкласи прямих, що перетинають осі OX, OY і OZ відповідно.

II. Q — множина прямих, що не є паралельними до жодної з координатних площин

2.1) E — клас прямих, що проходять через початок координат, не співпадають з жодною із координатних осей та не належать жодній з координатних площин;

2.2) F — клас прямих, що перетинають координатну піввісь та є мимобіжними до двох інших координатних осей: F_1, F_2, F_3 — підкласи прямих, що перетинають піввісь осей OX, OY і OZ відповідно;

2.3) G — клас прямих, що не є паралельними до жодної з координатних площин та не проходять через початок координат: G_1, G_2, G_3, G_4 — підкласи прямих, що перетинають чверть площини X_+OY_+, Y_+OX_-, X_-OY_- і Y_-OX_+ відповідно.

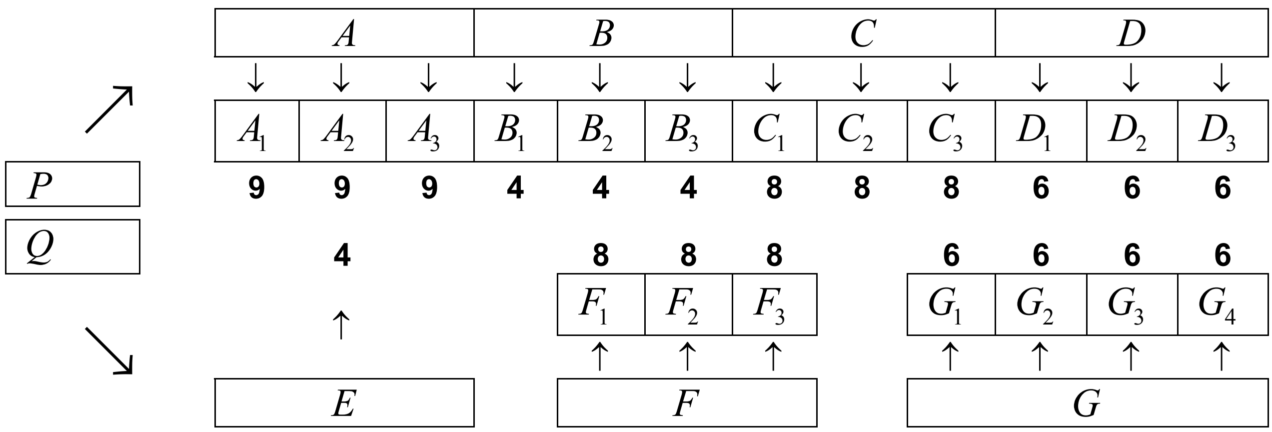

Схема 1: до класифікації прямих простору за ознакою взаємного розташування відносно координатних осей і площин АСК

В подальшому без додаткових пояснень для наведених типів прямих будуть наведені графічні ілюстрації із зображенням відповідних положень їх представників відносно фіксованої ДСК.

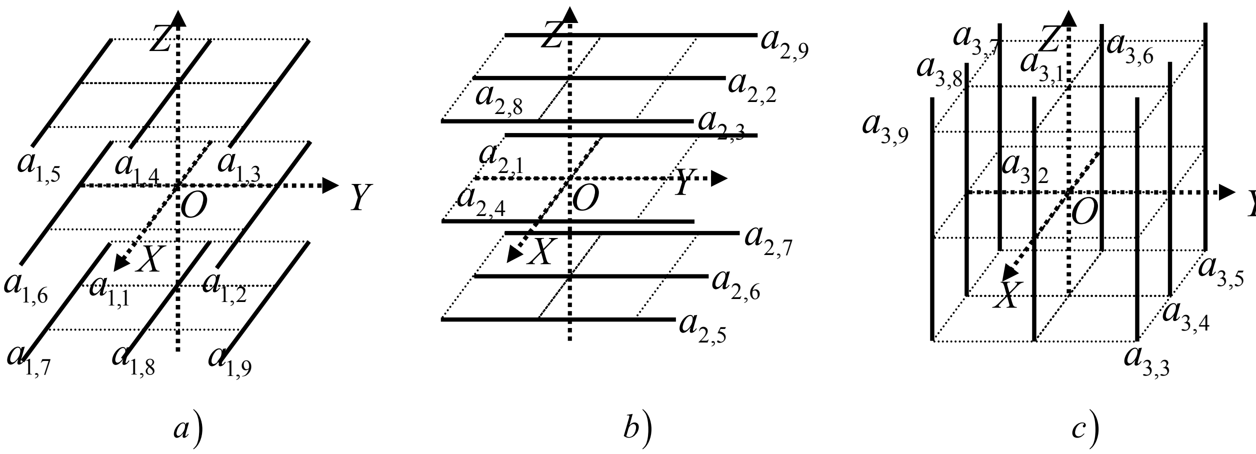

Рис. 1: прямі з класу A

$a_{1,i}$ — представники 9 можливих типів прямих підкласу A_1 (що є паралельними до осі OX) — рис. 1 a);
$a_{2,i}$ — представники 9 можливих типів прямих підкласу A_2 (що є паралельними до осі OY) — рис. 1 b);
$a_{3,i}$ — представники 9 можливих типів прямих підкласу A_3 (що є паралельними до осі OZ) — рис. 1 c).

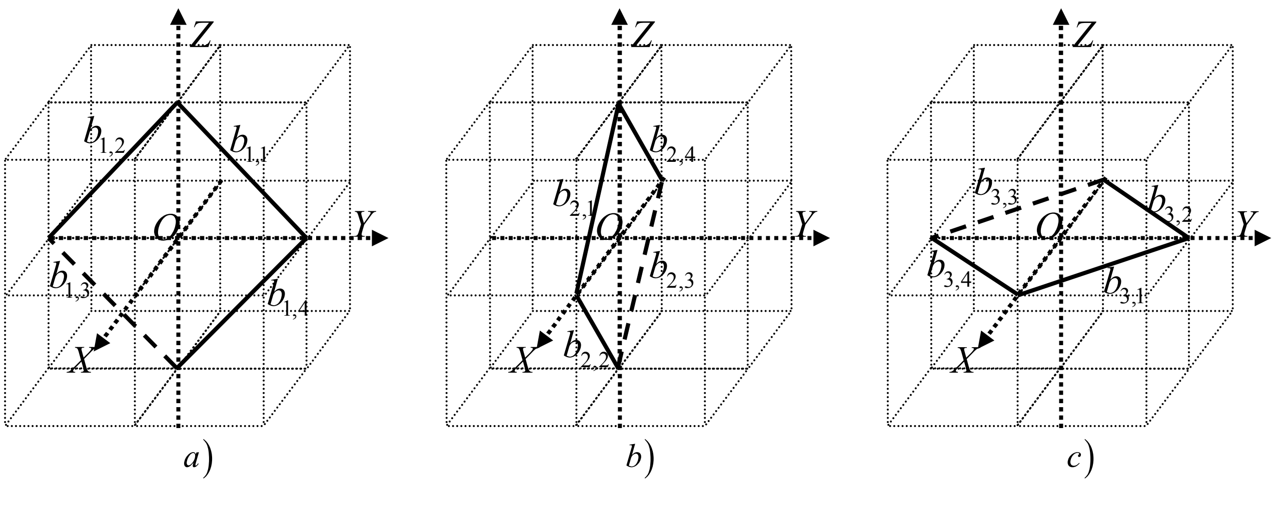

Рис. 2: прямі з класу B

$b_{1,i}$ — представники 4 можливих типів прямих підкласу B_1 (що перетинають піввісі осей OY і OZ) — рис. 2 a);
$b_{2,i}$ — представники 4 можливих типів прямих підкласу B_2 (що перетинають піввісі осей OZ і OX) — рис. 2 b);
$b_{3,i}$ — представники 4 можливих типів прямих підкласу B_3 (що перетинають піввісі осей OX і OY) — рис. 2 c).

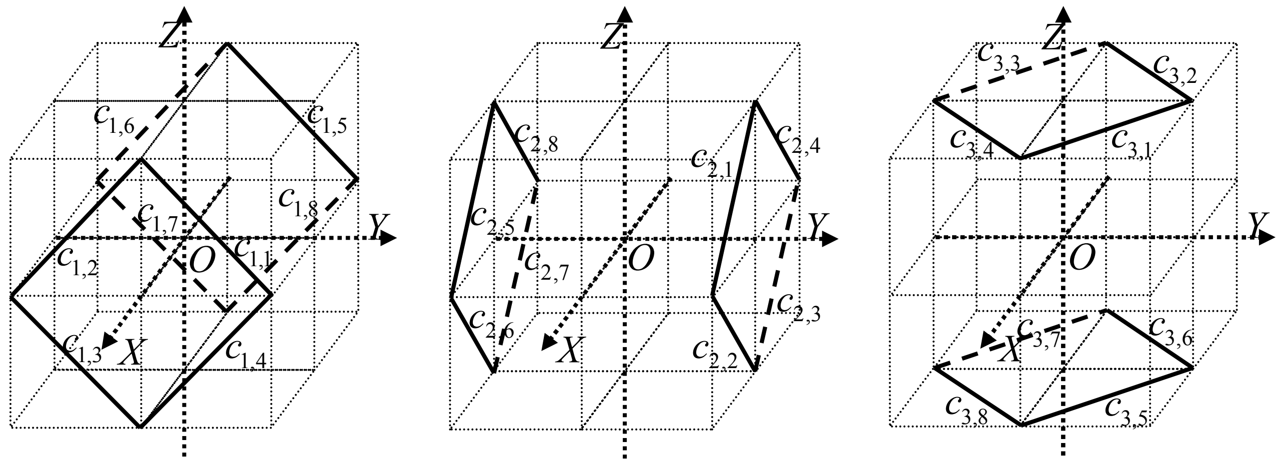

Рис. 3: прямі з класу C

$c_{1,i}$ — представники 8 можливих типів прямих підкласу C_1 (що є паралельними до площини YOZ) — рис. 3 a);
$c_{2,i}$ — представники 8 можливих типів прямих підкласу C_2 (що є паралельними до площини ZOX) — рис. 3 b);
$c_{3,i}$ — представники 8 можливих типів прямих підкласу C_3 (що є паралельними до площини XOY) — рис. 3 c).

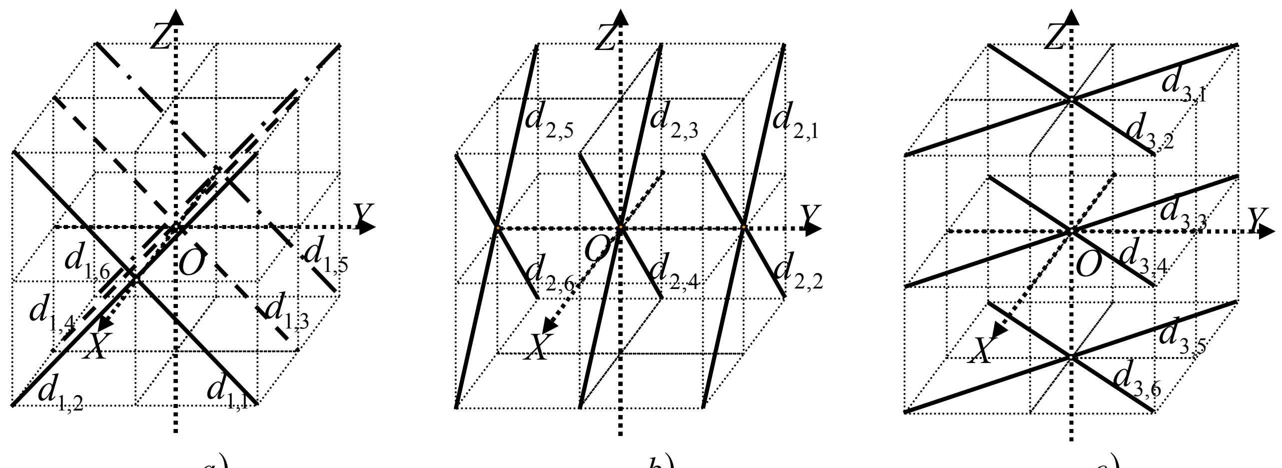

Рис. 4: прямі з класу D

$d_{1,i}$ — представники 6 можливих типів прямих підкласу D_1 (що перетинають вісь OX) — рис. 4 a);
$d_{2,i}$ — представники 6 можливих типів прямих підкласу D_2 (що перетинають вісь OY) — рис. 4 b);
$d_{3,i}$ — представники 6 можливих типів прямих підкласу D_3 (що перетинають вісь OZ) — рис. 4 c).

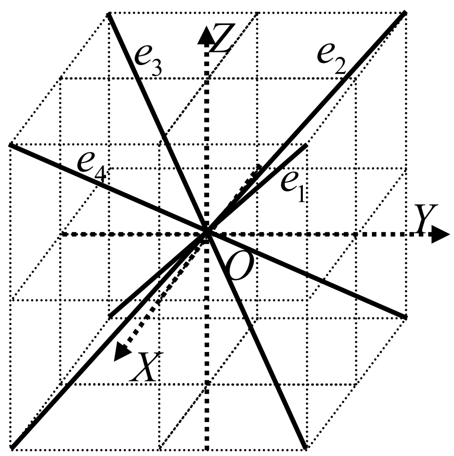

Рис. 5: прямі з класу E

e_i — представники 4 можливих типів прямих, що проходять через початок координат, не співпадають з жодною із координатних осей та не належать жодній з координатних площин (цілком розташовані у двох протилежних октантах)

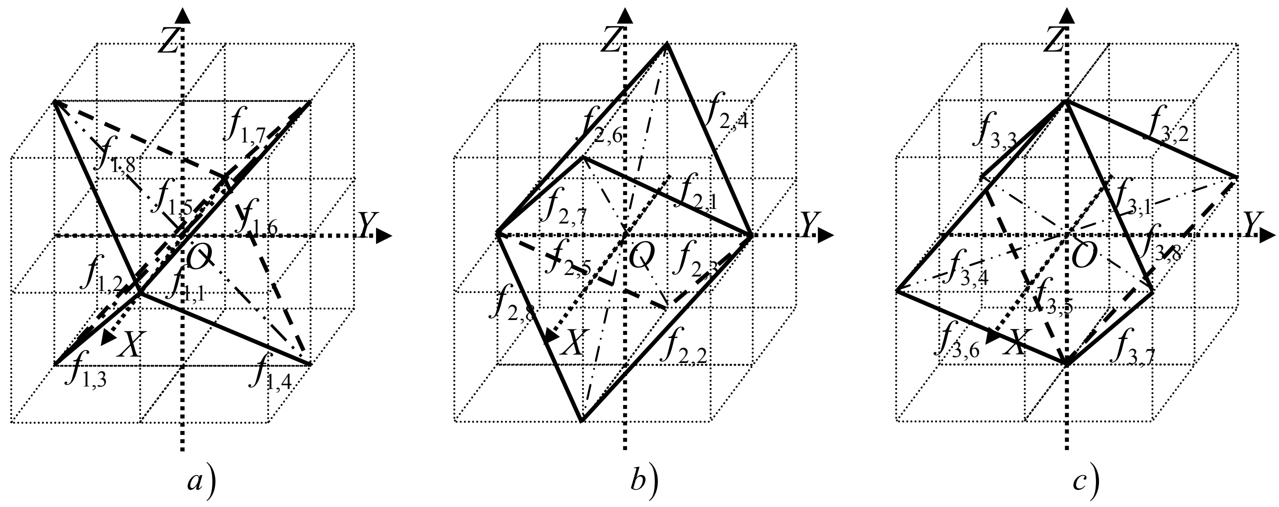

Рис. 6: прямі з класу F

$f_{1,i}$ — представники 8 можливих типів прямих підкласу F_1 (що перетинають піввісь осі OX) — рис. 6 $a)$;
$f_{2,i}$ — представники 8 можливих типів прямих підкласу F_2 (що перетинають піввісь осі OY) — рис. 6 $b)$;
$f_{3,i}$ — представники 8 можливих типів прямих підкласу F_3 (що перетинають піввісь осі OZ) — рис. 6 $c)$.

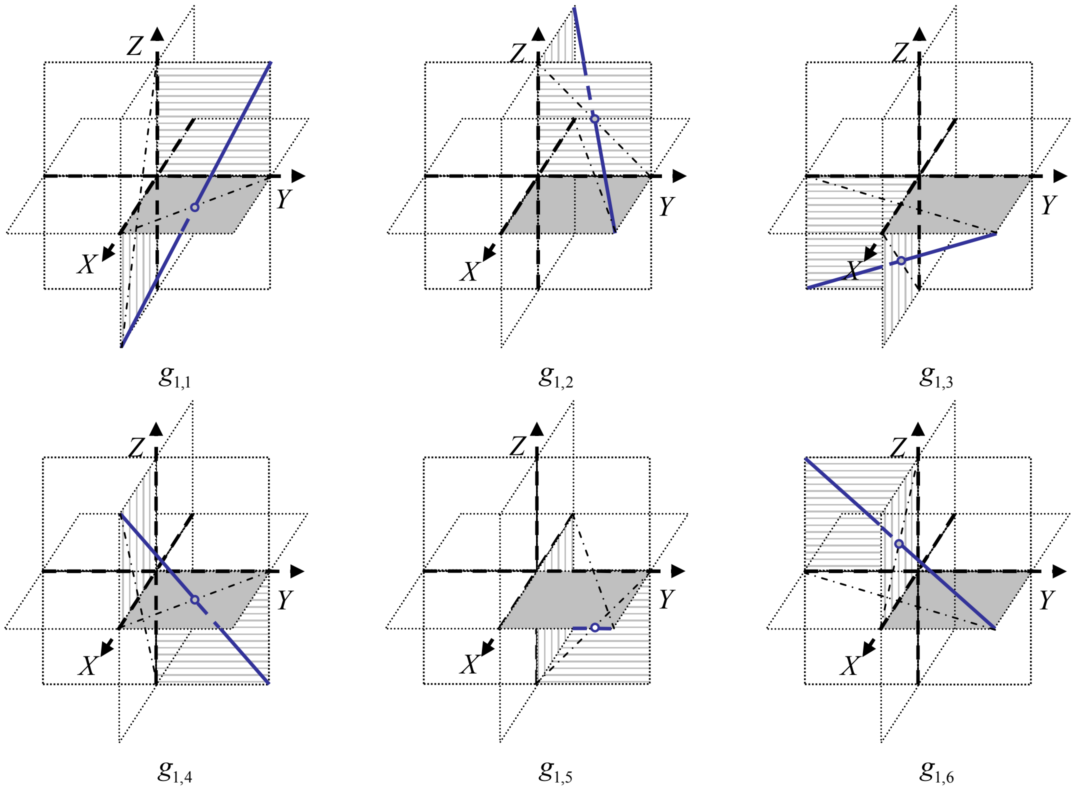

Рис. 7: $g_{1,i}$ **— представники 6 можливих типів прямих підкласу** G_1 **(що перетинають чверть площину** X_+OY_+**)**

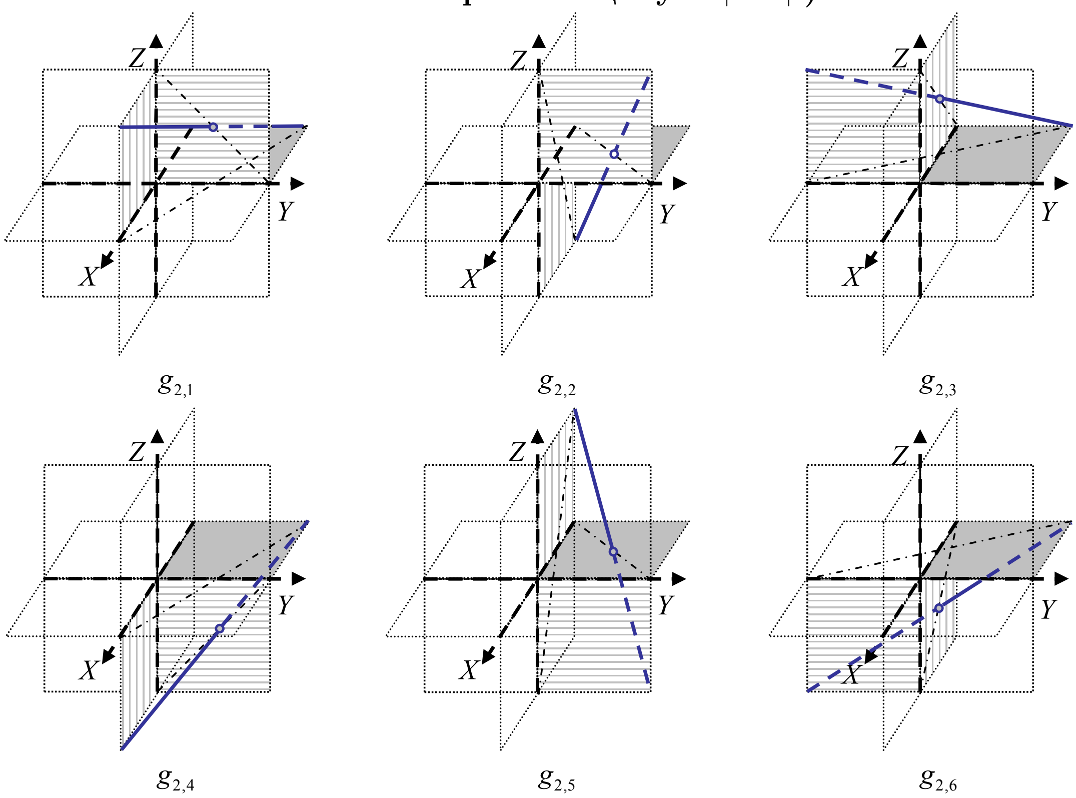

Рис. 8: $g_{2,i}$ **— представники 6 можливих типів прямих підкласу** G_2 **(що перетинають чверть площину** Y_+OX_-**)**

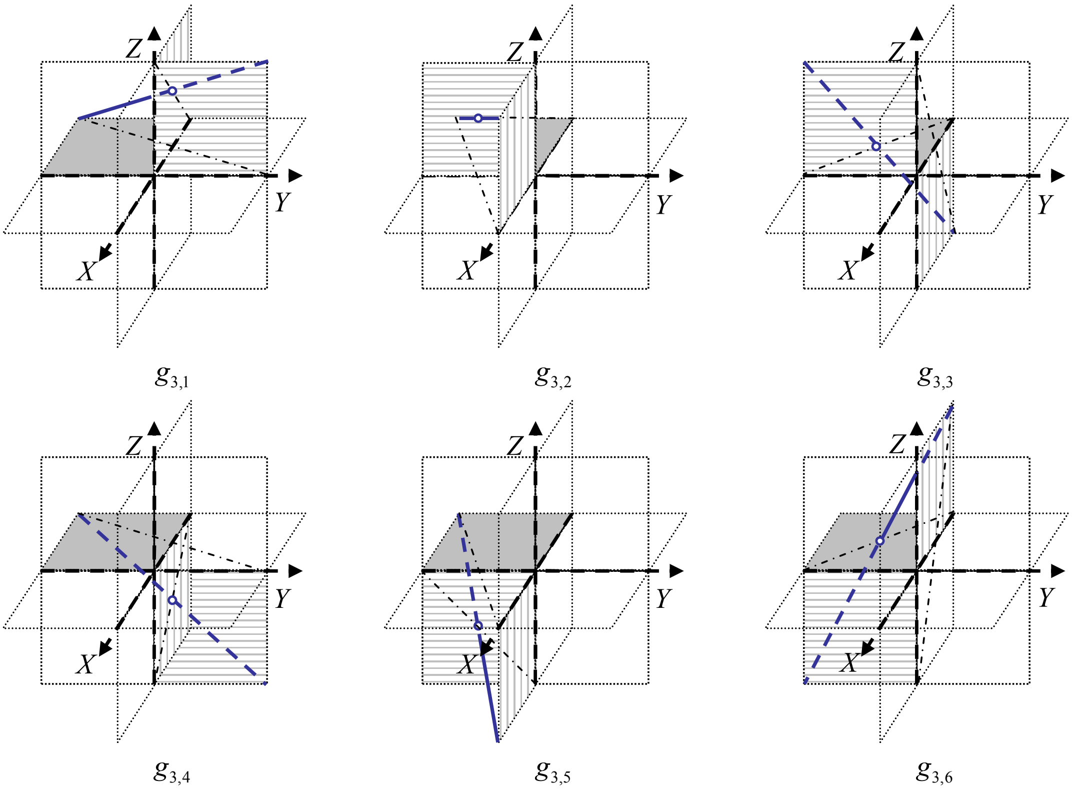

Рис. 9: $g_{3,i}$ **— представники 6 можливих типів прямих підкласу** G_3 **(що перетинають чверть площину** $X_{-}OY_{-}$ **)**

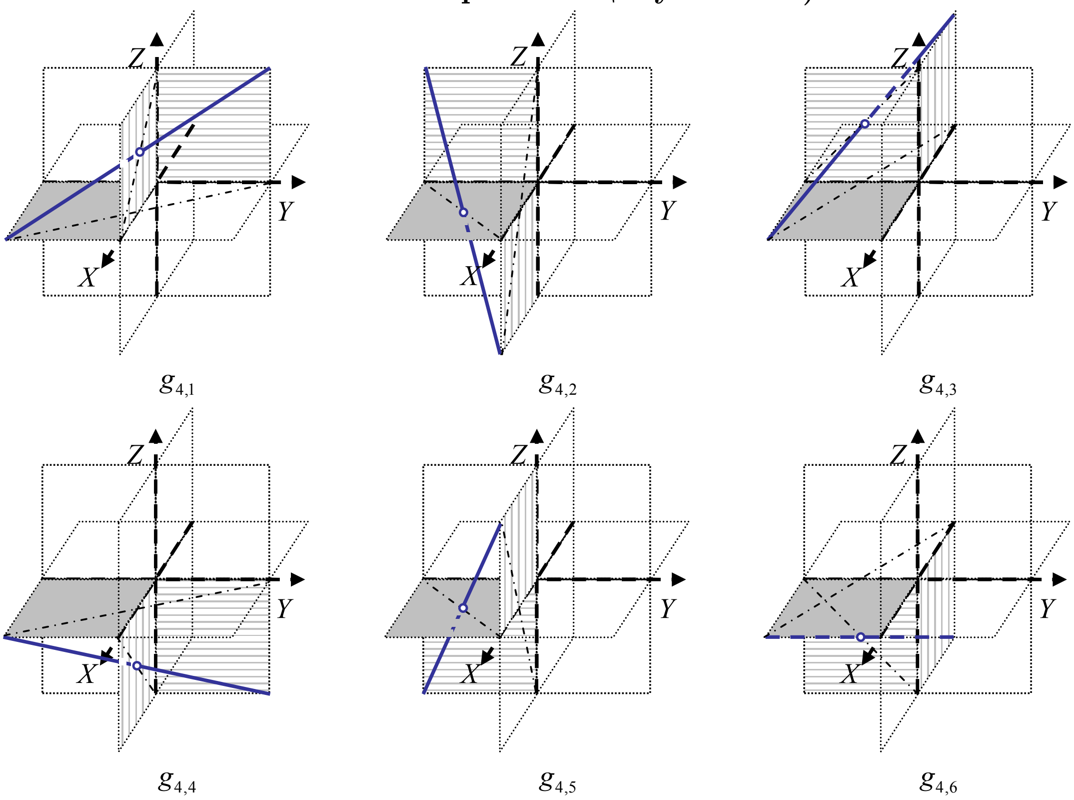

Рис. 10: $g_{4,i}$ **— представники 6 можливих типів прямих підкласу** G_4 **(що перетинають чверть площину** $Y_{-}OX_{+}$ **)**

Висновки

Апробація запропонованого змістового наповнення теми «Пряма і площина у просторі» відбувалась під час викладання протягом першого семестру 2013–2014 н.р. спецкурсу (варіативної дисципліни за вибором студентів) «Вибрані питання математики» для студентів 5 курсу фізико-математичного факультету ДВНЗ «Донбаський державний педагогічний університет», що навчаються за освітньо-професійною програмою підготовки магістра, спеціальність 8.04020101 Математика*.

Результати апробації дозволяють стверджувати, що залучення студентів до розв'язування класифікаційних задач є саме тим видом навчально-наукової діяльності, який сприяє:

— розвитку відповідних практичних навичок;

— більш свідомому засвоєнню базових понять та геометричних властивостей і ознак, а не перетворюється у формальну їх перевірку шляхом підстановки вихідних даних у необхідні аналітичні рівності.

Проте слід констатувати, що отримання критеріїв (необхідних і достатніх умов у вигляді відповідної системи аналітичних рівностей та/або нерівностей) на початковому етапі викликали неабиякі труднощі навіть у сильних студентів.

На нашу думку подальша розробка теми може бути пов'язана з виявленням і систематизацією задач класифікаційного характеру в курсі аналітичної геометрії, зокрема що відносяться до «Теорії прямих і площин у просторі». Однак слід розуміти, що задачі класифікаційного характеру не повинні стати самоціллю. Для викладача будь-яка класифікація повинна мати практичний сенс, причому у тій мірі, в якій вона допоможе йому здійснювати цілеспрямований вибір відповідного методу навчання для розв'язання конкретних дидактичних задач.

Крім того, цікавим, навіть з математичної точки зору, здається з'ясування питання про задання в явному вигляді відношення еквівалентності, яке розшаровує множину прямих тривимірного простору з фіксованою ДСК на шари (класи еквівалентності), кожен з яких містить лише ті прямі, що відносяться до одного зі 133 суттєво різних типів прямих за наведеною класифікацією.

Автори переконані у тому, що дослідницька діяльність, пов'язана із розв'язанням класифікаційних задач, має стати одним з основних видів роботи не лише під час викладання спецкурсів (з фундаментальних та фахових дисциплін за вибором студентів), але й під час проведення курсів підвищення кваліфікації вчителів математики.

Література

1. *Александров П.С.* Лекции по аналитической геометрии, пополненные необходимыми сведениями из алгебры / П.С. Александров. — М.: Наука, 1968. — 912 с.
2. *Атанасян Л.С.* Геометрія. Частина 1: Навчальний посібник для студентів фізмат факультетів педінститутів / Л.С. Атанасян. — К.: Вища школа, 1976. — 456 с.
3. *Бахвалов С.В.* Аналитическая геометрия: Учебник для педагогических институтов / С.В. Бахвалов, Л.И. Бабушкин, В.П. Иваницкая. — М.: Просвещение, 1970. — 376 с.
4. Збірник задач з аналітичної геометрії: Навч. посібник / [уклад.: В.М. Бабич, С.В. Білун, В.М. Журавльов та ін.]; за ред. В.В. Кириченка. — [3-є вид.], пер. та випр. — Кам'янець-Подільський: Аксіома, 2013. — 200 с.
5. *Клочко В.І.* Комп'ютерно-орієнтована методика узагальнення і систематизації знань та вмінь в процесі навчання студентів аналітичної геометрії: Монографія / В.І. Клочко, М.Б. Ковальчук. — Вінниця : ВНТУ, 2009. — 116 с.
6. *Моденов П.С.* Аналитическая геометрия / П.С. Моденов. — М.: МГУ, 1969. — 699 с.
7. *Моденов П.С.* Сборник задач по аналитической геометрии / П.С. Моденов, А.С. Пархоменко. — М.: Наука, 1976. — 384 с.
8. *Мусхелишвили Н.И.* Курс аналитической геометрии / Н.И. Мусхелишвили. — [4-е изд.] — М.: Высшая школа, 1967. — 655 с.
9. *Погорелов А.В.* Аналитическая геометрия / А.В. Погорелов. — [3 изд.] — М., Наука, 1968. — 176 с.
10. *Резниченко С.В.* Аналитическая геометрия в примерах и задачах (Алгебраические главы) / С.В. Резниченко. — М.: МФТИ, 2001. — 576 с.
11. *Савенков А.І.* Психологічні основи дослідницького підходу до навчання / А.І. Савенков. — [2 изд.] — М., 2006. — 512 с.
12. *Сгібнев А.* Як на уроці математики розвивати дослідницькі уміння / А.Сгібнєв // Математика. — 2009. — №6. — С. 18–21.
13. *Фролова І.В.* Науково-дослідницька діяльність студентів — передумова випереджувального саморозвитку фахівця [Електронний ресурс] / І.В. Фролова. // Наукові записки [Ніжинського державного університету ім. Миколи Гоголя]. Сер. : Психолого-педагогічні науки. — 2012. — № 7. — Режим доступу: `http://nbuv.gov.ua/j-pdf/Nzspp_2012_7_46.pdf`
14. *Цубербиллер О.Н.* Задачи и упражнения по аналитической геометрии / О.Н. Цубербиллер. — М.: Наука, 1964. — 336 с.

УДК 37.016:[514.122+514.142]

Кадубовський О.А., Чиркова Н.О.

[1] *кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри геометрії та МВМ, ДВНЗ «ДДПУ»*

[2] *студентка 5 курсу фізико-математичного факультету, ДВНЗ «ДДПУ»*

e-mail: kadubovs@ukr.net, chirkova_n@ukr.net

ПРО МЕТРИЧНІ ЗАДАЧІ «ТЕОРІЇ ПРЯМИХ І ПЛОЩИН У ПРОСТОРІ» В АФІННИХ КООРДИНАТАХ

В статті висвітлюється один із можливих підходів до вивчення змістового модуля «Метричні задачі теорії прямих і площини у просторі» за хронологією, що базується на найбільш доцільній послідовності ключових задач та їх викладі саме в афінних координатах, на відміну від традиційного викладу в прямокутних декартових координатах.

Ключові слова: *афінна система координат у просторі, матриця Грама, метричні задачі на пряму та площину, систематизація.*

Вступ

Тема «Метричні задачі на ... в афінних координатах» (надалі – «МЗвАК») є невід'ємною змістовою складовою об'єднаного курсу лінійної алгебри та аналітичної геометрії для студентів фізико-математичних спеціальностей «класичних» університетів [6, 1].

Дисципліни «Лінійна алгебра та аналітична геометрія» і «Аналітична геометрія» є нормативними дисциплінами освітньо-професійних програм (ОПП) підготовки майбутніх викладачів фізики та математики. Проте, на превеликий жаль, відповідними ОПП підготовки зазначених фахівців для наведених дисциплін не передбачено вивчення змістових модулів «МЗвАК». Можливо тому, в більшості рекомендованих підручників, методичних посібників та збірників задач з аналітичної геометрії для студентів педагогічних ВНЗ метричні задачі розглядають виключно в прямокутних координатах.

Оскільки подальша викладацька діяльність випускників магістратури (педагогічних ВНЗ) за фізико-математичними спеціальностями передбачає готовність до навчання спеціалістів різного профілю, то сьогодні перед вітчизняними ВНЗ, що готують майбутніх викладачів, постало надважливе завдання — формувати фахівців із високим рівнем професійної компетентності [7]. Необхідність отримання студентами більш фундаментальних знань, зокрема із зазначеної теми, й визначає проблему вибору можливих підходів до вирішення поставленого завдання.

Результати кількісного та якісного аналізу дидактичного забезпечення «Метричної теорії прямих і площин у просторі» за найбільш розповсюдженими і рекомендованими підручниками та збірниками задач [6]–[10], [9]–[1] дозволяють констатувати, що:
— систематизація та виокремлення ключових метричних задач «Теорії прямих і площин у просторі» в явному вигляді, навіть для випадку прямокутних координат, залишаються недостатньо висвітленими питаннями;
— «різноманіття» задач, здебільшого, досягається за рахунок розгляду різних способів задання прямої та площини, несуттєвих додаткових умов або ж за рахунок розгляду аналогічних задач з іншими числовими даними;
— задачам без числових даних та задачам дослідницького характеру також приділяється недостатня увага, а їх роль взагалі затушовується;
— в більшості існуючих збірниках відсутні деякі досить важливі задачі, знання та навички розв'язання яких безсумнівно сприятимуть формуванню належного рівня професійної компетентності майбутніх викладачів ВНЗ.

Втішає те, що зазначених вад, принаймні частково, позбавлені збірники задач [6, 4, 9].

Однак окреслений ряд існуючих проблемних питань свідчить про актуальність та необхідність проведення додаткових розвідок, пов'язаних із систематизацією та виокремленням ключових метричних задач «Теорії прямих і площин у просторі», зокрема в афінних координатах. У зв'язку з цим основні завдання нашого дослідження полягали у:
— розв'язуванні наявних задач з обраної теми саме в афінних координатах;
— їх систематизації за найбільш доцільним та ефективним (на думку авторів) для вивчення і засвоєння хронологічним порядком;
— виокремленні з них «ключових».

Як з'ясувалося, розділи «МЗвАК» вперше було запропоновано П.С. Моденовим і О.С. Пархоменком у 1976 р. у збірнику задач [9]. Причому всі задачі таких розділів авторами було віднесено до задач теоретичного характеру та підвищеної складності. Один з можливих підходів до систематизації та виокремлення ключових метричних задач «Теорії прямих на площині» в афінних координатах викладено у роботі [5]. Представлену статтю можна вважати її логічним продовженням.

Отже, **мета даної статті** полягає у висвітленні авторського досвіду із систематизації та виокремлення «ключових» задач, їх доповненні вправами-наслідками та задачами-наслідками теоретичного характеру, які б (у певному розумінні) «повно» охоплювали метричні задачі «Теорії прямих і площин у просторі».

Основна частина

Досвід спілкування зі студентами фізико-математичних спеціальностей, на превеликий жаль, свідчить про невисокий рівень геометричної культури. На нашу думку, основна причина — хаотичне нагромадження в пам'яті студентів сукупності понять і фактів з фундаментальних дисциплін та невисокий рівень усвідомлення взаємозв'язків між ними.

Психологи О.В. Скрипченко, Т.М. Лисянська та ін. зазначають, що знання вважаються засвоєними лише тоді, коли вони зберігаються в пам'яті в узагальненому, згорнутому вигляді як вибудовані, усвідомлені, гнучкі теоретичні положення, які виражають світогляд та систему переконань.

Як відомо, особливістю курсу аналітична геометрія є його (майже безпрецедентна) геометрична наочність. І тому, саме через цю обставину, для розвитку більш фундаментальних математичних уявлень, та з метою досягнення наочності алгебраїчних абстракцій і лаконічності геометричних доведень необхідно здійснювати цілеспрямоване навчання взаємопов'язаному використанню і «взаємоперекладам» між природними для лінійної алгебри та аналітичної геометрії формами інформації: геометричною наочністю і символьними образами.

На нашу думку, вивчення змістових модулів «МЗвАК» в курсі аналітичної геометрії сприятиме більш свідомому розумінню студентами наукових ідей та методів аналітичної геометрії взагалі, її місця серед інших математичних дисциплін та взаємозв'язку з ними. Зазначимо, що ще Б.Н. Делоне наголошував на необхідності широкого розвитку афінної точки зору, бо зв'язок аналітичної геометрії з такими важливими розділами математики, як аналіз і алгебра, відбувається саме через афінну і метричну геометрію [3].

Неподинокий досвід використання (адаптації) *технології навчання математиці за Р.Г. Хазанкіним* дозволяє стверджувати, що робота викладача з вибору ключових задач до певного змістового модуля математичної дисципліни дає можливість забезпечити необхідний фундамент для навчання студентів розв'язувати більш складні задачі з відповідної теми.

У зв'язку з цим, пропонований нами підхід базується на використанні конкретної системи «ключових» задач (саме в афінних координатах). Причому, кожну з них «оснащено» вправами-наслідками та задачами-наслідками, які «традиційно» відносять до так званих «типових» задач.

Під *ключовою задачею* ми будемо розуміти задачу, в результаті розв'язання якої встановлюється математичний факт, що часто використовується при розв'язанні інших задач.

Під *вправою-наслідком* — задачу «ілюстративного» характеру, яка є тривіальним тлумаченням відповідної ключової задачі у частинних її проявах та /або інтерпретаціях.

Під *задачею-наслідком* — ту, яка надає зразок застосування (отриманого у відповідній(их) ключовій(их) задачі(ах)) результату чи способу її розв'язування (розкриває суть прийому).

Одна із особливостей підходу полягає в тому, що всі пропоновані задачі сформульовано у загальному вигляді (без числових даних). Останнє зовсім не означає, що головною метою є одержання кінцевої формули, як формальне її узагальнення на випадок афінних координат. Навпаки — вона повинна бути результатом свідомого, по-крокового розв'язування, кінцевим продуктом якого є відповідний алгоритм.

Крім того, розв'язання зазначених задач в афінних координатах припускають алгоритми, що майже позбавлені необхідності в апелюванні до геометричної наочності (як вихідного пункту міркувань), які без змін (проте з очевидними значними спрощеннями) доцільно використовувати при розв'язуванні цих задач в косокутних та прямокутних координатах.

На нашу думку, такий спосіб подачі матеріалу сприятиме формуванню у студентів саме систематизованих знань, які слід розглядати і як засіб, і як мету вивчення змістового модуля «МЗвАК» із зазначеної теми.

Одержані в роботі результати можуть бути теоретичною та дидактичною основою викладання змістового модуля «Метричні задачі теорії прямих і площин у просторі» об'єднаного курсу з аналітичної геометрії та лінійної алгебри для студентів фізико-математичних спеціальностей. Розв'язки запропонованих задач (у загальному вигляді) доцільно використовувати у двох аспектах:

`з одного боку` — під час добору задач із новими числовими даними,

`з іншого боку` — як самостійний інструментарій для розв'язування широкого кола метричних задач на многогранники з відомими довжинами (трьох) ребер зі спільною вершиною та кутами між ними.

Перш ніж перейти до ознайомлення із результатами систематизації та виокремлення ключових метричних задач «Теорії прямих і площин у просторі» в афінних координатах, зазначимо, що студентам, після вивчення змістового модуля «Елементи векторної алгебри», достатньо усвідомлювати базові поняття «Методу координат» та факти, що вичерпуються наступними

Означення 1. *Узагальненою декартовою (або ж афінною) системою координат у просторі називають впорядковану сукупність трьох осей координат, що не лежать в одній площині та проходять через одну точку* O *, яка є початком координат на кожній з осей.*

Іншими словами — афінна система координат у просторі цілком визначається точкою O (початок координат) та впорядкованою трійкою некомпланарних векторів $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}$ зі спільним початком у точці O. Напрями цих векторів визначають додатні напрями координатних осей OX (*абсцис*), OY (*ординат*) та OZ (*аплікат*) відповідно.

Означення 2. *Простір з фіксованою узагальненою декартовою (афінною) системою координат називають (афінним) координатним простором.*

Означення 3. *Метричними коефіцієнтами g_{ij} базису $\{\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}\}$ (в просторі) називають наступні скалярні добутки*

$$g_{ij} = \langle \overrightarrow{e_i}, \overrightarrow{e_j} \rangle = |\overrightarrow{e_i}| \cdot |\overrightarrow{e_j}| \cdot \cos\angle(\overrightarrow{e_i}, \overrightarrow{e_j}) \quad \forall i,j \in \{1,2,3\}. \tag{1}$$

Матрицю $G = (g_{ij})$, елементами якої є зазначені добутки, називають матрицею Грама метричних коефіцієнтів базису $\{\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}\}$. Оскільки $g_{ij} = g_{ji}$, то $G^T = G$, де G^T — матриця, транспонована до матриці G.

Добре відомо, що якщо два вектори відносно базису $\{\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}\}$ задано координатами $\overrightarrow{a} = \{a_1, a_2, a_3\}$, $\overrightarrow{b} = \{b_1, b_2, b_3\}$, то їх скалярний добуток можна обчислити за формулою

$$\left\langle \overrightarrow{a}, \overrightarrow{b} \right\rangle = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} g_{ij}a_ib_j = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \end{pmatrix} \circ G \circ \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = A^T \circ G \circ B, \tag{2}$$

де A і B – матриці-стовпці, елементами яких є координати векторів $\overrightarrow{a}$ і $\overrightarrow{b}$ відповідно, A^T – матриця-рядок, що є транспонованою до матриці A [1].

Оскільки $\langle \overrightarrow{a}, \overrightarrow{a} \rangle = |\overrightarrow{a}|^2$, то

$$|\overrightarrow{a}| = \sqrt{A^T \circ G \circ A}. \tag{3}$$

Площу паралелограма, побудованого на двох неколінеарних векторах $\overrightarrow{p} = \{p_1; p_2; p_3\}$ і $\overrightarrow{q} = \{q_1; q_2; q_3\}$ можна обчислити за формулою

$$S_{\square} = \sqrt{\begin{vmatrix} P^T \circ G \circ P & P^T \circ G \circ Q \\ P^T \circ G \circ Q & Q^T \circ G \circ Q \end{vmatrix}}, \tag{4}$$

де $P^T = \begin{pmatrix} p_1 & p_2 & p_3 \end{pmatrix}$, $Q^T = \begin{pmatrix} q_1 & q_2 & q_3 \end{pmatrix}$, а об'єм паралелепіпеда, побудованого на трьох некомпланарних векторах $\overrightarrow{p} = \{p_1; p_2; p_3\}$, $\overrightarrow{q} = \{q_1; q_2; q_3\}$ і $\overrightarrow{r} = \{r_1; r_2; r_3\}$ — за формулою

$$V = \sqrt{|G|} \cdot \mathrm{mod} \begin{vmatrix} p_1 & p_2 & p_3 \\ q_1 & q_2 & q_3 \\ r_1 & r_2 & r_3 \end{vmatrix}. \tag{5}$$

Більш детально з наведеними поняттями та фактами можна ознайомитись, наприклад в [6]–[11], [12], [10], [9]–[1].

Нижче, без додаткових пояснень, представлено результат систематизації та виокремлення «ключових» метричних задач теорії прямих і площин у просторі в афінних координатах. Також наведено вправи-наслідки та задачі-наслідки теоретичного і дослідницького характеру, які, по суті, й складають основу авторського підходу до вивчення та викладання змістового модуля «МЗвАК» з відповідної теми у курсі лінійної алгебри та/або аналітичної геометрії для студентів фізико-математичних спеціальностей.

В умовах всіх наведених нижче задач координати даних точок і векторів та рівняння прямих і площин задано відносно фіксованої афінної системи координат з матрицею Грама $G = (g_{ij})$.

Ключова задача 1. *Знайти рівняння площини, яка проходить через дану точку та має даний нормальний вектор.*

Вправа-наслідок 1-1. Знайти рівняння площини, яка проходить через дану точку перпендикулярно прямій, заданій канонічним рівнянням.

Вправа-наслідок 1-2. Знайти рівняння площини, яка проходить через дану точку перпендикулярно прямій, заданій як перетин двох площин.

Ключова задача 2. *Знайти координати нормального вектора площини, заданої параметричним рівнянням.*

Задача-наслідок 2.1. Знайти координати нормального вектора площини, заданої загальним рівнянням.

Ключова задача 3. *Знайти необхідну та достатню умову перпендикулярності*

1) *прямих, заданих канонічними рівняннями;*

2) *площин, заданих загальними рівняннями;*

3) *прямої і площини, заданих канонічним та загальним рівняннями відповідно.*

Вправа-наслідок 3-1. Знайти необхідну та достатню умову перпендикулярності

1.1) прямої, заданої як перетин двох площин, та прямої, заданої канонічним рівнянням;

1.2) прямих, що є перетином відповідних пар площин, заданих загальними рівняннями;

2.1) площин, заданих параметричним та загальним рівняннями відповідно;

2.2) площин, заданих параметричними рівняннями;

3.1) прямої і площини, заданих канонічним та параметричним рівняннями відповідно;
3.2) прямої, заданої як перетин двох площин, і площини, заданої параметричним рівнянням.

Задача-наслідок 3.1. Знайти рівняння прямої, що проходить через дану точку перпендикулярно до площини, заданої загальним рівнянням.

Задача-наслідок 3.2. Знайти рівняння площини, що проходить через дану точку перпендикулярно до кожної з двох непаралельних площин, заданих загальними рівняннями.

Задача-наслідок 3.3. Знайти рівняння площини, що містить пряму, задану канонічним рівнянням, та є перпендикулярною до площини, заданої загальним рівнянням.

Ключова задача 4. *Знайти косинус (синус) гострого кута між*
1) *прямими, заданими канонічними рівняннями;*
2) *площинами, заданими загальними рівняннями;*
3) *прямою, заданою канонічним рівнянням, та площиною, заданою загальним рівнянням.*

Вправа-наслідок 4-1. Знайти косинус (синус) гострого кута між
1) прямою, заданою канонічним рівнянням, та координатними осями;
2) площиною, заданою загальним рівнянням, та координатними осями;
3) координатною віссю та координатною площиною, яка її не містить;
4) координатними осями та координатними площинами відповідно;
5) координатними площинами
5.1) ZOX та XOY; 5.2) XOY та YOZ; 5.3) YOZ та ZOX;
6) координатними осями
6.1) OX та OY; 6.2) OY та OZ; 6.3) OZ та OX.

Ключова задача 5. *Знайти рівняння прямих, які проходять через дану точку та перетинають пряму, задану канонічним рівнянням, під даним гострим кутом.*

Вправа-наслідок 5-1. Знайти рівняння прямих, що проходять через дану точку та утворюють даний кут з координатною віссю
1) OX; 2) OY; 3) OZ.

Задача-наслідок 5.1. Знайти рівняння прямої, яка проходить через дану точку перпендикулярно до прямої, заданої канонічним рівнянням.

Ключова задача 6. *Знайти відстань від даної точки до*
1) *площини, заданої загальним рівнянням;*
2) *прямої, заданої канонічним рівнянням.*

Вправа-наслідок 6-1. Обчислити відстань
1.1) від даної точки до площини, заданої загальним рівнянням;
1.2) від даної точки до координатних площин;
1.3) від початку координат до площини, заданої загальним рівнянням;
1.4) між паралельними площинами, заданими загальними рівняннями;
1.5) між мимобіжними прямими, заданими канонічними рівняннями;
1.6) між паралельними прямими, заданими канонічними рівняннями;
1.7) від даної точки до певної координатної осі.

Задача-наслідок 6.1. Знайти рівняння бісекторних площин двогранних кутів, утворених площинами, заданими загальними рівняннями.

Задача-наслідок 6.2. Знайти рівняння бісекторних площин двогранних кутів, утворених координатними площинами
1) YOZ та ZOX; 2) ZOX та XOY; 3) XOY та YOZ.

Ключова задача 7. *Визначити координати ортогональної проекції даної точки на*
1) *площину, задану загальним рівнянням;*
2) *пряму, задану канонічним рівнянням.*

Вправа-наслідок 7-1. Знайти координати ортогональної проекції точки
1) на координатні площини;
2) на координатні вісі.

Задача-наслідок 7.1. Знайти координати точки, симетричної даній точці відносно
1) площини, заданої загальним рівнянням;
2) прямої, заданої канонічним рівнянням.

Задача-наслідок 7.2. Знайти рівняння ортогональної проекції прямої, заданої канонічним рівнянням, на площину, задану загальним рівнянням.

Задача-наслідок 7.3. Знайти рівняння площини, симетричної до площини, заданої загальним рівнянням, відносно площини, заданої загальним рівнянням.

Ключова задача 8. *Знайти координати основ спільного перпендикуляра до двох мимобіжних прямих.*

Задача-наслідок 8.1. Знайти рівняння прямої, яка містить спільний перпендикуляр двох мимобіжних прямих, заданих канонічними рівняннями.

Ключова задача 9. *Знайти рівняння прямої, симетричної прямій, заданій канонічним рівнянням, відносно*
1) *площини, заданої загальним рівнянням;*
2) *прямої, заданої канонічним рівнянням.*

Вправа-наслідок 9-1. Знайти рівняння прямої, симетричної прямій, заданій канонічним рівнянням, відносно координатних площин.

Вправа-наслідок 9-2. Знайти рівняння прямої, симетричної прямій, заданій канонічним рівнянням відносно певної координатної осі.

Ключова задача 10. *Знайти рівняння площини, яка відстоїть від початку координат на відстані* p *та утворює з осями координат кути* ψ_1, ψ_2 *і* ψ_3 *відповідно.*

Задача-наслідок 10.1. Звести загальне рівняння площини до нормального виду.

Задача-наслідок 10.2. Знайти синуси кутів між площиною, заданою загальним рівнянням, та координатними осями.

Задача-наслідок 10.3. Знайти необхідні та достатні умови, яким повинні задовольняти кути ψ_1, ψ_2 і ψ_3 із задачі 10.

Ключова задача 11. *Знайти рівняння площин, які містять пряму, задану канонічним рівнянням, та утворюють даний гострий кут з площиною, заданою загальним рівнянням.*

Ключова задача 12. *Знайти рівняння площини, яка містить пряму, задану канонічним рівнянням, і відстоїть від даної точки на даній відстані.*

Зауважимо, що вправи- і задачі-наслідки повинні добиратися викладачем з урахуванням не лише суб'єктивних чинників а й реального бюджету часу.

Висновки

В представленій роботі запропоновано один із можливих підходів до вивчення метричних задач «Теорії прямих та площини в просторі». Зокрема, наведено 12 ключових задач, 44 вправ-наслідків та 21 задач-наслідків теоретичного характеру, які (в певному розумінні) «повно» охоплюють метричні задачі на пряму і площину в просторі в афінних координатах.

Одержані авторами алгоритми до розв'язання наведених задач без змін, проте з *очевидними значними спрощеннями*, доцільно і зручно використовувати при розв'язуванні цих задач в косокутних та прямокутних координатах. Тому запропонований підхід, безсумнівно, можна і доцільно використовувати й при традиційному вивченні відповідної теми в прямокутних координатах.

Апробація запропонованого підходу відбувалась під час викладання спецкурсу «Вибрані питання математики» для студентів 5 курсу фізико-математичного факультету ДДПУ. Результати впровадження наведеної системи задач дозволяють констатувати, що ознайомлення студентів з метричними задачами в афінних координатах викликало інтерес, спонукало їх до творчої діяльності та посилювало розуміння ними міжпредметних зв'язків.

Студенти (за порівняно нетривалий час) опанували необхідні навички та показали достатній рівень залишкових знань.

На нашу думку, цікавим і цілком досяжним здається проведення досліджень, присвячених оберненим задачам — «на знаходження метричних коефіцієнтів». Маємо надію, що наведений матеріал буде корисний студентам ВНЗ під час вивчення відповідної теми курсу «Аналітична геометрія» та зацікавить викладачів, які викладають цю дисципліну, як довідково-дидактичний матеріал, який значно доповнює відповідні параграфи [8], [7]–[1].

Література

1. *Алания Л.А.* Сборник задач по аналитической геометрии и линейной алгебре /Л.А. Алания, И.А. Дынников, В.М. Мануйлов; под ред. Ю.М. Смирнова. — [2-е изд.] — М.: Логос, 2005. — 376 с.
2. *Атанасян Л.С.* Геометрія. Частина 1: Навч. посібник для студентів фіз.-мат. фак. пед. ін-тів / Л.С. Атанасян. — К.: Вища школа, 1976. — 456 с.
3. *Делоне Б.Н.* Аналитическая геометрия / Б.Н. Делоне, Д.А. Райков. — Ленинград: ОГИЗ, 1948. — Т. 1. — 456 с.
4. Збірник задач з аналітичної геометрії: Навч. посібник / [уклад.: В.М. Бабич, С.В. Білун, В.М. Журавльов та ін.]; за ред. В.В. Кириченка. — [3-є вид.], пер. та випр. — Кам'янець-Подільський: Аксіома, 2013. — 200 с.
5. *Кадубовський О.А.* Основні метричні задачі на прямі у площині в афінних координатах / О.А. Кадубовський, М.В. Романкевич // Зб. наук. праць фіз.-мат. факультету ДДПУ. — 2013. — Вип. 3. — С. 154–177.
6. *Ким Г.Д.* Алгебра и аналитическая геометрия: Теоремы и задачи / Г.Д. Ким, Л.В. Крицков. — М.: Планета знаний, 2007. — Т. 1. — 469 с.
7. *Лосєва Н.М.* Прикладна спрямованість навчання аналітичної геометрії як основа формування професійної компетентності викладача математики / Н.М. Лосєва, О.А. Ніколаєва // Дидактика математики: проблеми і дослідження: між. зб. наук. робіт. — 2012. — № 38. — С. 46–50.
8. *Моденов П.С.* Аналитическая геометрия / П.С. Моденов. — М.: МГУ, 1969. — 699 с.
9. *Моденов П.С.* Сборник задач по аналитической геометрии / П.С. Моденов, А.С. Пархоменко. — М.: Наука, 1976. — 384 с.
10. *Мусхелишвили Н.И.* Курс аналитической геометрии / Н.И. Мусхелишвили. — [4-е изд.] — М.: Высшая школа, 1967. — 655 с.
11. *Постников М.М.* Аналитическая геометрия / М.М. Постников. — М.: Наука, 1973. — 384 с.
12. *Цубербиллер О.Н.* Задачи и упражнения по аналитической геометрии / О.Н. Цубербиллер. — М.: Наука, 1964. — 336 с.

УДК 155.25+159.9.072

Саврасов В.П., Гунько Л. В.

[1] *канд. психологічних наук, доцент кафедри загальної психології, ДВНЗ «ДДПУ»*

[2] *студентка 5 курсу фізико-математичного факультету, ДВНЗ «ДДПУ»*

e-mail: savnick85@mail.ru

ПСИХОЛОГО-ПЕДАГОГІЧНІ ОСОБЛИВОСТІ КРЕАТИВНОСТІ ОСОБИСТОСТІ СТУДЕНТІВ ПЕДАГОГІЧНИХ ТА ЕКОНОМІЧНИХ СПЕЦІАЛЬНОСТЕЙ

Дане дослідження присвячене вивченню психолого-педагогічних особливостей креативності особистості студентів педагогічних та економічних спеціальностей, уточнюється поняття емоційних та мотиваційних складових креативності, встановлюються психологічні характеристики емоційно-мотиваційних складових креативності в залежності від профілю професійної підготовки.

Ключові слова: *особистість, креативність, студент, складова, характеристика.*

Вступ

Постановка проблеми. У психологічній науці виділяють три основні види креативності: соціальна креативність (В. Н. Куніцина, К. М. Романова, Н. П. Фетіскіна), особистісна креативність (Н. Ф. Вишнякова, А. Маслоу, О. П. Саннікова), інтелектуальна креативність (О. М. Грек, Е. І. Кульчицька, С. М. Симоненко).

Але на сьогодні у доступній нам літературі відкритим залишилося питання цілісного погляду на креативність студента з позиції теорії особистості, виділення та системного аналізу основних її складових, перш за все, емоційних та мотиваційних складових креативності особистості, в тому числі у навчальній діяльності.

Мета і задачі дослідження. Мета роботи — визначення емоційно-мотиваційних складових креативності особистості студента. Задачі дослідження: 1) здійснити аналіз теоретико-методологічних досліджень, спрямованих на вивчення креативності та її емоційно-мотиваційних складових; 2) уточнити поняття емоційних та мотиваційних складових креативності, визначити їх психологічний зміст та структуру; 3) побудувати процедуру емпіричного дослідження; 4) визначити психологічні характеристики емоційно-мотиваційних складових креативності в залежності від профілю професійної підготовки.

Аналіз основних досліджень і публікацій. С. Д. Максименко розглядає креативність як один з принципів побудови генетико-моделюючого методу дослідження особистості. Він зазначає, що «... вже сама по собі дана особистість є результатом та продуктом творчості. І нужда, втілена у ній, має величезний креативний потенціал» [3, с. 65]. Автор веде мову про те, що «... креативність є глибинною, первісною і абсолютно природною ознакою особистості — це є вища форма активності, яка створює і залишає слід, втілюється. З іншого боку, креативність означає прагнення виразити свій внутрішній світ» [3, с. 67].

Р. Мілграм та Є. Хонга, вивчаючи залежність креативності від інтелектуальних здібностей, етнічної приналежності, освітнього статусу та статі для представників дошкільного віку, школярів та студентів коледжу, приходять до висновку про те, що з віком відбувається зростання впливу соціально-культурних детермінант на креативність, натомість зв'язок між креативністю та інтелектуальними здібностями у більш дорослому віці втрачається [8].

У дослідженнях, виконаних О. М. Вороніним та співробітниками на дорослих опитуваних (студентах економічного коледжу та менеджерах), отримані результати про незалежність факторів інтелекту та креативності [1].

О. М. Харцій стверджує, що креативність майбутніх менеджерів значно впливає на ефективність їх професійної діяльності, забезпечує успішність їх професійної підготовки, сприяє їх особистісній самореалізації, нестандартності, самостійності та ініціативності [6].

На думку О. С. Шила, розвиток креативності майбутнього педагога може знайти свої місце у процесі його професійної підготовки, шляхом розвитку спрямованості особистості на цінності професійної та особистісної самореалізації, системи ціннісних орієнтацій особистості [7].

Дослідження М. Сарзанія, що було присвячене з'ясуванню співвідношення між спеціалізацією пізнавальних потреб та креативністю особистості студента, призвело до результатів, що свідчать про схильність до природничих наук студентів з високою креативністю, в той час як низько креативні та середньо креативні студенти виявляли схильність до гуманітарних дисциплін. Крім того, було встановлено, що низьку схильність до суспільних наук мають усі експериментальні групи, незалежно від рівня креативності респондентів, а студенти з високою креативністю мали більш гармонійні стосунки із викладачами [9].

Досліджуючи функції змінної віку у структурі креативності студентів коледжу та університету, колектив авторів на чолі з Ч. Ву дійшов висновків, що студенти більш дорослого віку демонструють достовірно вищі результати за вербальною шкалою креативності. Натомість, студенти молодшого віку демонстрували кількісну та якісну перевагу за шкалою фігуральної креативності. Крім того, виявлено, що більш вагомий інформаційний тезаурус позитивно впливає на творчі досягнення у складних інформаційних системах, у той час як у творчих задачах зображувального характеру інформаційний тезаурус не має позитивного впливу на креативність [10].

Т. А. Тернавська, досліджуючи розвиток невербальної креативності студентів як складової їх пізнавальної активності, стверджує, що розвиток креативності особистості студента залежить від успішності поєднання у навчальній діяльності у вищій школі принципів практичності, проблемності, творчого підходу з боку викладача та навчальної мотивації студентів [4].

Як вважає О. А. Кривопишина, дослідження проблеми розвитку креативності, особливо у період юнацького віку, знаходяться на Україні на недостатньо високому рівні, як у теоретичному, так і у методологічному аспектах та пропонує використовувати для цього метод аналізу літературної творчості юнаків [2].

Є. В. Фролова в процесі дослідження креативності як чинника успішності навчальної діяльності студентів, приходить до висновків про те, що вербальна та невербальна креативність, а насамперед індекси розробленості, унікальності та оригінальності пов'язані з високим рівнем навчальної успішності студентів, у студентів, що мають низький рівень навчальних досягнень, креативність відносно чітко виділяється за невербальною та вербальною ознакою [5].

Основна частина

Основним у структурі креативності студентів педагогічного профілю є перший фактор (інтроверсія), що достовірно сполучає на одному полюсі показники інтелектуальної, комунікативної та загальної емоційності, мотивації спілкування, діяльнісної спрямованості, внутрішньої мотивації майбутньої професійної діяльності, мотивації творчої активності, потреби активно діяти та досягати успіху, соціального самоконтролю, сили волі, індекси оригінальності та унікальності за тестом С. Медніка, індекси оригінальності та розробленості за тестом Є. Торренса. На іншому його полюсі розташований показник смутку. Другий фактор (вплив невербального інтелекту на майбутнє) містить змінні інтелекту за тестом Дж. Равена, що увійшли на статистично достовірному рівні, та показник потреби у перспективі та надіях на краще. Третій фактор (когнітивний компонент креативності) містить на достовірному рівні показник когнітивного індекс за авторською методикою та на недостовірному рівні такі показники мотиваційної сфери особистості, як творча активність та діяльнісна спрямованість.

Можна стверджувати, що до складу єдиної психічної структури із показниками невербальної креативності входять показники інтелектуальної, комунікативної та загальної емоційності, мотивації спілкування, діяльнісної спрямованості, внутрішньої мотивації майбутньої професійної діяльності, творчої активності, потреби активно діяти та досягати успіху, соціального самоконтролю. В той же час, протилежним показником виступає показник смутку, тобто його високий рівень розвитку ускладнює прояви креативності особистості.

Як можна бачити, основним у структурі креативності майбутніх фахівців економічного профілю є перший фактор (суспільно-професійний контроль), що достовірно сполучає на одному полюсі показники інтелектуальної, комунікативної та загальної емоційності, діяльнісної спрямованості, внутрішньої мотивації майбутньої професійної діяльності, творчої активності, потреби активно діяти та досягати успіху, соціального самоконтролю, індекси оригінальності та унікальності за тестом С. Медніка, індекси оригінальності та розробленості за тестом Є. Торренса. На другому його полюсі розташовані показники смутку, мотивації спілкування та зовнішньої негативної мотивації майбутньої професійної діяльності. Другий фактор (вербалізація творчого пошуку) містить на недостовірному рівні змінні інтелекту за тестом Дж. Равена та показник унікальності за тестом С. Медніка. Третій фактор (невербальний інтелект) містить показники інтелекту за тестом Дж. Равена. Таким чином, до єдиної структури з показниками креативності входять показники інтелектуальної, комунікативної та загальної емоційності, діяльнісної спрямованості, внутрішньої мотивації майбутньої професійної діяльності, творчої активності, потреби активно діяти та досягати успіху, соціального самоконтролю. Протилежними по відношенню до креативності та компонентів її структури виступають показники смутку, мотивації спілкування та зовнішньої негативної мотивації майбутньої професійної діяльності.

Спостерігаємо, що наявні суттєві розбіжності у факторній структурі креативності студентів педагогічного та економічного профілю. А саме, всередині першого фактору (інтроверсія) студентів-економістів більшу роль відіграють показники мотиваційної природи, а всередині першого фактору (суспільно-професійний контроль) студентів-педагогів більшою є вага компонент мотиваційної природи. Одночасно, у студентів-педагогів спостерігається модифікація явища негативних проявів спілкування (наявних і у студентів-економістів) у явище суспільної залежності, коли вони не можуть ефективно виконувати майбутні професійні обов'язки за відсутності негативного впливу зовні.

Другий фактор у структурі креативності студентів-економістів (вплив невербального інтелекту на майбутнє) та студентів-педагогів (вербалізація творчого пошуку) суттєво різняться між собою за психологічним змістом, оскільки для майбутніх педагогів він відображає віру у значення невербального інтелекту у майбутній професійній діяльності, в той час як для майбутніх педагогів він означає вербалізацію вже наявних результатів творчих пошуків, в тому числі у процесі навчальної діяльності та побудові планів майбутнє.

Третій фактор у структурі креативності студентів-економістів (когнітивний компонент креативності) та студентів-педагогів (невербальний інтелект) різниться як за змістом, так і за психологічним сенсом.

Таким чином, в незалежності від профілю професійної підготовки (педагогічний та економічний профіль), структура креативності студента містить показники інтелектуальної, комунікативної та загальної емоційності, смутку, мотивації спілкування, внутрішньої мотивації майбутньої професійної діяльності, потреби активно діяти та досягати успіху, соціального самоконтролю, сили волі, індекси оригінальності та унікальності за тестом С. Медніка, індексу оригінальності та унікальності за тестом Є. Торренса.

Показники-критерії креативності студента (оригінальність, унікальність та самооцінка креативності) утворюють факторну єдність з такими показниками емоційної та мотиваційної сфери особистості як інтелектуальна, комунікативна та загальна емоційність, смуток, мотивація спілкування, внутрішньої мотивації майбутньої професійної діяльності, потреби активно діяти та досягати успіху. Останні власне і виступають емоційно-мотиваційними складовими креативності студента незалежно від профілю навчання у ВНЗ.

Суттєвою відмінністю у структурі креативності виступає наявність у студентів педагогічного профілю зовнішньої негативної мотивації майбутньої професійної діяльності, та відсутність у їх структурі креативності діяльнісної спрямованості та інтегрального індексу за авторською методикою.

Висновки

На підставі одержаних результатів можна зробити наступні висновки:
1) креативність виступає як рівень творчої обдарованості, здібностей до творчості, які проявляються у мисленні, спілкуванні, окремих видах діяльності і становлять відносно стійку характеристику особистості. Креативність розглядається як незвідна до інтелекту функція цілісної особистості, яка включає комплекс її психологічних характеристик. Психологічну структу-

ру креативності особистості складають: регулюючий компонент (емоційна складова), стимулюючий компонент (мотиваційна складова) та змістовний компонент (інтелектуальна складова). Виявлено, що креативність особистості в цілому характеризується показниками оригінальності, унікальності, розробленості та самооцінки креативності;

2) регулюючий компонент креативності (емоційна та вольова складова) характеризується показниками емоційності та емоційних станів особистості, сили волі, терплячості, стійкості, наполегливості, готовності до ризику, організованості, самоконтролю; стимулюючий компонент (мотиваційна складова) характеризується показниками елементів мотиваційної структури особистості, внутрішньою та зовнішньою мотивацією навчальної та професійної діяльності, мотивацією до успіху, мотивацією до запобігання невдач, спрямованістю особистості; змістовий компонент (інтелектуальна складова) характеризується показниками вербального та невербального інтелекту;

3) особливості прояву емоційно-мотиваційних складових креативності особистості в залежності від профілю професійної підготовки полягають у наступному: наявність у студентів педагогічного профілю в порівнянні зі студентами економічного профілю зовнішньої негативної мотивації майбутньої професійної діяльності, та відсутність у структурі їх креативності діяльнісної спрямованості.

Виконане дослідження не вичерпує усіх теоретичних та прикладних питань проблеми психологічних характеристик креативності особистості, та існує нагальна необхідність подальших розробок у напрямках: зв'язку профілю навчання із динамікою креативності студента та школяра у різних системах навчання, зв'язку статево-рольових особливостей із динамікою креативності студента-педагога, створення та оптимізації умов ефективного розвитку креативності особистості на різних етапах професіоналізації, у різних системах навчання тощо.

Література

1. *Воронин А. Н.* Интеллект и креативность в совместной деятельности: автореф. дис. ... канд. психол. наук. 19.00.13 / Воронин Андрей Николаевич — М., 2004. — 50 с.
2. *Кривопишина О. А.* Аналіз сучасних досліджень з проблем психологічних особливостей становлення та творчого розвитку особистості у юнацькому віці / О. А. Кривопишина // Актуальні проблеми психології. Збірник наукових праць Інституту психології ім. Г. С. Костюка АПН України / за ред. Максименка С. Д. — К.: «Логос», 2007. — т. 7. — вип. 13. — С. 239–244.

3. *Максименко С. Д.* Основи генетичної психології: Навчальний посібник / С.Д. Максименко — К.: НПЦ «Перспектива», 1998. — 220 с.
4. *Тернавська Т. А.* Вивчення розвитку невербальної креативності як складової пізнавальної активності студентів університету / Т. А. Тернавська // Проблеми емпіричних досліджень у психології. — Вип. 1. — К.: Гнозис, 2008. — С. 10–16.
5. *Фролова Є. В.* Креативність як чинник успішності навчальної діяльності / Є. В. Фролова // Вісник ХНПУ ім. Г. С. Сковороди. Психологія. — Харків: ХНПУ, 2009. — Вип. 32. — С. 204–214.
6. *Харцій О. М.* Креативність у майбутніх менеджерів організацій / О. М. Харцій // Вісник Харківського національного університету ім. В.Н. Каразіна. — Вип. 41. — № 842. — С. 347–352.
7. *Шило О. С.* Проблема ціннісних орієнтацій в контексті творчої діяльності особистості / О. С. Шило // Актуальні проблеми психології: Психологія навчання. Генетична психологія. Медична психологія; за ред. С. Д. Максименка. — Київ: ДП «Інфомаційно-аналітичне агентство», 2008. — Т. 10. — Вип. 7. — С. 580–591.
8. *Honga E.* Creative Thinking Ability: Domain Generality and Specificity / E. Honga; R. Milgramb // Creativity Research Journal. — 2010. — V. 22. — Iss. 3. — P. 272–287.
9. *Sarsania M.* Do High and Low Creative Children Differ in Their Cognition and Motivation? / M. Sarsania // Creativity Research Journal. — 2008. — V. 20. — Iss. 2. — P. 155–170.
10. *Wu C.* Age Differences in Creativity: Task Structure and Knowledge Base / C. Wu; Y. Cheng; H. Ip; C. McBride-Chang // Creativity Research Journal. — 2005. — V. 17. — Iss. 4. P. 321–326.

МЕТОДИКА ВИКЛАДАННЯ ФІЗИКИ ТА АСТРОНОМІЇ В ЗОШ ТА ВНЗ

УДК 531/534 (076)

Овчаренко В.П., Челик К.Т.

[1] *кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри фізики, ДВНЗ «ДДПУ»*

[2] *студентка 5 курсу фізико-математичного факультету, ДВНЗ «ДДПУ»*

e-mail: vp_ovcharenko@mail.ru

ВИКОРИСТАННЯ НЕСТАНДАРТНИХ МЕТОДІВ ОРГАНІЗАЦІЇ УЧБОВОГО ПРОЦЕСУ З ФІЗИКИ

В статті розглянуті нестандартні методи і прийоми, які необхідно впроваджувати в учбовий процес з метою активізації пізнавальної діяльності учнів. Результати проведеного евсерименту показали доцільність цього напрямку роботи.

Ключові слова: *нестандартні методи і прийоми, навчальна діяльність, пізнавальна діяльність.*

Вступ

Національна доктрина розвитку освіти України в XXI столітті передбачає реалізацію принципу гуманізації освіти, методологічну переорієнтацію процесу навчання з інформативної форми на розвиток особистості, індивідуально-диференційований і особистісно орієнтований підходи до навчання. У цьому процесі найважливіше місце належить уроку – основній формі навчання, а також його різновиду — нестандартному уроку. Удосконалення методики проведення нестандартного уроку розглядається як один із найважливіших напрямків підвищення пізнавального інтересу учнів до вивчення фізики, якості їх знань, умінь та навичок. У свою чергу вдосконалення методики проведення нестандартного уроку передбачає знання вчителем педагогічної науки і його спроможність оцінювати свою роботу. Зміни в навчальному процесі ставлять нові вимоги до діяльності вчителя, яка орієнтована на учня, і це викликає необхідність по-новому підійти до проблеми нестандартного уроку.

Розробкою методики проведення нестандартних уроків навчання займались Ю. Мальований, О. Дорошенко, С. Ніколаєва, І. Підласий, О.Біляєва, Е.Голанд, Л.Гордон, О.Синиця, В.Сухомлинський, В.Онищук, О.Савченко та інші.

Однак через багатоплановість ця проблема не підпадає під однозначне вирішення. Формування стійких і глибоких інтересів у школярів, є завданням першорядної важливості. Актуальність проблеми полягає в тому, щоб через упровадження нестандартних форм навчання виховувати в учнів пізнавальний інтерес до вивчення фізики.

Основна частина

Нестандартний урок — це імпровізоване навчальне заняття, що має нетрадиційну структуру. Назви уроків дають деяке уявлення про цілі, завдання і методику проведення таких занять.

Нестандартні уроки спрямовані на активізацію навчально-пізнавальної діяльності учнів, бо вони глибоко зачіпають емоційно-мотиваційну сферу, формують дух змагальності, збуджують творчі сили, розвивають творче мислення, формують мотивацію навчально-пізнавальної та майбутньої професійної діяльності. Тому такі уроки найбільше подобаються учням, викликають у них творчий інтерес.

У посібнику Н.П. Волкової «Педагогіка» наведена спроба певної класифікації нестандартних уроків. Автор називає 12 типів нестандартних уроків, але кожний тип має свої параметри, за якими окремі уроки відносяться до певного типу. До нестандартних уроків автор відносить такі уроки:

1. Уроки змістовної спрямованості.
2. Уроки на інтегративній основі (уроки-комплекси, уроки-панорами).
3. Уроки міжпредметні.
4. Уроки-змагання.
5. Уроки суспільного огляду знань.
6. Уроки театралізовані (уроки-спектаклі, уроки-концерти, кіно-уроки, дидактичний театр).
7. Уроки подорожування, уроки дослідження.
8. Уроки з різновіковим складом учнів.
9. Уроки ділові, рольові ігри.
10. Уроки драматизації. [1]

До інших, нестандартних, форм організації навчального процесу в межах класно-урочної системи деякі вчені відносять: практикуми; лабораторні заняття; навчальні екскурсії на природу, в музей, на виставку, підприємство; індивідуальні чи групові додаткові заняття за окремими навчальними темами або питаннями; факультативи; предметні гуртки тощо.

Розглянемо детальніше специфічні можливості кожного типу нестандартних уроків в реалізації цілей навчання та методичні аспекти їх проведення.

Бінарні уроки. Бінарними ми називаємо заняття, на яких матеріал даної теми уроку подається блоками різних предметів. При цьому такий нестандартний урок готують учителі-предметники, кожний із яких проводить етап (блок) уроку стосовно того предмета, який викладає. Проведенню таких занять передують наступні етапи підготовки:

- ознайомлення вчителів-предметників з чинними програмами;
- знаходження суміжних тем у програмах з різних предметів;
- складання структури майбутнього уроку;
- написання спільного плану-конспекту.

Віршовані (римовані) уроки. Це такі нестандартні уроки, що проводяться у віршованій формі. Всі етапи такого уроку, всі завдання, задачі, пояснення — римовані тексти. Як правило, ці уроки підсумовують вивчені теми, тобто є узагальнюючими (систематизуючими), їх структура подібна до структури уроків узагальнення знань. Важливо зазначити, що римовані уроки максимально зосереджують, увагу школярів, бо матеріал подається стисло — віршами, і не можна пропустити основне, треба зуміти його чітко виділити й зробити певні висновки. Такі нестандартні уроки стають справжнім святом для учнів і вчителя.

Інтегровані уроки та уроки змагання. У сучасному педагогічному процесі значного розвитку набула ідея міжпредметної інтеграції. Інтегровані уроки ставлять за мету спресувати споріднений матеріал кількох предметів навколо однієї теми. Діти розглядають якесь явище, поняття з різних боків. Підготовка інтегрованих уроків передбачає: аналіз річного календарного планування; зіставлення матеріалу різних предметів для виділення тем, близьких за змістом або метою використання; визначення завдань уроку; «конструювання» уроку.

Об'єднання змісту навчальних дисциплін значно скорочує час на їх опанування і забезпечує різнобічне сприймання предметів чи явищ, що є безперечною перевагою інтеграції.

Уроки-дискусії. Проводяться після вивчення певної теми, розділу програми. Мета таких уроків — поглиблення й систематизація знань школярів з предмета. Уроки-дискусії дають прекрасну нагоду виявити різні позиції з певної проблеми або зі складного питання та залучити дітей до активної роботи, сприяють розвитку пізнавальних інтересів школярів, збагаченню лексичного запасу, необхідного для висловлення своїх думок як усно, так і письмово. Уроки групи «уроки-дискусії» розширюють також досвід спілкування, бо особлива увага під час їх проведення приділяється саме формуванню вмінь запитувати й відповідати. «Школа повинна вчити дитину не лише відповідати, вона має навчити учня запитувати, оскільки вміння запитувати — це здатність відділяти відоме від невідомого, визначати об'єкт пошуку; це інструмент, за допомогою якого малий «дослідник» пізнає світ» [2]. Активізації пізнавальної діяльності учнів сприяють нестандартні методи та прийоми навчання.

Метод — спосіб діяльності, який використовують вчитель і учні в їх спільній роботі, спрямовані на досягнення мети навчання. Кожен метод реалізують через систему прийомів. Методичний прийом — це елемент методу, його деталь. Методи реалізуються в педагогічній дійсності в різних формах: у конкретних діях, прийомах, організаційних формах. При цьому методи і прийоми жорстко не прив'язані один до одного. Наприклад , в таких прийомах, як бесіда або робота з книгою, можуть знайти втілення різні методи навчання. Бесіда може бути евристичної і проводити в життя частково-пошуковий метод, а може носити репродуктивний характер, реалізувати відповідний метод і бути націленою на запам'ятовування і закріплення. При цьому число прийомів навчання може нескінченно збільшуватися залежно від змісту навчального матеріалу, нових цілей і, звичайно, від творчості вчителя, його педагогічної майстерності і тим самим надавати індивідуальність манері його педагогічної діяльності. Існує багато нестандартних прийомів навчання. У реальній педагогічній дійсності прийоми навчання здійснюються різними засобами навчання. Цими засобами є різні види діяльності (навчальна, ігрова, трудова).

Для фізики характерним серед прийомів і методів є широке застосування у навчанні фізичного експерименту у різних формах — демонстраційного, фронтальних лабораторних робіт, практикумів, розв'язування експериментальних задач, що вимагає від учнів уміння застосовувати у навчанні фізики знання з математики та інших предметів [3]. Нами була розроблена система уроків для учнів 11 класу з використанням нестандартних методів і прийомів. Вони підбирались спираючись на характер навчального матеріалу, цілей навчання. На етапі актуалізації опорних знань це були різного виду вправи, опитування, фізичні диктанти, досліди, висунення проблеми, проведені в нестандартній формі; на етапі вивчення нових знань — різні види нестандартних словесних методів у поєднанні з демонстраційним експериментом. Після проведення цих уроків були підведені підсумки учнівських досягнень з вивченої теми. Вони показали, що учні чітко формулюють і обґрунтовують свою точку зору, вміють знаходити компромісні варіанти вирішення поставленої перед ними проблеми, активно спілкують між собою на доброзичливій основі, проявляють підвищений інтерес до уроку.

Висновки

Грунтовний аналіз літератури та проведений експеримент дозволив зробити такий висновок, що нестандартні уроки незвичні за задумом, методикою проведення, більше подобаються учням, ніж учбові заняття з витриманою структурою і усталеним режимом роботи. Тому вміти проводити такі уроки повинні всі вчителі, але перетворювати нестандартні уроки в головну форму роботи та вводити їх в систему не варто, тому що така робота багато в чому залежить від вчителя, як генератора ідей в класі. Учні ж, у великій мірі, підтримують такі прагнення вчителя, допомагають йому в організації таких занять.

Корисним для педагога в підготовці та аналізу уроку буде, розроблений автором «Конструктор уроку», елементами якого є нестандартні прийоми активізації пізнавальної діяльності учнів.

Переваги нестандартних уроків в порівнянні із звичними структурами уроків в тому, що підвищується інтерес учнів до навчання, їх активність в пізнанні і творчості, самостійність пошуків знань, переживання успіху досягнень, ініціативність, можливість індивідуального підходу до учнів, використання інноваційних та інформаційних педагогічних технологій, розвиток культури спілкування, взаємовідповідальності і таке інше.

Але є деякі складності і недоліки використання нестандартних уроків: затрати більшого часу на підготовку і проведення таких уроків; не всі учні в рівній мірі активні; організаційні труднощі (дисципліна, правила поведінки); ускладнюється система оцінювання, аналізу результатів навчання; забезпечення науково-методичної і матеріально-технічної бази навчання; знаходження певного місця таких уроків в навчально-виховному процесі тощо.

Література

1. *Антипова О.* У пошуках нестандартного уроку / О. Антипова, Д. Рум'янцева, В. Паламарчук // Рад. школа. — 1991. — № 1. — С. 65–69.
2. *Волкова Н.П.* Педагогіка / Н.П. Волкова. — К.: Академія, 2002. — 340 с.
3. Сучасні шкільні технології. Ч.1 / Упоряд.: І. Рожнятовська, В. Зоц. — К.: Ред. загальнопед. газ., 2004. — 112 с. — (Б-ка «Шкільного світу»).

УДК 373.5.016:53

Олійник Р.В., Головіна С.С.

[1] *кандидат педагогічних наук, доцент кафедри фізики, ДВНЗ «ДДПУ»*

[2] *студентка 5 курсу фізико-математичного факультету, ДВНЗ «ДДПУ»*

e-mail: golovina.svetlana92@yandex.ru

МЕТОДИКА ФОРМУВАННЯ ІНФОРМАЦІЙНОЇ КОМПЕТЕНТНОСТІ НА УРОКАХ ФІЗИКИ

Дана стаття розкриває поняття інформаційної компетентності та її елементи. В статті нами були розглянуті рівні розвитку названої компетентності, етапи, які повинен пройти учень у роботі з інформацією, під час формування інформаційної компетентності.

Ключові слова: *компетентність, ключові компетентності, інформаційна компетентність.*

Вступ

На даному етапі освіта стоїть на порозі значних змін. Як показує практика, сучасна система навчання недостатньо забезпечує високий рівень підготовки школярів, оскільки орієнтується, насамперед, на передачу певного обсягу знань. У результаті цього зі стін шкіл випускається особистість, яка відповідає початковому рівню підготовки в освіті, але в реальній професійній діяльності, в більшості випадків, не в змозі реалізувати себе. Тому мета сучасної освіти полягає не тільки в тому, щоб навчати, але й розвивати компетентність, яка дає можливість справлятися з різними численними варіативними ситуаціями і працювати в групі. Саме тому освіта має забезпечити підготовку компетентних учнів.

Актуальність даної теми забезпечина тим, що сьогодні існує протиріччя між постійно зростаючим обсягом предметної інформації і відсутністю оптимальних способів її використання для створення цілісної природничонаукової картини світу. Одним із головних завдань при викладанні фізики у старшій школі, ми вбачаємо завдання формування «інформаційної» особистості, особистості, що володіє інформаційною компетентністю, а, отже, володіє такими якостями як інформаційна грамотність, інформаційний стиль мислення, інформаційна поведінка, інформаційний світогляд. Інформаційна компетентність є найбільш значущою компетентністю в сучасному світі, тому що будь-яка діяльність передбачає роботу з інформацією.

Основна частина

Питання утримання і розвитку ключових компетентностей привертають увагу багатьох вчених і практиків. Даний напрямок розкрито в роботах О.В. Великанової, Л.О. Петровської, Г.К. Селевко, А.В.Хуторського, проте проблема формування актуальної інформаційної компетентності школярів залишається недостатньо розробленою.

Однією з головних задач сучасної освіти — створення умов для якісного навчання на уроках фізики. Важливою умовою підвищення якості освіти є впровадження компетентнісного підходу.

Дослідники в галузі компетентнісного підходу в освіті (І.А. Зимова, А.Г. Каспржак, А.В. Хуторський, М.А. Чошанов, С.Є. Шишов, Б.Д. Ельконін та ін) відзначають, що відмінність компетентного фахівця від кваліфікованого в тому, що перший не тільки володіє певним рівнем знань, умінь, навичок, але здатний реалізувати і реалізує їх в роботі. Компетентнісний підхід, на думку О. Е. Лебедєва — це сукупність загальних принципів визначення цілей освіти, відбору змісту освіти, організації освітнього процесу та оцінки освітніх результатів.

Розвиток компетентнісного підходу в освіті призвів до появи поняття «ключові компетентності», однією з яких багато дослідників вважають інформаційну компетентність (М.М. Абакумова, С.В. Трішина, Л.В. Буриндина, А.В. Хуторський та інші).

В процесі навчання фізики, в наш час, велика увага приділяється формуванню навчально-пізнавальних (ключових) і дослідних (загальнопредметних) компетенцій. Однак для успішної соціалізації дитини не менш важливим є формування саме інформаційної компетентності. Це пояснюється тим, що людина почуває себе більш впевнено, коли володіє інформацією; більш того, дана компетентність необхідна учням і для успішного освоєння досить складного курсу фізики у старшій школі. І тому її формування необхідно починати одночасно з навчанням предмету. Проблема полягає в тому, що дана компетентність формується тільки в процесі активної пізнавальної діяльності учня, а для здійснення такої діяльності потрібен мотив, що породжує потребу в її вдосконаленні.

Для знаходження умов мотивації діяльності учнів, сприятливих формуванню інформаційної компетентності, розглянемо поняття компетенції та сутність означеної компетенції [1].

Компетенція — це сукупність взаємозалежних якостей особистості (знань, умінь, навичок, способів діяльності), що є заданими для відповідного кола предметів і процесів, необхідних для продуктивної дії щодо них [2].

Компетентність — це володіння людиною відповідною компетенцією, яка містить його особистісне ставлення до предмета діяльності [2].

Освітня компетенція — це сукупність смислових орієнтацій, знань, умінь, навичок і досвіду діяльності учня відносно певного кола об'єктів реальної дійсності, необхідних для здійснення особистісно і соціально значущої продуктивної діяльності [3].

Таким чином, виділяючи якусь компетенцію, необхідно визначити той обсяг знань, який входить до її складу, перелік умінь, через які вона проявляється. При формуванні компетенції необхідно створювати ситуації для її прояву. Володіння інформаційною компетенцією передбачає, що учень вміє самостійно шукати, аналізувати і відбирати необхідну інформацію, організовувати, перетворювати, зберігати і передавати її. Більш високий рівень інформаційних умінь припускає, що учень вміє створювати нову, значущу для себе та інших інформацію в різних доступних для сприйняття видах; вміє відокремлювати корисне від марного, більш цінне від менш цінного, уникає неповної, недостовірної і застарілої інформації. Важливо і те, як учень може подати знайдену або оброблену інформацію самостійно, наскільки вона буде зрозумілою іншим. Крім того, учень повинен вміти користуватися пристроями, за допомогою яких можна отримувати інформацію володіти інформаційними технологіями.

Більшість дослідників сходиться в думці про те, що інформаційна компетентність — це багаторівнева категорія.

Інформаційна компетентність у широкому значенні пов'язана з умінням переосмислювати інформацію, розв'язувати інформаційно-пошукові задачі, використовуючи бібліотечні та електронні інформаційно-пошукові системи, тобто здійснювати інформаційну діяльність із використанням як традиційних, так і нових технологій. У вузькому значенні — з умінням використовувати інформаційні технології, засоби і методи, тобто це компетентність у сфері інформаійно-комунікативних технологій (А.А. Ахаян, О.О. Кізік).

Інформаційна компетентність включає в себе такі елементи, як:

- мотивація, потреба й інтерес до отримання знань, умінь і навичок у галузі технічних, програмних засобів та інформації;
- сукупність суспільних, природничих і технічних знань, що відображають систему сучасного інформаційного суспільства;
- знання, що складають інформаційну основу пошукової пізнавальної діяльності;
- способи і дії, що визначають операційну основу пошукової пізнавальної діяльності;

- досвід пошукової діяльності у сфері програмного забезпечення та технічних ресурсів;
- досвід відносин «людина-комп'ютер» [4].

Формування інформаційної компетентності в школі проходить три рівня розвитку:

— пропедевтичний рівень (розуміння, володіння основними поняттями);
— базовий рівень (застосування за зразком, виконання завдань за зразком);
— профільний рівень (творче застосування, виконання завдань, для яких треба продемонструвати нестандартне рішення) [5].

Формування інформаційної компетентності є процесом переходу до такого стану, коли учень стає здатним знаходити, розуміти, оцінювати і застосовувати інформацію в різних формах для вирішення проблем. Для формування інформаційної компетентності в учнів на уроках фізики необхідно:

— сформувати міцні базові знання;
— розвинути вміння відфільтровувати вторинну та залишати тільки актуальну та корисну інформацію;
— сформувати вміння аналізувати інформацію, прогнозувати й робити висновки;
— сформувати вміння на основі аналізу попередньої інформації формувати власну точку зору;

Під час формування інформаційної компетентності у роботі з інформацією, учень має пройти такі етапи:

— ознайомлення — учень визначає кількість інформації та можливість її опрацювання;
— репродукція — учень вивчає масив інформації, накопичує її;
— перетворення — критичне осмислення масиву інформації;
— творчий етап — створення власного інтелектуального продукту на основі отриманої та перетвореної інформації.

Практична значимість нашого дослідження полягає в тому, щоб на основі розглянутого теоретичного обґрунтування розробити проект викладання фізики, що стимулює розвиток інформаційної компетентності у школярів; сприяє підвищенню інтересу до предмету, отже, підсиленню мотивації до навчання й покращенню пізнавальної активності учнів.

З урахуванням викладеного, ми визначили за мету нашого дослідження розвиток інформаційної компетентності учнів при вивченні фізики. Експериментальною базою був обраний 10 клас Краматорської ЗОШ № 30. Спочатку за допомогою психологічних методик було визначено рівень розвитку навчальної мотивації школярів. Первинний контроль констатував у підлітків низький рівень шкільної мотивації з предмету.

Для підвищення рівня мотивації на уроках фізики ми здійснили наступне:

— після ознайомлення учнів з цілями та задачами майбутньої роботи провели бесіди та пояснення, що сприяли психологічній підготовці учнів;
— для навчального процесу ми обрали розділ «Молекулярна фізика», тема «Властивості газів». В календарно-тематичне планування внесли зміни, а саме проаналізували можливість формування інформаційної компетентності при вивченні понять та законів розділу, при виборі прийомів та методів роботи передбачили ті, що сприяють її розвитку: мотивацію досягнень учнів, адекватну самооцінку, відповідальність, тощо;
— розробили пам'ятки: як працювати з комп'ютером, як правильно конспектувати параграф, працювати з додатковою літературою, підготувати доповідь і т. д.;
— при створенні сценаріїв конспектів уроків розробили відповідний зміст та передбачили діяльність учнів, ґрунтуючись на розвиток інформаційної компетентності, а саме: створення мультимедійних презентацій, ребусів, кросвордів, електронних тестів, використання моделей фізичних дослідів, тощо;
— створений навчально-методичний проект реалізували у практиці викладання фізики в 10 класі ЗОШ.

Тобто, ми спочатку розробили, а потім впровадили етапи формування інформаційної компетентності учнів з урахуванням рівнів розвитку: пропедевтичного, базового та профільного.

Висновки

З урахуванням викладеного, можна зробити висновок, що формування інформаційної компетентності на уроках фізики повинно здійснюватися у відповідності з її внутрішньою структурою, представленими педагогічними складовими, пов'язаними з певними видами інформаційно-професійної діяльності. Ці види інформаційно-професійної діяльності у взаємозв'язку між собою становлять суть поняття «інформаційна компетентність» і зумовлюють особливості її виховання.

Як ми бачимо, існує можливість формувати інформаційну компетентність при викладанні фізики, і вважаємо за потрібне продовжувати роботу в даному напрямку.

Література

1. *Краевский В. В.* Предметное и общепредметное в образовательных стандартах / В. В. Краевский, А. В. Хуторский // Педагогика. — 2003. — №3. — С. 3–10.
2. *Шаронова С. А.* Компетентностный поход в стандарте и образовании (сравнительный анализ стран ЕС и России) / С. А. Шаронова // Социологические исследования. — 2008. — № 1. — С. 23
3. *Хуторской А.В.* Ключевые компетенции и образовательные стандарты / А.В. Хуторской. — М., 2002. — 130 с.
4. *Каракозов С.Д.* Информационная культура в контексте общей теории культуры личности / С.Д. Каракозов // Педагогическая информатика. — 2000. — № 2. — С. 41–54.
5. *Завьялов А.Н.* Формирование информационной компетентности студентов в области компьютерных технологий (на примере среднего профессионального образования) : автореф. канд. пед. наук. / А.Н.Завьялов. — Тюмень, 2005. — 17 с.

УДК 373.5.016:53

Олійник Р.В., Степанян М.С.

[1] *кандидат педагогічних наук, доцент кафедри фізики, ДВНЗ «ДДПУ»*

[2] *студентка 5 курсу фізико-математичного факультету, ДВНЗ «ДДПУ»*

e-mail: marianna.stepanian@yandex.ru

ВИКОРИСТАННЯ ПРОБЛЕМНО-МОДУЛЬНОЇ ТЕХНОЛОГІЇ НА УРОКАХ ФІЗИКИ

Стаття розкриває поняття проблемно-модульного навчання, його особливості та компоненти, в ній показана можливість використання даної технології на уроках фізики при розвитку елементів критичного мислення учнів.

Ключові слова: *спроблемно-модульне навчання, проблемна ситуація, навчальний модуль, критичне мислення.*

Вступ

В наш час педагогіка з науки про виховання, освіту та навчання людини повинна стати наукою про управління розвитком творчої індивідуальності в цілісному педагогічному процесі, а вивчення шкільних предметів реалізоване, ґрунтуючись на принципі єдності навчання, виховання та розвитку.

Неабияку роль у досягненні цієї мети відіграють такі дидакти як М.А.Алексюк, В.В.Гузєєв, М.А.Чошанов, М.І.Махмутов, А.В.Фурман та інші, дослідження яких вийшли на новий виток розвитку методичної думки, а саме проблемне навчання вони зв'язують з принципово новою технологією.

Хоча означена тематика активно розглядається у психолого-педагогічній та методичній літературі, на практиці у загальноосвітній школі великої уваги вона не отримала. Між тим, актуальність її сучасних форм, способів і методів навчання визначається увагою до діяльності учнів, що враховує їх індивідуальні особливості, забезпечує індивідуальний темп просування за програмою. Викладене обумовлює актуальність для подальшої розробки та впровадження у шкільному навчальному процесі.

Ми вважаємо, що в результаті використання трьох провідних факторів: «стиснення», модульності та проблемності і побудови на цій основі проблемно-модульного технології, з'являється можливість підвищити результативність процесу навчання фізики. Застосування технології проблемно-модульного навчання надасть можливості забезпечення індивідуального темпу просування за програмою «слабкому, середньому та сильному учням», а упровадження проблемно-модульної технології у процес навчання фізики забезпечить більш широкі можливості для розвитку критичного мислення учнів.

Основна частина

Основи проблемно-модульного навчання в Україні для загальноосвітньої школи розроблені під керівництвом А. В. Фурмана.

За його ствердженням, проблемно-модульна технологія передбачає наявність пакету програм для індивідуального навчання, що забезпечує навчальні досягнення учня з певним рівнем попередньої підготовки. Воно здійснюється за окремими функціональними вузлами відображеними у змісті, організаційних формах і методах — модулях, призначення яких — досягнення конкретних педагогічних цілей. [1]

Складовою проблемно-модульного навчання є навчальний модуль, визначення якого дидакти дають по-різному. Наприклад, за Фурманом: це відносно самостійна, цілісна частина реальної розвивальної взаємодії педагога з учнями, яка характеризується завершеною сукупністю взаємозалежних навчальних, виховних та освітніх ритмів, що оптимізують психосоціальний розвиток кожного на певному відрізку вивчення навчального курсу (розділ, тема).[2]

Специфіку проблемно-модульного навчання відображають наступні основні принципи її побудови:

— *системне квантування.* Даний принцип забезпечується відповідним структуруванням навчальної інформації в проблемному модулі;
— *проблемність.* Даний принцип відображає вимоги психолого-педагогічної закономірності, згідно з якою введення таких стимулюючих ланок, як проблемна ситуація та практична спрямованість, підвищує ефективність засвоєння навчального матеріалу;
— *модульність.* Принцип модульності визначає динамічність і мобільність функціонування системи. [3]

Складовою частиною будь-якого модуля в проблемно-модульному навчанні є проблемна ситуація.

А.М.Матюшкин характеризує проблемну ситуацію як «особливий вид розумової взаємодії об'єкта і суб'єкта, що характеризується таким психічним станом суб'єкта (учня) при вирішенні ним завдань, що вимагає виявлення (відкриття або засвоєння) нових, раніше суб'єкту невідомих знань чи способів діяльності». [4]

Інакше кажучи, проблемна ситуація — це така ситуація, при якій суб'єкт хоче вирішити якісь важкі для себе задачі, але йому не вистачає даних і він повинен сам їх знаходити.

В процесі навчання на уроках створюються проблемні ситуації, що дають змогу активізувати процес мислення учнів. М.І. Махмутов вказує наступні способи створення проблемних ситуацій:

— при зіткненні учнів з життєвими явищами, фактами;
— при організації практичної роботи учнів та формулюванні гіпотез;
— при спонуканні учнів до аналізу життєвих явищ, які приводять їх в зіткнення з колишніми життєвими уявленнями про загальні явища;
— при спонуканні учнів до порівняння, співставлення і протиставлення;
— при спонуканні учнів до попереднього узагальнення нових фактів;
— при дослідницьких завданнях. [5]

Керувати навчально-пізнавальною діяльністю в процесі вивчення фізики за даною технологією допомагає система дидактичних засобів навчання, до яких ми відносимо постановку мети, планування, відбір завдань репродуктивного та пошуково-творчого характеру, демонстрацій та фронтальний експеримент, роботу з навчальною і додатковою літературою, різні форми рейтингового контролю. [6]

Велику роль в побудові навчально-виховного процесу з означеної технології відіграє система занять, яка повинна містити такі модулі: *установочно-мотиваційний, змістовно-пошуковий, контрольно-смисловий, адаптивно-перетворювальний, системно-узагальнюючий та контрольно-рефлексивний.* [6]

Ефективне функціонування проблемно-модульної технології може бути забезпечене тільки за умови цілісності всіх цих компонентів навчального модуля.

У технології проблемно-модульного навчання недостатня, на наш погляд, приділяється увага такому малодослідженому аспекту, як формування критичного мислення учнів.

Критичне мислення є складовим елементом компетентності учня. Критичність передбачає вміння діяти в умовах вибору і прийняття альтернативних рішень, вміння спростовувати завідомо неправдиві рішення, нарешті, вміння просто сумніватися. Формування критичності у процесі проблемно-модульного навчання ми вбачаємо, через підбір змісту, прийомів навчання, цілеспрямоване створення спеціальних ситуацій і т.д. [5]

При розвитку критичного мислення учень набуває таких вмінь:

- з'ясування причинно-наслідкових зв'язків, ґрунтовне доведення і розуміння ідей;
- здійснення вибору та ухвалення комплексних рішень;
- розуміння взаємозв'язків між системами;

- визначення та постановка суттєвих питань для прояснення різних позицій, що дозволяє ухвалювати кращі рішення;
- оформлення, аналіз та синтез інформації для розв'язання проблем і відповідей на запитання.

Уміле, відповідальне мислення дозволяє людині формулювати надійні вірогідні судження для окреслення, аналізу й розв'язання проблем за умови їх систематичного залучення до активного свідомого виконання розумових дій.

В нашій роботі ми проаналізували теоретичний матеріал з даної теми, на основі науково-методичної моделі з фізики побудували навчально-виховний процес. Для педагогічного дослідження ми обрали учнів 11 кл. загальноосвітньої школи № 30 м. Краматорська.

Перед впровадженням проблемно-модульного навчання ми виконали наступне:

— розробили модульну програму розділу «Електродинаміка» (тема «Постійний струм»);

— склали календарно-тематичний план роботи, де вказали методи та прийоми активізації критичного мислення;

— розробили міні-підручник, в якому описаний теоретичний матеріал та особливості його викладання, а також методи та прийоми роботи;

— створили розгорнуті плани-конспекти відповідно до нашої технології до кожного уроку. При розробці планів-конспектів ми використовували три групи навчальних елементів: інформаційні, операційно-інтелектуальні та операційно-практичні.

Перед початком дослідження ми діагностували рівень критичного мислення учнів в обох групах за допомогою психологічних методик В.Н. Бузіна, О.М. Вороніна та Г.В. Резапкіної. Його показники виявилися приблизно на однакових рівнях (переважно низькому).

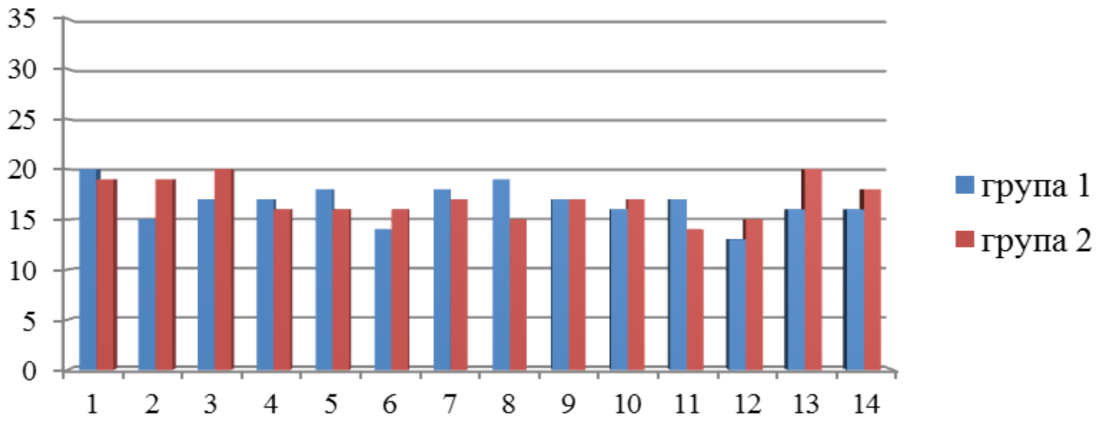

Рис. 1: Початковий рівень розвитку критичного мислення

В одній групі навчання ми проводили традиційно, а в іншій за проблемно-модульною технологією.

Під час проведення занять за нашими розробками ми створювали проблемні ситуації, використовували різні методи та прийоми активізації критичного мислення такі як «сенкан», «гронування», «асоціативний кущ», метод мозкового штурму і т.д. Всі ці методи направлені на розвиток таких компонентів критичного мислення, як гнучкості, вміння аналізувати, систематизувати, порівнювати, робити висновки і т.д.

Після використання проблемно-модульної технології навчання, яку ми направляли на розвиток компонентів критичного мислення, можна зробити висновок про те, що та група (друга), яка займалася за технологією проблемно-модульного навчання отримала ліпші результати (рис.2).

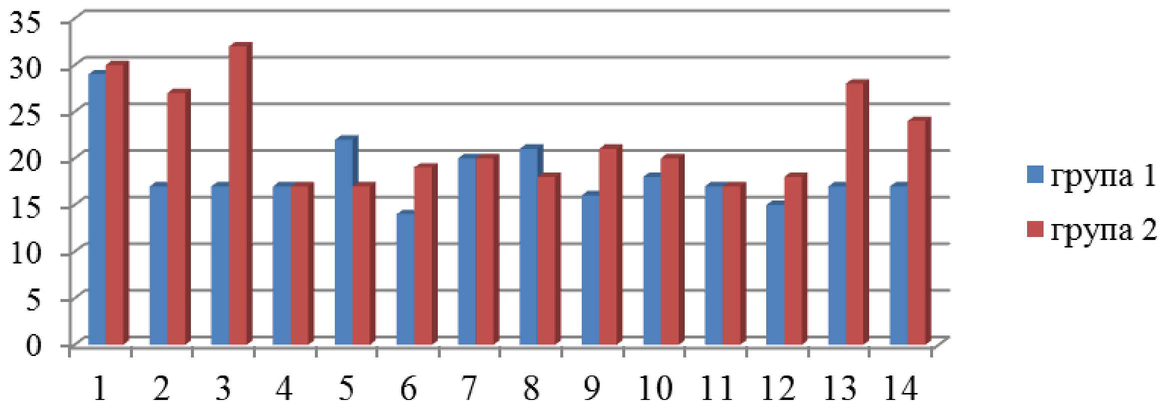

Рис. 2: Кінцеві результати експерименту

Висновки

В результаті експериментального дослідження було підтверджено ефективність використання проблемно-модульного навчання на уроках фізики, на прикладі теми «Постійний струм» в загальноосвітній школі.

Дана технологія дозволяє в комплексі вирішувати всі три завдання навчання: освітню, виховну, розвиваючу. Вона сприяє формуванню в учнів не тільки системи знань, умінь і навичок, але і розвивати у школярів елементи критичного мислення, її гнучкість, сприяє розвитку їх здібностей до самонавчання, самоосвіти.

Отже, ми робимо висновок, що наша гіпотеза отримала своє експериментальне підтвердження.

Література

1. *Фурман А.В.* Методи дослідження модульно-розвивальних форм навчання : наукове видання / А.В. Фурман, М. Бригадир. — Тернопіль: Інститут ЕСО, 1999. — 35 с.
2. *Фурман А.В.* Модульно-розвивальне навчання : принципи, умови, забезпечення : монографія / А.В. Фурман — К.: Правда Ярославичів, 1997. — 340 с.
3. *Васьков Ю.В.* Педагогічні теорії, технології, досвід / Ю.В. Васьков — Х.: Скорпіон, 2000. — 120 с.
4. Проблеми методики фізико-математичної та технологічної освіти // Наукові записки. — Кіровоград: КДПУ ім. В.Винниченка, 2013. — № 4 [1]. — С. 228–230
5. *Верчасов В.М.* Проблемное обучение в школе / В.М.Верчасов. — К., 1997. — 236 с.
6. *Гуляєва Л.В.* Проблемно-модульний підхід до вивчення фізики в сучасній загальноосвітній школі: автореф. дис. на здобуття наук. ступеня канд. пед. наук: спец. 13.00.02 «Теорія і методика навчання фізики» / Л.В.Гуляєва. — К., 2000. — 22 с.

ЗМІСТ

`При підготовці статті необхідно дотримуватись наступних вимог:`

1. Рукописи подаються в одному примірнику, надруковані українською або російською мовою на одній стороні аркуша через один інтервал з широкими полями, старанно вичитані і розмічені. Примірник повинен бути оформлений відповідно до зазначених нижче вимог з обов'язковим підписом автора (усіх авторів) статті.

2. Стаття повинна включати:

   (a) прізвище та ініціали автора (авторів) та назва установи, де виконана робота;

   (b) назву статті (якщо заголовок статті довгий, то подати також його короткий варіант, не більше 40 знаків);

   (c) індекс УДК; анотацію (до 5 рядків);

   (d) короткий вступ: постановку задачі, одержані результати;

   (e) формулювання одержаних автором нових результатів і повне їх доведення, які раніше ніде не були опубліковані або подані до розгляду в інший журнал;

3. До (друкованого варіанту) статті обов'язково додається електронний варіант, підготовлений у форматі LaTeX (*.tex) (та його копія у форматі PDF) з використанням стильового файлу (znp-fizmat-ddpu.sty) журналу та макетного файлу (priklad-oform-statti.tex) з дотриманням встановлених параметрів (znp-01-preambula.tex).

4. Адреса для листування: 84116, м. Слов'янськ, Донецька обл., вул. Г.Батюка, 19, Деканат фізико-математичного факультету ДДПУ;

   e-mail: znpfizmatsdpu@ukr.net, телефони: (06262) 3-26-59.

5. У випадку авторського колективу вказати прізвище та e-mail того з авторів, з ким редколегія може вести листування.

6. Файли прикладу оформлення статей та вимоги можна завантажити за адресою http://slavdpu.dn.ua/fizmatzbirnyk/znpFizmat2014.zip.

7. Статті, підготовлені в порушення зазначених вимог, до розгляду редакційною колегією журналу НЕ приймаються.

8. Статті до п'ятого випуску (2015 рік) приймаються до 1 квітня 2015 року.

Збірник наукових праць
фізико-математичного факультету ДДПУ

Випуск №4

За матеріалами
Всеукраїнської науково-практичної конференції
«Актуальні питання сучасної науки і освіти»
Слов'янськ, ДДПУ, 22-24 квітня, 2014 р.

Для студентів, аспірантів та науковців в галузі фізико-математичних наук; вчителів та викладачів фізико-математичних дисциплін в ЗОШ та ВНЗ.

Дизайн, верстка О.А. Кадубовський
Відповідальні за випуск О.А. Кадубовський, В.Є. Величко

Підписано до друку 23.05.2014 р.
Формат 60×84 1/16. Ум. др. арк. 4.
Тираж 100 прим. Зам. № 649.

Підприємець Маторін Б.І.
84116, м. Слов'янськ, вул. Г. Батюка, 19.
Тел./факс +38 06262 3-20-99. Email: matorinb@ukr.net

Свідоцтво про внесення суб'єкта видавничої справи до Державного реєстру видавців, виготівників і розповсюджувачів видавничої продукції ДК №3141, видане Державним комітетом телебачення та радіомовлення України від 24.03.2008 р.