

Слов'янський державний педагогічний університет

Фізико-математичний факультет

ПОШУКИ І ЗНАХІДКИ

Серія: фізико-математичні науки

Збірник наукових праць

за матеріалами наукової конференції

**Слов'янського державного педагогічного
університету**



Квітень, 2010

ПОШУКИ І ЗНАХІДКИ

Серія: фізико-математичні науки

Збірник наукових праць

за матеріалами наукової конференції

Слов'янського державного педагогічного університету

20 – 22 квітня, 2010.

Випуск 10

ТОМ I

Серія «Фізико-математичні науки» заснована у 2010 році

УДК 001.89

Пошуки і знахідки. СЕРІЯ: фізико-математичні науки. Матеріали наукової конференції СДПУ – 2010 / Укладач В.К. Сарієнко. – Слов'янськ, 2010. – 200 с.

РЕДАКЦІЙНА КОЛЕГІЯ

доктор педагогічних наук, професор, Коротяєв Б.І. – відповідальний редактор (СДПУ);

доктор педагогічних наук, професор, Чиж О.Н., (ЛНПУ);

доктор філософських наук, професор, Федь А.М., (СДПУ);

доктор психологічних наук, професор, Солодухова О.Г., (СДПУ);

доктор педагогічних наук, професор, Бадер В.І., (СДПУ);

кандидат педагогічних наук, доцент, Липа В.О., (СДПУ);

кандидат педагогічних наук, доцент, Сарієнко В.К., (СДПУ).

РЕДАКЦІЙНА КОЛЕГІЯ СЕРІЇ

доктор фізико-математичних наук Костіков О.П.;

кандидат фізико-математичних наук Кадубовський О.А.;

кандидат фізико-математичних наук Величко В.Є.

Укладач: доц. Сарієнко В.К.

Рецензенти: доктор педагогічних наук, професор Гавриш Н.В.
(Луганський Національний університет ім. Т.Г.Шевченка);
кандидат педагогічних наук, доцент Євтухова Т.А.
(Слов'янський державний педагогічний університет)

Рекомендовано Вченою радою Слов'янського державного педагогічного університету (протокол № 5 від 15.04.2010р.)

ББК 74.00

За достовірність посилань, цитат і результатів експериментів відповідальність несуть автори.

© Слов'янськ – 2010

Від редакційної колегії серії

Шановні читачі! Ви тримаєте в руках перший випуск серії «Фізико-математичні науки» збірника наукових праць «Пошуки і знахідки» Слов'янського державного педагогічного університету.

Метою серії, як і метою збірника «Пошуки і знахідки», є підтримка наукової активності як серед студентів, так і серед молодих викладачів СДПУ та інших ВНЗ.

Основу серії збірника складають повнотекстові статті доповідей на щорічній науково-методичній конференції студентів та викладачів СДПУ, присвяченій 65-річчю з дня перемоги у Великій Вітчизняній війні. Основні результати доповідались на секційних засіданнях та були рекомендовані до друку головами секцій та науковими керівниками випускових робіт.

Вказані матеріали подано у наступних п'яти розділах:

- «Математика», «Фізика»;
- «Інформатика та методика її викладання»;
- «Методика викладання математики»;
- «Методика викладання фізики».

Першочерговими задачами серії збірника є: висвітлення актуальних питань сучасної науки у галузі математики, фізики та інформатики, акумулювання методичного досвіду викладачів математики й фізики, опублікування результатів наукових досліджень професорсько-викладацького складу фізико-математичного факультету СДПУ.

Відповідно до нової концепції підготовки магістрів в Україні серед обов'язкових вимог до випускових робіт є: оприлюднення теми та результатів дослідження в науковому журналі, збірці та/або на сайті вищого навчального закладу в електронному вигляді. У зв'язку з цим, **другорядною** задачею серії збірника є підвищення рівня дипломних і магістерських робіт студентів фізико-математичного факультету СДПУ за рахунок залучення до редакційної колегії серії провідних науковців з числа професорсько-викладацького складу факультету та додаткового рецензування ними основних результатів випускових робіт.

Засновники серії мають намір зробити цей збірник максимально відкритим як для авторів, так і для читачів. Він буде виходити щонайменше один раз на рік у друкованому та електронному вигляді. Електронна версія буде доступною на сторінках офіційного сайту фізико-математичного факультету СДПУ у спеціально створеному розділі. На сайті також буде розміщено інформацію щодо співпраці з авторами серії.

Запрошуємо до співпраці. Наснаги та творчих успіхів!

Члени редакційної колегії серії.

10.04.2010

Внесок викладачів математики Слов'янського педагогічного інституту у Перемогу у Великій Вітчизняній війні

Минуло вже 65 років з того незабутнього дня, коли наш народ вперше відсвяткував День Перемоги. Важким видався шлях до цієї перемоги. Перед тим як напасти на нашу країну, фашисти захопили всю Західну Європу та підкорили собі європейську промисловість. Вся Європа годувала фашистські війська та постачала їм найновітнішу зброю та техніку. Здавалось, що на землі не має такої сили, яка могла б зупинити фашизм, зупинити його армії на шляху до правління в усьому світі.

Історія спростувала ці прогнози. Наш героїчний народ знищив фашистську бойову машину і назавжди позбавив людство від фашистської диктатури.

В ті важкі часи героями були і вчені – математики, фізики, механіки, яким в найкоротші строки, доручалося розв'язати надскладні задачі з математики та фізики, пов'язанні з проблемами бойової тактики, стратегії, бойової техніки тих часів. Про них, безперечно видатних людей, ми розповімо у нашому проекті.

Видатною подією в історії міста Слов'янська Сталінської області Постановою Ради Народних Комісарів № 620 від 29 червня стало відкриття у 1939 році на базі педагогічного училища учительського інституту. Директором інституту був призначений Іван Калістратович Деркач, а його заступником із навчально-виховної роботи – Юхим Тихонович Ширков.

У будівлі колишньої гімназії було розміщено один із корпусів інституту. А другий корпус був розміщений у будівлі колишнього реального училища. Викладачі інституту мешкали у будинках по вулиці Шевченка. У довоєнний час в інституті діяло два факультети: філологічний та історичний.

На перший курс Слов'янського учительського інституту в 1939 р. було прийнято 210 студентів: 120 – на філологічний факультет (українське та російське відділення), 90 – на історичний факультет. Викладацький склад налічував 25 осіб. Почався навчальний рік. Велася велика робота по обладнанню навчальних кабінетів, лабораторій, поповнювалася бібліотека.

21 червня 1941 року коли у вищих навчальних закладах тільки-но закінчувалися екзамени в стінах учительського інституту після дворічного навчання проходив перший випуск – 138 вчителів історії, мови та літератури. З них 23 випускники отримали дипломи з відзнакою. Але випускники до роботи не приступили, прийшла велика біда – війна.

Багато викладачів та студентів Слов'янського учительського інституту зі зброєю в руках стали на захист країни. За мужність та героїзм чимало з них було відмічено державними нагородами.



Вольперт Арон Якович – кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри математики, уроджинець м. Слов'янська, випускник аспірантури Московського державного університету ім. М.В.Ломоносова. З 1942 по 1943 рік був рядовим Радянської Армії. Поранений у жовтні 1943 року, тривалий час перебував у шпиталі.



Горошко Василь Якович – кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри математики. З 1959 року – ректор інституту. Приймав участь в боях на території Польщі, був поранений. Нагороджений медаллю "За перемогу над Німеччиною у Великій Вітчизняній війні".



Шамгунов Казим Давлетович – завідувач кафедри математичного аналізу. Приймав участь у боях на Воронежському фронті, Степному та І Прибалтійському фронтах. Нагороджений: орденами "Червоної зірки", "Вітчизняної Війни II ступеню", медаллю "За перемогу над Німеччиною у Великій Вітчизняній війні".



Савченко В'ячеслав Максимович – з 1938 по 1940 рік працював вчителем математики, проректор інституту. Був призваний до лав Червоної Армії, з 1943 по 1945 рік сержант, пізніше старшина військ Південно-Уральського округу. Нагороджений медаллю "За перемогу над Німеччиною у Великій Вітчизняній війні".



Шевченко Володимир Сгорович – працював на кафедрі математики старшим викладачем, завідувач кафедри математики. Керівник філіалу заочної математичної школи при МДУ (м. Москва) у Слов'янському педагогічному інституті. Був призваний до лав Червоної Армії. Приймав участь у запеклих боях за Донецьку та Харківську області. У бою за Барвенково був тяжко поранений.

Нагороджений медаллю "За перемогу над Німеччиною у Великій Вітчизняній війні".

Боровик Ігор Федорович – з 1959 року викладач математики в інституті. Приймав участь у боях за зняття блокади Ленінграду. Був тяжко поранений, до травня 1944 року лікувався у шпиталях, інвалід Великої Вітчизняної війни.

Із спогадів студентів: «...Володимир Єгорович завжди заохочував студентів до творчості. Він з повагою ставився як до знання, так і до незнання, не нав'язував свої думки, а терпляче переконував. Нашу активність не потрібно було стимулювати. Це був природний процес, який йшов від серця до серця. Це був той випадок, коли разом з математичною інформацією ми отримували значно більшу, яка надавала сили для розвитку людяності.» Зараз такий вид спілкування називають інтерактивним.

6 вересня 1943 р. м. Слов'янськ було звільнено від окупантів. Почалася відбудова народного господарства.

На початку листопада 1943 року на міській площі міста можна було прочитати оголошення: «Слов'янський учительський інститут проводить реєстрацію своїх працівників».

Спочатку для навчальних занять використовувалося приміщення середньої школи №12.

Батьківщина відмітила і працю тих, хто віддавав сили у справі відновлення інституту в 1943-1945 роках. Медалями «За доблесну працю у Великій Вітчизняній війні» були нагороджені директор інституту І.К.Деркач, викладачі Курдюмова Є.О., Глушков С.І., Карцовнак і бібліотекар Г.М. Ракитянська.

Хотілося б згадати всіх вчених – математиків і фізиків, чия робота допомогла відстояти свободу і незалежність нашої Батьківщини і врятувати людство від загрози фашистських загарбників, так хіба це можливо?

Серед мільйонів тих, хто не був відмічений нагородами і славою при житті, хто у важку для Вітчизни годину до кінця виконав свій обов'язок і віддав їй найдорожче – життя, були і початківці математики, фізики, талановиті механіки, вчителі і студенти, яким тільки належало вступити на цей шлях.

Скільки винаходів залишилось нездійсненими, яке різноманіття математичних і фізичних скарбів вони забрали із собою. Справедливо говорять, що важко навіть уявити, якою була би сьогодні наука, якщо ми не понесли цих втрат.

Часопис підготували:

Бондарєва Ю., Смоляр Д., Ганзера Г.О., Плєсканьова Л.Г.

^{1,2}Учні Слов'янського педагогічного ліцею,

³Вчитель Слов'янського педагогічного ліцею,

⁴Старший викладач кафедри ГМВМ СДПУ

Математика

Чайченко С.О., Лисинська Н.І.

¹Проректор із науково-педагогічної роботи, канд. ф.-мат. н., доцент;

²Студенка 5 курсу фізико-математичного факультету СДПУ

Наближення операторами спеціального вигляду на класах неперервних функцій, визначених на дійсній осі

Знайдено асимптотичні рівності для точних верхніх меж відхилень операторів спеціального вигляду на класах неперервних функцій, визначених на дійсній осі (і не обов'язково періодичних).

Нехай \hat{C} – простір неперервних обмежених на дійсній осі \mathbb{R} функцій $f(x)$, норма в якому задається рівністю

$$\|f\|_{\hat{C}} = \max_{x \in \mathbb{R}} |f(x)|,$$

\hat{H}_ω – клас функцій, який означається співвідношенням

$$\hat{H}_\omega = \left\{ \varphi \in \hat{C} : |\varphi(t') - \varphi(t'')| \leq \omega(|t' - t''|), \forall t', t'' \in \mathbb{R} \right\},$$

де $\omega(t)$ – довільний фіксований модуль неперервності.

Нехай, далі, $\psi(v)$ – неперервна при всіх $v \geq 0$ функція, для якої майже при всіх $t \in \mathbb{R}$ існує перетворення

$$\hat{\psi}_\beta(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \psi(v) \cos\left(vt + \frac{\beta\pi}{2}\right) dv, \quad (1)$$

в якому β – фіксоване дійсне число.

Тоді через $\hat{C}_\beta^\psi \hat{H}_\omega$, наслідуючи О.І. Степанця [1, с. 168], позначають множину функцій $f \in \hat{C}$, які в кожній точці $x \in \mathbb{R}$ можуть бути поданими у вигляді згортки

$$f(x) = A_0 + \int_{-\infty}^\infty \varphi(x-t) \hat{\psi}_\beta(t) dt, \quad (2)$$

де A_0 – деяка стала, $\varphi \in \hat{H}_\omega$, а інтеграл розуміється як границя інтегралів по симетричним проміжкам, що розширюються. Функцію $\varphi(\cdot)$ у зображенні (2) називають $(\psi; \beta)$ -похідною функції $f(\cdot)$ і для неї використовують позначення $\varphi = f_\beta^\psi$.

У книзі [1, с. 169] встановлено зв'язок між множинами $\hat{C}_\beta^\psi \hat{H}_\omega$ і відповідними множинами 2π -періодичних неперервних функцій $C_\beta^\psi H_\omega$, раніше введені О.І. Степанцем (дивись, наприклад, монографію [2, с. 131]). Зокрема показано, що якщо функція $\psi(v)$ неперервна при всіх $v \geq 0$, $\beta \in \mathbb{R}$ і перетворення $\hat{\psi}_\beta(t)$ вигляду (1) є сумовним на дійсній осі, то

$$\hat{C}_\beta^\psi H_\omega = C_\beta^\psi H_\omega,$$

де H_ω – підмножина 2π -періодичних функцій з множини \hat{H}_ω .

За наближуючі агрегати для функцій $f \in \hat{C}_\beta^\psi \hat{H}_\omega$ в цій роботі використовуються оператори вигляду

$$U_\sigma(f; x) = A_0 + \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f_\beta^\psi(x-t) \int_0^{\infty} u_\sigma(t; v) dv dt, \quad (3)$$

де функція $u_\sigma(t; v) = u_\sigma(t; v; \psi; \beta)$ визначається рівністю

$$u_\sigma(t; v) = \begin{cases} u_\sigma^*(t; v), & 0 \leq v \leq \sigma - 1, \\ u_\sigma^*(t; v) + \psi(3\sigma)(v - \sigma + 1) \cos(vt + \frac{\beta\pi}{2}), & \sigma - 1 < v < \sigma, \\ 0, & \sigma \leq v, \end{cases}$$

у якій при $v \in [0; \sigma]$

$$u_\sigma^*(t; v) = (\psi(v) - \psi(2\sigma - v)) \cos\left(vt - \frac{\beta\pi}{2}\right) - \psi(2\sigma + v) \cos\left(vt - \frac{\beta\pi}{2}\right).$$

Оператори (3) у якості наближуючих агрегатів на класах функцій, заданих на дійсній осі, були вперше застосовані у роботі [3]. Там же було показано, що за певних природних умов функції $U_\sigma(f; x)$ належать до множини цілих функцій експоненціального типу не вищого σ . Якщо ж $f(x)$ є неперервною 2π -періодичною функцією з множини $C_\beta^\psi H_\omega$, а $\sigma = n \in \mathbb{N}$, то функції $U_\sigma(f; x)$ є тригонометричними поліномами порядку не вищого $n-1$. Метод побудови цих поліномів і дослідження їх апроксимаційних властивостей на класах 2π -періодичних функцій було здійснено А.С. Сердюком у роботах [4, 5].

Дослідженню апроксимаційних властивостей операторів $U_\sigma(f; x)$ на класах неперервних функцій, заданих на дійсній осі, присвячено роботи [3, 6]. Зокрема, у роботі [6] знайдено асимптотичні при $\sigma \rightarrow \infty$ рівності для величин

$$E(\mathfrak{C}_\beta^\psi \mathfrak{H}_\omega; U_\sigma) = \sup_{f \in \mathfrak{C}_\beta^\psi \mathfrak{H}_\omega} \|f(\cdot) - U_\sigma(f; \cdot)\|_{\mathfrak{C}},$$

у випадку, коли

$$\psi(v) = \begin{cases} \psi_1(v), & 0 \leq v < 1, \\ e^{-\alpha v}, & 1 \leq v, \end{cases} \quad (4)$$

де $\alpha > 0$ – довільне дійсне число, $\psi_1(v)$ – деяка абсолютно неперервна функція, яка має похідну $\psi'_1(v)$ обмеженої варіації на відрізку $[0;1]$, і така, що $\psi_1(0)\sin\frac{\beta\pi}{2}=0$ і $\psi_1(1)=e^{-\alpha}$. А саме, у роботі [6] було доведено таке твердження.

Теорема А. Нехай функція $\psi(v)$ визначається співвідношенням (4) і $\beta \in \mathbb{R}$. Тоді при $\sigma \rightarrow \infty$ має місце рівність

$$E\left(\hat{C}_\beta^\psi \hat{H}_\omega; U_\sigma\right) = \frac{2\theta_\omega e^{-\alpha\sigma}}{\pi} \int_0^{\pi/2} \omega\left(\frac{2t}{\sigma}\right) \sin t \, dt + O(1) \frac{e^{-\alpha\sigma}}{\alpha^2 \sigma} \omega\left(\frac{1}{\sigma}\right),$$

де $\theta_\omega \in \left[\frac{2}{3}; 1\right]$, причому $\theta_\omega = 1$, якщо $\omega(t)$ – опуклий модуль неперервності, $O(1)$ – величини рівномірно обмежені щодо параметрів α, β і σ .

Метою цього повідомлення є розповсюдження результатів роботи [6] на випадок, коли класи $\hat{C}_\beta^\psi \hat{H}_\omega$ означаються функціями $\psi(t)$ з множини D_α , яка визначається у такий спосіб [7].

Наслідуючи О.І. Степанця (дивись, наприклад, монографію [1, с. 193]) позначимо через \mathfrak{M} множину опуклих донизу при всіх $v \geq 1$ функцій $\psi(v)$, для яких $\lim_{v \rightarrow \infty} \psi(v) = 0$. Кожну функцію $\psi \in \mathfrak{M}$ продовжимо на проміжок $[0;1]$ так, щоб отримана функція (яку як і раніше будемо позначати через $\psi(\cdot)$) була неперервною при всіх $v \geq 0$, $\psi(0) = 0$ і її похідна $\psi'(v) = \psi'(v+0)$ мала обмежену варіацію на проміжку $[0; \infty)$. Множину таких функцій ψ позначимо через \mathfrak{R} . Нехай, далі, \mathfrak{R}^* – підмножина функцій $\psi \in \mathfrak{R}$ у яких починаючи з деякого v_0 , існує скінченна похідна другого порядку $\psi''(v)$. Тоді покладемо

$$D_\alpha = \left\{ \psi \in \mathfrak{R}^* : \lim_{v \rightarrow \infty} \frac{\psi''(v)}{\psi'(v)} = -\alpha, \alpha > 0 \right\}.$$

Для отримання асимптотичних рівностей будемо використовувати теорему А і наступну лему, доведену в роботі [7].

Лема 1. Нехай $\psi \in D_\alpha$. Тоді для довільного числа $\sigma > 0$ виконується рівність

$$\int_\sigma^\infty \psi(v) \cos\left(vt + \frac{\beta\pi}{2}\right) dv = \psi(v) \left[e^{\alpha\sigma} \int_\sigma^\infty e^{-\alpha v} \cos\left(vt + \frac{\beta\pi}{2}\right) dv + r_\sigma(t) \right], \quad (5)$$

причому з деякого σ_0 , справедливі оцінки

$$|r_\sigma(t)| \leq \frac{\varepsilon_\sigma}{\alpha(\alpha - \varepsilon_\sigma)}, \quad t \in \mathbb{R}, \quad (6)$$

$$|r_\sigma(t)| \leq \frac{1}{t^2} \frac{(2\alpha + 1)}{\alpha - \varepsilon_\sigma} \varepsilon_\sigma, \quad |t| > 0, \quad (7)$$

де

$$\varepsilon_\sigma = \max \{ \varepsilon_\sigma^{(1)}; \varepsilon_\sigma^{(2)} \}, \quad \varepsilon_\sigma^{(1)} = \sup_{t \geq \sigma} \left| \frac{\psi'(t)}{\psi(t)} + \alpha \right|, \quad \varepsilon_\sigma^{(2)} = \sup_{t \geq \sigma} \left| \frac{\psi''(t)}{\psi'(t)} - \alpha^2 \right|. \quad (8)$$

Основний результат роботи міститься в такому твердженні.

Теорема 1. Нехай $\psi \in D_\alpha$ і $\beta \in \mathbb{R}$. Тоді при $\sigma \rightarrow \infty$ має місце рівність

$$E(\hat{C}_\beta^\psi \hat{H}_\omega; U_\sigma) = \frac{2\theta_\omega \psi(\sigma)}{\pi} \int_0^{\pi/2} \omega\left(\frac{2t}{\sigma}\right) \sin t \, dt + \\ + O(1) \left((\alpha^2 + 1) \varepsilon_\sigma + \frac{\omega(1/\sigma)}{\sigma} \right) \frac{\psi(\sigma)}{\alpha^2}, \quad (9)$$

де величина ε_σ визначена у співвідношеннях (8) $\theta_\omega \in \left[\frac{2}{3}; 1 \right]$, причому $\theta_\omega = 1$, якщо $\omega(t)$ – опуклий модуль неперервності, $O(1)$ – величини рівномірно обмежені щодо параметрів α, β і σ .

Доведення. Враховуючі факт сумовності на \mathbb{R} перетворення $\hat{\psi}_\beta(t)$ вигляду (1) довільної функції $\psi \in D_\alpha$ і повторюючи міркування, які використовувались під час доведення теореми 1 роботи [6], отримуємо

$$f(x) - U_\sigma(f; x) = \frac{2}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f_\beta^\psi(x-t) \cos\left(\sigma t - \frac{\beta\pi}{2}\right) \int_0^{\infty} \psi(v+\sigma) \cos \sigma t \, dv \, dt - \\ - \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f_\beta^\psi(x-t) \left(\int_{\sigma-1}^{\sigma} \psi(3\sigma)(v-\sigma+1) \cos\left(vt + \frac{\beta\pi}{2}\right) dv + \right. \\ \left. + \int_{\sigma}^{\infty} \psi(v+2\sigma) \cos\left(vt + \frac{\beta\pi}{2}\right) dv \right) dt. \quad (10)$$

Розглядаючи в рівності (10) точну верхню межу по класах $\hat{C}_\beta^\psi \hat{H}_\omega$, одержуємо

$$E(\hat{C}_\beta^\psi \hat{H}_\omega; U_\sigma) = \\ = \frac{2}{\pi} \sup_{f \in \hat{C}_\beta^\psi \hat{H}_\omega} \left\| \int_{-\infty}^{\infty} f_\beta^\psi(x-t) \cos\left(\sigma t - \frac{\beta\pi}{2}\right) \int_0^{\infty} \psi(v+\sigma) \cos vt \, dv \, dt \right\|_{\hat{C}} +$$

$$+O(1) \sup_{f \in \hat{C}_{-\beta}^{\psi} \hat{H}_{\omega}} \left\| \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f_{\beta}^{\psi}(x-t) \left(\int_{\sigma-1}^{\sigma} \psi(3\sigma)(\nu-\sigma+1) \cos\left(\nu t + \frac{\beta\pi}{2}\right) d\nu + \int_{\sigma}^{\infty} \psi(\nu+2\sigma) \cos\left(\nu t + \frac{\beta\pi}{2}\right) d\nu \right) dt \right\|_{\hat{C}}. \quad (11)$$

Позначимо перший доданок з правої частини рівності (11) через $D_{\sigma}(\hat{C}_{\beta}^{\psi} \hat{H}_{\omega})$. Продовжуючи міркувати як і в роботі [6], отримуємо

$$E(\hat{C}_{\beta}^{\psi} \hat{H}_{\omega}; U_{\sigma}) = D_{\sigma}(\hat{C}_{\beta}^{\psi} \hat{H}_{\omega}) + O(1)E(\hat{C}_{-\beta}^{\psi} \hat{H}_{\omega}; F_{\sigma}), \quad (12)$$

де

$$\psi_{\sigma}(t) = \begin{cases} \psi((2\sigma+1)t), & 0 \leq t \leq 1, \\ \psi(t+2\sigma), & 1 \leq t, \end{cases}$$

а

$$E(\hat{C}_{-\beta}^{\psi} \hat{H}_{\omega}; F_{\sigma}) = \sup_{f \in \hat{C}_{-\beta}^{\psi} \hat{H}_{\omega}} \|f(x) - F_{\sigma}(f; x)\|_{\hat{C}}$$

– точні верхні межі відхилень на класах $\hat{C}_{-\beta}^{\psi} \hat{H}_{\omega}$ операторів Фур'є $F_{\sigma}(f; x)$, які були введені у роботі [8] таким чином

$$F_{\sigma}(f; x) = A_0 + \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f_{\beta}^{\psi}(x-t) \int_0^{\infty} \psi(\nu) \lambda_{\sigma}(\nu) \cos\left(\nu t + \frac{\beta\pi}{2}\right) d\nu dt,$$

$$\lambda_{\sigma}(\nu) = \begin{cases} 1, & 0 \leq \nu \leq \sigma-1, \\ 1 - (\nu - \sigma + 1) \frac{\psi(\sigma)}{\psi(\nu)}, & \sigma-1 < \nu < \sigma, \\ 0, & \sigma \leq \nu. \end{cases}$$

Враховуючи тепер оцінку

$$E(\hat{C}_{-\beta}^{\psi} \hat{H}_{\omega}; F_{\sigma}) = O(1) \psi(3\sigma) \omega\left(\frac{1}{\sigma}\right), \quad \sigma \rightarrow \infty,$$

яка впливає з теореми IX.12.2 монографії [1, с. 226], співвідношення (12) можна записати у вигляді

$$E(\hat{C}_{\beta}^{\psi} \hat{H}_{\omega}; U_{\sigma}) = D_{\sigma}(\hat{C}_{\beta}^{\psi} \hat{H}_{\omega}) + O(1) \psi(3\sigma) \omega\left(\frac{1}{\sigma}\right). \quad (13)$$

Знайдемо тепер величину $D_{\sigma}(\hat{C}_{\beta}^{\psi} \hat{H}_{\omega})$. Для цього будемо використовувати лему 1. Застосовуючи формулу (5) з цієї леми, одержуємо

$$\int_0^{\infty} \psi(\nu + \sigma) \cos \nu t d\nu = \int_{\sigma}^{\infty} \psi(\nu) \cos(\nu - \sigma) t d\nu =$$

$$\begin{aligned}
 &= \int_{\sigma}^{\infty} \psi(\nu) (\cos \nu t \cos \sigma t + \sin \nu t \sin \sigma t) d\nu = \\
 &= \cos \sigma t \int_{\sigma}^{\infty} \psi(\nu) \cos \nu t d\nu + \sin \sigma t \int_{\sigma}^{\infty} \psi(\nu) \sin \nu t d\nu = \\
 &= \psi(\sigma) \left[e^{\alpha \sigma} \int_{\sigma}^{\infty} e^{-\alpha \nu} \cos(\nu - \sigma) t d\nu + O(1) r_{\sigma}(t) \right] = \\
 &= \psi(\sigma) \left[e^{\alpha \sigma} \int_0^{\infty} e^{-\alpha(\nu+\sigma)} \cos \nu t d\nu + O(1) r_{\sigma}(t) \right] = \psi(\sigma) \left[\frac{\alpha}{t^2 + \alpha^2} + O(1) r_{\sigma}(t) \right],
 \end{aligned} \tag{14}$$

де для величини $r_{\sigma}(t)$ справджуються оцінки (6) і (7).

На підставі співвідношення (14), враховуючи означення величини $D(\hat{C}_{\beta}^{\psi} \hat{H}_{\omega})$ і оцінки (6) – (7), отримуємо

$$\begin{aligned}
 D(\hat{C}_{\beta}^{\psi} \hat{H}_{\omega}) &= \frac{2\alpha\psi(\sigma)}{\pi} \sup_{\varphi \in \hat{H}_{\omega}} \left| \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t) \frac{\cos\left(\sigma t - \frac{\beta\pi}{2}\right)}{t^2 + \alpha^2} dt \right| + \\
 &+ O(1) \frac{(\alpha^2 + 1)\varepsilon_{\sigma}}{\alpha^2} \psi(\sigma).
 \end{aligned} \tag{15}$$

Для знаходження верхньої грані у співвідношенні (15) скористаємося твердженням, яке одержується шляхом поєднання лем 1 і 2 роботи [6].

Лема 2. Нехай $\alpha > 0$ і $\beta \in \mathbb{R}$. Тоді при $\sigma \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned}
 I_{\sigma}(\alpha; \omega) &\stackrel{\text{df}}{=} \sup_{\varphi \in \hat{H}_{\omega}} \left| \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t) \frac{\cos\left(\sigma t - \frac{\beta\pi}{2}\right)}{t^2 + \alpha^2} dt \right| = \\
 &= \frac{\theta_{\omega}}{\alpha} \int_0^{\pi/2} \omega\left(\frac{2t}{\sigma}\right) \sin t dt + O(1) \omega\left(\frac{1}{\sigma}\right),
 \end{aligned} \tag{16}$$

де $\theta_{\omega} \in \left[\frac{2}{3}; 1\right]$, причому $\theta_{\omega} = 1$, якщо $\omega(t)$ – опуклий модуль неперервності,

$O(1)$ – величини рівномірно обмежені щодо параметрів α, β і σ .

Об'єднуючи тепер співвідношення (13), (15) і (16), переконуємося у справедливості формули (9). Теорему доведено.

Зробимо декілька зауважень до теореми 1. Якщо $\psi(t) = e^{-\alpha t}$, $t \geq 1$, то

$$\frac{\psi'(t)}{\psi(t)} = -\alpha, \quad \frac{\psi''(t)}{\psi(t)} = \alpha^2, \quad t \geq 1.$$

Звідси, з урахуванням співвідношень (8), випливає, що $\varepsilon_\sigma = 0$, $\sigma \geq 1$, і твердження теореми 1 співпадає з твердженням теореми 4.

Далі, оскільки справедлива порядкова оцінка

$$\int_0^{\pi/2} \omega\left(\frac{2t}{\sigma}\right) \sin t \, dt = O(1) \omega\left(\frac{1}{\sigma}\right), \quad \sigma \rightarrow \infty,$$

то за умови виконання співвідношення

$$\lim_{\sigma \rightarrow \infty} \frac{\varepsilon_\sigma}{\omega(1/\sigma)} = 0 \quad (17)$$

залишковий член формули (9) буде при $\sigma \rightarrow \infty$ нескінченно малою більшою високого порядку малості у порівнянні з головним членом цієї рівності (в цьому випадку також кажуть, що рівність (9) дає розв'язок задачі Колмогорова-Нікольського для операторів $U_\sigma(f; x)$ на класах $\hat{C}_\beta^\psi \hat{H}_\omega$).

Приймаючи до уваги цей факт, зазначимо зокрема, що функції $\psi^*(t) = e^{-\alpha t} \ln^\mu(t + \gamma)$, $\alpha > 0$, $\mu \in \mathbb{R}$, $\gamma > 0$ і $\omega(t) = t^\delta$, $0 < \delta \leq 1$, а також функції $\psi_*(t) = t^\mu e^{-\alpha t}$, $\alpha > 0$, $\mu \in \mathbb{R}$ і $\omega(t) = t^\delta$, $0 < \delta < 1$, задовольняють умову (17).

Перевіримо, наприклад, умову (17) у випадку, коли клас $\hat{C}_\beta^\psi \hat{H}_\omega$ визначається функцією $\psi_*(t)$ і модулем неперервності $\omega(t) = t^\delta$, $0 < \delta < 1$. Виконуючи перетворення, одержуємо

$$\frac{\psi'_*(t)}{\psi_*(t)} = \frac{\mu}{t} - \alpha, \quad \frac{\psi''_*(t)}{\psi_*(t)} = \frac{2\alpha\mu}{t} - \frac{\mu(\mu-1)}{t^2} + \alpha^2.$$

Звідси знаходимо

$$\varepsilon_\sigma^{(1)} = \sup_{t \geq \sigma} \left| \frac{\psi'_*(t)}{\psi_*(t)} + \alpha \right| = \frac{\mu}{\sigma}, \quad \sigma \geq 1, \quad (18)$$

$$\varepsilon_\sigma^{(2)} = \sup_{t \geq \sigma} \left| \frac{\psi''_*(t)}{\psi_*(t)} - \alpha^2 \right| = \frac{2\alpha\mu}{\sigma} - \frac{\mu(\mu-1)}{\sigma^2}, \quad \sigma \geq \frac{\mu-1}{\alpha}. \quad (19)$$

З рівностей (18) і (19) випливає оцінка

$$\varepsilon_\sigma = \max \{ \varepsilon_\sigma^{(1)}; \varepsilon_\sigma^{(2)} \} = O(1) \frac{1}{\sigma}, \quad \sigma \rightarrow \infty,$$

на підставі якої переконуємося у справедливості співвідношення (17).

Література

1. Степанец А.И. Методы теории приближений: В 2 т. –К.: Ин-т математики НАН Украины, 2002. – Ч. 2. – 468 с.
2. Степанец А.И. Методы теории приближений. –Киев: Ин-т математики НАН Украины, 2002. - Ч. I. – 427 с.
3. Соколенко І.В. Наближення операторами Сердюка неперервних $(\psi; \beta)$ -диференційовних функцій, заданих на дійсній осі // Проблеми теорії наближення функцій та суміжні питання: Зб. праць Ін-ту математики НАН України. – Т.4, № 1. – Київ: Ін-т математики НАН України, 2007. – С. 318 - 334.
4. Сердюк А.С. Про один лінійний метод наближення періодичних функцій // Проблеми теорії наближення функцій та суміжні питання: Зб. праць Ін-ту математики НАН України. – Т.1, № 1. – Київ: Ін-т математики НАН України, 2004. – С. 361 - 375.
5. Сердюк А.С. Наближення інтегралів Пуассона одним лінійним методом наближення в рівномірній та інтегральній метриках // Укр. мат. журн. – 2008. – 60, № 7. – С. 976 - 982.
6. Соколенко І.В. Наближення деякими лінійними операторами класів заданих на дійсній осі неперервних $(\psi; \beta)$ -диференційовних функцій // Теорія наближення функцій та суміжні питання: Зб. праць Ін-ту математики НАН України. – Т.5, № 1. – Київ: Ін-т математики НАН України, 2008. – С. 352 - 366.
7. Рукасов В.І., Чайченко С.О. Наближення операторами Фур'є на класах функцій, локально інтегровних на дійсній осі // Теорія наближення функцій та суміжні питання: Зб. праць Ін-ту математики НАН України. – Т. 5, № 1. – Київ: Ін-т математики НАН України, 2008. – С. 297 - 308.
8. Степанец А.И. Приближение операторами Фурье функций, заданных на действительной оси // Докл. АН СССР. – 1988. – Т. 303, № 1. – С. 50 - 53.

Новиков О.А., Шулик Т.В.

¹Доцент кафедры математического анализа СДПУ,

²Студентка 5 курсу фізико-математичного факультету СДПУ

Интегральные представления уклонений повторных сумм Валле Пусена на классах аналитических функций

Получены асимптотические формулы для верхних граней уклонений тригонометрических полиномов, порождаемых повторным методом суммирования Валле Пуссена, взятых по классам аналитических периодических функций действительной переменной.

Следуя А.И. Степанцу [1], обозначим C_β^q классы непрерывных 2π -периодических функций $f(\cdot)$, которые можно представить в виде свертки

$$f(x) = A_0 + \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(x+t) P_\beta^q(t) dt,$$

в которой

$$P_\beta^q(t) = \sum_{k=1}^{\infty} q^k \cos\left(kt + \frac{\beta\pi}{2}\right), \quad q \in (0;1), \beta \in R$$

– ядро Пуассона.

Известно (см., например, [2]), что классы C_β^q , которые принято называть классами интегралов Пуассона, состоят из функций f , которые являются сужениями на действительную ось функций $F(z)$, аналитических в полосе

$$|\operatorname{Im} z| \leq \ln \frac{1}{q}.$$

Обозначим через $S_n(f; x)$ частичные суммы ряда Фурье. Применяя к суммам $S_n(f; x)$ метод суммирования Валле Пуссена (см. [2, с. 47]), получаем суммы Валле Пуссена функции $f \in L$

$$V_{n,p}(f, x) = \frac{1}{p} \sum_{k=n-p}^{n-1} S_k(f, x).$$

Применяя метод суммирования Валле Пуссена r раз, получаем следующий метод построения тригонометрических полиномов.

Пусть p_1, p_2, \dots, p_r – произвольные натуральные числа такие, что $\sum_{k=1}^r p_k < n$.

Функции $f \in L$ поставим в соответствие последовательность тригонометрических многочленов

$$\begin{aligned} V_{n, p_1, p_2, \dots, p_r}(f, x) &= V_{n, p}^{(r)}(f, x) = \\ &= \frac{1}{p_1} \sum_{k_1=n-p_1}^{n-1} \frac{1}{p_2} \sum_{k_2=k_1-p_2+1}^{k_1} \dots \frac{1}{p_r} \sum_{k_r=k_{r-1}-p_r+1}^{k_{r-1}} S_{k_r}(f, x), \end{aligned} \quad (1)$$

которые будем называть r -повторными суммами Валле Пуссена (в случае $r = 2$ см. [3]).

Задача приближения классов интегралов Пуассона имеет свою историю, связанную с известными именами. В 1946 году С.М. Никольский [4] показал, что для верхних граней уклонений частных сумм Фурье, взятых по классам $C_{\beta, \infty}^q$,

$$\varepsilon(C_{\beta, \infty}^q; S_n) \stackrel{\text{df}}{=} \sup_{f \in C_{\beta, \infty}^q} \|f(\cdot) - S_n(f; \cdot)\|_C,$$

имеет место асимптотическое равенство

$$\begin{aligned} \varepsilon(C_{\beta, \infty}^q; S_n) &= \frac{8q^n}{\pi^2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{du}{\sqrt{1 - q^2 \sin^2 u}} + O(1) \frac{q^n}{n}, \quad q = e^{-\alpha}, \text{ где} \\ K(q) &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{du}{\sqrt{1 - q^2 \sin^2 u}} \end{aligned}$$

– полный эллиптический интеграл первого рода. В 1980 году С.Б. Стечкин [5] уточнил остаточный член в этой формуле, показав, что он равен $O(1)q^n(1-q)^{-2}n^{-1}$.

Аналогичная задача для классов $C_{\beta}^q H_{\omega}$ была решена в 2000 году А.И. Степанцом. В работе [1] было показано, что при $n \rightarrow \infty$ выполняется равенство

$$\varepsilon(C_{\beta}^q H_{\omega}; S_n) = \frac{4q^n}{\pi^2} K(q) \theta_n(\omega) \int_0^{\pi/2} \omega\left(\frac{2t}{n}\right) \sin t \, dt + \frac{O(1)q^n}{(1-q)^2 n} \omega(1/n), \quad (2)$$

где $\theta_n(\omega) \in [1/2; 1]$, причем $\theta_n(\omega) = 1$, если $\omega(t)$ – выпуклый модуль непрерывности.

В работе [6] (см. также [7, с. 218], [8]) для верхних граней отклонений сум Валле Пусена на классах $C_{\beta, \infty}^q$ получены асимптотические формулы

$$\begin{aligned} \varepsilon(C_{\beta}^q H_{\omega}; V_{n,p}) &= \frac{2\theta_n(\omega)q^{n-p+1}}{\pi p(1-q^2)} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \omega\left(\frac{2t}{n-p}\right) \sin t dt + \\ &+ O(1)\omega\left(\frac{1}{n-p}\right) \left(\frac{q^{n-p+1}}{p(n-p)(1-q)^3} + \frac{q^n}{p(1-q^2)} \right), \quad 1 < p < n \end{aligned} \quad (3)$$

$$\varepsilon(C_{\beta, \infty}^q; V_{n,p}) = \frac{4q^{n-p+1}}{\pi p(1-q^2)} + O(1) \left(\frac{q^{n-p+1}}{p(n-p)(1-q)^3} + \frac{q^n}{p(1-q)^2} \right). \quad (4)$$

А.С. Сердюком [9] также было показано, что имеет место более общий результат, чем формула (4):

$$\begin{aligned} \varepsilon(C_{\beta, \infty}^q; V_{n,p}) &= \frac{q^{n-p+1}}{p} \left(\frac{4}{\pi^2} K_{p,q} + O(1) \left(\frac{q}{(n-p+1)(1-q)^s} \right) \right), \text{ где} \\ K_{p,q} &= \int_0^{\pi} \frac{\sqrt{1-2q^p \cos pt + q^{2p}}}{1-2q \cos pt + q^2} dt, \quad s = s(p) = \begin{cases} 1, p=1; \\ 3, p=2, 3, \dots \end{cases} \end{aligned}$$

В данной работе получены интегральные представления величин

$$\delta_{n, p_1, p_2, \dots, p_r}^{(r)}(f; x) = \delta_{n, p}^{(r)}(f; x) = |f(x) - V_{n, p}^{(r)}(f; x)|.$$

Нами доказано следующее утверждение.

Теорема. Пусть $q \in (0; 1)$, $\beta \in R$, $\sum_{k=1}^r p_r \stackrel{\text{df}}{=} \Sigma_{\bar{p}} < n$. Тогда для всякой

функции $f \in C_{\beta}^q$ в каждой точке $x \in [-\pi; \pi]$ справедливо равенство

$$\begin{aligned} \delta_{n, \bar{p}}^{(r)}(f; x) &= \frac{1}{\pi \prod_{i=1}^r p_i} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{f_{\beta}^q(x+t)}{(1-2q \cos t + q^2)^{r+1}} \times \\ &\times \sum_{\alpha \subset \bar{r}} (-1)^{(r-|\alpha|)} \sum_{\nu=0}^{r+1} (-1)^{\nu} C_{r+1}^{\nu} q^{\left(n-1-\sum_{j \in \alpha} p_j + r + \nu \right)} \cos \left[\left(n-1-\sum_{j \in \alpha} p_j + r - \nu \right) t + \frac{\beta \pi}{2} \right], \end{aligned} \quad (5)$$

где $|\alpha|$ – количество элементов множества α , а $\bar{r} = \{1, 2, \dots, r\}$.

Доказательство. Положим для удобства $k_0 = n-1$. В силу соотношения (1) имеем

$$\begin{aligned}
 & \delta_{k_0, p_1, p_2, \dots, p_r}(f; x) = \\
 &= \frac{1}{p_1} \sum_{k_1=k_0-p_1+1}^{k_0} \frac{1}{p_2} \sum_{k_2=k_1-p_2+1}^{k_1} \dots \frac{1}{p_r} \sum_{k_r=k_{r-1}-p_r+1}^{k_{r-1}} (f(x) - S_{k_r}(f, x)) = \\
 &= \frac{1}{p_1} \sum_{k_1=k_0-p_1+1}^{k_0} \frac{1}{p_2} \sum_{k_2=k_1-p_2+1}^{k_1} \dots \frac{1}{p_{r-1}} \sum_{k_{r-1}=k_{r-2}-p_{r-1}+1}^{k_{r-2}} \delta_{k_{r-1}+1, p_r}(f, x) = \dots \\
 &\dots = \frac{1}{p_1} \sum_{k_1=k_0-p_1+1}^{k_0} \delta_{k_1+1, p_2, p_3, \dots, p_r}(f, x). \quad (6)
 \end{aligned}$$

В работе [3] показано, что при $r = 2$ справедлива формула

$$\begin{aligned}
 & \delta_{n, p_1, p_2}(f, x) = \delta_{n, p}^{(r)}(f, x) = \\
 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f_{\beta}^q(x+t) \left[\Sigma_1^{(r)} \cos(\beta\pi/2) - \Sigma_2^{(r)} \sin(\beta\pi/2) \right] dt, \quad (7)
 \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
 \Sigma_1^{(r)} = \Sigma_1^{(r)}(t, q, n) &= \frac{\Gamma^{r+1}(t, q)}{\prod_{i=1}^r p_i} \sum_{\alpha \subset r} (-1)^{(r-|\alpha|)} \sum_{\nu=0}^{r+1} (-1)^{\nu} C_{r+1}^{\nu} q^{\left(n-1-\sum_{j \in \alpha} p_j + r + \nu \right)} \times \\
 &\times \cos \left(n-1-\sum_{j \in \alpha} p_j + r - \nu \right) t, \quad (8)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \Sigma_2^{(r)} = \Sigma_2^{(r)}(t, q, n) &= \frac{\Gamma^{r+1}(t, q)}{\prod_{i=1}^r p_i} \sum_{\alpha \subset r} (-1)^{(r-|\alpha|)} \sum_{\nu=0}^{r+1} (-1)^{\nu} C_{r+1}^{\nu} q^{\left(n-1-\sum_{j \in \alpha} p_j + r + \nu \right)} \times \\
 &\times \sin \left(n-1-\sum_{j \in \alpha} p_j + r - \nu \right) t, \quad (9)
 \end{aligned}$$

где $\Gamma(t, q) = (1 - 2q \cos t + q^2)^{-1}$.

Воспользуемся методом математической индукции, чтобы показать, что эти соотношения справедливы для любого $r \in \mathbb{N}$. Предположим, что для

$p_0, p_1, p_2, \dots, p_r$ выполнены условия: $p_i \in \mathbb{N}$, $i = 0, 1, 2, \dots, r$, $\sum_{i=0}^r p_i < n$, и

имеет место соотношение (8). Имея в виду соотношение (6), отправляясь от

предположения справедливости соотношения (8) для числа r , найдем выражение для $\Sigma_1^{(r+1)}$. Имеем

$$\begin{aligned} \Sigma_1^{(r+1)}(t, q, k_0) &= \frac{1}{p_0} \sum_{k_1=k_0-p_0+1}^{k_0} \Sigma_1^{(r)}(t, q, k+1) = \frac{\Gamma^{r+1}(t, q)}{p_0 \prod_{i=1}^r p_i} \times \\ &\times \sum_{k=k_0-p_0+1}^{k_0} \sum_{\alpha \subset \bar{r}} (-1)^{(r-|\alpha|)} \sum_{\nu=0}^{r+1} (-1)^\nu C_{r+1}^\nu q^{\left(k - \sum_{j \in \alpha} p_j + r + \nu\right)} \cos \left(k - \sum_{j \in \alpha} p_j + r - \nu \right) t = \\ &= \frac{\Gamma^{r+1}(t, q)}{2 \prod_{i=1}^r p_i} \sum_{\alpha \subset \bar{r}} (-1)^{(r-|\alpha|)} \sum_{\nu=0}^{r+1} (-1)^\nu C_{r+1}^\nu \sum_{k=k_0-p_0+1}^{k_0} q^{\left(k - \sum_{j \in \alpha} p_j + r + \nu\right)} \times \\ &\times \left(e^{i \left(k - \sum_{j \in \alpha} p_j + r - \nu \right) t} + e^{-i \left(k - \sum_{j \in \alpha} p_j + r - \nu \right) t} \right). \end{aligned}$$

Применяя формулу суммы элементов бесконечной убывающей геометрической прогрессии, получаем

$$\begin{aligned} \sum_{k=k_0-p_0+1}^{k_0} \left(qe^{it} \right)^{\left(k - \sum_{j \in \alpha} p_j + r - \nu \right)} &= \\ &= \left(qe^{it} \right)^{\left(k_0+1-p_0 - \sum_{j \in \alpha} p_j + r - \nu \right)} \frac{1}{1 - qe^{it}} - \left(qe^{it} \right)^{\left(k_0+1 - \sum_{j \in \alpha} p_j + r - \nu \right)} \frac{1}{1 - qe^{it}}, \\ \sum_{k=k_0+1-p_0}^{k_0} \left(qe^{-it} \right)^{\left(k - \sum_{j \in \alpha} p_j + r - \nu \right)} &= \\ &= \left(qe^{-it} \right)^{\left(k_0+1-p_0 - \sum_{j \in \alpha} p_j + r - \nu \right)} \frac{1}{1 - qe^{-it}} - \left(qe^{-it} \right)^{\left(k_0+1 - \sum_{j \in \alpha} p_j + r - \nu \right)} \frac{1}{1 - qe^{-it}}. \end{aligned}$$

Поэтому, выполняя элементарные преобразования, получаем

$$\sum_{k=k_0-p_0+1}^{k_0} \left(qe^{it} \right)^{\left(k - \sum_{j \in \alpha} p_j + r - \nu \right)} + \left(qe^{-it} \right)^{\left(k - \sum_{j \in \alpha} p_j + r - \nu \right)} =$$

$$\begin{aligned}
 &= \left\{ q^{\left(k_0+1-p_0-\sum_{j \in \alpha} p_j+r-\nu\right)} \cos \left(k_0+1-p_0-\sum_{j \in \alpha} p_j+r-\nu\right) t - \right. \\
 &- q^{\left(k_0+1-p_0+1-\sum_{j \in \alpha} p_j+r-\nu\right)} \cos \left(k_0+1-p_0-1-\sum_{j \in \alpha} p_j+r-\nu\right) t - \\
 &- q^{\left(k_0+1-\sum_{j \in \alpha} p_j+r-\nu\right)} \cos \left(k_0+1-\sum_{j \in \alpha} p_j+r-\nu\right) t + \\
 &\left. + q^{\left(k_0+1-\sum_{j \in \alpha} p_j+r-\nu+1\right)} \cos \left(k_0+1-\sum_{j \in \alpha} p_j+r-\nu-1\right) t \right\} \frac{1}{1-2q \cos t + q^2}.
 \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\begin{aligned}
 \Sigma_1^{(r+1)} &= \frac{\Gamma^{r+1}(t, q)}{\prod_{i=0}^r p_i} \sum_{\alpha \subset r} (-1)^{r-|\alpha|} \sum_{\nu=0}^{r+1} (-1)^\nu C_{r+1}^\nu \times \\
 &\times \left\{ q^{\left(k_0+1-p_0-\sum_{j \in \alpha} p_j+r+\nu\right)} \cos \left(k_0+1-p_0-\sum_{j \in \alpha} p_j+r-\nu\right) t - \right. \\
 &- q^{\left(k_0+2-p_0-\sum_{j \in \alpha} p_j+r+\nu\right)} \cos \left(k_0-p_0-\sum_{j \in \alpha} p_j+r-\nu\right) t - \\
 &- q^{\left(k_0+1-\sum_{j \in \alpha} p_j+r+\nu\right)} \cos \left(k_0+1-\sum_{j \in \alpha} p_j+r-\nu\right) t + \\
 &\left. + q^{\left(k_0+2-\sum_{j \in \alpha} p_j+r+\nu\right)} \cos \left(k_0-\sum_{j \in \alpha} p_j+r-\nu\right) t \right\} \cdot \frac{1}{1-2q \cos t + q^2} = \\
 &= \frac{\Gamma^{r+1}(t, q)}{\prod_{i=0}^r p_i} \times
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \times \sum_{\alpha \subset r} (-1)^{(r-|\alpha|)} \left\{ C_{r+1}^0 \left[q^{\left(k_0+1-p_0-\sum_{j \in \alpha} p_j+r \right)} \cos \left(k_0+1-p_0-\sum_{j \in \alpha} p_j+r \right) t \right] + \right. \\
 & + \sum_{\nu=1}^{r+1} (-1)^\nu C_{r+1}^\nu \left[q^{\left(k_0+1-p_0-\sum_{j \in \alpha} p_j+r+\nu \right)} \cos \left(k_0+1-p_0-\sum_{j \in \alpha} p_j+r-\nu \right) t \right] + \\
 & + \sum_{\nu=1}^{r+1} (-1)^\nu C_{r+1}^{\nu-1} \left[q^{\left(k_0+1-p_0-\sum_{j \in \alpha} p_j+r+\nu \right)} \cos \left(k_0+1-p_0-\sum_{j \in \alpha} p_j+r-\nu \right) t \right] + \\
 & + (-1)^{r+2} C_{r+1}^{r+1} \left[q^{\left(k_0+1-p_0-\sum_{j \in \alpha} p_j+r+r+2 \right)} \cos \left(k_0+1-p_0-\sum_{j \in \alpha} p_j+r-r-2 \right) t \right] - \\
 & - C_{r+1}^0 \left[q^{\left(k_0+1-\sum_{j \in \alpha} p_j+r \right)} \cos \left(k_0+1-\sum_{j \in \alpha} p_j+r \right) t \right] - \\
 & - \sum_{\nu=1}^{r+1} (-1)^\nu C_{r+1}^\nu \left[q^{\left(k_0+1-\sum_{j \in \alpha} p_j+r+\nu \right)} \cos \left(k_0+1-\sum_{j \in \alpha} p_j+r-\nu \right) t \right] - \\
 & - \sum_{\nu=1}^{r+1} (-1)^\nu C_{r+1}^{\nu-1} \left[q^{\left(k_0+1-\sum_{j \in \alpha} p_j+r+\nu \right)} \cos \left(k_0+1-\sum_{j \in \alpha} p_j+r-\nu \right) t \right] - \\
 & - (-1)^{r+2} C_{r+1}^{r+1} \left[q^{\left(k_0+1-\sum_{j \in \alpha} p_j+r+r+2 \right)} \cos \left(k_0+1-\sum_{j \in \alpha} p_j+r-r-2 \right) t \right] \Bigg\} \cdot \frac{1}{1-2q \cos t + q^2} =
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{\Gamma^{r+2}(t, q)}{\prod_{i=0}^r p_i} \times \\
 &\times \sum_{\alpha \subset r} (-1)^{(r-|\alpha|)} \left\{ C_{r+1}^0 \left[q^{\left(k_0+1-p_0-\sum_{j \in \alpha} p_j+r \right)} \cos \left(k_0+1-p_0-\sum_{j \in \alpha} p_j+r \right) t \right] + \right. \\
 &+ \sum_{\nu=1}^{r+1} (-1)^\nu (C_{r+1}^\nu + C_{r+1}^{\nu-1}) \left[q^{\left(k_0+1-p_0-\sum_{j \in \alpha} p_j+r+\nu \right)} \cos \left(k_0+1-p_0-\sum_{j \in \alpha} p_j+r-\nu \right) t \right] + \\
 &+ (-1)^{r+2} C_{r+1}^{r+1} \left[q^{\left(k_0+1-p_0-\sum_{j \in \alpha} p_j+r+r+2 \right)} \cos \left(k_0+1-p_0-\sum_{j \in \alpha} p_j+r-r-2 \right) t \right] - \\
 &- C_{r+1}^0 \left[q^{\left(k_0+1-\sum_{j \in \alpha} p_j+r \right)} \cos \left(k_0+1-\sum_{j \in \alpha} p_j+r \right) t \right] - \\
 &- \sum_{\nu=1}^{r+1} (-1)^\nu (C_{r+1}^\nu + C_{r+1}^{\nu-1}) \left[q^{\left(k_0+1-\sum_{j \in \alpha} p_j+r+\nu \right)} \cos \left(k_0+1-\sum_{j \in \alpha} p_j+r-\nu \right) t \right] - \\
 &- (-1)^{r+2} C_{r+1}^{r+1} \left[q^{\left(k_0+1-\sum_{j \in \alpha} p_j+r+r+2 \right)} \cos \left(k_0+1-\sum_{j \in \alpha} p_j+r-r-2 \right) t \right] \Bigg\}.
 \end{aligned}$$

Учитывая, что $k_0 + 1 = n$ и

$$\begin{aligned}
 C_{r+1}^\nu + C_{r+1}^{\nu-1} &= \frac{(r+1)!}{(r+1-\nu)! \nu!} + \frac{(r+1)!}{(r+1-(\nu-1))! (\nu-1)!} = \\
 &= \frac{(r+1)!(r+1-(\nu-1)) + (r+1)! \nu}{(r+1-(\nu-1))! \nu!} = \\
 &= \frac{(r+1)!(r+1-(\nu-1)+\nu)}{(r+1-(\nu-1))! \nu!} = \frac{(r+1)!(r+2)}{(r+2-\nu)! \nu!} = C_{r+2}^\nu,
 \end{aligned}$$

$$C_{r+1}^0 = 1 = C_{r+2}^0, C_{r+1}^{r+1} = 1 = C_{r+2}^{r+2},$$

получаем

$$\begin{aligned} & \Sigma_1^{(r+1)} = \\ & = \frac{\Gamma^{r+2}(t, q)}{\prod_{i=0}^r p_i} \sum_{\alpha \subset r} (-1)^{(r-|\alpha|)} \left\{ C_{r+2}^0 \left[q^{\left(n-p_0 - \sum_{j \in \alpha} p_j + r \right)} \cos \left(n - p_0 - \sum_{j \in \alpha} p_j + r \right) t \right] + \right. \\ & + \sum_{\nu=1}^{r+1} (-1)^\nu C_{r+2}^\nu \left[q^{\left(n-p_0 - \sum_{j \in \alpha} p_j + r + \nu \right)} \cos \left(n - p_0 - \sum_{j \in \alpha} p_j + r - \nu \right) t \right] + \\ & + (-1)^{r+2} C_{r+2}^{r+2} \left[q^{\left(n-p_0 - \sum_{j \in \alpha} p_j + r + r + 2 \right)} \cos \left(n - p_0 - \sum_{j \in \alpha} p_j + r - r - 2 \right) t \right] - \\ & - C_{r+2}^0 \left[q^{\left(n - \sum_{j \in \alpha} p_j + r \right)} \cos \left(n - \sum_{j \in \alpha} p_j + r \right) t \right] - \\ & - \sum_{\nu=1}^{r+1} (-1)^\nu C_{r+2}^\nu \left[q^{\left(n - \sum_{j \in \alpha} p_j + r + \nu \right)} \cos \left(n - \sum_{j \in \alpha} p_j + r - \nu \right) t \right] - \\ & \left. - (-1)^{r+2} C_{r+2}^{r+2} \left[q^{\left(n - \sum_{j \in \alpha} p_j + r + r + 2 \right)} \cos \left(n - \sum_{j \in \alpha} p_j + r - r - 2 \right) t \right] \right\} = \\ & = \frac{\Gamma^{r+2}(t, q)}{\prod_{i=0}^r p_i} \times \\ & \times \sum_{\alpha \subset r} (-1)^{(r-|\alpha|)} \left\{ \sum_{\nu=0}^{r+2} (-1)^\nu C_{r+2}^\nu \left[q^{\left(n-p_0 - \sum_{j \in \alpha} p_j + r + \nu \right)} \cos \left(n - p_0 - \sum_{j \in \alpha} p_j + r - \nu \right) t \right] - \right. \\ & \left. - (-1)^{r+2} C_{r+2}^{r+2} \left[q^{\left(n - \sum_{j \in \alpha} p_j + r + r + 2 \right)} \cos \left(n - \sum_{j \in \alpha} p_j + r - r - 2 \right) t \right] \right\} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \sum_{\nu=0}^{r+2} (-1)^\nu C_{r+2}^\nu \left[q^{\left(n - \sum_{j \in \alpha} p_j + r + \nu \right)} \cos \left(n - \sum_{j \in \alpha} p_j + r - \nu \right) t \right] \Bigg\} = \\
& = \frac{\Gamma^{(r+1)+1}(t, q)}{\prod_{i=0}^r p_i} \sum_{\alpha \subset r+1} (-1)^{(r+1-|\alpha|)} \sum_{\nu=0}^{(r+1)+1} (-1)^\nu C_{(r+1)+1}^\nu \left[q^{\left(n-1 - \sum_{j \in \alpha} p_j + (r+1) + \nu \right)} \times \right. \\
& \quad \left. \times \cos \left(n-1 - \sum_{j \in \alpha} p_j + (r+1) - \nu \right) t \right].
\end{aligned}$$

Таким образом, для всякого натурального r справедлива формула (8). Справедливость (9) для всякого $r \in \mathbb{N}$ доказывается аналогично. Следовательно, для всякого $r \in \mathbb{N}$ справедливо и соотношение (7).

Объединяя соотношения (7) – (9), приходим к формуле (5).

Литература

1. Степанец А.И. Приближение аналитических непрерывных функций // Мат. сборник. – 2001. – 192, № 1. – С. 113 – 138.
2. Степанец А.И. Классификация и приближение периодических функций, – Киев: Наук. думка, 1987. – 268 с.
3. Рукасов В.И., Новиков О.А., Ровенская О.Г. Интегральные представления уклонений средних сумм Фурье на классах $C_{\beta, \infty}^\alpha$ // Вісник Слов'янського державного педагогічного університету. Математика. – 2008. 1(3). – С. 33 – 41.
4. Никольский С.М. Приближение функций тригонометрическими полиномами в среднем // Изд. АН СССР. сер.мат. – 1946. – 10, № 3. – С. 207 – 256.
5. Стечкин С.Б. Оценка остатка ряда Фурье для дифференцируемых функций // Тр. Мат. ин-та им. В.А. Стеклова АН СССР. – 1980. – 145. – С. 126 – 151.
6. Рукасов В.И., Чайченко С.О. Наближення аналітичних періодичних функцій сумами Валле-Пуссена // Укр. мат. журн. – 2002. – 54, № 12. – С. 1653 – 1668.
7. Степанец А.И., Рукасов В.И., Чайченко С.О. Приближения суммами Валле Пуссена // Праці Ін-ту математики НАН України. – 2007. Т. 68. – 368 с.
8. Рукасов В.И., Новиков О.А. Приближение аналитических функций суммами Валле-Пуссена // Ряды Фурье: теория и приложения. – Киев: Ин-т математики НАН Украины, 1998. – С. 228 – 241.
9. Сердюк А.С. Наближення інтегралів Пуассона сумами Валле Пуссена // Укр. мат. журн. – 2004. – 56 №1. – С. 97-107.

УДК 517.925

Божко В.О., Ковальов В.І.

¹Доцент кафедри математичного аналізу СДПУ,²Доцент кафедри математичного аналізу СДПУ

Метод ітерацій для побудови періодичних розв'язків сингулярно збуджених нелінійних диференціальних рівнянь

За допомогою збіжного ітераційного процесу побудовано періодичний розв'язок сингулярно збудженої системи нелінійних диференціальних рівнянь. Збіжність гарантована в деякій скінченній області зміни малого параметру. Розглянуто ілюстративний приклад.

Ключові слова: вектор-функція, скалярна функція, мажоранта по відношенню до даної, лінійна неоднорідна система, функціональне рівняння.

Розглядається нелінійна система

$$\varepsilon \frac{dx}{dt} = Ax + \varepsilon F(t, x), \quad (1)$$

де A – стала $(n \times n)$ – матриця, що не має чисто уявних власних значень, x – n -вимірний вектор, $\varepsilon > 0$ – малий параметр, $F(t, x)$ – неперервна вектор-функція в деякій області t і x , періодична по t з періодом 2π .

Періодичний розв'язок системи (1) шукаємо методом ітерацій:

$$\begin{aligned} x_0 &= 0, \\ \varepsilon \frac{dx_k}{dt} &= Ax_k + \varepsilon F(t, x_{k-1}), k = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (2)$$

Згідно [1] k -наближення виражається формулою

$$x_k(t, \varepsilon) = \left[e^{-\frac{A}{\varepsilon}(t+2\pi)} - e^{-\frac{A}{\varepsilon}t} \right]^{-1} \int_t^{t+2\pi} e^{-\frac{A}{\varepsilon}\theta} F(\theta, x_{k-1}(\theta, \varepsilon)) d\theta.$$

При цьому справедлива оцінка

$$\|x_k(t, \varepsilon)\| \leq \varepsilon M \sup \|F(t, x_{k-1})\|,$$

де M – стала або не залежна від ε або є обмеженою при $\varepsilon \rightarrow 0$.

У всякому випадку існує таке ε_0 , що для $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ маємо $M < M_0$, M_0 не залежить від ε .

Нехай $U(u, \varepsilon)$ скалярна функція, додатна для $u \geq 0$, неперервна по ε і u , що має додатну і монотонно зростаючу по u похідну, є мажорантною по відношенню до функції F , тобто така, що для довільних $\|x\| \leq u$, $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ виконуються нерівності

$$U(u, \varepsilon) \geq \|F(t, x, \varepsilon)\|, \quad \frac{\partial U(u, \varepsilon)}{\partial u} \geq \left\| \frac{\partial F(t, x, \varepsilon)}{\partial x} \right\|.$$

Функціональне рівняння

$$u = f(u, \varepsilon), \quad (3)$$

де

$$f(u, \varepsilon) = \varepsilon M U(u, \varepsilon),$$

визначає u як функцію додатного аргумента ε . Розв'язок (3), отриманий методом послідовних наближень, має вигляд

$$\begin{aligned} u^{(1)} &= f(0, \varepsilon), \\ u^{(2)} &= f(u^{(1)}, \varepsilon) \\ &\dots \end{aligned}$$

Послідовність $\{u^{(k)}\}$ [2] мажорантна по відношенню до послідовності $\{x_k\}$:

$$\begin{aligned} \|x_k\| &\leq u^{(k)}, \quad k = \overline{1, n} \\ \|x_k - x_{k-1}\| &\leq u^{(k)} - u^{(k-1)} \end{aligned}$$

Отже, вказаний процес збігається, якщо збігається послідовність $\{u^{(k)}\}$. Але з теорії рівнянь вигляду (3) [3] випливає, що послідовність $\{u^{(k)}\}$ збігається для всіх ε , при яких (3) має додатний розв'язок $u = u(\varepsilon)$. Верхня межа $\bar{\varepsilon}$ таких значень ε і відповідне значення $u(\bar{\varepsilon}) = \bar{u}$ суть єдині додатні корені рівнянь

$$U(u, \varepsilon) = 0, \quad \frac{\partial U(u, \varepsilon)}{\partial u} = 0. \quad (4)$$

Таким чином, послідовність $\{x_k(t, \varepsilon)\}$ збігається до періодичного розв'язку вихідного рівняння (1), у всякому випадку, на проміжку $0 < \varepsilon \leq \bar{\varepsilon}$, де $\bar{\varepsilon}$ визначається з (4).

При $\varepsilon \rightarrow 0$ цей періодичний розв'язок також прямує до нуля. З структури рівнянь для наближень $x_k(t, \varepsilon)$, $k = 1, 2, \dots$, видно, що різниці $x_{k+1} - x_k$ мають порядок ε^{k+1} . Тому шуканий періодичний розв'язок $x(t, \varepsilon)$ можна представити у вигляді ряду

$$x(t, \varepsilon) = x_1(t, \varepsilon) + [x_2(t, \varepsilon) - x_1(t, \varepsilon)] + [x_3(t, \varepsilon) - x_2(t, \varepsilon)] + \dots, \quad (5)$$

збіжного в деякій області. Разом з тим цей ряд не є звичайним степеневим рядом за степенями ε , застосування якого для побудови періодичного розв'язку, як і у випадку простих лінійних неоднорідних систем, є недоцільним [1].

Ряд (5) більш зручний, оскільки гарантована його збіжність в деякій скінченній області зміни ε [4].

Приклад.

$$\begin{cases} \dot{\varepsilon} x_1 = -\frac{4}{3}x_1 + \frac{2}{3}x_2 + \varepsilon(1 + x_1x_2) \cos t, \\ \dot{\varepsilon} x_2 = \frac{1}{3}x_1 - \frac{5}{3}x_2 + \varepsilon(\frac{1}{2} + x_1x_2 \cos t). \end{cases} \quad (6)$$

Тут $F_1(x_1, x_2, t) = 1 + x_1x_2 \cos t$, $F_2(x_1, x_2, t) = \frac{1}{2} + x_1x_2 \cos t$.

Оцінками для $x_1(t, \varepsilon)$ і $x_2(t, \varepsilon)$ будуть

$$\begin{aligned} |x_1(t, \varepsilon)| &\leq \frac{2}{3} \sup |F_1 + F_2| + \frac{1}{6} \sup |F_1 - 2F_2|, \\ |x_2(t, \varepsilon)| &\leq \frac{1}{3} \sup |F_1 + F_2| + \frac{1}{6} \sup |F_1 - 2F_2|, \end{aligned}$$

де $F_1 + F_2 = \frac{3}{2} + 2x_1x_2 \cos t$ і $F_1 - 2F_2 = -x_1x_2 \cos t$,

а функціями $U_1(u_1, u_2)$ і $U_2(u_1, u_2) - U_1(u_1, u_2) = \frac{3}{2} + 2u_1u_2$, $U_2 = u_1u_2$.

Тепер запишемо відповідні функціональні рівняння

$$\begin{aligned} u_1 &= \frac{2}{3} \varepsilon U_1(u_1, u_2) + \frac{1}{6} \varepsilon U_2(u_1, u_2), \\ u_2 &= \frac{1}{3} \varepsilon U_1(u_1, u_2) + \frac{1}{6} \varepsilon U_2(u_1, u_2), \end{aligned}$$

або

$$u_1 = \varepsilon(1 + \frac{9}{6}u_1u_2), \text{ і } u_2 = \varepsilon(\frac{1}{2} + \frac{5}{6}u_1u_2).$$

Ця система має додатний розв'язок при $\varepsilon \leq 0,56$, що дає оцінку області збіжності ітерацій (2) для системи (6).

Література

1. Рябов Ю.А., Кайбылдаев О.К. О периодических решениях линейных дифференциальных уравнений с малым параметром при производных // Математические методы оптимального управления системами с распределенными параметрами (сборник статей), «Илим», Фрунзе, 1973. – с. 104 – 110.
2. Рябов Ю.А. Определение области существования некоторых неявных функций // Тр. Всесоюзного заочного энергетического ин-та, М., 1957, № 11. – с. 28 – 58.
3. Рябов Ю.А. Об одном способе оценки области применимости метода малого параметра в теории нелинейных колебаний. // Инженерный журнал АН СССР, т. I, 1961, № 1. – с. 5 – 32.
4. Божко В.О., Ковальов В.І. Про періодичні розв'язки сингулярно збуджених нелінійних диференціальних рівнянь. // International Conference. Dynamical System Modelling and Stability investigation. Modelling & stability. Thesis of conference reports. May 27 – 29, 2009, Kyiv – 2009. – с. 49.

УДК 622.539.219.1

Божко В.О., Ковальов В.І., Ковальова Л.В.

¹Доцент кафедри математичного аналізу СДПУ,

²Доцент кафедри математичного аналізу СДПУ,

³Старший викладач кафедри математичного аналізу СДПУ

Ймовірнісна модель полів напруг пружно-пластичного півпростору при заглибленні в нього системи інденторів.

Об'єктом досліджень є поле напруг, яке виникає у пружно-пластичному середовищі в результаті дії на нього зовнішнього циклічного тангенціального навантаження. Пропонується ймовірнісна математична модель.

Ключові слова: *поле напруг, ймовірнісна модель, пружно-пластичний півпростір, індентор, резольвентний оператор, метричний тензор.*

Пропонується математична модель поля напруг [1] на підставі ймовірнісного підходу.

Розглядаються дві нескінченно близькі точки $A(x_1, x_2, x_3)$ та $A_1(x_1 + dx_1; x_2 + dx_2; x_3 + dx_3)$, що знаходяться у заданій області перед руйнування. Ці точки визначають випадковий вектор, який не залежить від вибору системи координат:

$$d\vec{r} = ds \cdot \vec{e},$$

де ds – довжина вектора, \vec{e} – одиничний вектор, направлений вздовж прямої AA_1 .

Базисні вектори розглядаються як випадкові функції положення точки, в якій вони визначають координатний триєдр. Зміни базисних векторів характеризуються значеннями похідних $\frac{\partial \ell_n}{\partial x_k}$, що мають випадковий характер.

Застосовуючи символи Кристофеля, отримаємо:

$$\frac{\partial \ell_n}{\partial x_k} = \Gamma_{nk}^j \ell_j$$

При цьому

$$ds^2 = \frac{\partial x_m}{\partial x_n} \cdot \frac{\partial x_m}{\partial x_k} dx_n dx_k = q_{nk} dx_n dx_k$$

Коефіцієнти q_{nk} утворюють симетричну матрицю $q_{nk} = q_{kn}$ крім того похідні метричного тензора допускають вираз через символи Кристофеля:

$$\frac{\partial q_{nm}}{\partial x_k} + \frac{\partial q_{km}}{\partial x_n} - \frac{\partial q_{kn}}{\partial x_m} = 2\Gamma_{nk}^j q_{jm}$$

Паралельне векторне поле задовольняє системі диференціальних рівнянь:

$$\frac{\partial A^\beta}{\partial x_n} + \Gamma_{nk}^\beta \cdot A^k = 0$$

або

$$\frac{dA^\beta}{ds} = \frac{\partial A^\beta}{\partial x_n} \cdot \frac{dx_n}{ds}$$

Нехай до пружно-пластичного півпростору через систему надтвердих індеторів прикладена періодична зовнішня сила $f(t)$, компоненти якої $f_i \sin(\omega t + \delta_i)$, змінюються гармонійно з частотою $\omega = \sqrt{\lambda}$ в 2π сек. і з амплітудами (f_1, f_2, \dots, f_n) які слід розглядати як координати деякого фіксованого вектора \bar{f} .

Для розв'язування задачі про визначення амплітудно-частотних характеристик полів напруг у пружно-пластичному середовищі пропонується метод резольвентного оператора. В такому випадку модель визначається рівняннями Лагранжа:

$$\ddot{x}_i + \lambda_i x_i = f_i \sin(\omega t + \delta_i), \quad (1)$$

де $f_i = (f, u)$ – проекція вектора \bar{f} на i -ту вісь;
 $f_i \sin(\omega t + \delta_i)$ – узагальнена компонента зовнішньої сили, що відповідає нормальній координаті x_i .

Загальний розв'язок рівнянь (1) будується у вигляді:

$$x_i(t) = \frac{(f, u)}{\lambda_i - \lambda} = \sin(\sqrt{\lambda} t + \delta_i) + a_i \sin \sqrt{\lambda_i} (t + \theta_i), i = \overline{1, n} \quad (2)$$

де a_i та θ_i – сталі інтегрування;

$\frac{(f, u)}{\lambda_i - \lambda}$ – компоненти резольвентного вектора;

$$\Re_\lambda = \frac{(f_1 u_1)}{\lambda_1 - \lambda} u_1 + \frac{(f_2 u_2)}{\lambda_2 - \lambda} u_2 + \dots + \frac{(f_n u_n)}{\lambda_n - \lambda} u_n, \lambda = \omega^2. \quad (3)$$

Для зручності подальших міркувань припустимо, що $\delta_i = a_i = \theta_i = 0$, тоді проекція зовнішньої сили на напрямок руху:

$$\Re_\lambda f \sin \omega t = c (\Re_\lambda f, f) \sin \omega t = c \cdot w(\lambda) \sin \omega t,$$

де

$$w(\lambda) = \frac{(\lambda^{r_1} - \lambda)(\lambda^{r_2} - \lambda) \dots (\lambda^{r_{n-2}} - \lambda)}{(\lambda^{(0)} - \lambda)(\lambda^{(0)_2} - \lambda) \dots (\lambda^{(0)_n} - \lambda)} - \text{функція Вайнштейна};$$

$c = (\Re_\lambda f, f)^{\frac{1}{2}}$ – стала, яка при певному виборі f може бути рівною 1.

Таким чином, для довільної періодичної зовнішньої сили f сталої амплітуди, але довільної за напрямом та для довільної частоти $\omega = \sqrt{\lambda}$ значення $w(\lambda)$ визначає амплітуду рівнодіючої періодичної сили. Поведінка

системи під дією зовнішньої сили з частотою $\sqrt{\lambda} \forall \lambda$ фіксованого визначається значенням $w(\lambda)$.

Процес руйнування пружно-пластичного середовища суттєво залежить від градієнта напруг. Область концентрацій напруг, в якій зароджується руйнація, може бути настільки малою, що в ній можливе навіть пластичне протікання. Таким чином, в результаті плинності напруга в точці, де зароджується руйнація, може бути відмінною від обчислених теоретичних та визначених вимірюваннями змін деформацій.

Припускаючи, що щілини виникають незалежно одна від одної, отримаємо вітковий марківський процес, який описується рівняннями Колмогорова [3].

$$\frac{dp_k(t)}{dt} = \sum_{n=1}^k \gamma_n p_{nk}(t), \quad k=1,2,\dots \quad (5)$$

де $p_{nk(t)}$ – ймовірність утворення з n щілини k щілин $n \leq k$ $P_{k(t)} \equiv P_{1k(t)}$
Динаміка зростання кількості щілин визначається як сумарною інтенсивністю $\sum_{n \geq 2} \gamma_n$ так і характером накопичення цієї суми.

Нехай γ_n змінюються так, що

$$\frac{\gamma_n - \gamma_{n+1}}{\gamma_{n+1}} = \frac{M}{n} + \frac{Q}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right), \quad n \rightarrow \infty$$

Параметр M визначає швидкість спадання щільностей ймовірностей γ_n так, що меншому M відповідає менш інтенсивне затухання γ_n з ростом n а значить більша інтенсивність генерації щілини.

Ситуація катастрофічного руйнування має місце тоді, коли на момент часу t в середовищі накопичується нескінченна кількість щілин. При цьому ймовірність «вибуху» визначається рівністю:

$$p_{\infty}(t) = 1 - \sum_{k \geq 1} p_k(t)$$

(умова збіжності $\sum_{n \geq 2} \gamma_n$ забезпечується нерівністю $M < 1$).

Література

1. Ковалев В. И., Божко В.А., Тихонов А.П. Исследование напряженного состояния упруго-пластического полупространства при внедрении в него тройки инденторов различной геометрии / Международная конференция. Механика горных пород при бурении. Тезисы докладов. Нефтяной институт, Грозный, 1991. с 65
2. Родин Р.А. Физическая сущность процесса разрушения хрупких горных пород. / Известия ВУЗов Горный журнал. № 11. 1991. с.12–19
3. Розанов Ю.А. Лекции по теории вероятностей. – М.: Наука. 1986. – 120с.

УДК 517.5

Сілін Є.С.

Старший викладач кафедри економіко-математичних дисциплін СДПУ

Сильні середні відхилень операторів Валле Пусена

Робота присвячена розповсюдженню результатів досліджень сильних середніх відхилень операторів Фур'є на випадок, коли в якості агрегатів наближення виступають оператори Валле Пусена.

1. В теорії рядів Фур'є добре відомо, що $\forall f \in L$ майже всюди на \mathbb{R} виконується співвідношення $\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} (f(x) - S_k(f; x)) = o(1)$, де $S_k(f; x)$ — частинні суми Фур'є функції $f(x)$, $o(1) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$.

Харді та Літлвуд поставили питання: чи буде $\forall f \in L$ виконуватися більш загальне співвідношення

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} |f(x) - S_k(f; x)|^p = o(1), \quad p > 0 \quad ? \quad (1)$$

Якщо співвідношення (1) виконано, то кажуть, що ряд Фур'є функції $f(x)$ є сильно сумовним з показником p .

Дослідженню цього питання для сум та операторів Фур'є на класах $\overline{\psi}$ -інтегралів періодичних функцій та класах (ψ, β) -похідних локально інтегровних функцій були присвячені роботи [1, 2].

Ми розглядаємо узагальнення цих досліджень на випадок класів $\overline{\psi}$ -інтегралів локально інтегровних функцій у разі, коли апаратом апроксимації виступають оператори Валле Пусена.

Спочатку наведемо означення класів Степанця (див. [3]).

Нехай \hat{L} — множина функцій f , які визначені на дійсній осі і такі, що мають скінченну норму $\|f\|_p = \sup_{a \in \mathbb{R}} \int_a^{a+2\pi} |f(t)| dt$, $p \in [1, \infty)$,

$$\|f\|_\infty^{df} = \operatorname{esssup}_{t \in \mathbb{R}} |f(t)|.$$

Позначимо через \mathfrak{A} множину неперервних при $v \geq 0$ функцій $\psi(v)$, які задовольняють умови: 1) $\psi(v) \geq 0$, $\psi(0) = 0$, $\psi(v)$ зростає на $[0, 1)$; 2) $\psi(v)$ опукла донизу на $[1, \infty)$ і $\lim_{v \rightarrow \infty} \psi(v) = 0$; 3) похідна $\psi'(v) = \psi'(v+0)$ має обмежену

варіацію на $[0, \infty)$. Підмножину функцій $\psi(v)$, для яких $\int_1^\infty \frac{\psi(v)}{v} dv < \infty$,

позначають \mathfrak{A}' . Множину функцій $\psi(v)$, які задовольняють лише умову 2) позначають \mathfrak{M} .

Для пари $\psi_1, \psi_2 \in \mathfrak{A}$ визначимо функцію $\bar{\psi} : \bar{\psi} \stackrel{\text{df}}{=} \psi_{1+} + i\psi_{2-}$, де ψ_{1+} та ψ_{2-} — парне і непарне продовження функцій ψ_1, ψ_2 відповідно.

Тоді через $\hat{C}^{\bar{\psi}} \mathcal{M}$ будемо позначати підмножину неперервних функцій $f \in \hat{L}$, які для всіх x можна подати у вигляді наступної рівності:

$$f(x) = A + \int_{\mathbb{R}} \varphi(x+t) \hat{\bar{\psi}}(t) dt \stackrel{\text{df}}{=} A + \varphi * \hat{\bar{\psi}}(x), \quad (2)$$

де $A = \text{const}$, інтеграл розуміємо як границю по симетричних проміжках, що розширюються, $\varphi \in \mathcal{M}$, тобто, $\text{ess sup } |\varphi(t)| < \infty$,

$$\hat{\bar{\psi}}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \bar{\psi}(x) e^{-ixt} dx. \quad (3)$$

Якщо $\psi_1 \in \mathfrak{A}$, $\psi_2 \in \mathfrak{A}'$, то перетворення $\hat{\bar{\psi}}(t)$ сумовне на дійсній осі (див., наприклад, [4]).

Наслідуючи О.І. Степанця [5], функцію $\varphi(\cdot)$ в зображенні (2) називають $\bar{\psi}$ – похідною функції $f(\cdot)$ і позначають $f^{\bar{\psi}}(\cdot)$.

Для наближення функцій з класів $\hat{C}^{\bar{\psi}} \mathcal{M}$ будемо використовувати оператори Валле Пуссена

$$V_{\sigma,c}(f;x) = A + f^{\bar{\psi}} * \widehat{\lambda_{\sigma,c} \bar{\psi}}(x), \quad (4)$$

де $f \in \hat{C}^{\bar{\psi}} \mathcal{M}$, а $\widehat{\lambda_{\sigma,c} \bar{\psi}}(x)$ перетворення вигляду (3) функції $\lambda_{\sigma,c}(t) \bar{\psi}(t)$, в якій

$$\lambda_{\sigma,c}(t) = 1, 0 \leq |t| \leq c, \frac{\sigma - |t|}{\sigma - c}, c \leq |t| \leq \sigma, 0, \sigma \leq |t|, \quad \sigma > c \geq 1. \quad (5)$$

Такі оператори розглядалися О.І. Степанцем у роботах [3, 4, 6], де показано, що за певних умов $V_{\sigma,c}(f;x)$ належать до множини \mathcal{E}_σ цілих функцій експоненціального типу $\leq \sigma$, а у періодичному випадку, при натуральних σ і c , оператори $V_{\sigma,c}(f;x)$ співпадають з сумами Валле Пуссена.

Далі, наслідуючи [4], з множини \mathfrak{A} оберемо підмножини \mathfrak{A}_0 та \bar{F} . Кожній функції $\psi \in \mathfrak{M} \quad \forall t \geq 1$ співставимо пару функцій $\eta(t) = \psi^{-1}(\psi(t)/2)$ та $\mu(t) = t/(\eta(t) - t)$.

Тоді: $\mathfrak{M}_0 = \{\psi \in \mathfrak{M} : 0 < \mu(\psi, t) \leq K_1\}$, $\mathfrak{A}_0 = \mathfrak{M}_0 \cap \mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}'_0 = \mathfrak{A}_0 \cap \mathfrak{A}'$, $\bar{F} = \{\psi \in \mathfrak{A} : \eta'(t) \leq K_2\}$, де K_1, K_2 — деякі сталі, які, можливо, залежать від функції $\psi(t)$.

Апроксимативні властивості операторів Валле Пуссена в нашій роботі характеризуються функціоналами

$$\mathcal{H}_d^{(p)}(f; x; \alpha) = \int_d^\infty \alpha(\sigma) |f(x) - V_{\sigma, c}(f; x)|^p d\sigma, \quad d \geq 1, \quad p > 0,$$

в яких $\alpha(\sigma)$ — деяка невід'ємна неперервна при всіх $\sigma \geq d$ функція.

$$\text{Покладемо: } W_\sigma^2 = \left\{ \varphi \in \mathcal{E}_\sigma : \int_{-\infty}^\infty \frac{|\varphi^2(t)|}{(1+|t|)^2} dt < \infty \right\};$$

$$E_\sigma(f) = \inf_{\varphi \in W_\sigma^2} \operatorname{esssup}_{x \in \mathbb{R}} |f(x) - \varphi(x)|; \quad c = \sigma - h \quad \text{і} \quad \Theta = \lim_{\sigma \rightarrow \infty} \frac{h}{\sigma}.$$

В прийнятих позначеннях мають місце твердження.

Теорема 1. Нехай $\psi_i \in \overline{F}$, $i = 1, 2$ й такі, що знайдуться константи K_1 та K_2 для яких виконується умова

$$0 < K_1 \leq \frac{\eta(\psi_1; \sigma) - \sigma}{\eta(\psi_2; \sigma) - \sigma} \leq K_2 < \infty, \quad \sigma \geq 1. \quad (6)$$

Числа $h = h(\sigma)$, обираються так, що $\sigma - h \in [\eta^{-1}(\psi_i; \sigma), \sigma]$, $i = 1, 2$. Нехай, далі, p — довільне додатне число і функція $\alpha(\sigma)$ така, що добуток $\alpha(\sigma) |\overline{\psi}(\sigma)|^p$ не зростає $\forall \sigma > 1$.

Тоді, якщо $f \in \widehat{C}^{\overline{\psi}} \mathcal{M}$, то для довільних $d \geq 1$ виконується нерівність

$$\| \mathcal{H}_d^{(p)}(f; x; \alpha) \|_C \leq K(\alpha(d) |\overline{\psi}(d)|^p (\eta(d) - d) E_{d-h}^p(f^{\overline{\psi}}) + \int_d^\infty \alpha(\sigma) |\overline{\psi}(\sigma)|^p E_{\sigma-h}^p(f^{\overline{\psi}}) d\sigma), \quad (7)$$

в якій K — величина, яка не залежить від $f(\cdot)$, d та h ; в якості величини $\eta(\sigma) = \eta(\sigma, \psi)$ може виступати будь яка з функцій $\eta(\sigma, \psi_i)$, $i = 1, 2$.

Теорема 2. Нехай $\psi_1 \in \mathfrak{A}_0$, $\psi_2 \in \mathfrak{A}'_0$, числа σ і $h = h(\sigma)$, $\sigma > h$ обрані таким чином, що $0 \leq \Theta < 1$, $p > 0$, а функція $\alpha(\sigma)$ така, що добуток $\alpha(\sigma) \beta(\sigma)$, де

$$\beta(\sigma) = \int_\sigma^\infty \frac{|\psi_2(t)|}{t} dt + |\overline{\psi}(\sigma)|, \quad \text{не зростає } \forall \sigma > 1.$$

Тоді, якщо $f \in \widehat{C}^{\overline{\psi}} \mathcal{M}$, то для довільних $d \geq 1$ виконується нерівність

$$\| \mathcal{H}_d^{(p)}(f; x; \alpha) \|_C \leq K(d \alpha(d) \beta^p(d) E_{d-h}^p(f^{\overline{\psi}}) + \int_d^\infty \alpha(\sigma) \beta(\sigma) E_{\sigma-h}^p(f^{\overline{\psi}}) d\sigma), \quad (8)$$

в якій K — величина, яка не залежить від $f(\cdot)$, d та h .

Зауваження. У випадку $h = 1$, $\psi_1(\sigma) = \psi(\sigma) \cos \frac{\beta\pi}{2}$, $\psi_2(\sigma) = \psi(\sigma) \sin \frac{\beta\pi}{2}$, $\beta \in \mathbb{R}$ та

$$\lambda_{\sigma,1}^*(t) = 1, 0 \leq t \leq \sigma - 1, 1 - \frac{(t - \sigma + 1)\psi(\sigma)}{\psi(t)}, \sigma - 1 \leq t \leq \sigma, 0, t \geq \sigma;$$

$\operatorname{esssup}_{t \in \mathbb{R}} |f^{\bar{\psi}}(t)| \leq 1$, (тобто, для класів $\widehat{C}_{\beta, \infty}^{\bar{\psi}}$) теореми 1 й 2 доведені О.І.

Степанцем та Н.Л. Пачуліа [2]. Зазначимо, що в аналогу теореми 2 розглядається лише випадок $\beta = 0$. Для сум Фур'є в періодичному випадку така задача була розв'язана О.І. Степанцем в [1].

2. Доведення теорем почнемо зі встановлення деяких допоміжних тверджень. Нехай $f(x) - V_{\sigma, \sigma-h}(f; x) = \rho_{\sigma, \sigma-h}(f; x)$. Величину $\rho_{\sigma, \sigma-h}(f; x)$ розглянемо у двох окремих випадках, в залежності від швидкості прямування до нуля пари функцій ψ_1, ψ_2 .

Лемма 1. Нехай $\psi_1 \in \mathfrak{A}_0$, $\psi_2 \in \mathfrak{A}'_0$, числа σ і $h = h(\sigma)$, $\sigma > h \geq 1$ обрані так, що $\Theta \in [0, 1)$, стала $a \in (0, \pi\sigma/h)$.

Тоді $\forall f \in \widehat{C}^{\bar{\psi}} \mathcal{M}$ в кожній точці $x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \rho_{\sigma, \sigma-h}(f; x) = & \frac{-|\bar{\psi}(\sigma)|}{\pi} \int_{\frac{a}{\sigma} \leq |t| \leq \frac{\pi}{h}} \delta(x+t) \frac{\sin(\sigma t - \theta)}{t} dt + \\ & + \frac{1}{\pi} \int_{|t| \leq a/\sigma} \delta(x+t) \int_0^\infty \psi_2(s) \sin st ds dt + A_{\sigma, h}(f; x), \end{aligned} \quad (9)$$

де $\delta(v) = f^{\bar{\psi}}(v) - \varphi(v)$, $\varphi(v)$ — функція з множини $W_{\sigma-h}^2$, для якої

$$E_{\sigma-h}(f) = \|f^{\bar{\psi}}(x) - \varphi(x)\|_C, \quad \theta = \operatorname{arctg} \frac{\psi_2(\sigma)}{\psi_1(\sigma)},$$

$$|A_{\sigma, h}(f; x)| \leq K |\bar{\psi}(\sigma)| E_{\sigma-h}(f^{\bar{\psi}}).$$

Лемма 2. Нехай $\psi_i \in \overline{F}$, $i = 1, 2$ та виконана умова (6), числа $h = h(\sigma)$ обираються так, що $\sigma - h \in [\eta^{-1}(\psi_i; \sigma); \sigma]$, $i = 1, 2$. Функції $a_i = a_i(\sigma) = (\eta(\psi_i, \sigma) - \sigma)^{-1}$, $i = 1, 2$.

Тоді, якщо $f \in \widehat{C}^{\bar{\psi}} \mathcal{M}$, то $\forall x \in \mathbb{R}$ і дійсних чисел $\sigma > h \geq 1$,

$$\rho_{\sigma, \sigma-h}(f; x) = v_a \frac{|\bar{\psi}(\sigma)|}{\pi} \int_{m_a \leq |t| \leq M_a} \delta(x+t) \frac{\sin(\sigma t - \theta)}{t} dt + d_{\sigma, h}^{\psi_1}(a_1; f; x) + d_{\sigma, h}^{\psi_2}(a_2; f; x), \quad (10)$$

де $v_a = \operatorname{sign}(a(\sigma) - \frac{\pi}{h})$, $m_a = \min\{a(\sigma); \frac{\pi}{h}\}$, $M_a = \max\{a(\sigma); \frac{\pi}{h}\}$, в ролі функції

$a(\sigma)$ може виступати будь-яка з функцій $a_i(\sigma)$, $i = 1, 2$, $\delta(v) = f^{\bar{\psi}}(v) - \varphi(v)$, $\varphi(v)$ — функція з $W_{\sigma-h}^2$, для якої $E_{\sigma-h}(f) = \|f^{\bar{\psi}}(x) - \varphi(x)\|_C$, $\theta = \operatorname{arctg} \frac{\psi_2(\sigma)}{\psi_1(\sigma)}$, і

$$|d_{\sigma, h}^{\psi_i}(a_i; f; x)| \leq K E_{\sigma-h}(f^{\bar{\psi}}) |\bar{\psi}_i(\sigma)|, \quad i = 1, 2.. \quad (11)$$

3. Нехай $d \geq 1$ і $\gamma(d) = \begin{cases} \eta(d) - d, & \psi_1, \psi_2 \in \overline{F}; \\ d, & \psi_1 \in \mathfrak{A}_0, \psi_2 \in \mathfrak{A}'_0; \end{cases}$

$$A_d^p(f; x) = \left(\frac{1}{\gamma(d)} \int_d^{d+\gamma(d)} |\rho_{\sigma, \sigma-h}(f, x)|^p d\sigma \right)^{1/p}, \quad p > 0. \quad (12)$$

Наступним кроком у доведенні теореми 1 й теореми 2 буде таке твердження.

Лемма 3. Нехай $\psi_i \in \overline{F}$, $i=1,2$ й існують константи K_1, K_2 для яких виконується умова (6), числа $h = h(\sigma)$ обираються так, що $\sigma - h \in [\eta^{-1}(\psi_i; \sigma), \sigma]$, $i=1,2$.

Тоді, якщо $f \in \widehat{C}^{\overline{\psi}} \mathcal{M}$, то для будь-яких $x \in \mathbb{R}$, $d \geq 1$, $p > 0$

$$A_d^p(f; x) \leq K E_{d-h}(f^{\overline{\psi}}) |\overline{\psi}(\sigma)| \quad (13)$$

Якщо ж $\psi_1 \in \mathfrak{A}_0$, $\psi_2 \in \mathfrak{A}'_0$, числа σ і h , $\sigma > h \geq 1$ обрані так, що $\Theta \in [0, 1)$,

стала $a \in (0, \pi\sigma/h)$, то $\forall x \in \mathbb{R}$, $d \geq 1$, $p > 0$ і $f \in \widehat{C}^{\overline{\psi}} \mathcal{M}$

$$A_d^p(f; x) \leq K E_{d-h}(f^{\overline{\psi}}) \left(\int_d^\infty \frac{|\psi_2(t)|}{t} dt + |\overline{\psi}(\sigma)| \right). \quad (14)$$

У співвідношеннях (13) й (14) K — величина, яка рівномірно обмежена по σ , h та $f \in \widehat{C}^{\overline{\psi}} \mathcal{M}$.

Доведення. З нерівності Гельдера випливає, що величина $A_d^p(f; x)$ не спадає по параметру p , тому нерівності (13) та (14) досить довести лише при $p \geq 2$. Спочатку доведемо нерівність (13).

Використовуючи рівність (10) та нерівність Мінковського, отримаємо

$$\begin{aligned} A_d^p(f; x) &\leq \left(\frac{1}{\gamma(d)} \int_d^{\gamma(d)} \left| \nu_a \frac{|\overline{\psi}(\sigma)|}{\pi} \int_{m_a \leq |t| \leq M_a} \frac{\delta(x+t)}{t} \times \sin(\sigma t - \theta) dt \right|^p d\sigma \right)^{1/p} + \\ &+ K \left(\frac{1}{\gamma(d)} \int_d^{\gamma(d)} (|\overline{\psi}(\sigma)| E_{\sigma-h}(f^{\overline{\psi}}))^p d\sigma \right)^{1/p} = I_1 + I_2. \end{aligned} \quad (15)$$

Оскільки функція $|\overline{\psi}(\sigma)| E_{\sigma-h}(f^{\overline{\psi}})$ не зростає, то

$$I_2 \leq K \left(\frac{1}{\gamma(d)} |\overline{\psi}(d)|^p E_{d-h}^p(f^{\overline{\psi}})(\eta(d) - d) \right)^{1/p} = K |\overline{\psi}(d)| E_{d-h}(f^{\overline{\psi}}). \quad (16)$$

Перейдемо до встановлення оцінки величини I_1 . Відзначимо, що

$$\left| \int_{m_a \leq |t| \leq M_a} \frac{\delta(x+t)}{t} \sin(\sigma t - \theta) dt \right| =$$

$$= \left| \int_{\pi/h}^{a(d)} \frac{\delta(x+t)}{t} \sin(\sigma t - \theta) dt + \int_{a(d)}^{a(\sigma)} \frac{\delta(x+t)}{t} \sin(\sigma t - \theta) dt \right|.$$

Застосовуючи нерівність Мінковського, одержимо

$$I_1 \leq \frac{|\bar{\psi}(d)|}{\pi} \left(\frac{1}{\gamma(d)} \int_d^{\eta(d)} \left| \int_{\pi/h}^{a(d)} \frac{\delta(x+t)}{t} \sin(\sigma t - \theta) dt \right|^p d\sigma \right)^{1/p} + \\ + \frac{|\bar{\psi}(d)|}{\pi} \left(\frac{1}{\gamma(d)} \int_d^{\eta(d)} \left| \int_{a(d)}^{a(\sigma)} \frac{\delta(x+t)}{t} \sin(\sigma t - \theta) dt \right|^p d\sigma \right)^{1/p} \stackrel{df}{=} I_1^* + I_1^{**}. \quad (17)$$

Далі,

$$I_1^{**} \leq \max_{\sigma \in [d, \eta(d)]} \frac{|\bar{\psi}(d)|}{\pi} \left| \int_{a(d)}^{a(\sigma)} \frac{\delta(x+t)}{t} \sin(\sigma t - \theta) dt \right| \leq K |\bar{\psi}(d)| E_{d-h}(f^{\bar{\psi}}) \max_{\sigma \in [d, \eta(d)]} \left| \ln \frac{\gamma(d)}{\gamma(\sigma)} \right|.$$

Оскільки, як було встановлено в роботі [8] (співвідношення (14.21), стор. 239),

$$0 < K_1 \leq \frac{\gamma(d)}{\gamma(\sigma)} \leq K_2, \quad \sigma \in [d, \eta(d)], \quad (18)$$

то

$$I_1^{(2)} \leq K |\bar{\psi}(d)| E_{d-h}(f^{\bar{\psi}}). \quad (19)$$

Для оцінювання інтеграла I_1^* застосуємо нерівність Хаусдорфа-Юнга:

$$\left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-ixt} dt \right|^{q'} dx \right)^{1/q'} \leq \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^q dx \right)^{1/q}, \quad f \in L_q, \quad 1 < q \leq 2,$$

$$q' = \frac{q}{1-q}.$$

$$\text{З цією метою покладемо } \Phi_x(t) = \begin{cases} \frac{\delta(x+t)}{t}, & t \in [m_a, M_a]; \\ 0, & t \notin [m_a, M_a]. \end{cases}$$

Тоді

$$I_1^* = \frac{|\bar{\psi}(d)|}{\pi} \left(\frac{1}{\gamma(d)} \int_d^{\eta(d)} \left| \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_x(t) \sin(\sigma t - \theta) dt \right|^p d\sigma \right)^{1/p} \leq \\ \leq K |\bar{\psi}(d)| (\gamma(d))^{-1/p} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \left| \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_x(t) \sin(\sigma t - \theta) dt \right|^p d\sigma \right)^{1/p} \leq \\ \leq K |\bar{\psi}(d)| (\gamma(d))^{-1/p} \left| \int_{\pi/h}^{a(d)} \frac{\delta(x+t)}{t} \sin(\sigma t - \theta) dt \right|^{p'} \leq$$

$$\leq K |\bar{\psi}(d)| (\gamma(d))^{-1/p} E_{d-h}(f^{\bar{\psi}}) | (a(d))^{1-p'} - (\pi/h)^{1-p'} |^{1/p'}.$$

Оскільки $\sigma - h \in [\eta^{-1}(\psi_i; \sigma), \sigma]$, то, беручи до уваги нерівності [4]

$$\frac{1}{2} \leq \frac{\eta(\psi; \sigma) - \sigma}{\sigma - \eta^{-1}(\psi; \sigma)} \leq K_1, \quad \frac{\sigma - \eta^{-1}(\psi; \sigma)}{\eta^{-1}(\psi; \sigma)} \leq K_2,$$

які справджуються $\forall \psi \in \bar{F}$ і всіх $\sigma \geq 1$, знаходимо

$$\frac{h}{\eta(\psi_i; \sigma) - \sigma} = \frac{h}{\sigma - \eta^{-1}(\psi_i; \sigma)} \frac{\sigma - \eta^{-1}(\psi_i; \sigma)}{\eta(\psi_i; \sigma) - \sigma} \leq K, \quad i = 1, 2. \quad (20)$$

А тому $(\gamma(d))^{-1/p} | (a(d))^{1-p'} - (\pi/h)^{1-p'} |^{1/p'} \leq K$.

Отже,

$$I_1^* \leq K |\bar{\psi}(d)| E_{d-h}(f^{\bar{\psi}}) \quad (21)$$

Порівнюючи співвідношення (12) та (15) – (21) приходимо до оцінки (13).

Перейдемо до доведення нерівності (14).

Використовуючи співвідношення (9) з леми 1 та нерівність Мінковського, згідно до рівності (12), отримаємо

$$\begin{aligned} A_d^p(f; x) &\leq \left(\frac{1}{d} \int_d^{2d} \left| \frac{\bar{\psi}(\sigma)}{\pi} \int_{\frac{a}{\sigma} \leq |t| \leq \frac{\pi}{h}} \frac{\delta(x+t)}{t} \sin(\sigma t - \theta) dt \right|^p d\sigma \right)^{\frac{1}{p}} + \\ &+ \left(\frac{1}{d} \int_d^{2d} \left| \frac{1}{\pi} \int_{|t| \leq a/\sigma} \delta(x+t) \int_{\sigma}^{\infty} \psi_2(s) \sin st ds dt \right|^p d\sigma \right)^{1/p} + \\ &+ K \left(\frac{1}{d} \int_d^{2d} (|\bar{\psi}(\sigma)| E_{\sigma-h}(f^{\bar{\psi}}))^p d\sigma \right)^{1/p} = J_1 + J_2 + J_3. \end{aligned} \quad (22)$$

Оскільки функція $|\bar{\psi}(\sigma)| E_{\sigma-h}(f^{\bar{\psi}})$ не зростає, то

$$J_3 \leq K |\bar{\psi}(d)| E_{d-h}(f^{\bar{\psi}}). \quad (23)$$

Далі ми скористаємося співвідношенням (5.5.4) з роботи [7] (стор. 236), при доведенні якого періодичність функції $f(\cdot)$ і включення $\sigma \in \mathbb{N}$ не використовувались, а тому

$$\frac{1}{\pi} \int_{|t| \leq \frac{a}{\sigma}} \left| \int_{\sigma}^{\infty} \psi_2(s) \sin st ds \right| dt = \frac{2}{\pi} \int_{\sigma}^{\infty} \frac{|\psi_2(t)|}{t} dt + O(|\bar{\psi}(\sigma)|). \quad (24)$$

Беручи до уваги співвідношення (24), маємо

$$J_2 \leq 2 E_{d-h}(f^{\bar{\psi}}) \left(\frac{2}{\pi} \int_{\sigma}^{\infty} \frac{|\psi_2(t)|}{t} dt + O(1) |\bar{\psi}(\sigma)| \right). \quad (25)$$

Залишається встановити аналогічну оцінку і для інтеграла J_1 .

При кожних фіксованих x та σ покладемо

$$\phi_x(t) = \begin{cases} \frac{\delta(x+t)}{t}, & |t| \in [a/\sigma, \pi/h]; \\ 0, & |t| \notin [a/\sigma, \pi/h]. \end{cases}$$

Застосовуючи нерівність Хаусдорфа-Юнга одержимо

$$\begin{aligned} J_1 &\leq \frac{|\bar{\psi}(d)|}{\pi} \left(\frac{1}{d} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \int_{-\infty}^{\infty} \phi_x(t) \frac{\delta(x+t)}{t} \sin(\sigma t - \theta) dt \right|^p d\sigma \right)^{1/p} \\ &\leq \left(\frac{1}{d} \right)^{1/p} \left| \int_{a/\sigma \leq |t| \leq \pi/h} \left| \frac{\delta(x+t)}{t} \sin(\sigma t - \theta) \right|^{p'} dt \right|^{1/p'} \leq \\ &\leq \left(\frac{1}{d} \right)^{1/p} E_{d-h}(f^{\bar{\psi}}) \left| \int_{\frac{a}{\sigma} \leq |t| \leq \frac{\pi}{h}} \left| \frac{dt}{t} \right|^{p'} \right|^{1/p'} \leq K \left(\frac{1}{d} \right)^{1/p} E_{d-h}(f^{\bar{\psi}}). \end{aligned} \quad (26)$$

При знаходженні цієї нерівності ми скористалися також умовою $\Theta \in [0, 1)$.

Зі співвідношень (22) – (23) та (25) – (26) випливає нерівність (14).

Лему 4 остаточно доведено.

4. Перейдемо безпосередньо до доведення теореми 1.

Нехай $d_0 = d$, $d_i = \eta(d_{i-1})$, $i \in \mathbb{N}$. Тоді

$$\mathcal{H}_d^{(p)}(f; x; \alpha) = \int_d^\infty \alpha(\sigma) |\rho_{\sigma, \sigma-h}(f; x)|^p d\sigma = \sum_{i=0}^\infty \int_{d_i}^{d_{i+1}} \alpha(\sigma) |\rho_{\sigma, \sigma-h}(f; x)|^p d\sigma.$$

Оберемо числа $\sigma_i \in [d_i, d_{i+1}]$, $i = 0, 1, 2, \dots$ виходячи з умови $\alpha(\sigma_i) = \max_{\sigma \in [d_i, d_{i+1}]} \alpha(\sigma)$.

Згідно з лемою 3, маємо

$$\int_{d_i}^{d_{i+1}} \alpha(\sigma) |\rho_{\sigma, \sigma-h}(f; x)|^p d\sigma \leq \alpha(\sigma_i) \int_{d_i}^{d_{i+1}} |\rho_{\sigma, \sigma-h}(f; x)|^p d\sigma \leq K \alpha(\sigma_i) |\bar{\psi}(d_i)|^p E_{d_i-h}(f^{\bar{\psi}}) \gamma(d_i).$$

$$\begin{aligned} \text{Тому} \quad \mathcal{H}_d^{(p)}(f; x; \alpha) &\leq K \sum_{i=0}^\infty \alpha(\sigma_i) |\bar{\psi}(d_i)|^p E_{d_i-h}^p(f^{\bar{\psi}}) \gamma(d_i) = \\ &= K \alpha(\sigma_0) |\bar{\psi}(d)|^p E_{d-h}^p(f^{\bar{\psi}}) \gamma(d) + K \sum_{i=1}^\infty \alpha(\sigma_i) |\bar{\psi}(d_i)|^p E_{d_i-h}^p(f^{\bar{\psi}}) \gamma(d_i). \end{aligned} \quad (27)$$

Але, якщо $\psi \in \bar{F}$, то, згідно з (18), $\frac{\gamma(d_i)}{\gamma(d_{i-1})} \leq K$. Отже,

$$\mathcal{H}_d^{(p)}(f; x; \alpha) \leq K \alpha(\sigma_0) |\bar{\psi}(d)|^p E_{d-h}^p(f^{\bar{\psi}}) \gamma(d) + K \sum_{i=1}^\infty \alpha(\sigma_i) |\bar{\psi}(d_i)|^p E_{d_i-h}^p(f^{\bar{\psi}}) \gamma(d_i). \quad (28)$$

Функція $\alpha(\sigma)|\bar{\psi}(\sigma)|^p$ не зростає і $\psi(d_i)=2\psi(d_{i+1})$. Відповідно, $\forall \sigma_i \in [d_i, d_{i+1}]$

$$\alpha(\sigma_i)|\bar{\psi}(d_i)|^p = \alpha(\sigma_i)2^p |\bar{\psi}(d_{i+1})|^p \leq 2^p \alpha(\sigma_i)|\bar{\psi}(\sigma_i)|^p \leq 2^p \alpha(d_i)|\bar{\psi}(d_i)|^p.$$

Тому, згідно зі співвідношенням (28), одержуємо шукану оцінку:

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_d^{(p)}(f; x; \alpha) &\leq K(\alpha(d)|\bar{\psi}(d)|^p E_{d-h}^p(f^{\bar{\psi}})\gamma(d) + \sum_{i=1}^{\infty} \alpha(d_i)|\bar{\psi}(d_i)|^p E_{d_i-h}^p(f^{\bar{\psi}})\gamma(d_{i-1})) \leq \\ &\leq K(\alpha(d)|\bar{\psi}(d)|^p E_{d-h}^p(f^{\bar{\psi}})\gamma(d) + \sum_{i=1}^{\infty} \int_{d_{i-1}}^{d_i} \alpha(\sigma)|\bar{\psi}(\sigma)|^p E_{\sigma-h}^p(f^{\bar{\psi}})d\sigma) = \\ &= K(\alpha(d)|\bar{\psi}(d)|^p E_{d-h}^p(f^{\bar{\psi}})\gamma(d) + \int_d^{\infty} \alpha(\sigma)|\bar{\psi}(\sigma)|^p E_{\sigma-h}^p(f^{\bar{\psi}})d\sigma). \end{aligned} \quad (29)$$

Теорема 1 доведена.

5. Доведення теореми 2.

Нехай $d_i = 2^i d$, $i \in \mathbb{N}$, тоді, згідно з лемою 1,

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_d^{(p)}(f; x; \alpha) &= \sum_{i=0}^{\infty} \int_{2^i d}^{2^{i+1} d} \alpha(\sigma) |\rho_{\sigma, \sigma-h}(f; x)|^p d\sigma \leq \sum_{i=0}^{\infty} \alpha(\sigma_i) \int_{2^i d}^{2^{i+1} d} |\rho_{\sigma, \sigma-h}(f; x)|^p d\sigma \leq \\ &\leq K \sum_{i=0}^{\infty} \alpha(\sigma_i) 2^i d E_{2^i d-h}^p(f^{\bar{\psi}}) \left(\int_{2^i d}^{\infty} \frac{|\psi_2(t)|}{t} dt + |\bar{\psi}(2^i d)|^p \right), \end{aligned} \quad (30)$$

де $\sigma_i \in [2^i d, 2^{i+1} d]$ і такі, що $\alpha(\sigma_i) = \max_{\sigma \in [2^i d, 2^{i+1} d]} \alpha(\sigma)$.

В монографії [7] (стор. 391) для натуральних значень d встановлено оцінку

$$\int_d^{\infty} \frac{|\psi_2(t)|}{t} dt + |\bar{\psi}(d)| \leq \int_{2d}^{\infty} \frac{|\psi_2(t)|}{t} dt + A |\bar{\psi}(2d)|, \quad A = \text{const}. \quad (31)$$

Але вона залишається вірною і в нашому випадку $\forall d > 1$, оскільки при її доведенні не використовувався той факт, що $d \in \mathbb{N}$.

Введемо позначення: $\beta(\sigma) = \int_{\sigma}^{\infty} \frac{|\psi_2(t)|}{t} dt + |\bar{\psi}(\sigma)|$.

Згідно з умовою, числа $\alpha(\sigma)\beta^p(\sigma)$ не зростають. Тому, враховуючи (31), одержимо

$$\alpha(\sigma_i)\beta^p(d_i) \leq K\alpha(\sigma_i)\beta^p(2d_i) \leq K\alpha(\sigma_i)\beta^p(\sigma_i) \leq K\alpha(d_i)\beta^p(d_i)$$

Застосовуючи цю оцінку до нерівності (30), знаходимо

$$\mathcal{H}_d^{(p)}(f; x; \alpha) \leq \sum_{i=0}^{\infty} d_i \alpha(d_i) \beta^p(d_i) E_{d_i-h}^p(f^{\bar{\psi}}) \leq K(d_0 \alpha(d_0) \beta^p(d_0) E_{d_0-h}^p(f^{\bar{\psi}}) +$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{d_i}{d_{i-1}} \int_{d_{i-1}}^{2d_{i-1}} \alpha(\sigma) \beta^p(\sigma) E_{\sigma-h}^p(f^{\bar{\psi}}) d\sigma \leq \\
& \leq K(d\alpha(d)\beta^p(d)E_{d-h}^p(f^{\bar{\psi}}) + \int_d^{\infty} \alpha(\sigma)\beta^p(\sigma)E_{\sigma-h}^p(f^{\bar{\psi}})d\sigma).
\end{aligned}$$

Таким чином, теорема 2 остаточно доведена.

Література

- 1 Степанец А.И. Скорость сходимости группы отклонений на множествах ψ -интегралов // Укр. мат. журн. – 1999. – 51, №12. – С. 1673--1693.
- 2 Степанец А.И., Пачулиа Н.Л. Сильные средние уклонения операторов Фурье // Укр. мат. журн. – 1990. – 42, №9. – С. 1225--1231.
- 3 Stepanets A.I., Wang Kunyang, Zhang Xirong Approximation of locally integrable function on the real line // Укр. мат. журн. – 1999. – 51, №11. – С. 1549-1561.
- 4 Степанец А.И. Приближение в пространствах локально интегрируемых функций // Укр. мат. журн. – 1994. – 46, №5. – С. 597 – 625.
- 5 Степанец А.И. Приближение $\bar{\psi}$ -интегралов периодических функций суммами Фурье. – Киев, 1996. – 70 с. – (Препринт / АН Украины. Ин-т математики; 96.11).
- 6 Степанец А.И. Приближение операторами Фурье функций, заданных на действительной оси // Укр. мат. журн. – 1988. – 40, №2. – С. 198 – 209.
- 7 Степанец А.И. Методы теории приближений: В 2 т. – Киев: Ин-т математики НАН Украины, 2002. – Т.1. – 426 с.
- 8 Степанец А.И. Методы теории приближений: В 2 т. – Киев: Ин-т математики НАН Украины, 2002. – Т.2. – 468 с.

УДК 519.115.1: 519.175.3

Сторожилова О.В., Сторожилова Н.В., Кадубовський О.А.

¹Студентка 5 курсу 2 групи фізико-математичного факультету СДПУ,²Студентка 5 курсу 2 групи фізико-математичного факультету СДПУ,³Доцент кафедри геометрії та методики викладання математики СДПУ

Двокольорові O – і N –діаграми

Встановлено формули для підрахунку числа як неізоморфних (з точністю до повороту), так і нееквівалентних (відносно дії дієдральної групи) двокольорових O – і N –діаграм з n хордами. Для початкових n наведено неізоморфні діаграми з вказаних класів.

Ключові слова: хордова діаграма, циклічна група, група дієдра, лема Бернсайда.

1. Основні поняття та визначення

Означення 1.1. Нехай на площині задано коло і $2n$ точок на ньому, які є вершинами правильного $2n$ – кутника. Розіб'ємо ці точки на n пар і з'єднаємо кожну таку пару хордою. Отриману конструкцію (коло з n хордами на ньому) називають хордовою діаграмою з n хордами, або ж n – діаграмою (рис. 1 а)).

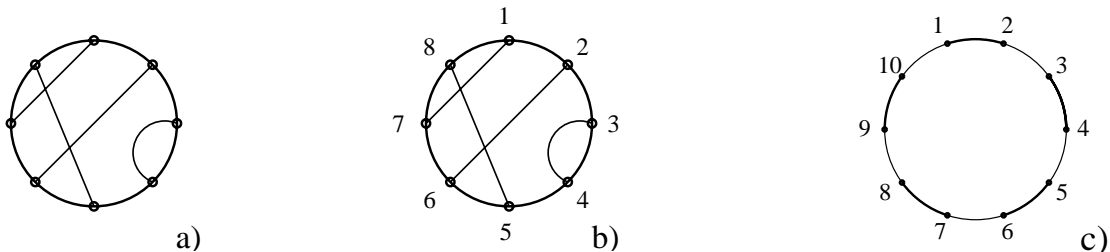


Рис. 1. а), б) Хордова 4 – діаграма; в) 2 – кольоровий $2n$ – шаблон

Нехай D – хордова діаграма з $2n$ вершинами. Занумеруємо останні числами від 1 до $2n$ рухаючись за годинниковою стрілкою від деякої фіксованої точки на колі (рис. 1 б)). Побудуємо перестановку α (інволюцію)

$$\alpha = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & a_2 & b_2 & \dots & a_n & b_n \\ b_1 & a_1 & b_2 & a_2 & \dots & b_n & a_n \end{pmatrix} = (a_1, b_1) \circ (a_2, b_2) \circ \dots \circ (a_n, b_n),$$

де a_i і b_i – номери вершин діаграми, які сполучено хордою. Надалі будемо вважати, що всі n – діаграми будуються на основі $2n$ – шаблону – рис. 1 б)).

Тоді кожна діаграма $D = D(\alpha)$ однозначно визначає перестановку α і навпаки.

Означення 1.2. Перестановку α , що визначає хордову діаграму $D(\alpha)$ на шаблоні, будемо називати склейкою, а множину таких склейок позначати B_{2n} .

В подальшому діаграму $D(\alpha)$ та її склейку будемо ототожнювати.

Означення 1.3 2-кольоровою хордовою діаграмою будемо називати n -діаграму, дуги кола якої по черзі розфарбовано у два кольори так, що будь-які сусідні дуги різного кольору. Надалі 2-кольорову n -діаграму будемо позначати D_n^* , а множину всіх таких діаграм – \mathfrak{D}_n^* .

Означення 1.4 2-кольорову n -діаграму, яка не містить (містить) хорд, що сполучають вершини з номерами однакової парності, будемо називати O - або ж N -діаграмою, а множину таких діаграм позначати \mathfrak{D}_n^O та \mathfrak{D}_n^N відповідно.

Означення 1.5 Склею α , яка визначає діаграму $D^*(\alpha)$, будемо називати O -склею (N -склею), якщо діаграма $D^*(\alpha)$ є O - або N -діаграмою відповідно. Множину O -склеїв (N -склеїв) будемо позначати B_{2n}^O (B_{2n}^N).

Означення 1.6 Дві діаграми $D_1^*(\alpha)$ і $D_2^*(\alpha')$ називають ізоморфними, якщо одну можна одержати з іншої в результаті повороту навколо спільного центру.

Означення 1.7 Діаграми $D_1^*(\alpha)$ і $D_2^*(\alpha')$ називають еквівалентними, якщо вони є або ізоморфними, або ж одну можна одержати з іншої в результаті перевертання (дзеркального відбиття) та повороту навколо спільного центру.

Означення 1.8 Віссю симетрії $l_{(k,k+1)}$ 2-кольорового $2n$ -шаблону будемо називати пряму, що проходить через центр шаблону та середину дуги, що визначається відповідними номерами вершин k і $k+1$ ($k=0, \dots, n-1$).

Означення 1.9 Діаграму $D^*(\alpha)$ будемо називати симетричною, якщо вона симетрична відносно деякої осі симетрії шаблону.

Твердження 1.1 [4] Діаграма $D^*(\alpha)$ є симетричною відносно осі $l_k = l_{(k,k+1)}$, тоді і лише тоді, коли з кожною парою $(a_i, b_i) \in \alpha$ остання містить й пару (a'_i, b'_i) : $a_i + a'_i \equiv 2k+1 \pmod{2n}$, $b_i + b'_i \equiv 2k+1 \pmod{2n} \quad \forall i=1, \dots, \left[\frac{n+1}{2}\right]$.

Означення 1.10 Циклічну групу порядку $2n$, породжену перестановкою $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & 2n-1 & 2n \\ 2 & 3 & \dots & 2n & 1 \end{pmatrix}$, будемо позначати $C_{2n} = \{\sigma^k \mid k=1, 2, \dots, 2n\}$.

Означення 1.11 Циклічну групу порядку n , породжену елементом $\xi = \sigma^2$, будемо позначати $C_{2n}^* = \{\xi^k \mid k=1, 2, \dots, n\}$.

Не важко бачити, що всі симетрії двокольорового $2n$ -шаблону (рис. 1 с)) породжуються поворотом ξ (на кут $\varphi = \frac{2\pi}{2n}$) і осьовою симетрією (дзеркальним відбиттям) b

$$\xi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & 2n-1 & 2n \\ 3 & 4 & \dots & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & 2n-1 & 2n \\ 2n & 2n-1 & \dots & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Таким чином, всі симетрії двокольорового $2n$ -шаблону складаються з $2n$ елементів $D_{2n}^* = \{\xi^i, \tau_i = b \circ \xi^i \mid i=1, \dots, n\}$ і утворюють групу діедра порядку $2n$.

Більш повну інформацію можна знайти, наприклад в [2–4].

2. Число двокольорових O – і N –діаграм

Добре відомо (див. напр. [1]), що число всіх n –діаграм побудованих на шаблоні (потужність множини \mathfrak{Z}_n) дорівнює числу $d_n = (2n-1)!! = \frac{(2n)!}{2^n \cdot n!}$.

Тоді потужність множини \mathfrak{Z}_n^* всіх 2–кольорових n –діаграм дорівнює $2 \times d_n$, бо дуги кожної n –діаграми можна пофарбувати точно у два способи.

Твердження 2.1 Число неізоморфних 2–кольорових n –діаграм співпадає з числом неізоморфних 2–кольорових n –діаграм, побудованих на 2–кольоровому $2n$ –шаблоні (з фіксованим розфарбуванням дуг кола).

Доведення. Для доведення достатньо показати, що для кожної діаграми $D^*(\alpha) \in \mathfrak{Z}_n^*$, отриманої на шаблоні з фіксованим розфарбуванням, існує діаграма $D^*(\alpha') \in \mathfrak{Z}_n^*$ (отримана на цьому ж шаблоні), яка при зміні кольорів на альтернативні є ізоморфною $D^*(\alpha)$. Нехай $\alpha = (a_1, b_1) \dots (a_n, b_n) \in B_{2n}$. Розглянемо склейку $\alpha' = (a_1 + 1 \bmod(2n), b_1 + 1 \bmod(2n)) \dots (a_n + 1 \bmod(2n), b_n + 1 \bmod(2n)) \in B_{2n}$.

Очевидно, що діаграма $D^*(\alpha') \in \mathfrak{Z}_n^*$, тобто належить множині діаграм шаблону. Не важко бачити, що якщо замінити кольори дуг діаграми $D^*(\alpha')$ на альтернативні та повернути її на кут $\omega = \frac{2\pi}{2n}$ (проти годинникової стрілки), то $D^*(\alpha) \equiv D^*(\alpha')$. \square

Зауваження 2.1 Оскільки кінцевою метою є підрахунок числа саме неізоморфних 2–кольорових n –діаграм, то надалі будемо розглядати лише ті діаграми, які одержано на одному 2–кольоровому $2n$ –шаблоні. Тому за потужність множини \mathfrak{Z}_n^* слід прийняти величину $|\mathfrak{Z}_n^*| = (2n-1)!! = \frac{(2n)!}{2^n \cdot n!}$ (1)

Твердження 2.2 $|\mathfrak{Z}_n^O| = |B_{2n}^O| = n!$ (2)

Доведення. За означенням O –склейки не можуть визначати хорд, які сполучають вершини шаблону з номерами однакової парності.

Таким чином, O –склейка α має вид: $\alpha = (1, b_1)(3, b_2) \dots (2n-3, b_{n-1})(2n-1, b_n)$, де b_i – парні номери вершин шаблону. Очевидно, що: b_1 можна обрати n способами; b_2 – $n-1$ способом; ... b_i – i способами; ... b_n – 1 способом.

Таким чином, існує точно $n!$ O –склейок. \square

Наслідок 2.1 $|\mathfrak{Z}_n^N| = |B_{2n}^N| = (2n-1)!! - n!$ (3)

3. Число неізоморфних двокольорових діаграм

Як впливає з роботи [3], циклічна група C_{2n} діє на множині \mathfrak{Z}_n хордових n –діаграм як *спряження*, а саме

Твердження 3.1 Дві діаграми $D(\alpha)$ і $D(\beta)$ з \mathfrak{Z}_n є ізоморфними ізоморфними (під дією групи C_{2n}), тоді і лише тоді, коли $\exists i \in \{1, \dots, 2n\}$: $\alpha = \sigma^{-i} \circ \beta \circ \sigma^i$.

Перестановку $\sigma^i \in C_{2n}$ називають автоморфізмом діаграми $D(\alpha) \in \mathfrak{Z}_n$, $\alpha \in B_{2n}$, якщо $\alpha = \sigma^{-i} \circ \alpha \circ \sigma^i$.

В роботах [2] і [3], встановлено, що число неізоморфних діаграм з класу \mathfrak{Z}_n може бути підраховане за допомогою співвідношень

$$\mu_n^* = \frac{1}{2n} \left((2n-1)!! + \sum_{i|2n, i \neq 2n} \phi\left(\frac{2n}{i}\right) \cdot \rho(n, i) \right), \text{ де}$$

$$\rho(n, i) = \begin{cases} (i-1)!! \cdot \left(\frac{2n}{i}\right)^{\frac{i}{2}}, & \frac{2n}{i} = 2l+1 \\ \sum_{r=0}^{i/2} C_i^{2r} \cdot (2r-1)!! \cdot \left(\frac{2n}{i}\right)^r, & \frac{2n}{i} = 2l \end{cases} \quad (4)$$

підсумовування ведеться за всіма дільниками i числа $2n$ (окрім $2n$); $\phi(q)$ – функція Ейлера (число натуральних менших за q чисел і взаємнопростих із ним); $\rho(n, i)$ – число n – діаграм, для яких перестановка σ^i є автоморфізмом.

Зауваження 3.1 Очевидно, що "не кольорову" діаграму можна повертати на довільний кут $\varphi = i \cdot \frac{2\pi}{2n}$, $0 < i \leq 2n$. Поворот 2 – кольорових діаграм коректно визначений лише для "парних кутів" ($i = 2m$), оскільки при непарних m кожна чорна (біла) дуга діаграми накладається на білу (чорну) дугу шаблону.

Твердження 3.2 Діаграми $D_1 = D^*(\alpha)$, $D_2 = D^*(\alpha') \in \mathfrak{Z}_n^*$ є ізоморфними тоді і лише тоді, коли одна спряжена іншій під дією деякого парного степеня циклічної перестановки σ , тобто $D_1 \cong D_2 \Leftrightarrow \exists m \in \{1, \dots, n\} : \alpha = \sigma^{-2m} \circ \alpha' \circ \sigma^{2m}$.

З урахуванням останнього та співвідношень (4) маємо

Теорема 3.1 Для довільного натурального $n \geq 2$ число d_n^* неізоморфних діаграм з класу \mathfrak{Z}_n^* можна обчислити за допомогою співвідношень

$$d_n^* = \frac{1}{n} \left((2n-1)!! + \sum_{m|n, m \neq n} \phi\left(\frac{n}{m}\right) \cdot \text{Fix}_{\mathfrak{Z}_n^*}(\sigma^{2m}) \right), \text{ де} \quad (5)$$

$$\text{Fix}_{\mathfrak{Z}_n^*}(\sigma^{2m}) = \begin{cases} (2m-1)!! \cdot \left(\frac{n}{m}\right)^m, & \left(\frac{n}{m}\right) = 2l+1 \\ \sum_{r=0}^m C_{2m}^{2r} \cdot (2r-1)!! \cdot \left(\frac{n}{m}\right)^r, & \left(\frac{n}{m}\right) = 2l \end{cases} \quad (6)$$

$\text{Fix}_{\mathfrak{Z}_n^*}(\sigma^{2m})$ – число діаграм з \mathfrak{Z}_n^* , для яких перестановка σ^{2m} є автоморфізмом.

4. Число неізоморфних O – і N – діаграм

За лемою Бернсайда число неізоморфних 2 – кольорових O – діаграм (породжених O – склейками з B_{2n}^O) можна обчислити за формулою:

$$d_n^{*(O)} = \frac{1}{n} \left(|\mathfrak{Z}_n^O| + \sum_{k|n, k \neq n} \phi\left(\frac{n}{k}\right) \cdot \text{Fix}_{\mathfrak{Z}_n^O}(\sigma^{2k}) \right), \text{ де} \quad (7)$$

$\text{Fix}_{\mathfrak{Z}_n^O}(\xi^k) = \left| \left\{ D(\alpha) \in \mathfrak{Z}_n^O \mid \xi^{-k} \circ \alpha \circ \sigma^k = \alpha \right\} \right| = \left| \left\{ \alpha \in B_{2n}^O \mid \alpha + 2k \bmod(2n) = \alpha \right\} \right|$ –

число діаграм, для яких перестановка $\xi^k = \sigma^{2k}$ є автоморфізмом.

Лема 4.1 Для довільного натурального $n = i \cdot m$ має місце рівність

$$\text{Fix}_{\mathfrak{Z}_n^O}(\sigma^{2i}) = (i)! \cdot \left(\frac{n}{i}\right)^i. \quad (8)$$

Доведення зводиться до задачі про підрахунок числа всіх O -склейок α , що задовольняють умову: $\alpha + 2k \bmod(2n) = \alpha$. Всі такі склейки мають вид

$$\alpha = (1, b_1)(3, b_2) \dots (2i-1, b_i) \dots (2n-1, b_n), \text{ де } b_i \in \{2, 4, \dots, 2n\} \quad \forall i = 1, \dots, n, \quad b_i \neq b_j.$$

$k = 1$: оскільки $\alpha + 2 \bmod(2n) = \alpha$, то $b_i = b_{i-1} + 2$. Але ж тоді всі такі склейки мають вид: $\alpha = (1, b_1)(3, b_1 + 2)(5, b_1 + 4) \dots (2i-1, b_1 + 2i - 2) \dots (2n-1, b_1 + 2n - 2)$.

Очевидно, що число таких склейок дорівнює n .

$k = 2$: оскільки $\alpha + 4 \bmod(2n) = \alpha$, то $b_i = b_{i-2} + 4$. Але ж тоді всі такі склейки розпадаються на дві підсклейки α_1, α_2 : $\alpha = \alpha_1 \wedge \alpha_2$, які мають вид:

$$\alpha = (1, b_1)(5, b_1 + 4)(9, b_1 + 8) \dots (4i-3, b_1 + 4i - 4) \dots (2n-3, b_1 + 2n - 4) \wedge \\ \wedge (3, b_2)(7, b_2 + 4)(11, b_2 + 8) \dots (4j-1, b_2 + 4j - 4) \dots (2n-1, b_2 + 2n - 4).$$

Оскільки $2n$ повинно ділитися на 4, то, очевидно, що $n = 2m$. Не важко помітити, що в підсклейках індекси $i, j = 1, \dots, m$.

Але ж тоді число всіх таких склейок дорівнює $2m \cdot (n - m) = 2m \cdot m$.

$k = 3$: Оскільки $2n$ повинно ділитися на 6, то, очевидно, що $n = 3m$. Оскільки $\alpha + 6 = \alpha$, то $b_i = b_{i-3} + 6 \quad \forall i \in \{4, \dots, n\}$. Тоді всі такі склейки розпадаються на три підсклейки $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$: $\alpha = \alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \alpha_3$ і мають вид:

$$\alpha = (1, b_1)(7, b_1 + 6)(13, b_1 + 12) \dots (6i-5, b_1 + 6i - 6) \dots (2n-5, b_1 + 2n - 6) \wedge \\ \wedge (3, b_2)(9, b_2 + 6)(15, b_2 + 12) \dots (6j-3, b_2 + 6j - 6) \dots (2n-3, b_2 + 2n - 6) \wedge \\ \wedge (5, b_3)(11, b_3 + 6)(17, b_3 + 12) \dots (6r-1, b_3 + 6r - 6) \dots (2n-1, b_3 + 2n - 6).$$

Не важко помітити, що в підсклейках індекси $i, j, r = 1, \dots, m$. Тому число всіх таких склейок становить $3m \cdot (n - m)((n - m) - m) = 3m \cdot 2m \cdot m$.

$k = i$: Оскільки $2n$ повинно ділитися на $2i$, то, очевидно, що $n = i \cdot m$. Оскільки $\alpha + 2i = \alpha$, то всі склейки розпадаються на i підсклейок, в кожній з яких по m пар. Таким чином, повторюючи міркування, аналогічні тим, які були використанні в перших трьох випадках, отримуємо, що число всіх таких склейок становить

$$im \cdot (im - m) \cdot ((im - m) - m) \cdot \dots \cdot m = \prod_{l=1}^i l \cdot m = i! \cdot m^i = (i)! \cdot \left(\frac{n}{i}\right)^i,$$

що й доводить справедливості співвідношення (8). \square

Наслідок 4.1 Число неізоморфних діаграм з класу \mathfrak{Z}_n^O може бути обчислене за формулою

$$d_n^{*(O)} = \frac{1}{n} \left(n! + \sum_{i|n, i \neq n} \phi\left(\frac{n}{i}\right) \cdot i! \cdot \left(\frac{n}{i}\right)^i \right). \quad (9)$$

$$\text{Наслідок 4.2} \quad d_n^{*(N)} = d_n^* - d_n^{*(O)}. \quad (10)$$

5. Число нееквівалентних O – діаграм

За лемою Бернсайда число орбіт групи перестановок D_{2n}^* , що діє на множині \mathfrak{Z}_n^O , можна обчислити за допомогою співвідношення

$$\delta_n^{*(O)} = \frac{1}{|D_{2n}^*|} \sum_{\eta \in D_{2n}^*} \text{Fix}_{\mathfrak{Z}_n^O}(\eta) = \frac{1}{2n} \left(\sum_{i=1}^n \text{Fix}_{\mathfrak{Z}_n^O}(\xi^i) + \sum_{i=1}^n \text{Fix}_{\mathfrak{Z}_n^O}(\tau_i) \right), \text{ де } \quad (11)$$

$\tau_i = b \circ \xi^i$, $\text{Fix}_{\mathfrak{Z}_n^O}(\eta) = \left| \left\{ D(\alpha) \in \mathfrak{Z}_n^O \mid \alpha = \eta^{-1} \circ \alpha \circ \eta, \eta \in D_{2n}^* \right\} \right|$ – число діаграм, для яких η є автоморфізмом. Зі співвідношень (9), (11) маємо

$$\delta_n^{*(O)} = \frac{1}{2} \left(d_n^{*(O)} + \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n \text{Fix}_{\mathfrak{Z}_n^O}(\tau_i) \right). \quad (12)$$

Оскільки число O – діаграм симетричних відносно кожної осі двокольорового $2n$ – шаблону є однаковим, то

$$\delta_n^{*(O)} = \frac{1}{2} \left(d_n^{*(O)} + \text{Fix}_{\mathfrak{Z}_n^O}(\tau_n) \right) = \frac{1}{2} \left(d_n^{*(O)} + \text{Fix}_{\mathfrak{Z}_n^O}(b) \right) \quad (13)$$

Лема 5.1 Число O – діаграм, симетричних відносно довільної осі симетрії двокольорового $2n$ – шаблону можна обчислити за допомогою співвідношень

$$Z^O(n) = \begin{cases} \sum_{i=0}^m C_n^{2i} \cdot (2(m-i)-1)!!, & n = 2m \\ \sum_{i=0}^m C_n^{2i+1} \cdot (2(m-i)-1)!!, & n = 2m+1 \end{cases} \quad (14)$$

Доведення. Нехай $D^*(\alpha)$ – діаграма, симетрична відносно осі l_0 . Тоді з кожною хордою $H_i(2i-1, b_i) \in \alpha$ склейці α належить й симетрична їй хорда $H_i'(2n-2i+2, 2n-b_i+1)$. Очевидно, що можливими є ситуації, коли хорда співпадає з хордою їй симетричною. Такі хорди для зручності будемо називати *нерухомими* або ж *самосиметричними*.

Не важко помітити, що при парних $n = 2m$ число нерухомих хорд може бути лише парним, а при непарних $n = 2m+1$ – лише непарним.

Розглянемо випадок, коли $n = 2m$. Існує лише $m+1$ суттєво різних випадків, коли діаграма містить точно $2i$ ($i = 0, \dots, m$) нерухомих хорд. Ті, що залишилися $2(m-i)$ хорд, не можуть бути нерухомими і утворюють $(m-i)$ пар взаємно симетричних хорд. Число способів утворення $(m-i)$ таких пар становить

$$\frac{C_{2(m-i)}^2 \cdot C_{2(m-i-1)}^2 \cdot \dots \cdot C_4^2 \cdot C_2^2}{(m-i)!} = \frac{(2(m-i))!}{(m-i)! \cdot 2^{(m-i)}}.$$

Оскільки ми розглядаємо лише O – діаграми, то не може бути хорд, що сполучають вершини з номерами однакової парності. Очевидно, що кожна нерухома хорда сполучає вершини різної парності. Утворення пар взаємно симетричних хорд слід розуміти керуючись правилом:

кожному вибору 2 точок з непарними номерами a_1, a_2 однозначно ставиться у відповідність пара точок з парними номерами $a'_1 = a'_1(a_1)$, $a'_2 = a'_2(a_2)$ (див. Твердження 1.1). В результаті одержимо пару взаємно симетричних хорд $(a_1, a'_2); (a_2, a'_1)$. Таким чином, при $n = 2m$

$$Z^O(n) = \sum_{i=0}^m C_n^{2i} \cdot \frac{(2(m-i))!}{2^{(m-i)} \cdot (m-i)!} = \sum_{i=0}^m C_n^{2i} \cdot (2(m-i)-1)!!$$

У випадку $n = 2m+1$ можливі лише $m+1$ суттєво різних випадків. А саме, коли діаграма містить точно $2i+1$ ($i=0, \dots, m$) нерухомих хорд. Ті що залишилися $2(m-i)$ хорди не можуть бути нерухомими й утворюють $(m-i)$ пар взаємно симетричних хорд.

Провівши аналогічні міркування у випадку $n = 2m$, маємо наступний результат

$$Z^O(n) = \sum_{i=0}^m C_n^{2i+1} \cdot \frac{(2(m-i))!}{2^{(m-i)} \cdot (m-i)!} = \sum_{i=0}^m C_n^{2i+1} \cdot (2(m-i)-1)!! \quad \square$$

Теорема 5.1 Число орбіт групи перестановок D_{2n}^* , що діє на множині \mathfrak{Z}_n^O , визначається співвідношенням:

$$\delta_n^{*(O)} = \frac{1}{2} \left(d_n^{*(O)} + \sum_{i=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} C_n^{2 \cdot \lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 2i} \cdot \left(2 \left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - i \right) - 1 \right)!! \right), \quad (15)$$

де $\lfloor q \rfloor$ – ціла частина числа q .

Доведення є наслідком леми 5.1 і співвідношення (13).

Нижче наведено всі неізоморфні (під дією групи C_{2n}^*) 2-кольорові О-діаграми для випадків $n = 3; 4; 5$.

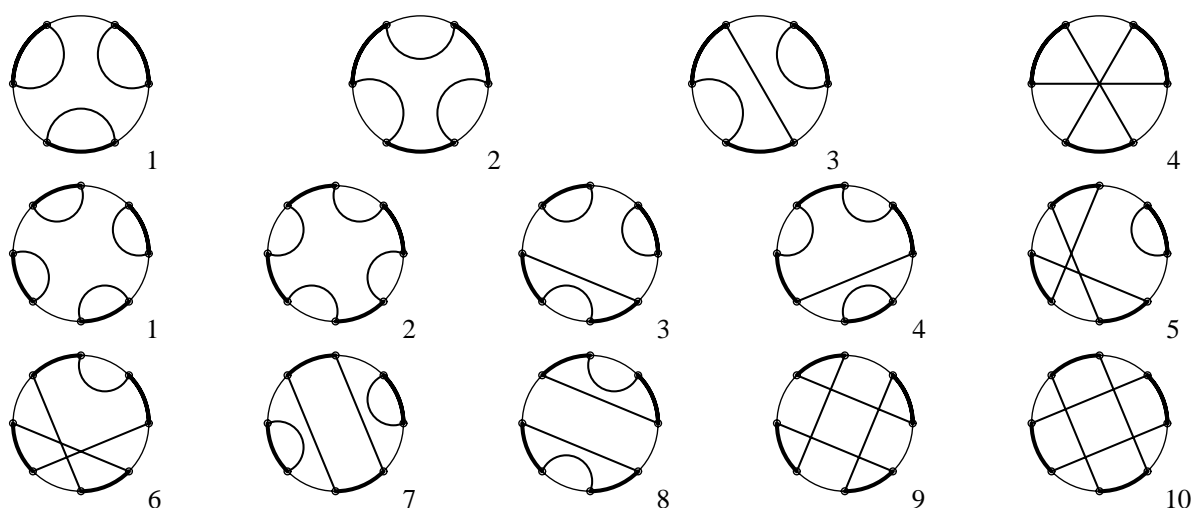


Рис. 2 Всі неізоморфні діаграми з класів \mathfrak{Z}_3^O та \mathfrak{Z}_4^O відповідно

Очевидно, що для $n = 3; 4$ неізоморфні 2-кольорові О-діаграми є нееквівалентними й під дією групи дієдра D_{2n}^* . Тому $\delta_3^{*(O)} = 4$, $\delta_4^{*(O)} = 10$.

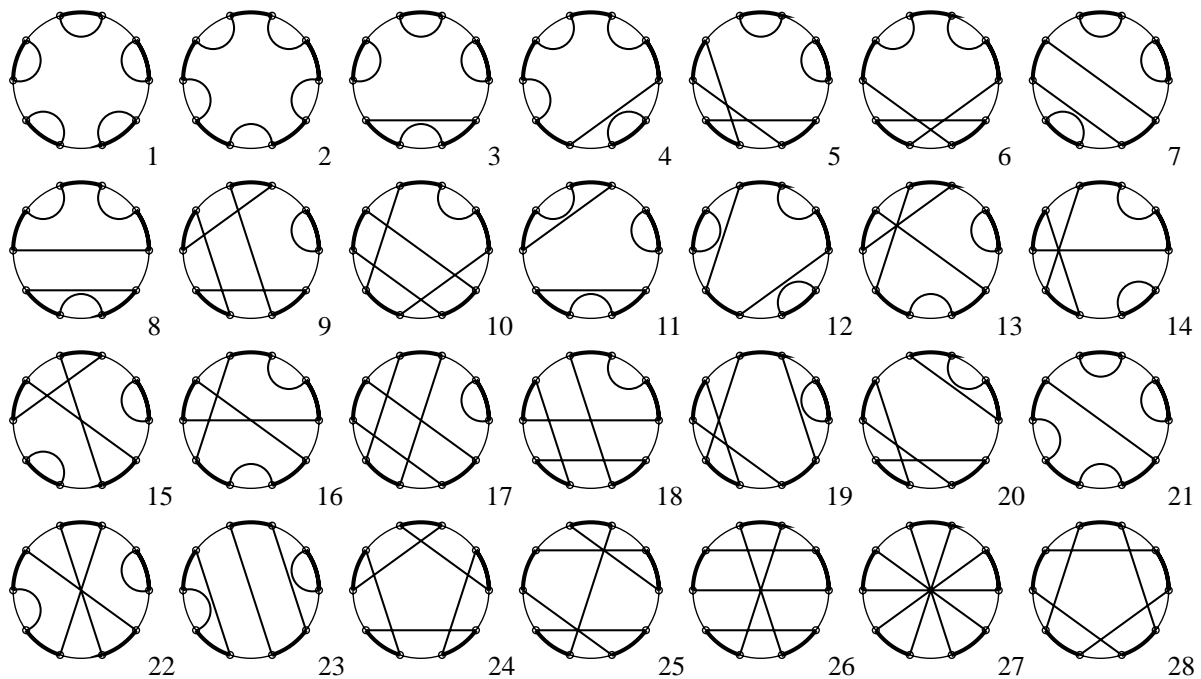


Рис. 3 Всі неізоморфні діаграми з класу \mathfrak{Z}_5^O

Не важко бачити, що за винятком діаграм 13 і 14 наведені неізоморфні 5 – діаграми є нееквівалентними під дією групи діедра. Тому $\delta_5^{*(O)} = 27$.

6. Число нееквівалентних N – діаграм

За лемою Бернсайда число орбіт групи діедра D_{2n}^* , що діє на множині \mathfrak{Z}_n^N , можна обчислити за формулою

$$\delta_n^{*(N)} = \frac{1}{2} \left(d_n^{*(N)} + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \text{Fix}_{\mathfrak{Z}_n^N}(\tau_i) \right). \quad (16).$$

Оскільки число N – діаграм, симетричних відносно кожної осі симетрії шаблону є однаковим, то використовуючи Наслідок 4.2, маємо наступне співвідношення

$$\delta_n^{*(N)} = \frac{1}{2} \left(d_n^{**} - d_n^{*(O)} + \text{Fix}_{\mathfrak{Z}_n^N}(b) \right), \quad \text{де} \quad (17)$$

$\text{Fix}_{\mathfrak{Z}_n^N}(b)$ – число N – діаграм, для яких b є автоморфізмом, тобто число N – діаграм симетричних відносно осі симетрії $l_{(2n,1)}$.

Лема 6.1 Число $Z^N(n)$ N – діаграм, симетричних відносно довільної осі симетрії шаблону, можна обчислити за допомогою співвідношень

$$Z^N(n) = \begin{cases} \sum_{i=0}^{m-1} C_n^{2i} \cdot (2(m-i)-1)!! \cdot (2^{m-i} - 1), & n = 2m \\ \sum_{i=0}^{m-1} C_n^{2i+1} \cdot (2(m-i)-1)!! \cdot (2^{m-i} - 1), & n = 2m + 1 \end{cases} \quad (18)$$

Доведення. Нехай $D^*(\alpha)$ – N – діаграма, симетрична відносно осі $l_{(2n,1)}$.

Тоді з кожною хордою $H_i(a_i, b_i) \in \alpha$ склейці α належить й симетрична їй хорда $H_i'(2n - a_i + 1, 2n - b_i + 1)$.

Розглянемо випадок $n = 2m$. Існує тільки m суттєво різних випадків. А саме, коли діаграма містить в точності $2i$ ($i = 0, \dots, m-1$) нерухомих хорд. У випадку $i = m$ діаграма виявилась би O –діаграмою. Ті що залишилися $2(m-i)$ хорд не можуть бути нерухомими й утворюють $(m-i)$ пар взаємно симетричних хорд. Оскільки ми розглядаємо лише N –діаграми, то повинна бути, щонайменше, одна пара взаємно симетричних хорд, кожна з яких сполучає точки з номерами однакової парності. Отже існує $m-i$ підвипадків, коли діаграма містить точно $1 \leq k \leq (m-i)$ пар взаємно симетричних хорд, кожна з яких сполучає точки з номерами однакової парності. Утворення таких пар слід розуміти керуючись правилом:

кожному вибору 2 точок з непарними номерами a_1, a_2 однозначно ставиться у відповідність пара точок з парними номерами $a_1' = a_1'(a_1)$, $a_2' = a_2'(a_2)$ (див. Твердження 1.1). В результаті одержимо пару взаємно симетричних хорд (a_1, a_2) та (a_1', a_2') , що мають вказані властивості.

Ті $2(m-i-k)$ хорд що залишилися, повинні утворювати $(m-i-k)$ пар взаємно симетричних хорд, кожна з яких сполучає точки з номерами різної парності (див. доведення леми 5.1). Тому, при $n = 2m$ маємо

$$\begin{aligned} Z^N(n) &= \sum_{i=0}^{m-1} C_n^{2i} \cdot \left(\sum_{k=1}^{m-i} \left(\frac{1}{k!} \prod_{l=1}^k C_{2(m-i-l+1)}^2 \cdot (2(m-i-k)-1)!! \right) \right) = \\ &= \sum_{i=0}^{m-1} C_n^{2i} \cdot \left(\sum_{k=1}^{m-i} \left(\frac{(2(m-i))!}{k! \cdot 2^k \cdot (2(m-i-k))!} \cdot \frac{(2(m-i-k))!}{2^{(m-i-k)} \cdot (m-i-k)!} \right) \right) = \\ &= \sum_{i=0}^{m-1} C_n^{2i} \cdot \left(\sum_{k=1}^{m-i} \left(\frac{(2(m-i))!}{k! \cdot 2^{(m-i)} \cdot (m-i-k)!} \right) \right) = \sum_{i=0}^{m-1} \frac{C_n^{2i} \cdot (2(m-i))!}{2^{m-i}} \cdot \left(\sum_{k=1}^{m-i} \frac{1}{k! \cdot (m-i-k)!} \right) = \\ &= \sum_{i=0}^{m-1} \frac{C_n^{2i} \cdot (2(m-i))!}{2^{m-i} \cdot (m-i)!} \sum_{k=1}^{m-i} C_{m-i}^k = \sum_{i=0}^{m-1} C_n^{2i} \cdot (2(m-i)-1)!! \cdot (2^{m-i} - 1). \end{aligned}$$

Повторюючи міркування для випадку $n = 2m+1$, одержимо очікуваний результат.

□

Теорема 6.1 Число нееквівалентних діаграм з класу \mathfrak{Z}_n^N можна обчислити за допомогою співвідношення

$$\delta_n^{*(N)} = \frac{1}{2} \left(d_n^{**} - d_n^{*(O)} + \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} C_n^{2\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 2i} \cdot (2(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - i) - 1)!! \cdot (2^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - i} - 1) \right). \quad (19)$$

Доведення є наслідком леми 6.1 і співвідношень (17).

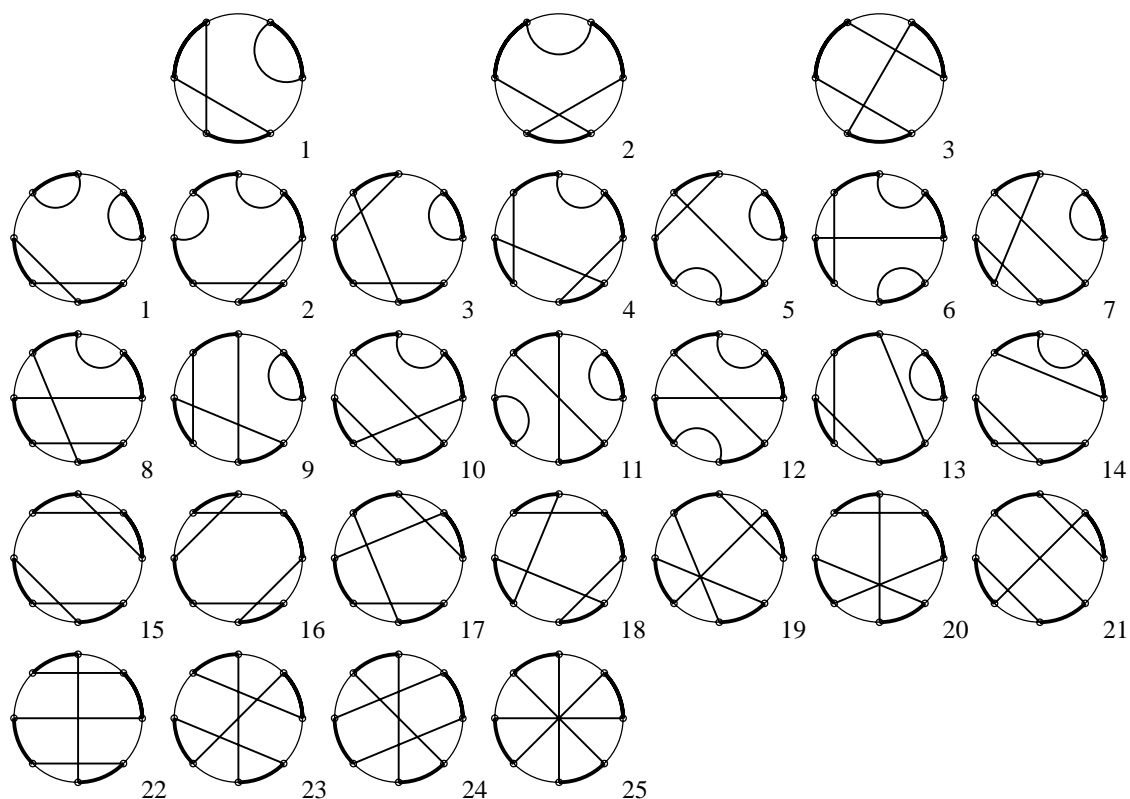


Рис. 4 Всі неізоморфні діаграми з класів \mathfrak{Z}_3^N та \mathfrak{Z}_4^N відповідно

Очевидно, що при $n = 3$ всі діаграми є нееквівалентними й під дією групи діедра D_{2n}^* . У випадку $n = 4$ діаграми 5 і 6; 7 і 9; 8 і 10; 19 і 20; 21 і 22 є еквівалентними (під дією групи діедра). І тому існує точно $25 - 10 + 5 = 20$ нееквівалентних N – діаграм з 4 хордами.

На думку авторів дослідження в цьому напрямку можуть бути успішно продовжені за рахунок розв'язування задач на підрахунок числа нееквівалентних m – кольорових n – діаграм. Одержані в роботі результати можуть бути ефективно використані в тих галузях науки, де виникають інваріанти, схожі до кола з відміченими точками. З деякими застосуваннями двокольорових діаграм в топології можна ознайомитись в роботі [4].

Література

1. *Riordan J.* The distribution of crossings of chords joining pairs of $2n$ points on a circle // *Math. Comp.* 29 no. 129, 1975, pp 215–222.
2. *Stoimenov A.* Enumeration of chord diagrams and an upper bound for Vassiliev invariants // *Journal of Knot and its Ramifications*, vol. 7, no. 1, 1998, pp. 93–114.
3. *Gori R., Marcus M.* Counting non-isomorphic chord diagrams // *Theoretical Computer Science* – 1998–204. – p. 55–73.
4. *Кадубовський О.* Класифікація векторних полів Морса-Смейла на двовимірних многовидах // *Вісник Київського національного університету ім. Тараса Шевченка. Математика, механіка.* – 2005, Вид. 14., С. 85-88.

УДК 519.115.1: 519.175.3

Саприкіна Ю.С., Мазур С.Ю., Кадубовський О.А.

¹Студентка 5 курсу 2 групи фізико-математичного факультету СДПУ,

²Студент 5 курсу 2 групи фізико-математичного факультету СДПУ,

³Доцент кафедри геометрії та методики викладання математики СДПУ

Двокольорові O -діаграми з одним чорним циклом

Встановлено формули для підрахунку числа як неізоморфних (під дією циклічної групи), так і нееквівалентних (відносно дії дієдральної групи) двокольорових O -діаграм з n хордами, які мають один цикл певного кольору.

Ключові слова: хордова діаграма, цикл, циклічна група, група дієдра, лема Бернсайда.

1. Основні поняття та визначення.

Означення 1.1. Нехай на площині задане коло і $2n$ точок на ньому, які є вершинами правильного $2n$ -кутника. Розіб'ємо ці точки на n пар і з'єднаємо кожну таку пару хордою. Отриману конструкцію (коло з n хордами на ньому) називають хордовою діаграмою з n хордами або ж n -діаграмою (рис. 1 а), б)).

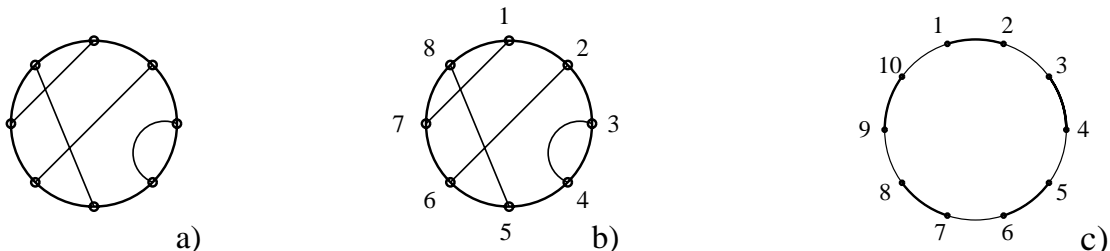


Рис. 1. а), б) Хордова 4-діаграма; в) 2-кольоровий $2n$ -шаблон

Означення 1.2. Циклом n -діаграми будемо називати послідовність хорд і дуг кола, які утворюють гомеоморфний образ орієнтованого кола – рис. 2.

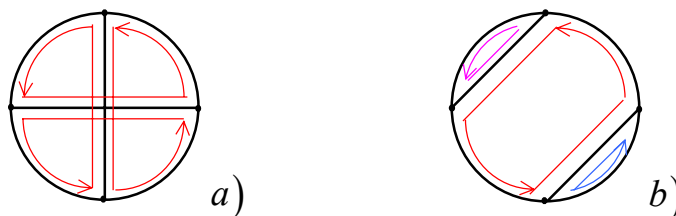


Рис. 2. а) 2-діаграма з 1-им циклом; б) 2-діаграма з 3-ма циклами

Означення 1.3 2-кольоровою хордовою діаграмою будемо називати n -діаграму, дуги кола якої по черзі розфарбовано у два кольори так, що будь-які сусідні дуги різного кольору. Надалі 2-кольорову n -діаграму будемо позначати D^* , а множину всіх таких діаграм – \mathfrak{D}_n^* .

Означення 1.4 B – циклом (W – циклом) діаграми $D^*(\alpha)$ будемо називати послідовність хорд та чорних (білих) дуг, які утворюють гомеоморфний образ (орієнтовного) кола.

Приклад 1.1 Визначення чорних і білих циклів двокольорової діаграми проілюструємо на прикладі діаграми, зображеної на рис. 3 а).

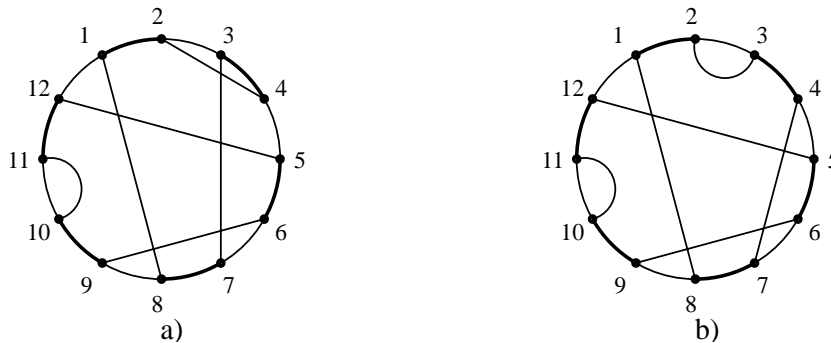


Рис. 3: а) 2 – кольорова N – діаграма; б) 2 – кольорова O – діаграма

Довільним чином задамо орієнтацію на колі діаграми $D^* = D^*(\alpha)$ (наприклад проти руху годинникової стрілки).

Випишемо всі чорні цикли діаграми:

$$B_1 = (2,1)[1,8](8,7)[7,3](3,4)[4,2]; \quad B_2 = (6,5)[5,12](12,11)[11,10](10,9)[9,6].$$

Тут (\cdot, \cdot) – дуги діаграми; $[\cdot, \cdot]$ – її хорди.

Аналогічно визначаються білі цикли діаграми:

$$W_1 = (3,2)[2,4](4,5)[5,12](12,1)[1,8](8,9)[9,6](6,7)[7,3]; \quad W_2 = (11,10)[10,11].$$

Означення 1.5 2 – кольорову n – діаграму, яка не містить (містить) хорд, що сполучають вершини з номерами однакової парності, будемо називати O – діаграмою (N – діаграмою), а множину таких діаграм позначати \mathfrak{S}_n^O (\mathfrak{S}_n^N).

Зауваження 1.1 Якщо проігнорувати кольори, то кожний чорний (білий) цикл 2 – кольорової O – діаграми (див. наприклад рис. 3 б)) співпадає з відповідним циклом звичайної діаграми.

Означення 1.6 Множину 2 – кольорових O – діаграм з одним чорним (або білим) циклом, побудованих на двокольоровому $2n$ – шаблоні (див. рис. 1 с)) будемо позначати $\mathfrak{S}_{1,n}$.

Означення 1.7 Дві діаграми D_1^* і D_2^* називають ізоморфними, якщо одну можна одержати з іншої в результаті повороту навколо спільного центру.

Означення 1.8 Дві діаграми D_1^* і D_2^* називають еквівалентними, якщо вони є або ізоморфними, або ж одну можна одержати з іншої в результаті перевероту (дзеркального відбиття) та подальшого повороту навколо спільного центру.

Більш повну інформацію можна знайти, наприклад в [3], [4], або ж попередній статті.

2. Число O -діаграм з одним чорним циклом.

Орієнтуємо коло 2-кольорової діаграми, наприклад, проти руху годинникової стрілки (рис. 4). Тоді кожену O -діаграму з одним чорним циклом можна подати у вигляді циклу довжини n . Пояснимо останнє

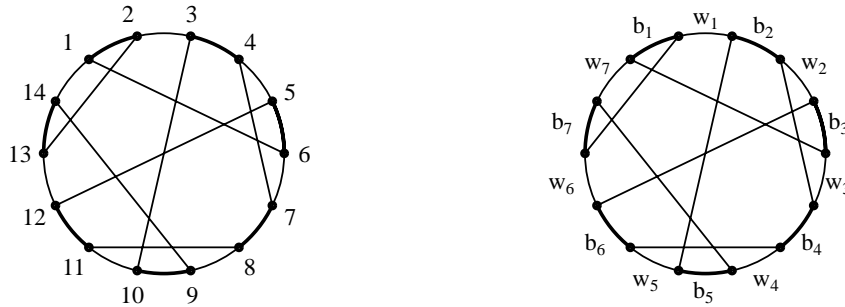


Рис. 4 Діаграма $D(b) \in \mathfrak{Z}_{1,n}$, $b = (b_1, b_3, b_6, b_4, b_2, b_5, b_7)$

Під *обходом* b чорних (білих) дуг b_j (w_j) O -діаграми з одним чорним циклом (починаючи з вершини номера $2m_1$ деякої чорної дуги b_{m_1} будемо розуміти послідовність номерів чорних дуг $b = (b_{m_1}, b_{j_2}, \dots, b_{j_n})$, які зустрічаються при слідуванні за єдиним чорним її циклом (рис. 4).

Очевидно, що два обходи дуг одного кольору задають одну й ту ж діаграму, якщо послідовність дуг одного одержується з послідовності дуг іншого в результаті циклічної їх перестановки. Геометрично це означає, що обхід дуг діаграми був розпочатий з іншої дуги, але в тому ж напрямку.

Щоб уникнути такої неоднозначності, достатньо обхід єдиного чорного циклу починати з дуги b_1 . Оскільки всі діаграми будуються на основі шаблону, то (при фіксованій орієнтації) кожен такий цикл (обхід) однозначно визначає хорди діаграми, а отже й саму діаграму. І навпаки.

Зрозуміло, що для O -діаграм з одним чорним циклом перестановка b є циклом довжини n . Надалі множину циклів довжини

Не важко встановити, що число всіх O -діаграм з одним чорним (білим) циклом становить $(n-1)!$. Дійсно, кожену таку діаграму однозначно можна подати у вигляді циклу $(1, j_2, j_3, \dots, j_n)$, $j_k \neq j_{k'}$ при $k \neq k'$, де $j_k \in \{2, 3, \dots, n\}$ – номери дуг відповідного кольору. Таким чином

$$|\mathfrak{Z}_{1,n}| = (n-1)! \quad (1)$$

3. Число неізоморфних O -діаграм з одним чорним (білим) циклом

З'ясуємо питання про те, коли дві O -діаграм з одним чорним (або білим) циклом є ізоморфними. Без втрати загальності міркування проведемо для O -діаграм з одним, саме чорним циклом.

Нехай $D(b)$, $b = (1, j_2, j_3, \dots, j_n)$ – O -діаграма з одним чорним циклом. Розглянемо цикл $b' = (1 + k \bmod n, j_2 + k \bmod n, j_3 + k \bmod n, \dots, j_n + k \bmod n)$. Очевидно, що діаграма $D(b')$ ізоморфна діаграмі $D(b)$. Більше того, не важко встановити справедливості наступного твердження

Твердження 3.1 Дві O –діаграми $D(b)$ і $D(b')$ з одним чорним циклом ізоморфні тоді і лише тоді, коли існує таке натуральне k , що справджується рівність $b' = b + k \bmod n = (1 + k \bmod n, j_2 + k \bmod n, \dots, j_n + k \bmod n)$

Нагадаємо, що два цикли $c_1, c_2 \in CS_n$ (довжини n), один з яких одержується в результаті циклічної перестановки елементів іншого не різняться.

Таким чином, задача про підрахунок числа d_n^* неізоморфних O –діаграм з одним чорним циклом звелась до задачі про підрахунок числа всіх нееквівалентних циклів з CS_n відносно дії групи Z_n .

В роботі [2] (див. також [1]) було встановлено, що число d_n^* орбіт дії групи Z_n на множині циклів з CS_n може бути обчислене за формулою:

$$d_n^* = |CS_n / nZ_n| = \frac{1}{n^2} \cdot \left(\sum_{i|n} \phi^2\left(\frac{n}{i}\right) \cdot i! \cdot \left(\frac{n}{i}\right)^i \right). \quad (2)$$

Перепишемо праву частину (2) у вигляді, який найбільше відповідає введеним позначенням і потребам:

$$\begin{aligned} \frac{1}{n^2} \cdot \left(\sum_{i|n} \phi^2\left(\frac{n}{i}\right) \cdot i! \cdot \left(\frac{n}{i}\right)^i \right) &= \frac{1}{n^2} \cdot \left(n! + \sum_{i|n, i \neq n} \phi^2\left(\frac{n}{i}\right) \cdot i! \cdot \left(\frac{n}{i}\right)^i \right) = \\ &= \frac{1}{n^2} \cdot \left(n! + n \cdot \sum_{i|n, i \neq n} \phi\left(\frac{n}{i}\right) \cdot (i-1)! \cdot \left(\frac{n}{i}\right)^{i-1} \cdot \phi\left(\frac{n}{i}\right) \right) = \frac{1}{n} \cdot \left(|\mathfrak{S}_{1,n}| + \sum_{i|n, i \neq n} \phi\left(\frac{n}{i}\right) \cdot \text{Fix}_{\mathfrak{S}_{1,n}}(\xi^i) \right). \end{aligned} \quad (3)$$

Таким чином, справедливим є наступне твердження

Теорема 3.1 Число $d_{\mathfrak{S}_{1,n}}^*(C_{2n}^*)$ неізоморфних O –діаграм з одним чорним циклом може бути обчислене за допомогою співвідношень

$$d_n^* = d_{\mathfrak{S}_{1,n}}(C_{2n}^*) = \frac{1}{n} \cdot \left(|\mathfrak{S}_{1,n}| + \sum_{i|n, i \neq n} \phi\left(\frac{n}{i}\right) \cdot \text{Fix}_{\mathfrak{S}_{1,n}}(\xi^i) \right), \quad (4)$$

$$\text{Fix}_{\mathfrak{S}_{1,n}}(\xi^i) = \phi\left(\frac{n}{i}\right) \cdot (i-1)! \cdot \left(\frac{n}{i}\right)^{i-1}, \text{ де} \quad (5)$$

$\text{Fix}_{\mathfrak{S}_{1,n}}(\xi^i)$ – число діаграм з класу $\mathfrak{S}_{1,n}$, для яких перестановка ξ^i є автоморфізмом, тобто число діаграм з $\mathfrak{S}_{1,n}$, які самосуміщаються при повороті на кут $\omega_i = \frac{\pi}{n} \cdot 2i$ (за годинниковою стрілкою).

Зауваження 3.1 Міркування, за допомогою яких встановлена істинність останнього твердження, носять суто алгебраїчний характер та залишають за лаштунками всю геометричну картину. У зв'язку з цим наведемо комбінаторно-геометричне доведення цього твердження.

Очевидно, що для доведення теореми 3.1 достатньо показати справедливість співвідношення (5).

Лема 3.1 Нехай $n = i \cdot k, i \neq n$. Тоді число $\text{Fix}_{\mathfrak{S}_{1,n}}(\xi^i)$ О-діаграм з одним чорним циклом, які самосуміщаються при повороті на кут $\omega_i = \frac{\pi}{n} \cdot 2i$ становить

$$\text{Fix}_{\mathfrak{S}_{1,n}}(\xi^i) = \phi\left(\frac{n}{i}\right) \cdot (i-1)! \cdot \left(\frac{n}{i}\right)^{i-1}.$$

Доведення. 1) З'ясуємо спочатку питання про те, який вид мають О-діаграми, що задовольняють умові леми. Як було встановлено раніше, кожна таку діаграму можна ототожнити з циклом $b = (1, l_2, l_3, \dots, l_n)$, елементи якого – номери чорних дуг діаграми, що зустрічаються при обході єдиного чорного циклу (див. рис. 4). Отже, нехай $D = D(b)$ – О-діаграма з одним чорним циклом, яка самосуміщається при повороті на кут $\omega_i = \frac{\pi}{n} \cdot 2i$.

Як і раніше, арифметичні операції слід розуміти як такі, що виконуються за модулем n або ж $2n$. Основна **ідея** полягає у наступному:

якщо О-діаграма, яка само суміщається при повороті на кут $\frac{\pi}{n} \cdot 2i$, містить хорду $[1, 2l_2]$, то вона повинна містити й хорду $[1 + 2i, 2l_2 + 2i]$, в яку переходить перша. За тих самих причин діаграма містить й хорду $[1 + 4i, 2l_2 + 4i]$, в яку переходить друга і т.д. Таким чином:

якщо впорядкована пара $\{1, l_2\} \in b$, то циклу b повинна належати й впорядкована пара $\{1 + i, l_2 + i\}$, аналогічно $\{1 + 2i, l_2 + 2i\} \in b$... $\{1 + i(k-1), l_2 + i(k-1)\} \in b$;

якщо впорядкована пара $\{l_2, l_3\} \in b$, то циклу b повинна належати й впорядкована пара $\{l_2 + i, l_3 + i\}$, аналогічно $\{l_2 + 2i, l_3 + 2i\} \in b$... $\{l_2 + i(k-1), l_3 + i(k-1)\} \in b$.

Таким чином, множина чорних дуг діаграми з $\mathfrak{S}_{1,n}$, яка самосуміщається при повороті на кут $\frac{\pi}{n} \cdot 2i$, розбивається на k підмножин – "чорних" блоків $[b_j]$, в кожному з яких по i чорних дуг:

$$\begin{aligned} [b_1] &= \{1, l_2, l_3, \dots, l_i\}, \\ [b_2] &= \{1 + i, l_2 + i, l_3 + i, \dots, l_i + i\}, \\ [b_3] &= \{1 + 2i, l_2 + 2i, l_3 + 2i, \dots, l_i + 2i\}, \dots, \\ [b_k] &= \{1 + (k-1)i, l_2 + (k-1)i, l_3 + (k-1)i, \dots, l_i + (k-1)i\} \end{aligned}$$

Однак, поки незрозумілим є порядок входження блоків $[b_2], [b_3], \dots, [b_k]$ до циклу $b = ([b_1] \dots)$ такої діаграми.

2) Взаємне розташування цих блоків однозначно визначається вибором блоку, який слідує за $[b_1]$. Більше того, в деякому розумінні, обхід цих блоків здійснюється з деяким кроком h . Пояснимо останнє:

Припустимо, що $b = ([b_1][b_2]...) = (1, l_2, l_3, ..., l_i; 1+i, l_2+i, l_3+i, ..., l_i+i; ...)$.

Оскільки циклу b належить впорядкована пара $\{l_i, 1+i\}$, то $\{l_i+i, 1+2i\} \in b$. Це означає, що після блоку $[b_2]$ слідує блок $[b_3]$ і т.д.. Тобто $b = ([b_1][b_2][b_3]...[b_k])$. Отже, обхід блоків здійснюється з кроком $h = 1$;

Припустимо, що

$$b = ([b_1][b_3]...) = (1, l_2, l_3, ..., l_i; 1+2i, l_2+2i, l_3+2i, ..., l_i+2i; ...)$$

Оскільки циклу b належить впорядкована пара $\{l_i, 1+2i\}$, то $\{l_i+i, 1+3i\} \in b$, а отже і пара $\{l_i+2i, 1+4i\} \in b$. Це означає, що після блоку $[b_3]$ слідує блок $[b_5]$ і т.д.. Тобто, $b = ([b_1][b_3][b_5]...)$. Отже, обхід блоків здійснюється з кроком $h = 2$.

Таким чином, маємо рівно $(k-1)$ можливостей перегрупувати чорні блоки. Але не в кожному з цих випадків ми одержимо діаграму з одним чорним циклом. Так, наприклад, для парних k обхід з кроком $h = 2$ не є припустимим, оскільки відповідна діаграма має два чорні цикли $([b_1], [b_3], ..., [b_{k-1}], [b_1])$ і $([b_2], [b_4], ..., [b_k], [b_2])$.

Очевидно, що діаграма буде мати один чорний цикл лише у випадку коли обхід відповідних чорних блоків здійснюється з кроком h , взаємно простим з $k = \frac{n}{i}$. Тобто існує точно $\phi(k)$ суттєво різних видів таких діаграм.

3) Зафіксуємо припустимий крок h (взаємно простий з k), з яким здійснюється обхід k чорних блоків $[b_1], [b_2], ..., [b_k]$.

Очевидно, що дугу b_{l_2} блоку $[b_1]$ можна вибрати $n-k$ способами, оскільки k чорних дуг з номерами $1, 1+i, ..., 1+i(k-1)$ зайняли перші позиції в блоках $[b_1], [b_2], ..., [b_k]$;

дугу b_{l_3} можна вибрати $n-2k$ способами, бо після вибору чорної дуги з номером l_2 дуги з номерами $l_2, l_2+i, ..., l_2+i(k-2)$ зайняли другі позиції у відповідних блоках, і т.д.

$$\begin{aligned} \text{Отже, при кожному припустимому кроці } h \text{ можна утворити точно} \\ (n-k) \cdot (n-2k) \cdot \dots \cdot (n-(i-1)k) = (ik-k) \cdot (ik-2k) \cdot \dots \cdot (ik-(i-1)k) = \\ = k(i-1) \cdot k(i-2) \cdot k(i-3) \cdot \dots \cdot k = k^{i-1} \cdot (i-1)! = \left(\frac{n}{i}\right)^{i-1} \cdot (i-1)! \end{aligned}$$

різних O -діаграм з одним чорним циклом, які само суміщаються при повороті на кут $\omega = \frac{\pi}{n} \cdot 2i$.

З урахуванням пунктів 2) і 3) існує точно $\phi\left(\frac{n}{i}\right) \cdot \left(\frac{n}{i}\right)^{i-1} \cdot (i-1)!$ різних діаграм, що задовольняють умові леми. \square

Зауваження 3.2. Є більш глибокі причини, що характеризують геометричний зміст і природу величин, що входять у формулу (5). Так, наприклад, величина $(i-1)!$ – це число O -діаграм (з i хордами) з одним чорним циклом.

Основна ідея полягає в справедливості наступних тверджень, які наведемо без доведення

1) Нехай $b^i = (1, q_2, q_3, \dots, q_i)$ – одна з $(i-1)!$ O -діаграм (з i хордами) з одним чорним циклом. Тоді, поклавши $[b_1] = \{1, q_2, q_3, \dots, q_i\}$, однозначно визначаються чорні блоки $[b_2], [b_3], \dots, [b_k]$. При цьому:

1.1) при довільному припустимому кроці h , з яким здійснюється обхід цих блоків, відповідна діаграма $b = ([b_1] \dots)$ задовольняє умові леми;

1.2) при довільній циклічній перестановці елементів однієї позиції, діаграма знову задовольняє умові леми;

Звідки випливає, що здійснивши всі можливі циклічні перестановки в кожній з $i-1$ позицій (перша позиція в кожному з блоків фіксована), ми одержимо точно $\left(\frac{n}{i}\right)^{i-1} = k^{i-1}$ різних діаграм з $\mathfrak{S}_{1,n}$, які задовольняють умовам леми.

2) Якщо ж $b^i = (1, q_2, q_3, \dots, q_i)$ не є i -діаграмою з одним чорним циклом, то при жодному h та ні при яких циклічних перестановках елементів однієї позиції, ми не одержимо діаграму, що задовольняє умовам леми.

4. Число нееквівалентних O -діаграм з одним чорним циклом

Застосовуючи лему Бернсайда (див. напр. [3]), не важко встановити, що число $d_n^{**} = d_{\mathfrak{S}_{1,n}}(D_{2n}^*)$ орбіт групи діедра D_{2n}^* , що діє на множині $\mathfrak{S}_{1,n}$ (число нееквівалентних O -діаграм з одним чорним циклом) визначається за допомогою співвідношень

$$d_n^{**} = \begin{cases} \frac{1}{2}(d_n^* + Z_1(n)), & n = 2m + 1 \\ \frac{1}{2}\left(d_n^* + \frac{1}{2} \cdot (Z_{2,1}(n) + Z_{2,2}(n))\right), & n = 2m, \end{cases} \quad \text{де} \quad (6)$$

$Z_1(n)$ – число діаграм з $\mathfrak{S}_{1,n}$, що є симетричними відносно фіксованої осі симетрії, яка проходить через середини протилежних чорної та білої дуг шаблону;

$Z_{2,1}(n)$ ($Z_{2,2}(n)$) – число діаграм з $\mathfrak{S}_{1,n}$, що є симетричними відносно фіксованої осі симетрії, що проходить через середини протилежних чорних (білих) дуг шаблону.

Лема 4.1. Справедливими є наступні рівності

$$\begin{aligned} Z_1(n) &= 2^m \cdot m!, & n &= 2m + 1 \\ Z_{2,1}(n) &= 2^{m-1} \cdot (m-1)!, & n &= 2m \\ Z_{2,2}(n) &= 2^{m-1} \cdot m!, & n &= 2m \end{aligned} \quad (7)$$

Доведення.

1) Розглянемо спочатку випадок, коли $n = 2m + 1$ – рис. 2 с). Кожну діаграму симетричну відносно певної осі симетрії, що проходить через середини протилежних білої і чорної дуг (наприклад відносно осі l_1) можна подати у вигляді циклу

$$(b'_{i_m}, b'_{i_{m-1}}, \dots, b'_{i_3}, b'_{i_2}, \boxed{b_1}, b_{i_2}, b_{i_3}, \dots, b_{i_{m-1}}, b_{i_m}),$$

де b'_{i_k} – дуга симетрична дузі b_{i_k} відносно осі l_1 , $i_k \neq 1$.

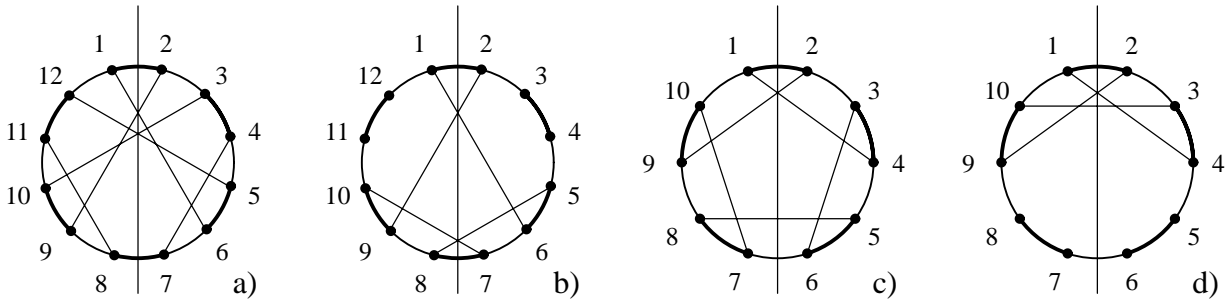


Рис. 5 O – діаграми симетричні відносно фіксованої осі симетрії

Дугу b_{i_2} можна обрати $(n-1)$ способом, при цьому з подальшого розгляду виключається й дуга симетрична обраній; дугу b_{i_3} – $(n-3)$ способами; ...; дугу $b_{i_{m-2}}$ – 4 а дугу $b_{i_{m-1}}$ – 2 способами. Тому при $n = 2m + 1$ маємо

$$Z_1(n) = (n-1)(n-3)\dots 1 = 2(m)2(m-1)\dots 2 \cdot 1 = 2^m \cdot m! \quad (8)$$

2) Розглянемо тепер випадок коли $n = 2m$ – рис. 5 а).

2.1) Кожну діаграму симетричну відносно певної осі симетрії, що проходить через середини протилежних чорних дуг (наприклад, відносно осі l_{b_1}) можна подати у вигляді циклу

$$(b'_{i_{m-1}}, \dots, b'_{i_3}, b'_{i_2}, \boxed{b_1}, b_{i_2}, b_{i_3}, \dots, b_{i_{m-1}}, \boxed{b_{m+1}}), \quad b'_{m+1} = b_{m+1},$$

де b'_{i_k} – дуга симетрична дузі b_{i_k} відносно осі l_{b_1} , $i_k \neq 1, i_k \neq m+1$.

Тоді дугу b_{i_2} можна обрати $(n-2)$ способами, при цьому з подальшого розгляду виключається й дуга симетрична обраній (щоб запобігти ситуації, зображеної на рис. 5 с)); дугу b_{i_3} – $(n-4)$ способами; ...; дугу $b_{i_{m-2}}$ – 4 способами; дугу $b_{i_{m-1}}$ – 2 способами. Таким чином, при $n = 2m$ маємо

$$\begin{aligned} Z_{2,1}(n) &= (n-2)(n-4)\dots 2 = \\ &= (2m-2)(2m-4)\dots 2 = 2(m-1)2(m-2)\dots 2 \cdot 1 = 2^{m-1} \cdot (m-1)! \end{aligned} \quad (9)$$

Та обставина, що чорна дуга b_{m+1} ніби "замикає" послідовність чорних дуг діаграми є суттєвою, бо при іншому її розташуванні відносно дуги b_1 виникає ситуація подібна до тієї, яка зображена на рис. 5 b), коли симетрична діаграма має більше одного чорного циклу.

2.2) Всі діаграми симетричні відносно осі, що проходить через середини протилежних білих дуг (наприклад, відносно l_{w1}) можна подати у вигляді одного з m можливих (для нашої ситуації) циклів виду

$$\begin{aligned} & (b'_{i_m}, \dots, b'_{i_4}, b'_{i_3}, \boxed{b_2}, \boxed{b_1}, b_{i_3}, b_{i_4}, \dots, b_{i_m}), \\ & (b'_{i_{m-1}}, \dots, b'_{i_4}, b'_{i_3}, \boxed{b_2}, b_{i_m}, b'_{i_m} \boxed{b_1}, b_{i_3}, b_{i_4}, \dots, b_{i_{m-1}}), \\ & \dots \\ & (\boxed{b_2}, b_{i_3}, b_{i_4}, \dots, b_{i_m}, b'_{i_m}, \dots, b'_{i_4}, b'_{i_3}, \boxed{b_1}), \end{aligned}$$

де b'_{i_k} – дуга симетрична дузі b_{i_k} відносно осі l_{w1} , $i_k \neq 1, i_k \neq m+1$.

Тоді, з урахуванням пункту 2.1, не важко зробити висновок, що при $n = 2m$

$$Z_{2,2}(n) = m \cdot 2^{m-1} \cdot (m-1)! \quad (10)$$

□

Теорема 4.1 Число нееквівалентних діаграм з класу $\mathfrak{S}_{1,n}$ можна обчислити за допомогою співвідношень

$$d_n^{**} = \begin{cases} \frac{1}{2}(d_n^* + 2^m \cdot m!), & n = 2m + 1 \\ \frac{1}{2}(d_n^* + 2^{m-2} \cdot (m+1) \cdot (m-1)!), & n = 2m. \end{cases} \quad (11)$$

Доведення є наслідком Лема 4.1 та співвідношень (6).

Нижче наведено неізоморфні діаграми з класу $\mathfrak{S}_{1,n}$ для початкових $n = 4; 5; 6$.

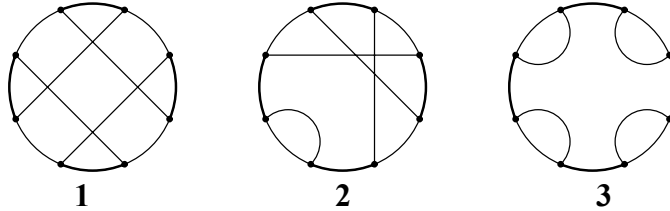


Рис. 6 Всі неізоморфні діаграми з класу $\mathfrak{S}_{1,4}$

Наведені діаграми є нееквівалентними. Тому $d_4^{**} = 3$.

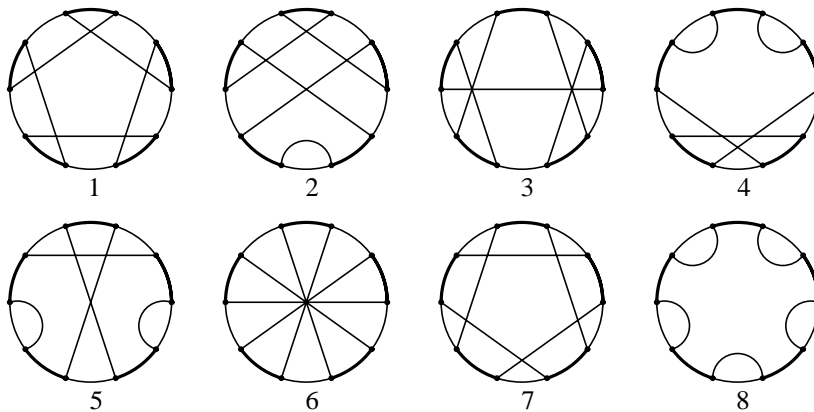


Рис. 7 Всі неізоморфні діаграми з класу $\mathfrak{S}_{1,5}$

Наведені діаграми є також і нееквівалентними. Тому $d_5^{**} = 8$.

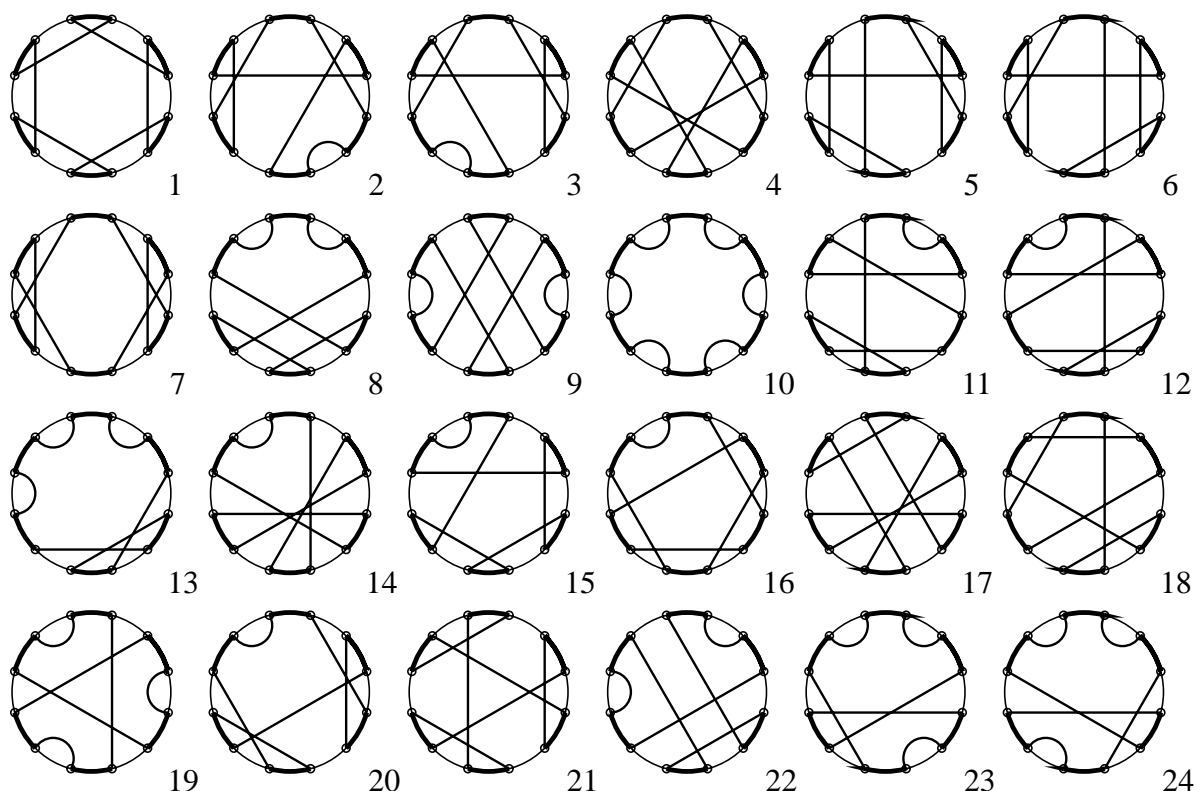


Рис. 8 Всі неізоморфні діаграми з класу $\mathfrak{S}_{1,6}$.

Оскільки еквівалентними є наступні пари діаграм: 2 і 3; 5 і 6; 11 і 12; 23 і 24, то $d_6^{**} = 20$.

На думку авторів дослідження в цьому напрямку можуть бути успішно продовжені за рахунок розв'язування задач на підрахунок числа нееквівалентних O –діаграм з фіксованими числами циклів кожного кольору.

Одержані в роботі результати можуть бути ефективно використані в тих галузях науки, де виникають інваріанти, схожі до кола з відміченими точками. Відомо, що вказані об'єкти виникають в біології. З деякими застосуваннями двокольорових діаграм в топології можна ознайомитись в роботі [4].

Література

1. *J.E.A. Steggall* On the numbers of patterns which can be derived from certain elements // *Messenger Math.*, 37:56–61, 1907.
2. *Vella A.* Pattern avoidance in permutations: linear and cyclic orders // *The electronic journal of combinatorics* №10, 2003.
3. *Калужнин Л.А., Суцанский В.И.* Преобразования и перестановки // М.: Наука. 1979.
4. *Кадубовський О.* Про один клас хордових діаграм максимального роду // Вісник Київського університету Серія: фізико-математичні науки, Вип. 1, 2006, с. 17–27.

УДК 519.115.1: 519.175.3

Манойло Т.О., Сіра М.І., Кадубовський О.А.

¹Студентка 5 курсу групи 5М-1 фізико-математичного факультету СДПУ,

²Студентка 5 курсу групи 5М-1 фізико-математичного факультету СДПУ,

³Доцент кафедри геометрії та методики викладання математики СДПУ

Про число неізоморфних та нееквівалентних хордових діаграм

Встановлено формули для підрахунку числа як неізоморфних (з точністю до повороту), так і нееквівалентних (відносно дії дієдральної групи) хордових діаграм з n хордами. Для початкових n наведено неізоморфні n – діаграми.

Ключові слова: хордова діаграма, циклічна група, група дієдра, лема Бернсайда.

Вступ. У 1998 році незалежно один від одного в роботах [2], [3] і [4] авторами було встановлено формули для підрахунку числа неізоморфних (з точністю до повороту) хордових n – діаграм. В роботі [2] для підрахунку вказаної величини було використане поняття лінеаризації, в [4] – вінцевий добуток, в [3] – так, званні, підняття. Зокрема, в роботах [2] і [4] було встановлено формули для підрахунку й числа нееквівалентних (відносно дії дієдральної групи) хордових n – діаграм.

В данній роботі для одержання вказаних формул використано інший підхід, який реалізується комбінаторно-геометричними методами, та базується на ідеї, запропонованій в роботі [5], присвяченій алгоритму побудови неізоморфних n – діаграм в залежності від n .

1. Основні поняття та визначення

Означення 1.1 Нехай на площині задано коло і $2n$ точок на ньому, які є вершинами правильного $2n$ – кутника. Розіб'ємо ці точки на n пар і з'єднаємо кожну таку пару хордою. Отриману конструкцію (коло з n хордами на ньому) називають хордовою діаграмою з n хордами, або ж n – діаграмою (рис. 1 a, b)).

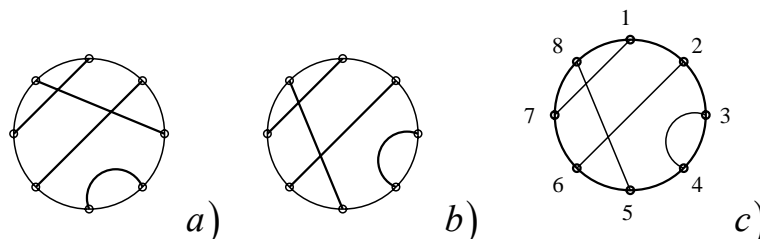


Рис. 1. $a), b)$ Неізоморфні але еквівалентні 4 – діаграми; $c)$ $2n$ – шаблон

Нехай D – хордова діаграма з $2n$ вершинами. Занумеруємо останні числами від 1 до $2n$ рухаючись за годинниковою стрілкою від деякої фіксованої точки на колі (рис. 1 c)).

Побудуємо перестановку α (інволюцію)

$$\alpha = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & a_2 & b_2 & \dots & a_n & b_n \\ b_1 & a_1 & b_2 & a_2 & \dots & b_n & a_n \end{pmatrix} = (a_1, b_1) \circ (a_2, b_2) \circ \dots \circ (a_n, b_n),$$

де a_i і b_i – номери вершин діаграми, які сполучено хордою. Надалі будемо вважати, що всі n –діаграми будуються на основі $2n$ –шаблону – рис. 1 с).

Тоді кожна діаграма $D = D(\alpha)$ однозначно визначає перестановку α і навпаки.

Означення 1.2 Перестановку α , що визначає хордову діаграму $D(\alpha)$ на шаблоні, будемо називати склейкою, а множину таких склейок позначати B_{2n} .

Зауваження 1.1 В подальшому діаграму $D(\alpha)$ та її склейку будемо ототожнювати. А множину n –діаграм позначати \mathfrak{S}_n .

Добре відомо [1], що число n –діаграм визначається величиною

$$d_n = (2n-1)!! = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-3) \cdot (2n-1) = \frac{(2n)!}{n! \cdot 2^n} \quad (1)$$

Означення 1.3 Дві діаграми $D_1(\alpha)$ і $D_2(\alpha')$ називають ізоморфними, якщо одну можна одержати з іншої в результаті повороту навколо спільного центру.

Означення 1.4 Діаграми $D_1(\alpha)$ і $D_2(\alpha')$ називають еквівалентними, якщо вони є або ізоморфними, або ж одну можна одержати з іншої в результаті перевертання (дзеркального відбиття) та повороту навколо спільного центру.

Означення 1.5 Циклічну групу порядку $2n$, породжену перестановкою $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & 2n-1 & 2n \\ 2 & 3 & \dots & 2n & 1 \end{pmatrix}$, будемо позначати $C_{2n} = \{\sigma^k \mid k=1, 2, \dots, 2n\}$.

Не важко бачити, що всі симетрії $2n$ –шаблону (рис. 1 с)) породжуються поворотом σ (на кут $\varphi = \frac{2\pi}{n}$) і осьовою симетрією (дзеркальним відбиттям) b

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & 2n-1 & 2n \\ 2 & 3 & \dots & 2n & 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n+1 & \dots & 2n-1 & 2n \\ 1 & 2n & \dots & n+1 & \dots & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Таким чином, всі симетрії $2n$ –шаблону складаються з $4n$ елементів $D_{4n} = \{\sigma^i, \tau_i = b \circ \sigma^i \mid i=1, \dots, 2n\}$ і утворюють групу діедра порядку $4n$.

Більш повну інформацію можна знайти, наприклад в [2–4], [7].

2. Число неізоморфних n –діаграм

Як впливає з [3], число d_n^* неізоморфних n –діаграм дорівнює числу $d_{\mathfrak{S}_n}(C_{2n})$ орбіт дії групи C_{2n} на множині хордових n –діаграм, а якщо точніше – на множені B_{2n} відповідних склейок. Тоді, за лемою Бернсайда має місце рівність

$$d_n^* = d_{\mathfrak{S}_n}(C_{2n}) = \frac{1}{2n} \cdot \left((2n-1)!! + \sum_{q|2n, q \neq 2n} \phi\left(\frac{2n}{q}\right) \cdot \text{Fix}_{\mathfrak{S}_n}(\sigma^q) \right), \quad \text{де} \quad (2)$$

$\text{Fix}_{\mathfrak{S}_n}(\sigma^q)$ – число n –діаграм, нерухомих відносно дії групового елементу σ^q , тобто число n –діаграм, які само суміщаються при повороті на кут $\omega_q = \frac{2\pi}{2n} \cdot q$ за годинниковою стрілкою; $\phi(z)$ – функція Ейлера.

Теорема 2.1 Величина $\text{Fix}_{\mathfrak{S}_n}(\sigma^q)$ може бути обчислена за допомогою співвідношення

$$\text{Fix}_{\mathfrak{S}_n}(\sigma^q) = \begin{cases} (q-1)!! \cdot \left(\frac{2n}{q}\right)^{q/2}, & \frac{2n}{q} = 2l+1 \\ \sum_{r=0}^{\lfloor q/2 \rfloor} C_q^{2r} \cdot (2r-1)!! \cdot \left(\frac{2n}{q}\right)^r, & \frac{2n}{q} = 2l \end{cases} \quad (3)$$

Доведення. Позначимо через $T(2n, p) = \text{Fix}_{\mathfrak{S}_n}(\sigma^q)$, де $pq = 2n$ та встановимо рекурентне співвідношення для величини $T(2n, p)$ у кожному з двох випадків, коли p є непарним або ж парним відповідно.

Занумеруємо вершини n -діаграми числами від 1 до $2n$ за годинниковою стрілкою. Тобто, розглянемо $2n$ -шаблон. З урахуванням нумерації вершин діаграми, визначимо довжини хорд з початком і кінцем у вершинах i, j відповідно, як $(j-i) \bmod 2n$ ($i < j$). Зафіксуємо далі множину вершин з номерами $q, 2q, \dots, pq$ (де $pq = 2n$), виділивши їх на шаблоні серед інших точок.

Отже, розглянемо хорди діаграми з початком у відмічених вершинах $q, 2q, \dots, pq$. Якщо хордова діаграма є нерухомою відносно дії групового елементу σ^q (повороту на кут $\omega_q = \frac{2\pi}{2n} \cdot q$), то довжини хорд з початком у відмічених точках повинні бути рівними.

Пояснимо: якщо діаграма, нерухома відносно дії групового елементу σ^q , містить хорду $[q, l]$ (довжини $l-q$), то обов'язково повинна бути і хорда $[2q, l+q]$ в яку вона переходить при повороті на кут $\omega_q = \frac{2\pi}{2n} \cdot q$. Остання повинна переходити в хорду $[3q, l+2q]$ і так далі.

1) Якщо p непарне, то з рівності $2n = pq$ випливає, що q є парним. Очевидно, що в цьому випадку не може виникнути ситуації, коли хорди, з початком у відмічених точках $q, 2q, 3q, \dots, pq$ мають кінцями точки з цієї множини. Бо p є непарним і тому для однієї з вказаних точок не буде пари. Таким чином, для довжин хорд з початком у відмічених точках, існують лише $2n - p$ можливостей. Причому, від вибору першої з відмічених точок це число не залежить, оскільки задання першої хорди однозначно визначає решту $(p-1)$ хорд. Якщо проігнорувати одну з $2n - p$ можливих сукупностей хорд, то задача зведеться до знаходження величини $T(2n - 2p, p)$ (після "видалення" p хорд видалиться $2p$ точок) – рис. 2 а).

Таким чином, маємо рекурентне співвідношення

$$T(2n, p) = (2n - p) \cdot T(2n - 2p, p). \quad (4)$$

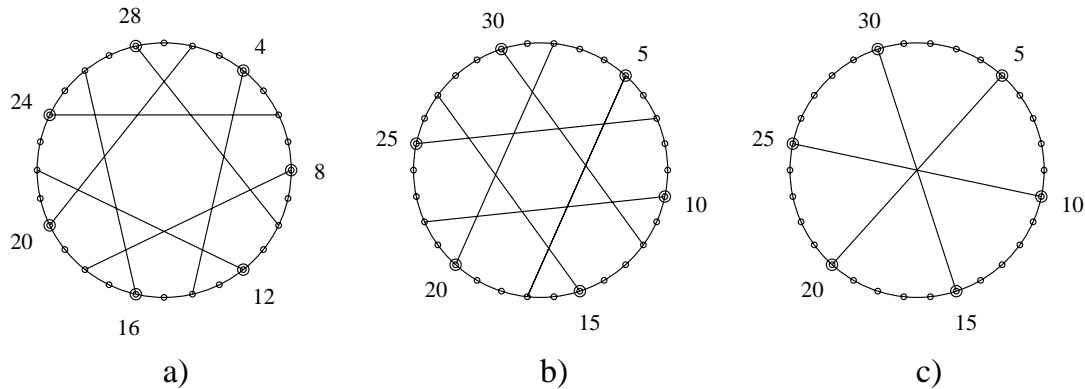


Рис. 2. Підмножини хорд діаграми, що є нерухомою відносно повороту на кут $\frac{2\pi}{2n} \cdot q$ за годинниковою стрілкою

Встановимо граничні умови для рекурентного співвідношення (4). А саме, покажемо, що $T(0, p) = 1$. Для цього достатньо подати величину $T(2p, p)$ у наступному вигляді

$$T(2p, p) = (2p - p) \cdot T(0, p) = p \cdot T(0, p). \quad (4.1)$$

Очевидно, що з умови $2n = qp = 2p$ слідує, що $q = 2$. І задача зводиться до підрахунку числа всіх p -діаграм, нерухомих відносно дії елементу σ^2 (повороту на кут $\omega_2 = \frac{2\pi}{2p} \cdot 2$). Але ж всі такі діаграми вичерпуються склейками виду

$$\alpha = (1, m)(3, m+2)(5, m+4)(7, m+6) \dots (2n-1, m+2(p-1)).$$

Оскільки $m \in \{2, 4, \dots, 2p\}$, то існує лише p таких p -діаграм. Звідки й випливає, що $T(2p, p) = p$. Як наслідок з (4.1), маємо справедливості граничної умови

$$T(0, p) = 1. \quad (4.2)$$

2) Нехай тепер p є парним. Тоді q може бути як парним так і непарним числом. В цьому випадку можливі дві ситуації:

2.1) коли хорди, з початком у відмічених точках $q, 2q, 3q, \dots, pq$ не мають кінцями точки з цієї множини. Аналогічно попередньому випадку маємо рівно $(2n - p) \cdot T(2n - 2p, p)$ таких можливостей – рис. 2 б);

2.2) коли хорди, з початком у відмічених точках $q, 2q, 3q, \dots, pq$ мають кінцями точки з цієї множини. Існує єдине можливе таке розбиття на пари, а саме – рис. 2 с):

$$(q; (p/2 + 1)q)(2q; (p/2 + 1)q + q)(3q; (p/2 + 1)q + 2q) \dots ((p/2)q; pq).$$

Якщо проігнорувати (видалити) ці хорди, то задача зведеться до знаходження величини $T(2n - p, p)$, бо після «видалення» $p/2$ хорд видалиться рівно p вершин. Таким чином, у випадку парного p маємо рівність

$$T(2n, p) = (2n - p) \cdot T(2n - 2p, p) + 1 \cdot T(2n - p, p). \quad (5)$$

Встановимо граничні умови для рекурентного співвідношення (5). А саме, покажемо справедливості рівностей $T(0, p) = T(p, p) = 1$.

Для цього достатньо подати величину $T(2p, p)$ у вигляді

$$T(2p, p) = (2p - p) \cdot T(0, p) + T(p, p) = p \cdot T(0, p) + T(p, p). \quad (5.2)$$

Очевидно, що з умови $2n = qp = 2p$ слідує, що $q = 2$. І задача зводиться до підрахунку числа всіх p -діаграм, нерухомих відносно дії елементу σ^2 (повороту на кут $\omega_2 = \frac{2\pi}{2p} \cdot 2$). Але ж склейки всіх таких діаграм мають вид

$$\alpha = (1, m)(3, m+2)(5, m+4)(7, m+6) \dots (2n-1, m+2(p-1)), \quad \text{або ж}$$

$$\alpha = (1, p+1)(2, p+2)(3, p+3)(4, p+4)(5, p+5) \dots (p-1, 2p-1)(p, 2p).$$

Звідки й маємо, що $T(2p, p) = p + 1$. Тому з (5.2) маємо

$$T(0, p) = 1 = T(p, p). \quad (5.3)$$

На рис. 2 а) зображено всі фіксовані вершини з номерами $q, 2q, 3q, \dots, pq$ та обов'язкову підмножину хорд діаграми, що є нерухомою під дією елементу σ^q (відносно повороту на кут $\omega_q = \frac{2\pi}{2n} \cdot q$) для випадку $2n = 28$, $q = 4$, $p = 7$;

на рис. 2 б) зображено обов'язкову підмножину хорд діаграми, нерухомої під дією елементу σ^q для випадку $2n = 30$, $q = 5$, $p = 6$ та немає хорд, що сполучають вершини з номерами $q, 2q, 3q, \dots, pq$;

на рис. 2 с) зображено єдиний можливий випадок для хорд, що сполучають пари точок з номерами $q, 2q, 3q, \dots, pq$ ($2n = 30$, $q = 5$, $p = 6$).

Таким чином, для величини $T(2n, p)$, $pq = 2n$ мають місце рівності

$$T(2n, p) = \begin{cases} (2n - p) \cdot T(2n - 2p, p), & T(0, p) = 1, & p = 2m - 1 \\ (2n - p) \cdot T(2n - 2p, p) + T(2n - p, p), & T(p, p) = T(0, p) = 1, & p = 2m \end{cases} \quad (6)$$

По суті, нам залишилось знайти вираз для $T(2n, p)$ в явному виді для обох випадків (непарного і парного p).

2.1) Встановимо формулу для рекурентного співвідношення (6) для випадку непарного p з граничною умовою $T(0, p) = 1$. Для цього достатньо кількість разів застосувати це співвідношення для знов отриманих величин

$$\begin{aligned} T(2n, p) &= (2n - p) \cdot T(2n - 2p, p) = (2n - p) \cdot ((2n - 3p) \cdot T(2n - 4p, p)) = \\ &= (2n - p) \cdot (2n - 3p) \cdot ((2n - 5p) \cdot T(2n - 6p, p)) = \\ &= (2n - p) \cdot (2n - 3p) \cdot (2n - 5p) \cdot \dots \cdot (3p \cdot T(2p, p)) = \\ &= (2n - p) \cdot (2n - 3p) \cdot \dots \cdot 3p \cdot p \cdot T(0, p) = (2n - p) \cdot (2n - 3p) \cdot (2n - 5p) \cdot \dots \cdot 3p \cdot p = \\ &= (pq - p) \cdot (pq - 3p) \cdot (pq - 5p) \cdot \dots \cdot 3p \cdot p = p(q - 1) \cdot p(q - 3) \cdot p(q - 5) \cdot \dots \cdot 3p \cdot 1p = \\ &= p^{q/2} \cdot (q - 1)!! \end{aligned}$$

Таким чином, для непарних p маємо формулу

$$T(2n, p) = p^{q/2} \cdot (q - 1)!!, \quad 2n = pq. \quad (7)$$

Встановимо тепер формулу в явному вигляді для рекурентного співвідношення (6) у випадку парного p з граничними умовами

$$T(p, p) = T(0, p) = 1.$$

Випишемо декілька членів, заданих цим рекурентним співвідношенням, здійснюючи викладки індукцією за q :

$$2n = qp = 1p = 2p = 3p = 4p = 5p = \dots$$

$$0) \quad q = 0: \quad T(2n, p) = T(0, p) = 1 = 1 + 0 \cdot p.$$

$$1) \quad q = 1: \quad T(2n, p) = T(p, p) = 1 = 1 + 0 \cdot p.$$

$$2) \quad q = 2: \quad T(2n, p) = T(2p, p) = (2p - p)T(0, p) + T(p, p) = 1p + 1 = 1 + 1p^1.$$

$$3) \quad q = 3: \quad T(2n, p) = T(3p, p) = (3p - p)T(p, p) + T(2p, p) = 2p \cdot 1 + p + 1 = 1 + 3p^1.$$

$$4) \quad q = 4: \quad T(2n, p) = T(4p, p) = (4p - p)T(2p, p) + T(3p, p) = 3p \cdot (1 + p) + (1 + 3p) = 1 + 6p^1 + 3p^2 = 1 + (1 + 2 + 3)p^1 + 3p^2.$$

$$5) \quad q = 5: \quad T(2n, p) = T(5p, p) = (5p - p)T(3p, p) + T(4p, p) = 4p \cdot (1 + 3p) + (1 + 6p^1 + 3p^2) = 1 + 10p^1 + 15p^2 = 1 + (1 + 2 + 3 + 4)p^1 + 15p^2.$$

$$6) \quad q = 6: \quad T(2n, p) = T(6p, p) = (6p - p)T(4p, p) + T(5p, p) = 5p \cdot (1 + 6p^1 + 3p^2) + (1 + 10p^1 + 15p^2) = 1 + 15p^1 + 45p^2 + 15p^3 = 1 + (1 + 2 + 3 + 4 + 5)p^1 + 45p^2 + 15p^3.$$

$$7) \quad q = 7: \quad T(2n, p) = T(7p, p) = (7p - p)T(5p, p) + T(6p, p) = 6p \cdot (1 + 10p^1 + 15p^2) + (1 + 15p^1 + 45p^2 + 15p^3) = 1 + 21p^1 + 105p^2 + 105p^3 = 1 + (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6)p^1 + 105p^2 + 105p^3.$$

Не важко бачити, що в кожному з розглянутих випадків результатом є многочлен

$$M_q(p) = \sum_{j=0}^{[q/2]} a(q, j) \cdot p^j \text{ степеня } [q/2], \text{ де } 2n = pq, \quad q = 1, 2, \dots$$

Причому

$$M_q(p) = (2n - p)M_{q-2}(p) + M_{q-1}(p) = p(q - 1)M_{q-2}(p) + M_{q-1}(p).$$

Очевидно, що останнє рекурентне співвідношення задає таке саме рекурентне співвідношення для коефіцієнтів $a(q, j) = a_j(q)$ многочленів

$$M_{q+2}(p), \quad M_{q+1}(p), \quad M_q(p).$$

А саме, коефіцієнти цих многочленів пов'язані співвідношенням

$$a(q + 2, j) = (q + 1) \cdot a(q, j - 1) + a(q + 1, j). \quad (8)$$

$2n = q \cdot p$	$a_0(q)$	$a_1(q)$	$a_2(q)$	$a_3(q)$	$a_4(q)$...	$a_{[q/2]-1}(q)$	$a_{[q/2]}(q)$
$q = 0$	1	0	0	0	0	0	0	0
$q = 1$	1	0	0	0	0	0	0	0
$q = 2$	1	1	0	0	0	0	0	0
$q = 3$	1	3	0	0	0	0	0	0
$q = 4$	1	6	3	0	0	0	0	0
$q = 5$	1	10	15	0	0	0	0	0
$q = 6$	1	15	45	15	0	0	0	0
$q = 7$	1	21	105	105	0	0	0	0
$q = 8$	1	28	210	420	105	0	0	0

Таким чином, поставлену задачу можна звести до задачі про знаходження формули для обчислення коефіцієнтів $a(q, j) = a_j(q)$ многочлена $M_q(p)$ при фіксованому q .

Індукцією по q доведемо справедливість формули

$$a(q, j) = C_q^{2j} \cdot (2j - 1)!! \quad \forall q, \quad \forall j = 0, \dots, [q/2]. \quad (9)$$

База індукції:

$$a(1, 0) = 1, \quad a(q, 0) = 1 = C_q^0 \cdot (2 \cdot 0 - 1)!! \quad \forall q.$$

$$a(q, 1) = (1 + 2 + \dots + (q - 1)) = \frac{q(q - 1)}{2} = C_q^{2 \cdot 1} \cdot (2 \cdot 1 - 1)!! \quad \forall q.$$

Припустимо що формула є вірною для коефіцієнтів $a(q, j - 1)$, $a(q + 1, j)$ і доведемо, що

$$a(q + 2, j) = C_{q+2}^{2j} \cdot (2j - 1)!! \quad (9.1)$$

Для цього, в силу справедливості рекурентного співвідношення (6) для коефіцієнтів, достатньо перевірити справедливість рівності

$$C_{q+2}^{2j} \cdot (2j - 1)!! = (q + 1) \cdot C_q^{2(j-1)} \cdot (2(j - 1) - 1)!! + C_{q+1}^{2j} \cdot (2j - 1)!! \quad (9.2)$$

Розділивши на $(2j - 3)!!$, маємо

$$\begin{aligned} \frac{(q + 2)! \cdot (2j - 1)}{(2j)!(q - 2j + 2)!} &= \frac{(q + 1) \cdot q!}{(2j - 2)!(q - 2j + 2)!} + \frac{(q + 1)! \cdot (2j - 1)}{(2j)!(q - 2j + 1)!} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \frac{(q + 2)}{(2j)!} \cdot (2j - 1) &= \frac{1}{(2j - 2)!} + \frac{(q - 2j + 2)}{(2j)!} \cdot (2j - 1) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (q + 2) \cdot (2j - 1) &= 2j \cdot (2j - 1) + (2j - 1) \cdot (q - 2j + 2) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (q + 2) &= 2j + (q - 2j + 2) \Leftrightarrow q = q. \end{aligned}$$

Отже, для парних p справджується рівність

$$a(q, j) = C_q^{2j} \cdot (2j - 1)!! \quad \forall j = 0, \dots, [q/2].$$

Тому для парних p маємо остаточну формулу

$$T(2n, p) = \sum_{j=0}^{[q/2]} C_q^{2j} \cdot (2j - 1)!! \cdot p^j, \quad 2n = pq. \quad (10)$$

□

3. Число нееквівалентних хордових n – діаграм

За лемою Бернсайда (див. напр. [7]), не важко встановити, що число $d_n^{**} = d_{\mathfrak{S}_n}(D_{4n})$ орбіт групи дієдра D_{4n} , що діє на множині \mathfrak{S}_n (число нееквівалентних n – діаграм) визначається за допомогою співвідношення

$$d_n^{**} = \frac{1}{2} \left(d_n^* + \frac{1}{2} \cdot (Z_1(n) + Z_2(n)) \right), \text{ де} \quad (11)$$

$Z_1(n)$ – число діаграм з \mathfrak{S}_n , що є симетричними відносно фіксованої осі симетрії, яка проходить через (діаметрально) протилежні вершини шаблону;

$Z_2(n)$ – число діаграм з \mathfrak{S}_n , що є симетричними відносно фіксованої осі симетрії, що проходить через середини протилежних дуг шаблону – рис. 3.

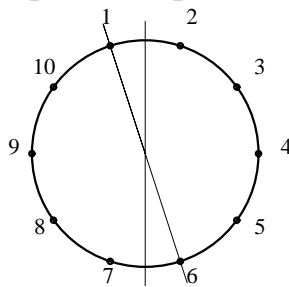


Рис. 3 Вісі симетрії $2n$ – шаблону ($n = 5$)

Твердження 3.1 Для довільного натурального $n \geq 2$ справджується рівність

$$Z_1(n) = Z_2(n-1). \quad (12)$$

Лема 3.1 Число хордових n – діаграм, симетричних відносно довільної осі симетрії, що проходить через середини протилежних дуг шаблону можна обчислити за допомогою співвідношень

$$Z_2(n) = \begin{cases} n! \cdot \sum_{i=0}^m \frac{1}{(2i)! \cdot (m-i)!}, & n = 2m \\ n! \cdot \sum_{i=0}^m \frac{1}{(2i+1)! \cdot (m-i)!}, & n = 2m+1 \end{cases} \quad (13)$$

Доведення. Нехай $D(\alpha)$ – діаграма, що є симетричною відносно зазначеної осі симетрії шаблону. Нехай далі a_i ($i=1, \dots, n$) – номери вершин шаблону, що лежать по один бік від осі симетрії, а b_i – номери симетричних до них вершин. Очевидно, що можливими є ситуації, коли хорда є симетричною відносно осі. Згідно введених позначень, всі такі хорди мають вид $[a_i, b_i]$. Для зручності будемо називати їх *нерухомими* або ж *самосиметричними*.

Зауважимо, що при парних $n = 2m$ число нерухомих хорд може бути лише парним, а при непарних $n = 2m+1$ – лише непарним.

Розглянемо випадок, коли $n = 2m$. Існує лише $m+1$ суттєво різних випадків, коли діаграма містить точно $2i$ ($i=0, \dots, m$) нерухомих хорд. Ті, що залишилися $2(m-i)$ хорд, не можуть бути нерухомими і утворюють $(m-i)$ пар взаємно симетричних хорд.

Утворення пар взаємно симетричних хорд слід розуміти керуючись правилом: кожному вибору 2 точок з номерами a_i, a_j однозначно ставиться у відповідність пара симетричних точок з номерами b_i, b_j . Тоді можна одержати дві пари взаємно симетричних хорд $(a_i, a_j), (b_i, b_j)$ та $(a_i, b_j), (a_j, b_i)$.

Число способів утворення $(m-i)$ таких пар становить

$$\frac{C_{2(m-i)}^2 \cdot 2 \cdot C_{2(m-i-1)}^2 \cdot 2 \cdot \dots \cdot C_4^2 \cdot 2 \cdot C_2^2 \cdot 2}{(m-i)!} = \frac{(2(m-i))!}{(m-i)!}.$$

Тому при $n = 2m$ маємо

$$Z_2(n) = \sum_{i=0}^m C_n^{2i} \cdot \frac{(2(m-i))!}{(m-i)!} = \sum_{i=0}^m \frac{n!}{(2i)! \cdot (n-2i)!} \cdot \frac{(2(m-i))!}{(m-i)!} = \sum_{i=0}^m \frac{n!}{(2i)! \cdot (m-i)!}.$$

У випадку $n = 2m+1$ можливі лише $m+1$ суттєво різних випадків. А саме, коли діаграма містить точно $2i+1$ ($i=0, \dots, m$) нерухомих хорд. Ті, що залишилися $2(m-i)$ хорди не можуть бути нерухомими й утворюють $(m-i)$ пар взаємно симетричних хорд. Провівши міркування, аналогічні випадку $n = 2m$, маємо наступний результат

$$Z_2(n) = \sum_{i=0}^m C_n^{2i+1} \cdot \frac{(2(m-i))!}{(m-i)!} = \sum_{i=0}^m \frac{n!}{(2i+1)! \cdot (m-i)!}. \quad \square$$

Твердження 3.2 Для довільного натурального $n \geq 2$ має місце рівність

$$Z_2(n) = \sum_{j=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \frac{n!}{j! \cdot (n-2j)!}. \quad (14)$$

Доведення зводиться до звичайної перевірки тотожностей

$$\sum_{i=0}^m \frac{1}{(2i)! \cdot (m-i)!} \equiv \sum_{j=0}^m \frac{1}{j! \cdot (2m-2j)!} \text{ та } \sum_{i=0}^m \frac{1}{(2i+1)! \cdot (m-i)!} \equiv \sum_{j=0}^m \frac{1}{j! \cdot (2m-(2j-1))!}.$$

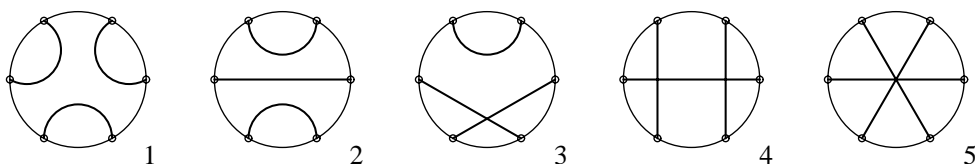
Теорема 3.2 Число нееквівалентних (відносно дії дієдральної групи) хордових n -діаграм може бути обчислене за допомогою наступних співвідношень

$$d_n^{**} = \frac{1}{2} \left(d_n^* + \frac{1}{2} \cdot (Z_2(n-1) + Z_2(n)) \right), \quad Z_2(n) = \sum_{j=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \frac{n!}{j! \cdot (n-2j)!}, \text{ де } \quad (15)$$

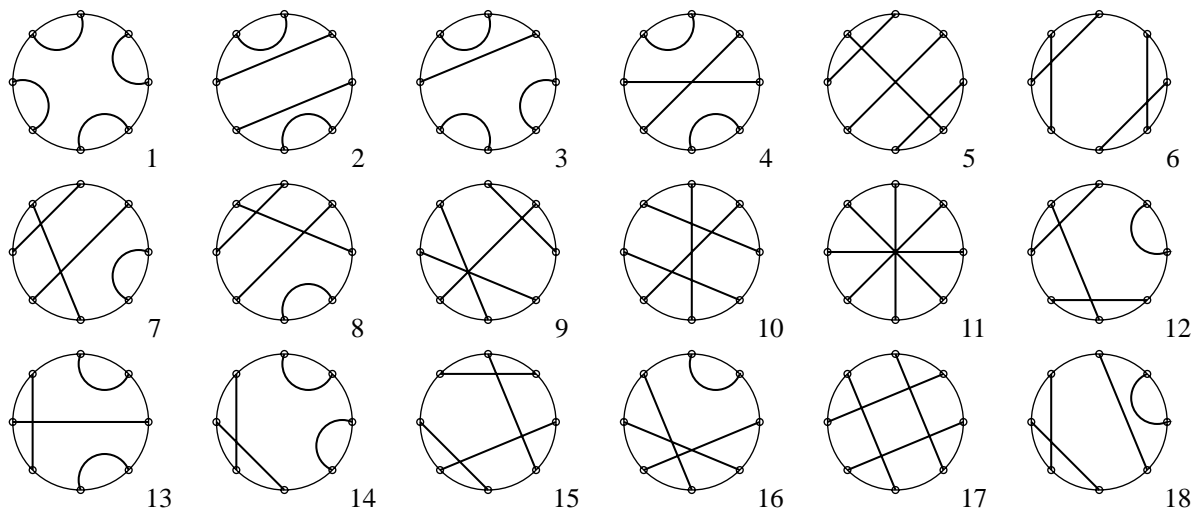
величина d_n^* визначається за співвідношенням (2).

Справедливість теореми є наслідком Тверджень 3.1 і 3.2 та співвідношень (2), (3).

Нижче наведені всі неізоморфні 3- і 4-діаграми відповідно.



Очевидно, що всі неізоморфні 3-діаграми нееквівалентні і під дією групи діедра. Тому $d_3^{**} = 5$.



За виключенням діаграм 7 та 8 неізоморфні 4-діаграми є нееквівалентними й під дією групи діедра. Тому $d_4^{**} = 17$.

Значення величини d_n^{**} при $n = 5$ вперше було встановлено у роботі [6], в якій наведено всі 79 нееквівалентних 5-діаграм.

Таким чином, запропонований в роботі підхід дозволив встановити формули для підрахунку числа як неізоморфних, так і нееквівалентних хордових n -діаграм.

З деякими застосуваннями хордових діаграм можна ознайомитись в [2], [6].

Література

1. Riordan J. The distribution of crossings of chords joining pairs of $2n$ points on a circle // Math. Comp. 29 no. 129, 1975, pp 215–222.
2. Stoimenov A. Enumeration of chord diagrams and an upper bound for Vassiliev invariants // Journal of Knot and its Ramifications, vol. 7, no. 1, 1998, pp. 93-114.
3. Gori R., Marcus M. Counting non-isomorphic chord diagrams // Theoretical Computer Science – 1998–204. – p. 55–73.
4. Khruzin A. Enumeration of chord diagrams // Arxiv: math., Preprint, 10p. 1998, <http://arxiv.org/abs/math.CO/0008209>
5. Sawada J. A Fast Algorithm for Generating Non-isomorphic Chord Diagrams // SIAM Journal on Discrete Mathematics, Vol. 15 No. 4 (2002) 546-561.
6. Мантуров В.О. Атомы, высотные атомы, хордовые диаграммы и узлы. Перечисление атомов малой сложности с использованием языка Mathematica 3.0 // Топологические методы в теории гамильтоновых систем – сб. статей под ред. А.В.Болсинова, А.Т.Фоменка, А.И.Шафаревича. М. Изд-во Факториал – 1998, с.203-212.
7. Калужнин Л.А., Суцанский В.И. Преобразования и перестановки // М.: Наука. 1979.

Близнець Т.Ф., Пащенко З.Д.

¹Студентка 5 курсу фізико-математичного факультету СДПУ,

²Доцент кафедри алгебри СДПУ

Про підстановки Гаспара Монжа

В нашому житті ми іноді зустрічаємося з цікавими задачами-іграми, розв'язок яких можна знайти за допомогою теорії підстановок. [1].

Задача Колода з 36 карт тасується наступним чином. Колода береться лицевим боком вниз в ліву руку і карти зверху по одній перекладаються в праву руку, причому в правій руці вони почергово кладуться то зверху, то знизу тих карт, які до цього часу вже зібрались в правій руці. Скільки разів необхідно повторити таку перестановку, щоб в колоді був відновлений початковий порядок? [1]

Викликає інтерес відповідь на питання цієї задачі у випадку $2n$ карт. Підстановки, які характеризують перетворення цієї задачі у випадку $2n$ карт, мають назву підстановок Гаспара Монжа. А відповідь даної задачі співпадає зі значеннями порядку відповідних підстановок.

Наприклад, при $n=5$ після першої перетасовки занумеровані по порядку карти розташуються наступним чином:

$$\begin{array}{cccccccccc} \langle 10 \rangle & \langle 8 \rangle & \langle 6 \rangle & \langle 4 \rangle & \langle 2 \rangle & \langle 1 \rangle & \langle 3 \rangle & \langle 5 \rangle & \langle 7 \rangle & \langle 9 \rangle \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10' \end{array}$$

а відповідна підстановка Гаспара Монжа, яка вказує номер місця, на яке переходить кожна карта, має вигляд:

$$\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 6 & 5 & 7 & 4 & 8 & 3 & 9 & 2 & 10 & 1 \end{pmatrix}$$

Виникає необхідність дослідити підстановки Гаспара Монжа степеня $2n$, знайти їх аналітичну формулу, дослідити залежність порядку цих підстановок від n .

Помічаємо, що в досліджуваній підстановці парні елементи від $2n$ до 2 відображаються в елементи від 1 до n , а непарні від 1 до $2n-1$ – в елементи від $n+1$ до $2n$. Тоді можемо одержати аналітичну формулу підстановки φ Гаспара Монжа степеня $2n$:

$$\varphi(x) = \begin{cases} n+1-t & \text{при } x=2t \\ n+t & \text{при } x=2t-1, t=1,2,\dots,n \end{cases} \quad (1).$$

Відомо, що довільну підстановку можна розкласти у добуток незалежних циклів, порядок такої підстановки дорівнює найменшому спільному кратному довжин цих циклів, а набір довжин усіх цих циклів називається типом підстановки. [1].

Твердження 1. Підстановка Гаспара Монжа степеня $2n$ буде мати нерухому точку тільки у випадку, коли $2n+2$ ділиться на 3, причому вона єдина і дорівнює $\frac{2}{3}(n+1)$.

Доведення. Нехай x – нерухома точка підстановки φ Гаспара Монжа степеня $2n$ ($\varphi(x)=x$). Тоді $1 < x < 2n$.

1. Нехай $x = 2t \Rightarrow \varphi(x) = n+1-t = 2t \Rightarrow 3t = n+1 \Rightarrow$ ціле число t існує, коли $n+1$ ділиться на 3 (а значить $2n+2$ ділиться на 3), причому воно єдине, тоді $x = \frac{2}{3}(n+1) = \frac{2n+2}{3}, 1 < x < 2n$.

2. Нехай $x = 2t-1 \Rightarrow \varphi(x) = n+t = 2t-1 \Rightarrow t = n+1 \Rightarrow x = 2n+1 > 2n$, що неможливо. Твердження доведено.

Провівши аналіз типів і значень порядків підстановок Гаспара Монжа в залежності від конкретних значень $n = 1, 2, \dots, 18$ (табл.1), виникає гіпотеза.

Гіпотеза. Якщо степінь підстановки Гаспара Монжа дорівнює 2^k , то її порядок $k+1$.

В даній таблиці 1 занесені також результати дослідження типів підстановок Гаспара Монжа степеня 2^k та значень їх порядків при $k = 6, 7, 8$.

При $k = 6$ число $2^6 = 64 = 7 \cdot 9 + 1$. Розкладемо підстановку Гаспара Монжа степеня 2^6 в добуток незалежних циклів. Так як число $2^6 + 2 = 66 : 3$, то підстановка буде мати нерухому точку $\frac{66}{3} = 22$, а значить і цикл $\varphi_0 = (22)$

довжини 1. Інші цикли будемо будувати як орбіти всіх елементів, користуючись аналітичною формулою (1) підстановки Гаспара Монжа степеня 2^6 . Побудуємо спочатку цикл $O(1, \varphi)$:

$$\begin{aligned} 1 &= 2 \cdot 1 - 1 & \varphi(1) &= 2^5 + 1 = 33, \\ 33 &= 2 \cdot 17 - 1 & \varphi(33) &= 2^5 + 17 = 49, \\ 49 &= 2 \cdot 25 - 1 & \varphi(49) &= 2^5 + 25 = 57, \\ 57 &= 2 \cdot 29 - 1 & \varphi(57) &= 2^5 + 29 = 61, \\ 61 &= 2 \cdot 31 - 1 & \varphi(61) &= 2^5 + 31 = 63, \\ 63 &= 2 \cdot 32 - 1 & \varphi(63) &= 2^5 + 32 = 64, \\ 64 &= 2 \cdot 32 & \varphi(64) &= 2^5 + 1 - 32 = 1. \end{aligned}$$

$\varphi_1 = O(1, \varphi) = (1, 33, 49, 57, 61, 63, 64)$, його довжина дорівнює 7.

Так як $2 \notin O(1, \varphi)$, то $O(2, \varphi) \neq O(1, \varphi)$ і побудуємо цикл $\varphi_2 = O(2, \varphi) = (2, 32, 17, 41, 53, 59, 62)$.

Аналогічно, $3 \notin O(1, \varphi), O(2, \varphi)$, тому $\varphi_3 = O(3, \varphi) = (3, 34, 16, 25, 45, 55, 60)$,

$\varphi_4 = O(4, \varphi) = (4, 31, 48, 9, 37, 51, 58), \quad \varphi_5 = O(5, \varphi) = (5, 35, 50, 8, 29, 47, 56),$
 $\varphi_6 = O(6, \varphi) = (6, 30, 18, 24, 21, 43, 54), \quad \varphi_7 = O(7, \varphi) = (7, 36, 15, 40, 13, 39, 52),$
 $8 \in \varphi_5, \quad 9 \in \varphi_4$
 $\varphi_8 = O(10, \varphi) = (10, 28, 19, 42, 12, 27, 46), \quad \varphi_9 = O(11, \varphi) = (11, 38, 14, 26, 20, 23, 44).$
 Довжини всіх цих циклів дорівнюють 7.

Інших циклів не існує, оскільки всі $2^6 = 64 = 7 \cdot 9 + 1$ чисел входять в знайдені цикли $\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_9$, а підстановка Гаспара Монжа степеня 2^6 розкладається в добуток дев'яти циклів довжини 7 і одного циклу довжини 1, має тип $\langle 7, 7, 7, 7, 7, 7, 7, 7, 7, 1 \rangle = \langle 7 \times 9, 1 \rangle$ і порядок НСД(7,1)=7=6+1.

Аналогічними підрахунками одержано, що при $k=7$ число $2^7 : (7+1)$ ($2^7 = 128 = 8 \cdot 16$), а підстановка Гаспара Монжа степеня 2^7 розкладається в добуток шістнадцяти циклів довжини 8, має тип $\langle 8, 8, \dots, 8 \rangle = \langle 8 \times 16 \rangle$ і порядок $8=7+1$; при $k=8$ число $2^8 = 256 = 9 \cdot 28 + 4$. Тип підстановки Гаспара Монжа степеня 2^8 має вигляд $\langle 9, 9, \dots, 9, 3, 1 \rangle = \langle 9 \times 28, 3, 1 \rangle$, а порядок дорівнює НСД(9,3,1)=9=8+1.

Таблиця 1

Значення порядків підстановок Гаспара Монжа.

2n	тип	порядок
$2=2^1$	$\langle 2 \rangle$	2
$4=2^2$	$\langle 3, 1 \rangle$	3
6	$\langle 6 \rangle$	6
$8=2^3$	$\langle 4, 4 \rangle$	4
10	$\langle 6, 3, 1 \rangle$	6
12	$\langle 10, 2 \rangle$	10
14	$\langle 14 \rangle$	14
$16=2^4$	$\langle 5, 5, 5, 1 \rangle$	5
18	$\langle 18 \rangle$	18
20	$\langle 10, 10 \rangle$	10
22	$\langle 12, 4, 3, 2, 1 \rangle$	12
24	$\langle 21, 3 \rangle$	21
26	$\langle 26 \rangle$	26
28	$\langle 9, 9, 9, 1 \rangle$	9
30	$\langle 30 \rangle$	30
$32=2^5$	$\langle 6, 6, 6, 6, 6, 2 \rangle = \langle 6 \times 4, 2 \rangle$	6
34	$\langle 22, 11, 1 \rangle$	22
36	$\langle 9, 9, 9, 9 \rangle$	9
2^6	$\langle 7, 7, 7, 7, 7, 7, 7, 7, 1 \rangle = \langle 7 \times 9, 1 \rangle$	7
2^7	$\langle 8 \times 16 \rangle$	8
2^8	$\langle 9 \times 28, 3, 1 \rangle$	9

Дані обчислення підтверджують висунуту гіпотезу, але не доводять її. Зробимо деякі спроби довести дану гіпотезу. По-перше, розглянемо можливі цикли, на які може бути розкладена підстановка Гаспара Монжа степеня 2^k ($n = 2^{k-1}$). Для того, щоб гіпотеза могла справдитись, довжини всіх цих циклів повинні бути дільниками $k+1$. Користуючись формулою (1), знайдемо орбіту $O(1, \varphi)$:

$$1. \quad x_1 = 1 - \text{непарне}, (x = 2t - 1, \varphi(x) = n + t) \quad t_1 = 1;$$

$$2. \quad x_2 = \varphi(x_1) = \varphi(1) = 2^{k-1} + 1 - \text{непарне}, t_2 = 2^{k-2} + 1;$$

$$3. \quad x_3 = \varphi(x_2) = \varphi(2^{k-1} + 1) = 2^{k-1} + 2^{k-2} + 1 - \text{непарне}, t_3 = 2^{k-2} + 2^{k-3} + 1;$$

$$4. \quad x_4 = \varphi(x_3) = \varphi(2^{k-1} + 2^{k-2} + 1) = 2^{k-1} + 2^{k-2} + 2^{k-3} + 1 - \text{непарне},$$

$$t_4 = 2^{k-2} + 2^{k-3} + 2^{k-4} + 1;$$

...

$$k. \quad x_k = 2^{k-1} + 2^{k-2} + \dots + 2^{k-(k-1)} + 1 - \text{непарне}, t_k = 2^{k-2} + 2^{k-3} + \dots + 2^{k-k} + 1;$$

$$k+1. \quad x_{k+1} = \varphi(x_k) = \varphi(2^{k-1} + 2^{k-2} + \dots + 2^1 + 1) = 2^{k-1} + 2^{k-2} + 2^{k-3} + \dots + 2^0 + 1.$$

Звернемо увагу що, $2^0 + 2^1 + \dots + 2^{k-1}$ – сума k членів геометричної прогресії, яка дорівнює $2^k - 1$, тоді $x_{k+1} = \varphi(2^{k-1} + 2^{k-2} + \dots + 2^1 + 1) = 2^k - \text{парне},$

$$(x = 2t, \varphi(x) = n + 1 - t) \quad t_1 = 1 \quad t_{k+1} = 2^{k-1};$$

$$k+2. \quad \varphi(2^k) = 2^{k-1} + 1 - 2^{k-1} = 1.$$

Тоді маємо, що цикл $\varphi_1 = (1, 2^{k-1} + 1, 2^{k-2} + 1, \dots, 2^{k-1} + 2^{k-2} + \dots + 2 + 1, 2^k)$ – це орбіта $O(1, \varphi)$, його довжина $k+1$. Тобто, одержуємо

Твердження 2. Порядок підстановки Гаспара Монжа степеня 2^k ділиться на $k+1$.

Гіпотеза була б доведена, якщо довести, що останні елементи утворюють орбіти з довжиною, яка є дільником $(k+1)$.

Нами розглянуто можливі типи підстановок Гаспара Монжа степеня 2^k при $9 \leq k \leq 18$ (табл.2), які задовольняли б висунутій гіпотезі. Всі ці типи повинні задовольняти твердженню 1 і довжини всіх взаємно простих циклів, на добуток яких розкладається підстановка, повинні бути дільниками $k+1$, тоді найменше спільне кратне цих довжин, що співпадає зі значенням порядку цієї підстановки, дорівнює $k+1$. Даний аналіз може допомогти у подальшому доведенні гіпотези.

Таблиця 2

Передбачувані значення порядків підстановок Гаспара Монжа степеня 2^k

ступінь	тип	порядок
2^9	$\langle 10 \times 51, 2 \rangle$ або $\langle 10 \times x, 5 \times 2y, 2 \times (5t + 1) \rangle$	$НСК(10, 2) =$ $= НСК(10, 5, 2) = 10$
2^{10}	$\langle 11 \times 93, 1 \rangle$	$НСК(11, 1) = 11$
2^{11}	$\langle 12 \times 170, 4, 4 \rangle$, або $\langle 12 \times 170, 6, 2 \rangle$, або $\langle 12 \times x, 6 \times y, 4 \times s, 2 \times t \rangle$	$НСК(12, 4) = НСК(12, 6, 2) =$ $= НСК(12, 6, 4, 2) = 12$
2^{12}	$\langle 13 \times 315, 1 \rangle$	$НСК(13, 1) = 13$
2^{13}	$\langle 14 \times 585, 2 \rangle$ або $\langle 14 \times x, 7 \times 2y, 2 \times 7t + 1 \rangle$	$НСК(14, 2) =$ $= НСК(14, 7, 2) = 14$
2^{14}	$\langle 15 \times 1092, 3, 1 \rangle$ або $\langle 15 \times x, 5 \times y, 3 \times s, 1 \rangle$	$НСК(15, 3, 1) =$ $= НСК(15, 5, 3, 1) = 15$
2^{15}	$\langle 16 \times 2048 \rangle$ або $\langle 16 \times x, 8 \times y, 4 \times s, 2 \times t \rangle$	$16 =$ $= НСК(16, 8, 4, 2,)$
2^{16}	$\langle 17 \times 3855, 1 \rangle$	$НСК(17, 1) = 17$
2^{17}	$\langle 18 \times 7281, 9, 3, 2 \rangle$, або $\langle 18 \times 7281, 6, 6, 2 \rangle$, або $\langle 18 \times x, 9 \times y, 6 \times s, 3 \times p, 2 \times t \rangle$	$НСК(18, 9, 3, 2) =$ $= НСК(8, 6, 2) =$ $= НСК(18, 9, 6, 3, 2) = 18$
2^{18}	$\langle 19 \times 262143, 1 \rangle$	$НСК(19, 1) = 19$

Література

1. Калужнин Л.А., Суцанский В.И. Преобразования и перестановки. – М.: Наука. 1979.
2. Кострикин А.И. Введение в алгебру. – М. : Наука. 1977.

Кайдан Н.В., Остимчук Г.С.

¹*Аспірантка механіко-математичного факультету Київського національного університету ім. Тараса Шевченка,*

²*Асистент кафедри алгебри СДПУ*

Застосування циклічних кодів в теорії кодування

В статті розглянута історія виникнення кодів, питання побудови кодуєчих і декодуєчих пристроїв, а також питання загальної теорії лінійних та циклічних кодів.

Ключові слова: *лінійні коди, циклічні коди, скінченне поле.*

Коди з'явилися в глибокій старовині у вигляді криптограм (по-грецьки – тайнопису), коли ними користувалися для засекречування важливого повідомлення від тих, кому воно не було призначене. Вже відомий грецький історик Геродот (V століття до н. е.) наводив приклади листів, зрозумілих лише для одного адресата. Спартанці мали спеціальний механічний прилад, за допомогою якого важливі повідомлення можна було писати особливим способом, що забезпечує збереження таємниці. Власна секретна азбука була у Юлія Цезаря. В середні віки і епоху Відродження над винаходом таємних шифрів працювало багато видатних людей, в їх числі філософ Френсис Бекон, крупні математики Франсуа Вієт, Джероламо Кардано, Джон Валліс.

З часом почали з'являтися по-справжньому складні шифри. Один з них, що вживається і понині, пов'язаний з ім'ям вченого абата з Вюрцбурга Трітеміуса, якого до занять криптографією спонукала, мабуть, не тільки монастирська самота, але і потреба зберігати від розголосу деякі духовні таємниці. Різні хитромудрі прийоми кодування застосовували шифрувальники при папському дворі і дворах європейських королів. Разом з мистецтвом шифрування розвивалося і мистецтво дешифровки, або, як кажуть, криптоаналізу.

У завдання кодування входить зовсім не засекречування повідомлень, а інша мета: зробити передачу повідомлень швидкою, зручною і надійною. Призначений для цієї мети кодуєчий пристрій зіставляє кожному символу тексту, який передається, а іноді і цілим словам або фразам (повідомленням) певну комбінацію сигналів (прийнятну для передачі по даному каналу зв'язку), звану кодом або кодовим словом. При цьому операцію перекладу повідомлень в певні послідовності сигналів називають кодуванням, а зворотну операцію, що поновлює по прийнятих сигналах (кодовим словам) повідомлення, яке передавали, – декодуванням.

Відмітимо відразу ж, що різні символи або повідомлення повинні кодуватися різними кодовими словами, інакше за кодовими словами не можна було б відновити повідомлення, які передавали.

Історично перший код, призначений для передачі повідомлень, пов'язаний з ім'ям винахідника телеграфного апарату Семюеля Морзе і відомий всім як азбука Морзе. У цьому коді кожній букві або цифрі зіставляється своя послідовність з короткочасних (званих крапками) і тривалих (тире) імпульсів струму, що розділяються паузами. Інший код, також широко поширений в телеграфії (код Бодо), використовує для кодування два елементарні сигнали – імпульс і паузу, при цьому кодові слова, що зіставляються буквам, складаються з п'яти таких сигналів.

Коди, що використовують два різні елементарні сигнали, називають двійковими. Зручно буває, відволікаючись від їх фізичної природи, позначати ці два сигнали символами 0 і 1. Тоді кодові слова можна представляти як послідовності з нулів і одиниць.

Перший хто зрозумів, що для кодування досить два символи, був Френсис Бекон. Двійковий код, який він використовував в криптографічних цілях, містив п'ятирозрядні (як і в коді Бодо) слова, складені з символів 0, 1.

Коди з перевітками на парність називають *лінійними кодами* (двійкові лінійні коди називають також *груповими*). Якщо кодовий підпростір в просторі L_n має розмірність k , то використовують для більшої визначеності термін лінійний (n, k) -код.

Є дуже багато причин, по яких лінійні коди є найважливішими в теорії кодування. Одна з них пов'язана зі зручностями у виявленні і виправленні помилок. Інша причина – це можливість компактного задання коду. Дійсно, у разі лінійного коду немає необхідності вказувати повний список кодових слів, адже код цілком визначений системою лінійних рівнянь:

$$b_{11}x_1 + b_{12}x_2 + \dots + b_{1n}x_n = 0,$$

$$b_{21}x_1 + b_{22}x_2 + \dots + b_{2n}x_n = 0,$$

$$\dots\dots\dots$$

$$b_{m1}x_1 + b_{m2}x_2 + \dots + b_{mn}x_n = 0$$

або матрицею цієї системи (*перевірочною матрицею*):

$$H = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix}.$$

Надалі ми припускатимемо, що рядки цієї матриці лінійно незалежні.

До інших переваг лінійних кодів, які пов'язані з попередніми, відносяться прості алгоритми кодування і декодування, що легко реалізуються електронними схемами перемикачів. Взагалі, можна сказати, що бурхливий розвиток теорії кодування, який відбувався в останні десятиліття, пояснюється головним чином тим, що до лінійних кодів прикладений добре розвинений апарат лінійної алгебри і теорії скінченних полів.

Серед лінійних кодів особливо важливу роль грають так звані *циклічні коди*. З ряду причин вони є найбільш цінним надбанням теорії кодування. По-

перше, вони допускають ще компактніший опис, ніж довільні лінійні коди. По-друге, алгоритми кодування і декодування, що є для лінійних кодів, можуть бути в застосуванні до циклічних кодів значно спрощені; більш того, для циклічних кодів існують свої особливі методи декодування, які не можна застосувати до інших лінійних кодів. Нарешті, по своїй структурі ці коди ідеально пристосовані до реалізації в сучасних технічних пристроях.

Серед циклічних кодів особливу практичну важливість має один спеціальний клас кодів, запропонованих американськими математиками Боузом, Чоудхурі і Хоквінгом. Ці коди так і називаються кодами БЧХ – за початковими буквами прізвищ цих математиків. Теорія кодів БЧХ виходить за рамки цієї статті, і ми тільки пояснимо в декількох словах, яким чином вони визначаються. Для цього нам буде потрібно деякі додаткові відомості з теорії полів.

Говоритимемо, що підмножина F є підполем поля \bar{F} , якщо F є поле щодо операцій на \bar{F} . Справедлива така теорема:

Для будь-якого скінченного поля F можна вказати скінченне поле \bar{F} , що задовольняє наступним умовам:

1. F є підполе поля \bar{F} ;
2. \bar{F} містить n коренів рівняння $X^n - 1 = 0$;
3. не існує поля, яке задовольняє властивостям 1 і 2 і що має менше елементів, ніж \bar{F} .

Нехай тепер для поля F вказано поле \bar{F} з властивостями 1–3. Нехай α – примітивний елемент поля \bar{F} , а числа s і l такі, що елемент α^s має порядок n і $s + l < q$, де q – число елементів поля \bar{F} . Циклічний код називається кодом БЧХ (з параметрами n, s, l), якщо він складається зі всіх многочленів степеня $\leq n-1$ з коефіцієнтами із F , серед коренів яких містяться всі елементи.

$$\alpha^s, \alpha^{s+1}, \alpha^{s+2}, \dots, \alpha^{s+l}.$$

Можна довести, що кодова відстань такого коду не менша $l+2$. Отже, варіюючи параметри n, s, l , ми маємо можливість отримувати коди БЧХ з будь-якою відстанню, тобто ті, які виправляють будь-яке задане число помилок. Це доповнюється тим, що для вказаних кодів розроблені зручні алгоритми декодування, засновані на обчисленнях в скінченних полях і що легко реалізуються автоматичними електронними пристроями.

Література

1. Аришинов М.Н., Садовский Л.Е. Коды и математика. – М.: Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1983. – 144 с.
2. Берлекэмп Э. Алгебраическая теория кодирования. – М.: Мир, 1971. – 479с.
3. Венбо Мао Современная криптография: теория и практика.: Пер. с англ. – М.: Издательский дом «Вильямс», 2005. – 768 с.: ил. – Парал. тит. англ.
4. Касами Т., Токура Н., Ивадари Е., Инагаки Я. Теория кодирования. – М.: Мир, 1978. – 576 с.

Татьянчиков А.О.

Студент 5 курсу 1 групи фізико-математичного факультету СДПУ

Дослідження проблеми стійкості криптографічних систем

Побудовано обчислювально захищену криптосистему, яку протестовано на повідомленні довжиною в $1028 \cdot k$ ($k = 1, 5, 10, 20, 100$) символів. Показано залежність часу роботи алгоритмів шифрування (T_c), дешифрування (T_d) та алгоритму ламання коду (T_b) від довжини повідомлення (N).

Ключові слова: *криптосистема, теоретико-інформаційна стійкість, обчислювальна захищеність, поліноміальні алгоритми, експоненційні алгоритми*

Стрімкий розвиток обчислювальної техніки та розвиток телекомунікаційних мереж веде до необхідності створення систем безпечного зберігання та передавання конфіденційної інформації. Ці завдання вирішуються за допомогою криптографічних алгоритмів захисту інформації.

Сімейство відображень шифру в сукупності з протоколами, що використовуються, утворюють криптосистему. Здатність криптосистеми протистояти атакам одержала назву криптографічної стійкості криптосистеми. Стійка криптосистема забезпечує захист інформації протягом тривалого часу, незважаючи на зусилля супротивника, що володіє значними матеріальними, інтелектуальними й обчислювальними ресурсами. Існує різниця між теоретико-інформаційною стійкістю (або теоретичною стійкістю) і обчислювальною захищеністю (або практичною стійкістю) криптосистеми. Криптографічна система називається обчислювально захищеною (або обчислювально стійкою), якщо найкращий з можливих алгоритмів, що зламують її, вимагає не виправдано високих витрат обчислювальних ресурсів. Беручи до уваги потужність сучасних комп'ютерів, можна вважати, що 2^{80} операцій, необхідних для зламу шифру, це та межа, виходячи за яку алгоритми зламу стають занадто дорогими. Таким чином, якщо мінімальне число N операцій, необхідних алгоритму, що атакує дану криптосистему, більше за 2^{80} , то говорять, що вона обчислювально захищена. Зауважимо, що ніяку реальну систему не можна обґрунтовано вважати обчислювально захищеною, оскільки ми не зможемо довести оптимальність знайденого методу зламу. Тому на практиці ми визначаємо її захищеність в обчислювальному відношенні в тому випадку, якщо кращий з відомих алгоритмів для її зламу вимагає неприпустимо великої кількості обчислень.

Таким чином, обчислювально, або доказово, стійка криптосистема є стійкою стосовно супротивника, чий обчислювальні ресурси обмежені. Навіть у

тому випадку, коли супротивник володіє більшими, але обмеженими ресурсами, він усе ще не зможе зламати систему.

При вивченні обчислювально захищених схем необхідно:

- подбати про довжину ключа, бо якщо розмір ключа малий, то в супротивника цілком може вистачити ресурсів для зламу криптосистеми;
- стежити за останніми алгоритмічними досягненнями й розвитком комп'ютерної техніки.

Більшість криптосистем, що активно експлуатуються в наш час, обчислювально захищені.

З іншого боку, система називається абсолютно стійкою або досконалою, якщо ми не обмежуємо обчислювальної потужності супротивника. Інакше кажучи, криптосистема досконала, якщо її не можна зламати навіть за допомогою нескінченного числа операцій. Отже, незалежно від алгоритмічних досягнень і досконалості обчислювальної техніки, абсолютно стійку схему зламати неможливо.

До обчислювально стійких систем можна віднести криптосистеми:

- DES;
- RSA;
- ЭльГамала.

Однак ці системи не є абсолютно стійкими.

Щоб оцінити обчислювальну складність задачі (швидкість росту об'єму потрібних для розв'язання цієї задачі обчислень через зростання її розмірності) потрібно оцінити ефективність алгоритму, за допомогою якого можна знайти розв'язок задачі. Алгоритм є ефективним, якщо він розв'язує задачу на прийнятних для користувача умовах, і неефективним – в протилежному разі.

Поняття “ефективності” пов'язане з усіма обчислювальними ресурсами, потрібними для роботи алгоритму. При використанні комп'ютерів це може бути кількість спожитої електроенергії, об'єм використаної пам'яті (зокрема, оперативної), час роботи алгоритму і т.ін. Але найчастіше домінуючим фактором є обмеження на час, тому “найефективніший” як правило означає “найшвидший”.

Часова складність даного алгоритму A – функція $f_A(n)$, яка визначається як найменший час, достатній для розв'язання будь-якої задачі із входом довжини n . Реалізація алгоритму на реальному комп'ютері дуже погано піддається опису і аналізу загальною математичними засобами. Зокрема, вона значною мірою залежить від конструктивних особливостей даного комп'ютера. Тому при теоретичному аналізі ефективності алгоритмів зазвичай обмежуються порівняно простими обчислювальними моделями з обмеженим набором елементарних операцій, керуючись головним чином зручністю їх використання. Найпопулярнішою з них є машина Тьюрінга. Кількість кроків роботи машини Тьюрінга до результативної зупинки називається *часом роботи* машини Тьюрінга на вході x .

Означення 1. Алгоритм, який на нескінченній послідовності входів робить таку кількість кроків, залежну від n , яка може бути обмежена за допомогою поліному, де n довжина входу, називається поліноміальним. Про такий алгоритм кажуть, що він вимагає поліноміального часу.

Поліноміальні алгоритми відповідають загальним уявленням про швидкі або ефективні алгоритми. Задачу, яку можна розв'язати за допомогою поліноміального алгоритму слід вважати легкою. В гіршому випадку такий алгоритм можна вважати швидким лише асимптотично, а на відносно невеликих входах алгоритм може працювати довго.

Означення 2. Алгоритм, який на нескінченній послідовності входів робить більше як 2^{nc} кроків, де n довжина входу, а $c > 0$ – деяка константа, називається експоненційним. Про такий алгоритм кажуть, що він вимагає експоненційного часу.

Експоненційні алгоритми відповідають загальним уявленням про повільні, неефективні на праці алгоритми. Задачу, яку можна розв'язати лише за допомогою експоненційного алгоритму слід вважати важкою.

Якщо натуральне число n подається в системі числення за основою k , то його запис має довжину $[\log_k n] + 1$, а алгоритм є поліноміальним тоді і тільки тоді, коли час його роботи на вході n (довжини $[\log_k n] + 1$) обмежений функцією $c(\log_k n)^d$ для деяких констант $c > 0$ і $d > 1$. Алгоритм є експоненційним, якщо на вході n (точніше, на нескінченній послідовності таких входів) час його роботи перевищує cn^d для деяких констант $c, d > 0$.

Означення 3. Алгоритм називається швидким у середньому, якщо для переважної більшості входів довжини n він є швидким.

Швидкий у середньому алгоритм є хоч і експоненційним, але може бути цілком придатним для практичних потреб.

Теорема Для зламання $\Gamma(*, \circ)$ шифру потрібно здійснити не менше ніж 2^n кроків.

Побудовано обчислювально захищену криптосистему, яку протестовано на повідомленні довжиною в $1028 \cdot k$ ($k = 1, 5, 10, 20, 100$) символів. Досліджено можливості так званої пасивної атаки, тобто атаки на шифр, при якій атакуючий може дослідити тільки шифротекст і за ним повинен поновити таємний ключ.

Таблиця 1 ілюструє зміну часу роботи алгоритмів шифрування (T_c), дешифрування (T_d) та алгоритму ламання коду (T_b) в залежності від довжини повідомлення (N):

Таблиця 1

k	N	T_c	T_{bc}	T_b
1	1028	0.7	0.7	>0.9
5	5140	1.8	1.8	>3.7
10	10280	4.5	4.5	>8.2
20	20560	10.0	10.0	>21.1
100	102800	137.1	137.1	>293.4

В останньому стовпчику стоїть знак > тому, що алгоритм тестувався у випадку найсприятливішому для суперника, тобто припустили, що довжину ключа вгадали одразу. Тестування проводилося на ЕОМ Celeron, 1100 Hz, 256 ОЗУ.

Література

1. Алферов А.П., Зубов А.Ю., Кузьмин А.С., Черемушкин А.В. Основы криптографии. М.: Гелиос АРВ, 2001. – 479 с.
2. Введение в криптографию (под общей ред. Яценко В.В.). М.: МЦНМО - ЧеРо, 1999. – 271 с.
3. Вербіцький О.В. Вступ до криптології, Львів: Науково-технічна література, 1998. – 247 с.
4. Виноградов И.М. Основы теории чисел. М.: Наука, 1972. – 167 с.
5. Гашков С.Б., Чубариков В.Н. Арифметика. Алгоритмы. Сложность вычислений. – М.: Высшая школа, 2000. – 320 с.
6. Кнут Д. Искусство программирования для ЭВМ. Т.2. Получисленные алгоритмы. – М.: Мир, 1977.
7. Смарт Н. Криптография. – М.: Техносфера, 2005. – 528 с.
8. Koblitz Neal Algebraic aspects of cryptography. – Berlin: Springer, 1998. – 200 p.
9. Koblitz N A Course in Number Theory and Cryptography. Springer-Verlag, New York, Inc., 1994 (є польські переклади: Wyklad z teorii liczb i kryptografii. Warszawa, Wydawnictwa Naukowo-Techniczne, 1995, 2000 і рос. переклад)
10. Salomaa Arto. Public-Key Cryptographi. – Berlin: Springer-Verlag, 1996. – 271 p.

Бондар Є.О.

Магістрантка спеціальності «Математика» Інституту інформаційних технологій Луганського національного університету імені Тараса Шевченка

Ідемпотенти вінцевих голоморфів напівгруп

У роботі описуються ідемпотенти вінцевого голоморфу напівгрупи з нульовим множенням (правих нулів, лівих нулів) та симетричної напівгрупи.

Ключові слова: напівгрупа, вінцевий голоморф, ідемпотент.

1. Вступ. На сьогодні існує ряд напівгрупових конструкцій, що плідно працюють у структурній теорії напівгруп. Важливе місце у цьому ряді займає одна з універсальних загальноалгебраїчних конструкцій – конструкція вінцевого добутку, яка почала активно використовуватися у теорії напівгруп після отримання Кроном і Роудзом структурної теореми для скінченних моноїдів.

Зараз з'явилися різні узагальнення конструкції вінцевого добутку. Одним з таких узагальнень стала конструкція вінцевого голоморфу, яку визначив Усенко [1] і використав для описання будови напівгрупи ендоморфізмів цілком 0-простих напівгруп. Іншим узагальненням є конструкція двобічного напівпрямого добутку, в термінах якої Закусило та Усенко [2] описали будову напівгрупи ендоморфізмів та оболонки зсувів квазірегулярної напівгрупи Ріса матричного типу.

Метою даної роботи є описання ідемпотентів вінцевих голоморфів заданих напівгруп.

2. Основні поняття. Нехай $(S, *)$ – довільна напівгрупа, $\mathfrak{Z}(X)$ – симетрична напівгрупа на множині X , $Map(X, S)$ – напівгрупа усіх відображень з множини X у напівгрупу S з операцією " \cdot " поточкового підсумовування: $x(\mu_1 \cdot \mu_2) = x\mu_1 * x\mu_2$ для всіх $x \in X, \mu_1, \mu_2 \in Map(X, S)$.

Якщо $\varphi \in \mathfrak{Z}(X)$, то через $Ker\varphi = \{(x, y) \in X \times X \mid x\varphi = y\varphi\}$ позначатимемо відношення рівнозначності φ , а через $Im\varphi$ – образ цього перетворення.

Для $f \in Map(X, S)$, $\sigma \in EndS$ покладемо $f\alpha_s^\sigma = f\sigma$, тобто $x(f\alpha_s^\sigma) = (xf)\sigma$ для всіх $x \in X$. Цією умовою для кожного $\sigma \in EndS$ визначено перетворення α_s^σ напівгрупи $Map(X, S)$, яке є її ендоморфізмом. При цьому виникає гомоморфізм $\alpha_s : End S \rightarrow End Map(X; S) : \sigma \mapsto \alpha_s^\sigma$.

Для $f \in Map(X, S)$, $\tau \in \mathfrak{Z}(X)$ покладемо $f\alpha_x^\tau = \tau f$, тобто через $f\alpha_x^\tau$ позначимо елемент із $Map(X, S)$ такий, що $x(f\alpha_x^\tau) = (x\tau)f$ для всіх $x \in X$. При цьому виникає антигоморфізм $\alpha_x : \mathfrak{Z}(X) \rightarrow EndMap(X; S) : \tau \mapsto \alpha_x^\tau$.

Крім того, для довільних $\tau \in \mathfrak{Z}(X), \sigma \in \text{End} S$ маємо $\alpha_X^\tau \alpha_S^\sigma = \alpha_S^\sigma \alpha_X^\tau$.

На декартовому добутку $\text{End } S \times \text{Map}(X; S) \times \mathfrak{Z}(X)$ визначимо операцію:

$$(\eta_1; \varphi_1; \tau_1)(\eta_2; \varphi_2; \tau_2) = (\eta_1 \eta_2; \varphi_1 \alpha_S^{\eta_2} \cdot \varphi_2 \alpha_X^{\tau_1}; \tau_1 \tau_2)$$

для всіх $\eta_1, \eta_2 \in \text{End } S, \varphi_1, \varphi_2 \in \text{Map}(X; S), \tau_1, \tau_2 \in \mathfrak{Z}(X)$. Ця множина із заданою вище операцією є напівгрупою, що називається вінцевим голоморфом [2] напівгрупи S та симетричної напівгрупи $\mathfrak{Z}(X)$ і позначається $HWr[X, S]$.

Будемо користуватися матричною реалізацією цієї конструкції. Скориставшись позначеннями $f \alpha_S^\sigma = f \sigma, f \alpha_X^\tau = \tau f$, запишемо операцію множення так:

$$\begin{pmatrix} \eta_1 & o \\ \varphi_1 & \tau_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta_2 & o \\ \varphi_2 & \tau_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \eta_1 \eta_2 & o \\ \varphi_1 \eta_2 \bullet \tau_1 \varphi_2 & \tau_1 \tau_2 \end{pmatrix},$$

де o – зовнішній анулятор.

3. Ідемпотенти вінцевого голоморфу напівгрупи лівих нулів та симетричної напівгрупи. Елемент e напівгрупи S називається ідемпотентом, якщо $e * e = e$. Напівгрупа S називається напівгрупою лівих нулів, якщо $a * b = a$ для всіх $a, b \in S$.

Нехай L – напівгрупа лівих нулів. Зауважимо, що будь-яке перетворення напівгрупи L є її ендоморфізмом, отже, $\text{End} L = \mathfrak{Z}(L)$.

Лема 1. Елемент $a = \begin{pmatrix} \eta & o \\ \varphi & \kappa \end{pmatrix} \in HWr[X, L]$ є ідемпотентом тоді й лише тоді,

коли $\eta^2 = \eta, \kappa^2 = \kappa$ і $X\varphi \subseteq L\eta$.

Доведення. Нехай $a \in HWr[X, L]$ – ідемпотент.

Тоді $a^2 = \begin{pmatrix} \eta & o \\ \varphi & \kappa \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta & o \\ \varphi & \kappa \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \eta^2 & o \\ \varphi \eta \bullet \kappa \varphi & \kappa^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \eta & o \\ \varphi & \kappa \end{pmatrix} = a$. За означенням рівності

двох елементів вінцевого голоморфу отримуємо $\eta = \eta^2, \varphi = \varphi \eta \bullet \kappa \varphi, \kappa = \kappa^2$.

Рівність $\varphi = \varphi \eta \bullet \kappa \varphi$ еквівалентна умові $x\varphi = (x\varphi)\eta$ для будь-якого $x \in X$. А це означає, що $X\varphi \subseteq L\eta$.

Нехай $a = \begin{pmatrix} \eta & o \\ \varphi & \kappa \end{pmatrix} \in HWr[X, L]$ такий, що η, κ – ідемпотенти і $x\varphi \in \text{Im } \eta$

для довільного $x \in X$. Користуючись тим, що η ідемпотент, маємо $(x\varphi)\eta = x\varphi$, тобто $\varphi \eta = \varphi$. Тоді

$$a^2 = \begin{pmatrix} \eta & o \\ \varphi & \kappa \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta & o \\ \varphi & \kappa \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \eta^2 & o \\ \varphi \eta \bullet \kappa \varphi & \kappa^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \eta & o \\ \varphi \eta & \kappa \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \eta & o \\ \varphi & \kappa \end{pmatrix} = a. \quad \square$$

Якщо S – довільна напівгрупа, то через $I(S)$ будемо позначати множину всіх ідемпотентів напівгрупи S . Нагадаємо, що перетворення $\alpha \in \mathfrak{Z}(X)$ є ідемпотентом тоді й лише тоді, коли його обмеження на своєму образі є

тотожнім перетворенням (див., напр., [3]). Через C_n^m позначається кількість всіх m – елементних підмножин даної n – елементної множини.

Лема 2. Нехай X – довільна множина потужності n . Тоді

$$|I(\mathfrak{Z}(X))| = \sum_{k=1}^n C_n^k k^{n-k}.$$

Доведення. Нехай перетворення $\varphi \in I(\mathfrak{Z}(X))$ таке, що $|\text{Im } \varphi| = k$. Зрозуміло, що $1 \leq k \leq n$. Якщо $k = n$, то існує єдиний ідемпотент – тотожнє перетворення множини X .

Нехай $1 \leq k < n$. Оскільки для будь-якого $x \in \text{Im } \varphi$ $x\varphi = x$, то будь-який елемент з $X \setminus \text{Im } \varphi$ може відображатися у довільний елемент з $\text{Im } \varphi$. Тоді всього ідемпотентів з фіксованим образом $\text{Im } \varphi$ буде k^{n-k} . Враховуючи, що підмножину із X потужності k можна обрати C_n^k способами, отримуємо, що ідемпотентів у $\mathfrak{Z}(X)$ в яких потужність образу дорівнює k буде $C_n^k k^{n-k}$. Отже,

$$\text{за правилом суми } |I(\mathfrak{Z}(X))| = \sum_{k=1}^{n-1} C_n^k k^{n-k} + 1 = \sum_{k=1}^n C_n^k k^{n-k}. \quad \square$$

Лема 3. Нехай X, L такі множини, що $|X| = n$, $|L| = m$. Тоді кількість впорядкованих пар (η, φ) , де $\eta \in I(\mathfrak{Z}(L))$, $\varphi \in \text{Map}(X, L)$, таких що $X\varphi \subseteq L\eta$, дорівнює $\sum_{k=1}^m C_m^k k^{m+n-k}$.

Доведення. Нехай $\eta \in I(\mathfrak{Z}(L))$ такий, що $|\text{Im } \eta| = k$ ($1 \leq k \leq m$). При побудові відображення $\varphi \in \text{Map}(X, L)$, що задовольняє умову $X\varphi \subseteq L\eta$, будь-який елемент з X може відображатися у довільний елемент з $\text{Im } \eta$. Отже, таких відображень буде k^n . За лемою 2 ідемпотент η , $|\text{Im } \eta| = k$, можна обрати $C_m^k k^{m-k}$ способами. Тоді кількість пар (η, φ) таких, що $\varphi \in \text{Map}(X, L)$, $\eta \in I(\mathfrak{Z}(L))$, $|\text{Im } \eta| = k$ і $X\varphi \subseteq L\eta$, буде $C_m^k k^{m-k} k^n = C_m^k k^{m+n-k}$. За правилом суми

$$\text{шукана кількість дорівнює } \sum_{k=1}^m C_m^k k^{m+n-k}. \quad \square$$

З лем 1–3 випливає

Теорема 1. Нехай X, L такі множини, що $|L| = m$, $|X| = n$. Тоді

$$|I(HWr[X, L])| = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m C_n^i C_m^j i^{n-i} j^{m+n-j}.$$

4. Ідемпотенти вінцевого голоморфу напівгрупи правих нулів та симетричної напівгрупи. Напівгрупа S називається напівгрупою правих нулів, якщо $a * b = b$ для всіх $a, b \in S$. Нехай R – напівгрупа правих нулів. Будь-яке перетворення напівгрупи R є її ендоморфізмом, отже, $\text{End } R = \mathfrak{Z}(R)$.

Лема 4. Елемент $a = \begin{pmatrix} \eta & o \\ \varphi & \kappa \end{pmatrix} \in HWr[X, R]$ є ідемпотентом тоді й лише тоді, коли $\eta^2 = \eta$, $\kappa^2 = \kappa$ і $Ker \kappa \subseteq Ker \varphi$.

Доведення. Нехай $a \in HWr[X, R]$ – ідемпотент. Тоді

$$a^2 = \begin{pmatrix} \eta & o \\ \varphi & \kappa \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta & o \\ \varphi & \kappa \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \eta^2 & o \\ \varphi\eta \cdot \kappa\varphi & \kappa^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \eta^2 & o \\ \kappa\varphi & \kappa^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \eta & o \\ \varphi & \kappa \end{pmatrix}. \quad \text{За означенням}$$

рівності двох елементів вінцевого голоморфу отримуємо такі умови:

$$\eta = \eta^2, \varphi = \kappa\varphi, \kappa = \kappa^2.$$

Нехай $(x, y) \in Ker \kappa$ – довільна пара. Тоді для будь-якого $x \in X$ маємо $x\varphi = x\kappa\varphi = y\kappa\varphi = y\varphi$, тобто $(x, y) \in Ker \varphi$. Таким чином, $Ker \kappa \subseteq Ker \varphi$.

Нехай для $a = \begin{pmatrix} \eta & o \\ \varphi & \kappa \end{pmatrix} \in HWr[X, R]$ виконуються умови леми. Оскільки κ ідемпотент, то $(x, x\kappa) \in Ker \kappa$ для всіх $x \in X$. Беручи до уваги, що $Ker \kappa \subseteq Ker \varphi$, отримуємо $(x, x\kappa) \in Ker \varphi$, звідки $x\varphi = x\kappa\varphi$. Тоді

$$a^2 = \begin{pmatrix} \eta & o \\ \varphi & \kappa \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta & o \\ \varphi & \kappa \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \eta^2 & o \\ \varphi\eta \cdot \kappa\varphi & \kappa^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \eta & o \\ \kappa\varphi & \kappa \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \eta & o \\ \varphi & \kappa \end{pmatrix} = a. \quad \square$$

Лема 5. Нехай X, R такі множини, що $|X| = n, |R| = m$. Тоді кількість впорядкованих пар (κ, φ) , де $\kappa \in I(\mathfrak{Z}(X))$, $\varphi \in Map(X, R)$, таких що $Ker \kappa \subseteq Ker \varphi$, дорівнює $\sum_{k=1}^n C_n^k k^{n-k} m^k$.

Доведення. Нехай $\kappa \in \mathfrak{Z}(X)$ – ідемпотент такий, що $|Im \kappa| = k$, $1 \leq k \leq n$. Як відомо з леми 2 кількість таких ідемпотентів $C_n^k k^{n-k}$. Для кожного ідемпотента можна побудувати m^k відображень $\varphi \in Map(X, R)$ з урахуванням умови $Ker \kappa \subseteq Ker \varphi$. Таким чином, за правилом добутку кількість всіх впорядкованих пар ідемпотентів $\mathfrak{Z}(X)$ рангу k та елементів $\varphi \in Map(X, R)$, що задовольняють умові леми буде $C_n^k k^{n-k} m^k$. Тоді шукана кількість дорівнює

$$\sum_{k=1}^n C_n^k k^{n-k} m^k. \quad \square$$

Безпосереднім наслідком лем 2, 4, 5 є

Теорема 2. Нехай X, R такі множини, що $|R| = m$, $|X| = n$. Тоді

$$|I(HWr[X, R])| = \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^n C_n^k C_m^j k^{n-k} j^{m-j} m^k.$$

5. Ідемпотенти вінцевого голоморфу напівгрупи з нульовим множенням та симетричної напівгрупи. Напівгрупа S з нулем 0 називається напівгрупою з нульовим множенням, якщо $a * b = 0$ для всіх $a, b \in S$.

Нехай M – напівгрупа з нульовим множенням, а ν_o – константне нульове відображення з множини X у напівгрупу M [3]. Очевидною є така лема.

Лема 6. Елемент $a = \begin{pmatrix} \eta & o \\ \varphi & \kappa \end{pmatrix} \in HWr[X, M]$ є ідемпотентом тоді й лише тоді,

коли $\eta^2 = \eta$, $\kappa^2 = \kappa$ і $\varphi = \nu_o$.

З'ясуємо далі з яких елементів складається напівгрупа $EndM$.

Лема 7. Перетворення $\varphi \in \mathfrak{I}(M)$ є ендоморфізмом напівгрупи M тоді й лише тоді, коли $\varphi(0) = 0$.

Доведення. Припустимо, що $\varphi \in EndM$ і $\varphi(0) \neq 0$. Тоді для будь-яких $a, b \in M$ маємо $\varphi(0) = \varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b) = 0$, що суперечить припущенню. Таким чином, $\varphi(0) = 0$.

Навпаки, якщо $\varphi \in \mathfrak{I}(M)$ таке, що $\varphi(0) = 0$, то для будь-яких $a, b \in M$ $\varphi(ab) = \varphi(0) = 0 = \varphi(a)\varphi(b)$. Отже, $\varphi \in EndM$. \square

Лема 8. Нехай $s \in N$, M така множина, що $|M| = s + 1$. Тоді

$$|I(EndM)| = \sum_{i=1}^{s+1} C_s^{i-1} i^{s-i+1}.$$

Доведення. Нехай φ – ідемпотент напівгрупи $EndM$ такий, що $|\text{Im } \varphi| = i$, $1 \leq i \leq s + 1$. Враховуючи, що $\varphi(0) = 0$, таких φ можна вибрати C_s^{i-1} способами. Оскільки на своєму образі φ діє тотожно, то будь-який елемент з множини $M \setminus \text{Im } \varphi$ може відображатися у довільний елемент з $\text{Im } \varphi$. Отже, можна побудувати $C_s^{i-1} i^{s-i+1}$ ідемпотентів рангу i . Таким чином, $|I(EndM)| = \sum_{i=1}^{s+1} C_s^{i-1} i^{s-i+1}$. \square

З лем 2,6 –8 випливає

Теорема 3. Нехай $s \in N$, X, M такі множини, що $|X| = n, |M| = s + 1$. Тоді

$$|I(HWr[X, M])| = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^{s+1} C_s^{i-1} C_n^j i^{s-i+1} j^{n-j}.$$

Література

1. Усенко В.М. Эндоморфизмы вполне 0-простых полугрупп // Вопросы алгебры. – 1998. – №.13. – С. 92–119.
2. Закусило А.И., Усенко В.М. Голоморфные сплетения и сдвиговые оболочки полугрупп // Труды ИПММ НАН Украины. – 2005. – Т.11. – С. 49 – 60.
3. Клиффорд А., Престон Г. Алгебраическая теория полугрупп. – М. : Мир, 1972. – Т.1. – 285 с.

Фізика

Уколов А.И., Надточий В.А., Калимбет А.З, Москаль Д.С.

¹*Аспирант кафедры физики СГПУ,*

²*Профессор кафедры физики СГПУ,*

³*Старший преподаватель кафедры физики СГПУ,*

⁴*Ассистент кафедры физики СГПУ*

О применимости методик определения параметров рекомбинации носителей заряда к приповерхностным слоям полупроводника

В технологиях изготовления полупроводниковых приборов используются разные методы модификации приповерхностных слоев кристаллов, направленно изменяющих их физические свойства: легирование примесями, облучение частицами высоких энергий, шлифование и механическое полирование [1]. Кроме того, свойства приповерхностных слоев Ge, Si и кристаллов типа A_3B_5 могут существенно изменяться за счет генерации структурных дефектов после низкотемпературного деформирования [2-4]. Изменение свойств полупроводника вследствие образования дефектов структуры (дислокаций, точечных дефектов и их агломераций) оценивают по изменению структурно – чувствительных электрических параметров – диффузионной длине пробега неравновесных носителей заряда L_D и их времени жизни τ [5]. Известные методики [5] определения этих параметров позволяют определить L_D и τ для объема кристаллов. Поэтому важной задачей данной работы было изучить возможности определения L_D и τ для тонких приповерхностных слоев кристаллов и найти критерии применимости методик оценки этих параметров для приповерхностных слоев и объема отдельно.

Рассматривали методики электрического и светового зонда.

Метод электрического зонда

Это метод, основанный на модуляции проводимости в точечном контакте металлического зонда с поверхностью полупроводника. В основу теории метода положено рассмотрения физических процессов в полупроводнике при создании в нем неравновесной концентрации носителей заряда. Если концентрации носителей заряда изменяются в результате процессов генерации, рекомбинации, а также диффузии и дрейфа, то уравнение непрерывности имеет вид:

для электронов

$$\frac{\partial n}{\partial t} = g - r + g_E + \frac{1}{e} \operatorname{div} j_n \quad (1)$$

для дырок

$$\frac{\partial p}{\partial t} = g' - r' + g'_E + \frac{1}{e} \operatorname{div} j_p \quad (2)$$

где g, g' - скорость генерации электронов и дырок в результате всех естественных процессов (тепловых, фонового излучения); в общем случае $g \neq g'$;

r, r' - скорость рекомбинации электронов и дырок, обусловленная естественными процессами;

g_E, g'_E - результирующая скорость генерации носителей, вызванная внешними воздействиями;

j_n, j_p - плотности электронного и дырочного токов.

В общем случае τ_n может зависеть от p , а τ_p от n . В случае примесного, например электронного полупроводника, когда $n \gg p$, и при условии, что концентрации неравновесных носителей малы, т.е. $\Delta p \leq p$ и $\Delta n = \Delta p \ll n$, величина τ_p не будет зависеть от n . Тогда $\tau_{p0} = \tau_p$ и

$$\frac{\partial \Delta p}{\partial t} = -\frac{\Delta p}{\tau_p} \quad (3)$$

Решением этого уравнения будет

$$\Delta p = \Delta p_0 e^{-\frac{t}{\tau_p}} \quad (4)$$

Из которого видно, что концентрация избыточных дырок уменьшается с течением времени вследствие рекомбинации по экспоненциальному закону с постоянной времени τ_p , которая называется временем жизни неосновных носителей заряда – дырок в электронном полупроводнике или электронов в дырочном полупроводнике. Значение времени жизни неосновных носителей заряда как для различных полупроводниковых материалов, так и для одного и того же материала зависит в сильной степени от концентрации дефектов в кристалле, которые создают глубокие уровни в его запрещенной зоне.

Рассмотрим образец полупроводника через точечный контакт с которым вводят носители заряда при помощи импульса тока. Спустя некоторое время t_3 (время задержки) после окончания инжектирующего импульса, в течение которого происходит рекомбинация и диффузия инжектированных носителей, через образец пропускается второй, измерительный импульс тока. Падение напряжения на образце наблюдается с помощью осциллографа. При прохождении импульсов токов через образец происходит уменьшение сопротивления в приконтактной зоне во время инжекции носителей, приводящее к уменьшению падения напряжения на образце, так как ток создается постоянным. Поэтому импульс напряжения U не повторяет форму импульса тока, а имеет спад, обусловленный возрастанием концентрации носителей (рис. 1).

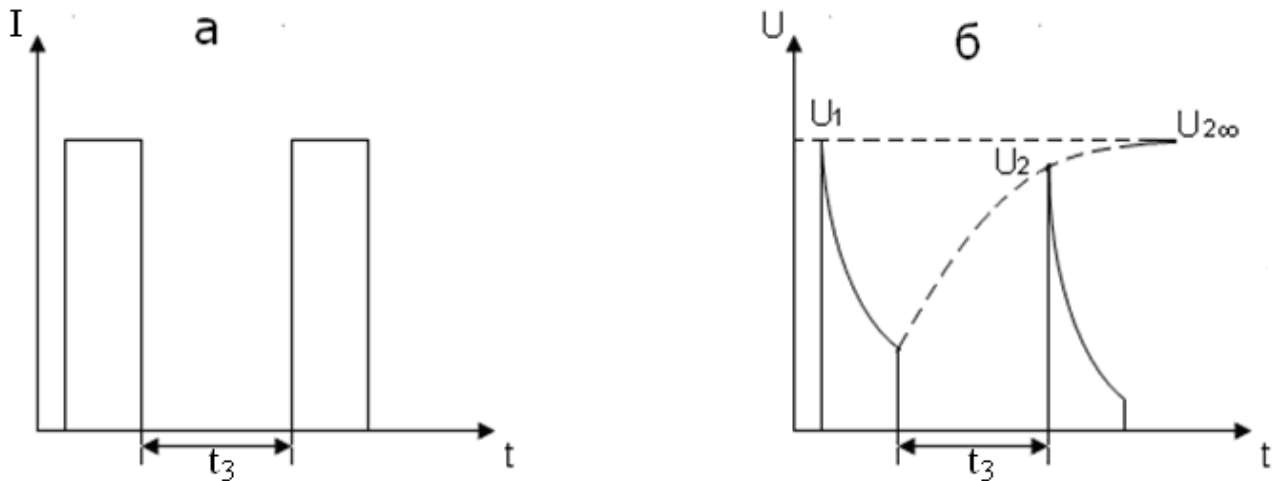


Рис. 1 Импульсы тока (а) и напряжения (б) на образце

По окончании первого, инжектирующего импульса тока процесс инжекции носителей в образец прекращается, и концентрация неравновесных носителей заряда начинает уменьшаться за счет процесса рекомбинации. Структурные дефекты в приповерхностной зоне полупроводника являются рекомбинационными центрами и существенно влияют на время жизни неравновесных носителей заряда. Уменьшению концентрации неравновесных носителей заряда соответствует увеличение сопротивления образца и возвращение его к исходной величине (рис. 2).

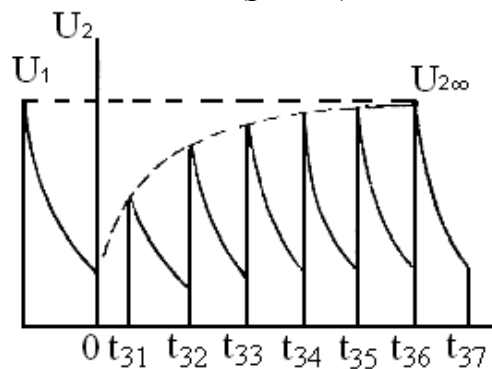


Рис.2 Зависимость амплитуды напряжения измерительного импульса от времени задержки.

Методом модуляции проводимости определяют эффективное значение времени жизни в объеме кристалла. Используют аналитическую зависимость вида

$$U_2(\infty) - U_2(t) = \text{const} \quad (5)$$

для чего следует построить графики разности напряжений $U_2(\infty) - U_2(t)$ в зависимости от времени t_3 в полулогарифмическом масштабе [6].

При создании каким – либо способом повышенной концентрации дефектов в приповерхностном слое на зависимостях $\ln[U_2(\infty) - U_2(t)] = f(t_3)$ было обнаружено [3], что при малых и больших временах задержки измерительного импульса напряжения появляются участки с разной крутизной (рис. 3). В области А крутизна кривых для кристаллов n – типа с повышенной

концентрацией дефектов значительно выше, чем в области В при $t_3 = (1-3)\tau_p$, где находят время жизни дырок для глубины кристалла. Нами было обнаружено [3], что после удаления поверхностного слоя с деформационными дефектами крутизна участков в области А снижается и становится мало отличимой от крутизны участков В.

Теоретически было показано [3], что появление участков увеличенной крутизны связано с повышенной концентрацией дефектов в приповерхностном слое.

В данной работе выполнены дополнительные экспериментальные измерения параметров рекомбинации L_D и τ_p по наклону кривых участков зависимостей $\ln \Delta U = f(t_3)$, которые приведены на рис. 3.

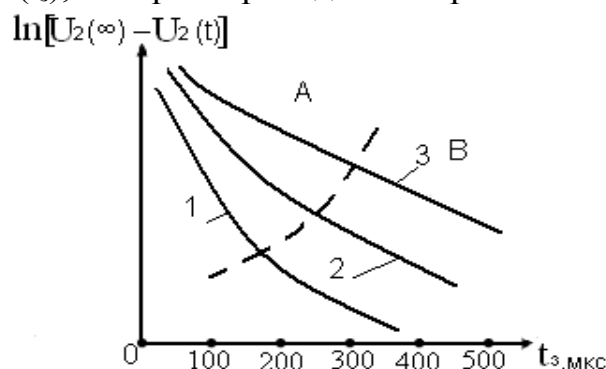


Рис. 3 График зависимостей $\ln \Delta U = f(t_3)$, снятые в разных точках по высоте n -Ge, деформированного циклами сжатия-разгрузки. Максимальное напряжение в цикле сжатия 20 кгс/мм^2 , время одного цикла 2 часа, полное время испытаний 24 часа. Одновременное УЗ облучение на частоте $22,5 \text{ кГц}$ при мощности 5 Вт. График 1 соответствует наибольшей плотности дефектов в точке измерения, 3 – с удаленным дефектным поверхностным слоем.

В эксперименте использовали образцы n -Ge, размерами $3 \times 4 \times 10 \text{ мм}^3$, деформирование выполнялось вдоль $[110]$ большего измерения (10 мм). Одновременно кристаллы облучали ультразвуком при плотности мощности 5 Вт/см^2 и $T = 310 \text{ К}$. Для образцов с удельной проводимостью $\sigma = 50 \text{ См/м}$ ($\rho = 20 \text{ Ом·см}$), подвижностью дырок $\mu_p = 0,17 \text{ м}^2 \cdot \text{В}^{-1} \cdot \text{с}^{-1}$ при токе инжекции 10 мА и длительности импульса 250 мкс найденные значения τ_p в области В кривых оказались равными $\tau_p = 250 \text{ мкс}$, что соответствует значению, указанному в сертификате и характеризует τ_p для объема кристалла. Однако для участков кривых в области А τ_p оказались значительно меньшими и хорошо коррелированы с плотностью структурных дефектов по высоте образца [3]. Для проверки последних результатов использовали второй метод – светового зонда, в котором избыточные носители заряда после генерации перемещаются вдоль поверхностного слоя.

Метод светового зонда

Основан на генерации избыточных (неравновесных) носителей заряда, возникающих в результате локального облучения поверхности кристалла лучом света. Тогда концентрации электронов $n(x)$ и дырок $p(x)$ меняются от точки к

точке, т.е. являются функциями координаты x . По этой причине в неоднородном полупроводнике должен возникнуть диффузионный ток электронов и дырок. Возникновение диффузионных токов приводит к возникновению пространственных зарядов и статических электрических полей E , препятствующих протеканию диффузионных токов. Поскольку электрическое поле E создает дрейфовые токи электронов и дырок, то полные электронный и дырочный токи равняются сумме диффузионных и дрейфовых токов:

$$j_p = p e \mu_p E - e D_p \frac{dp}{dx} \quad (6)$$

$$j_n = p e \mu_n E - e D_n \frac{dn}{dx} \quad (7)$$

где μ_n, μ_p – подвижности электронов и дырок соответственно.

Рассмотрим более подробно вопрос о диффузии неосновных неравновесных носителей заряда при наличии внешнего электрического поля E . Допустим, что имеется полупроводник p -типа, поперечное сечение которого значительно меньше его длины. Часть образца ($-l < x < 0$) освещается слабопоглощающим светом, так что происходит равномерная генерация носителей заряда во всем объеме освещенной области образца (рис.4). Пусть концентрация основных носителей p_0 велика по сравнению с концентрацией неосновных неравновесных носителей Δn , время жизни которых τ_n . К образцу приложено электрическое поле E , так что носители могут дрейфовать в этом электрическом поле и диффундировать в неосвещенную область образца.

Концентрация неосновных носителей Δn может быть определена в результате решения уравнения непрерывности

$$\frac{\partial \Delta n}{\partial t} = -\frac{\Delta n}{\tau_n} + \frac{1}{e} \operatorname{div} j_n + g, \quad (8)$$

где $\frac{\Delta n}{\tau_n}$ – член учитывающий рекомбинацию носителей;

$\frac{1}{e} \operatorname{div} j_n$ – дивергенция потока неосновных носителей;

g – скорость генерации носителей светом.

В стационарном случае $\frac{\partial \Delta n}{\partial t} = 0$ распределение концентрации неосновных носителей вдоль оси x в неосвещенной части образца ($g=0$). Продифференцировав выражение для плотности электронного тока (7) и подставив $\operatorname{div} j_n$ в уравнение (8), и получим

$$-\frac{\Delta n}{\tau_n} + D_n \frac{d^2 n}{dx^2} + \mu_n E \frac{d \Delta n}{dx} = 0 \quad (9)$$

и при окончательном решении уравнения (8) получим

$$\Delta n = \text{const} \cdot e^{-\frac{x}{L_D}} \quad (10)$$

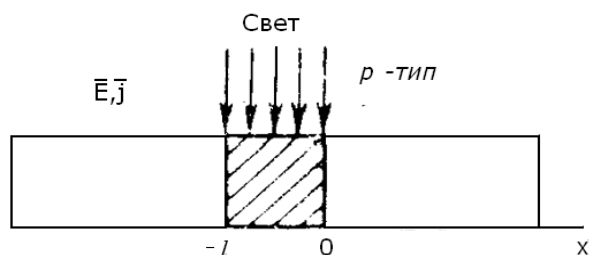


Рис. 4 Одномерная модель образца

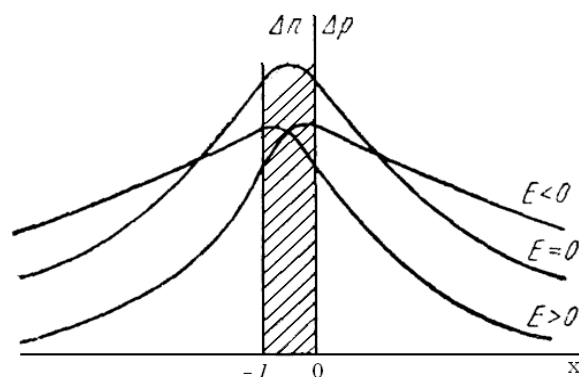


Рис. 5 Распределение концентрации неравновесных носителей заряда вдоль образца

Таким образом, в области тени по обе стороны от освещенной части образца концентрация неосновных носителей падает по экспоненциальному закону (рис. 5). В отсутствие электрического поля ($E=0$), когда имеет место только диффузия носителей и заряда, экспоненциальный спад носителей симметричный и определяется величиной $L_D = \sqrt{D_n \tau_n}$, которая называется диффузионной длиной неосновных носителей заряда (в данном случае электронов).

Измерительная установка и методика измерений

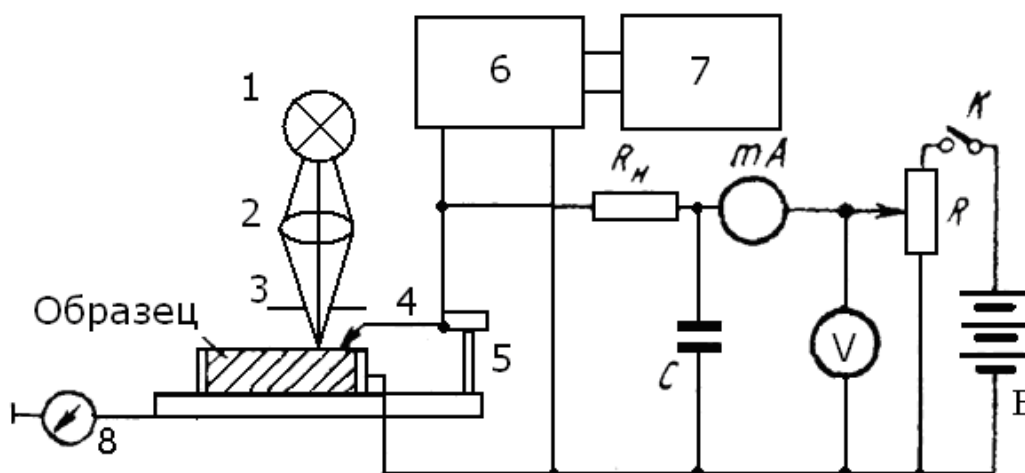


Рис. 6 Схема установки для определения диффузионной длины неосновных носителей заряда. 1 – лампа осветителя; 2 – линза; 3 – камертонный прерыватель; 4 – коллектор; 5 – держатель; 6 – избирательный усилитель ($f_0=394$ Гц); 7 – осциллограф С1–68; 8 – индикатор перемещения

Возникающий при освещении образца сигнал регистрируется в цепи вольфрамового коллектора. Постоянное смещение на коллектор подается от батареи B (рис. 6), величина смещения устанавливается потенциометром R . Сопротивление R_n служит нагрузкой коллектора. С него снимается переменное напряжение, которое фиксируется осциллографом. Это напряжение

пропорционально концентрации неравновесных неосновных носителей вблизи коллектора и, следовательно,

$$\lg u \sim \lg \Delta n = \text{const} - \frac{x}{L_D} 0,43 \quad (11)$$

$$L_D = \frac{0,43 \Delta x}{\Delta \lg u}, \quad (12)$$

где Δx – величина перемещения образца относительно светового зонда;

Δu – изменение напряжения на нагрузке при перемещении на Δx .

Зная диффузионную длину L_D неосновных носителей заряда, можно определить их время жизни

$$\tau_n = \frac{L_D^2}{D_n} \quad (13)$$

где D_n – коэффициент диффузии электронов в p – Ge .

Результаты двух методик измерения для n – Ge .

1. Метод электрического зонда.

$t_3, \text{мкс}$	25	50	75	100	150	200	300	400
$\lg \Delta U$	3,11	2,64	2,14	1,87	1,1	0,92	0,69	0

Отсюда $\tau_{25-50} = 53 \text{ мкс}$, при $D_p = 44 \text{ см}^2/\text{с}$.

$$L_D = \sqrt{D_p \tau_p} = 0,48 \text{ мм}.$$

2. Метод светового зонда.

$\Delta x, \text{мкм}$	0	50	100	150	200	250	300	350	400
$\lg \Delta U$	1,78	1,763	1,74	1,7	1,66	1,623	1,58	1,54	1,505

Найденные значения $L_D = 0,5 \text{ мм}$, $\tau_p = 56,8 \text{ мкс}$.

Из сравнения результатов (1) и (2) следует достаточно хорошее соответствие между измерениями L_D и τ_p , найденными разными методиками. Кроме того, можно, по – видимому считать измерения этих параметров при малых задержках методом электрического зонда корректными.

Литература

1. Готра З.Ю. Технология микроэлектронных устройств. – М., – 1991. – 528с.
2. Надточий В.А., Нечволод Н.К., Сущенко Д.Г. Физ. и техн. высоких давлений, –2001. – Т.11, №1. – С.104–110.
3. Nadtochy V., Nechvolod N., Golodenko N. Functional materials, –2003. – Т.4, №3. – С.556 –559.
4. Надточій В.О., Нечволод М.К., Голоденко М.М. Вісник Харківського нац. університету, серія «Фізика», – 2003. – №600, вип.7. – С. 101 – 104.
5. Батавин В.В. и др. Измерения параметров полупроводниковых материалов и структур. – М., – 1985. – 264 с.
6. Воробьев Ю.В., Добровольский В.Н., Стриха В.И. Методы исследования полупроводников. – Киев, – 1988. – 231 с.

Бутенко Р.А., Костиков А.П.

¹Студент 5 курса группы 5М–2 физико-математического факультета СГПУ,

²Доцент кафедры физики СГПУ

Исследование роли гидрофобных взаимодействий для устойчивости бета-шпильки методом МДМ с использованием УМД

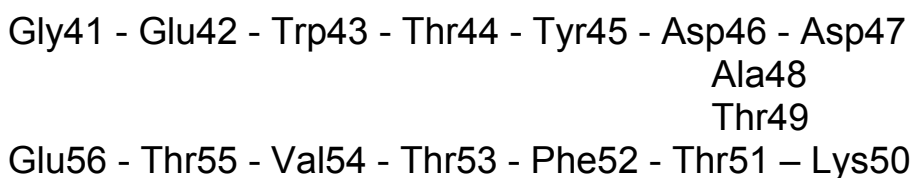
Процессы, приводящие к самопроизвольному сворачиванию молекул белков в нормальные, естественные («нативные») структуры, происходят в живых клетках непрерывно и безошибочно. Любые отклонения конечной структуры белка от «нативной», приводят к нарушению его функциональных свойств. В белках выделяют три типа регулярной вторичной структуры: спираль, бета-лист и изгиб. Частота, с которой эти несколько элементов вторичной структуры обнаруживаются в свернутых (нативных) белках, привела к тому, что многие исследователи занялись поиском моделей систем, в которых хорошо опознаваемая вторичная структура наблюдается при отсутствии третичной структуры. Такие системы обеспечивают возможность отделить существенные свойства вторичной структуры белка от эффектов третичной структуры.

Одна из наиболее удачных моделей – β -шпилька из белка G (2gb1). Первоначально эту модель удалось найти биохимикам, причем было надежно показано, что этот фрагмент молекулы белка в пробирке способен к обратимому разворачиванию-сворачиванию в нативную структуру. Затем последовал ряд работ, в которых процессы разворачивания-сворачивания β -шпильки изучались параллельно традиционными методами исследования и методами компьютерного моделирования динамики молекул. В результате было получено достаточно много интересных данных, имеющих отношение к раскрытию механизма самосборки β -структур /1/. В последнее время появилась возможность наблюдать за процессом разворачивания полипептидной цепочки молекулы при механическом воздействии. Это либо экспериментальный метод Атомной Силовой Микроскопии (АСМ), либо один из вариантов метода моделирования динамики – управляемая молекулярная динамика (УМД). Метод АСМ на сегодняшний день имеет еще очень много ограничений и не может применяться к маленьким молекулам. Для метода УМД ограничений не существует. Поэтому мы воспользовались последним методом для исследования β -шпильки. Особое внимание при этом мы уделяли гидрофобным взаимодействиям в исследуемом полипептиде.

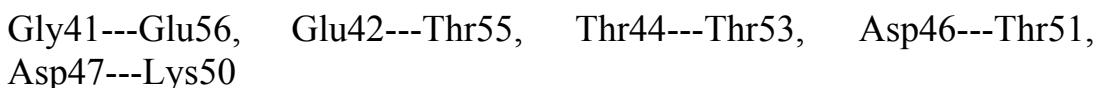
Многими экспериментами (см., например ссылки в /1/) показано, что фрагмент этого белка из 16 аминокислотных остатков имеет вторичную

структуру β -шпильки, совпадающую со структурой этого фрагмента в составе белка. Показано также, что исследуемая β -шпилька стабилизируется водородными связями между противолежащими аминокислотными остатками и гидрофобными взаимодействиями между двумя парами остатков: Trp43—Val54 и Tyr45—Phe52. Нашей целью было выяснить роль гидрофобных взаимодействий в стабилизации структуры β -шпильки. Для этого мы воспользовались методом мутаций – замены одних остатков на другие. Исследование динамики структуры выполнялось методом молекулярно-динамического моделирования (МДМ) /2/ с использованием процедур управляемой молекулярной динамики (УМД).

Схематически первичную и вторичную структуры исследуемой молекулы можно представить в виде шпильки, на свободных концах которой находятся аминокислотные остатки Gly41 (N-конец) и Glu56 (C-конец). Аминокислотные остатки Asp47, Ala 48, Thr49 и Lys50 образуют область изгиба шпильки:



В равновесных условиях при комнатной температуре представленная форма β -шпильки молекулы стабилизируется водородными связями между противоположными остатками:



Кроме водородных связей, стабильность β -шпильки, в соответствии с литературными данными, обеспечивают гидрофобные связи между боковыми группами неполярных гидрофобных аминокислотных остатков: Trp43----Val54, Tyr45----Phe52.

Процедура подготовки молекулы к компьютерному моделированию (симуляции) динамики проводилась по стандартной методике /3/. Процедуры УМД были аналогичны процедурам, разработанным ранее /4/.

Наблюдение за процессами изменения пространственной структуры молекулы осуществляли несколькими способами. Один из них – выявление *контактов* в молекуле и последующее наблюдение за контактируемыми атомами молекулы. По определению, *контактом* между атомами $\text{C}\alpha$ - $\text{C}\alpha$ называют такие два альфа-углеродных атома основной цепи молекул, которые не являются соседними вдоль цепи, и расстояние между которыми не превышает заданной величины. Как правило, эта величина составляла 5,4 Å.

В большинстве наших экспериментов фиксировалось положение $\text{C}\alpha$ 41-го аминокислотного остатка, а растягивающую силу прикладывали к атому $\text{C}\alpha$ 56-го аминокислотного остатка. Направление приложенной силы выбиралось вдоль прямой, соединяющей указанные атомы.

На рис.1 показаны некоторые результаты одной из серий наших экспериментов по УМД β -шпильки и ее мутанта, в котором аминокислотные остатки Trp43, Val54, Tyr45, Phe52 заменены на аланин (Ala). Тем самым было резко уменьшены гидрофобные взаимодействия соответствующих пар остатков.

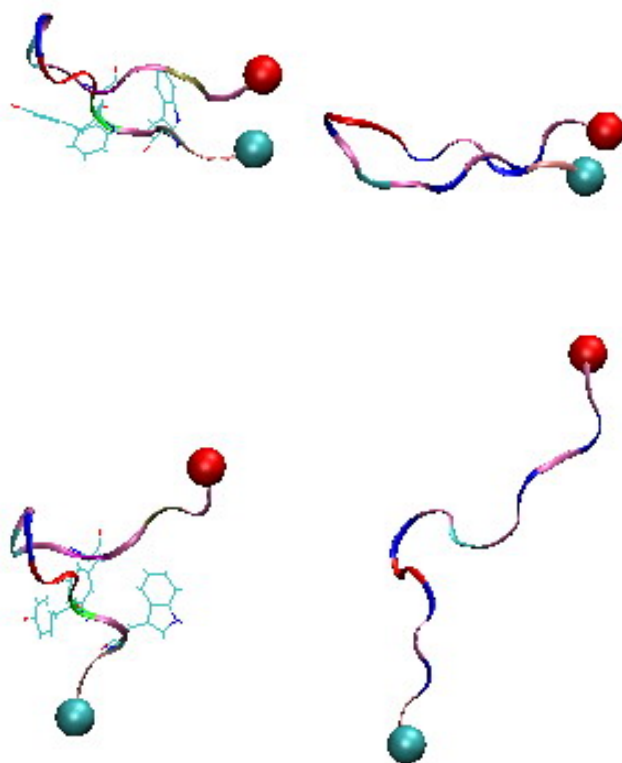


Рис.1. Растягивание β -шпильки (слева) и ее мутанта (справа) в воде с постоянной силой 200 пН, температура – 300К. Неподвижный атом – C_{α} 41 аминокислотного остатка, управляемый атом – C_{α} 56 аминокислотного остатка, оба эти атома показаны в виде сфер Ван дер Ваальса. Вверху – молекулы до начала разворачивания, внизу – через 300 пс. Рисунок получен с помощью программы VMD [3/].

Из рисунка хорошо видно, что при одинаковых условиях мутантная молекула разворачивается быстрее, чем ее нативный аналог. Этот вывод подтверждается и нашими наблюдениями за характером зависимости расстояний между атомами C_{α} - C_{α} контактов от времени. На рис.2 такие зависимости показаны для молекулы-мутанта. Хорошо видно, что все контакты разрушаются практически одновременно, тогда как в нативной шпильке это происходило последовательно, причем с задержками на тех парах C_{α} - C_{α} , которые соответствовали парам остатков, связанных гидрофобным взаимодействием. Это означает, что гидрофобные взаимодействия способны эффективно противодействовать разворачиванию молекулы.

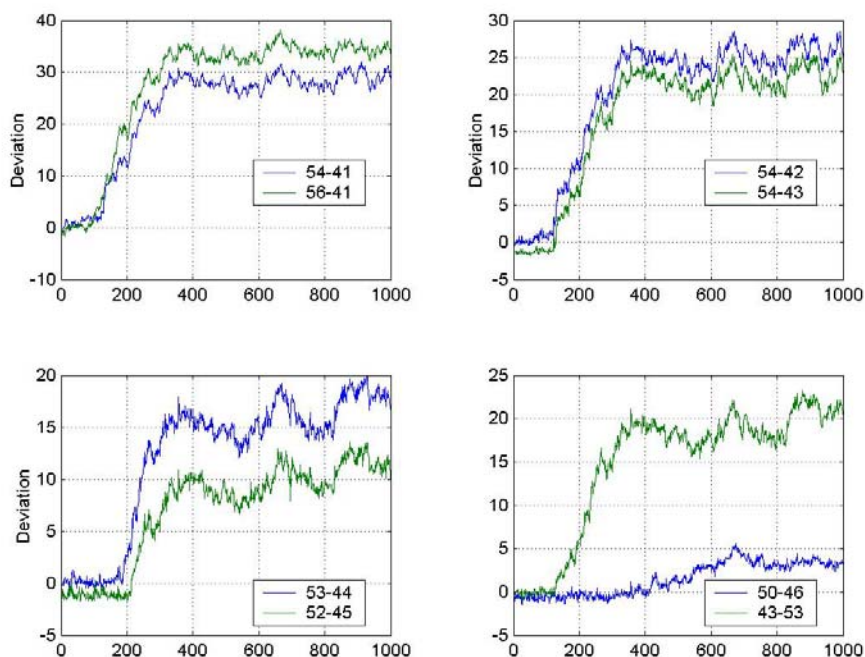


Рис.2. Зависимость отклонений (Deviation) расстояний $C_{\alpha}-C_{\alpha}$ от 5,4 Å между указанными атомами углерода мутанта β-шпильки из белка 2gb1 в воде при 300 К от времени (пикосекунд). Растяжение молекулы производили с постоянной силой 200 пН.

Таким образом, наши результаты позволяют утверждать, что именно гидрофобные взаимодействия являются ключевыми, ответственными за стабильность β-шпильки. Роль водородных связей в исследованной нами молекуле, видимо, сводится скорее к поддержанию конечной структуры, к регулировке деталей этой структуры.

Литература

1. *Espinosa J.F., Syud F.A., Gellman S.H.* "Analysis of the factors that stabilize a designed two-stranded antiparallel β-sheet". *Protein Sci.* 11:1492–1505. (2002).
2. *Kale L., Skee R., Bhandarkar M., Brunner R., Gursoy A., Krawetz N., Phillips J., Shinozaki A., Varadarajan K., and Schulten K.* "NAMD2: Greater scalability for parallel molecular dynamics." *J. Comp. Phys.*, 151, 283-312, (1999).
3. *Humphrey W., Dalke A., Schulten K.* VMD – "Visual Molecular Dynamics". *J.Molec.Graphics*, 14.1, 33-38, (1996).
4. *Костиков А.П.* Применение метода молекулярного динамического моделирования в биофизике. Сборник "Пошуки і знахідки", Выпуск 3, Славянск, СГПУ, 2004, стр. 7-9.
5. *Костиков А.П., Медведева И.В.* Исследование разворачивания белков при механических возмущениях. Сборник "Пошуки і знахідки", Выпуск 9, том 4, Славянск, СГПУ, 2009, стр. 112-117.

Кривошеенко Д.А., Костиков А.П.

¹*Студент 5 курса группы 5М–2 физико-математического факультета СГПУ,*

²*Доцент кафедры физики СГПУ*

Исследование промежуточных состояний самосборки белков методами моделирования молекулярной динамики

Выяснение механизма самоорганизации белка чрезвычайно важно для понимания молекулярной биологии клетки, является ключом для понимания того, как код линейной ДНК превращается в клеточную функцию при сборке активного белка-фермента.

Проблема самоорганизации белка в трехмерную структуру до сих пор не решена. Какие вопросы составляют эту проблему? Один из главных вопросов – понять, каким образом одномерная цепочка первичной структуры белка задает трехмерную структуру молекулы. Поиск алгоритмов, управляющих процессом самосборки белка, привел к пониманию того, что этот сложный процесс, в который вовлечено большое число атомов молекулы белка, глобально должен быть энергетически выгодным. В результате сформировалась идея о необходимости учитывать характер рельефа поверхности потенциальной энергии белка. Первоначально в своих теоретических работах многие авторы подразумевали, что процесс самосборки всегда проходит через определенные промежуточные состояния так, что весь процесс перестройки пространственной структуры молекулы обеспечивается последовательным перебором таких *промежуточных состояний*, каждое последующее из которых энергетически более выгодно, чем предыдущее.

Поиском промежуточных состояний были заняты многие экспериментаторы и теоретики /1/. В результате появился целый ряд моделей самосборки белков, в которых обращалось внимание на разные аспекты процессов пространственной организации длинной полипептидной цепочки белка. Эти модели не потеряли своей актуальности, более того, их дальнейшее развитие происходит и сегодня.

В нашей работе исследовалось промежуточное состояние разворачивания молекулы белка убихитина при воздействии механических сил.

В качестве метода исследования использован метод молекулярно-динамического моделирования (МДМ). Мы использовали программу моделирования NAMD /2/. Метод исследования, выбранный нами в рамках МДМ – управляемая молекулярная динамика (УМД), позволяет воздействовать механически не любые участки молекулы. При механическом воздействии положение одного из атомов молекулы фиксируется, этот атом в дальнейшем

неподвижен. Второй атом, управляемый, изменяет свое положение полностью контролируемым способом. В программе NAMD возможны два способа управления движением управляемого атома: постоянная скорость или постоянная сила, приложенная к этому атому. В том и другом случае в процессе симуляции динамики молекулы, она растягивается по заданному алгоритму, в конце процесса растягивания участок молекулы между двумя упомянутыми атомами становится линейным. Наблюдение за деталями процесса растягивания дает уникальную информацию о внутримолекулярных силах, аналогично информации получаемой методом атомной силовой микроскопии.

Процедура подготовки молекулы к компьютерному моделированию (симуляции) динамики проводилась по стандартной методике /3/. Процедуры УМД были аналогичны процедурам, разработанным ранее /4/.

Наблюдение за процессами изменения пространственной структуры молекулы осуществляли несколькими способами. Один из них – выявление *контактов* в молекуле и последующее наблюдение за контактируемыми атомами молекулы.

По определению, *контактом* между атомами C α -C α называют такие два альфа-углеродных атома основной цепи молекул, которые не являются соседними вдоль цепи, и расстояние между которыми не превышает заданной величины. Как правило, эта величина составляла 5,4 Å.

Из предварительных экспериментов /4/ было установлено, что если фиксировать положение атома C α 48-го аминокислотного остатка, а растягивающую силу приложить к атому C α 76-го аминокислотного остатка убихитина, можно наблюдать промежуточное состояние разворачивания молекулы. Это состояние наблюдалось до 200-300 пс. В наших экспериментах анализировалось не только зависимость от времени расстояния между неподвижным и управляемым атомом (стандартный подход в методе УМД), но и другие параметры молекулы. В частности, на рис.1 показана зависимость от времени суммы расстояний контактов. Видно, что этот параметр оставался практически постоянным до 250 пс и только после этого начинал расти. Это означает, что не только вторичная, но и третичная структура белка в промежуточном состоянии оставались близкими к нативной структуре вплоть до 250 пс несмотря на действие постоянной растягивающей силы. Существенное нарушение структуры происходило только после момента времени 250 пс.

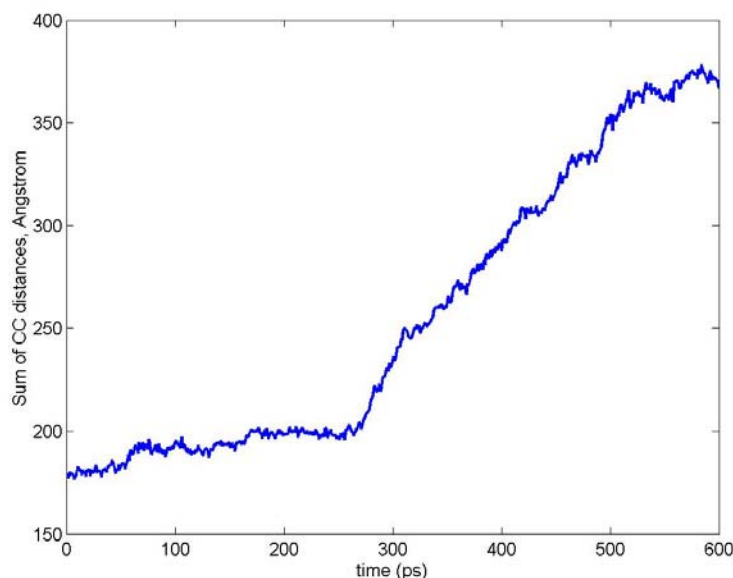


Рис.1. Зависимость от времени суммы расстояний между атомами Cα-Cα молекулы белка убихитина, подчиняющимся критерию «контакт». Растяжение молекулы проводили с постоянной силой 500 пН, температура – 300К. Неподвижный атом – Cα 48 аминокислотного остатка, управляемый атом – Cα 76 аминокислотного остатка.

Как видно из рисунка в представленной зависимости имеется достаточно протяженный участок, на котором приложенная постоянная сила растягивания не приводила к заметному разворачиванию молекулы. Этот участок соответствует промежуточному состоянию процесса разворачивания молекулы. Более подробное изучение позволило понять характер промежуточного состояния.

Во многих экспериментах этой серии можно было заметить, что после 500-600 пс перестройка пространственной структуры молекулы завершалась и в дальнейшем молекула оставалась неизменной. Полезную информацию о динамике пространственной структуры молекулы дает рис.2. На нем изображена зависимость от времени количества контактов в молекуле белка. Видно, что в начальный момент это количество составляло около 25-30 контактов, в конце периода наблюдения количество контактов уменьшалось до 15. Как выяснилось, оставшиеся контакты находятся в тех частях молекулы, которые не подвергались возмущениям в наших экспериментах. Это означает, видимо, что отдельные участки молекулы белка способны независимо образовывать нативную структуру. Эта независимость пространственной структуры разных участков молекулы белка является хорошим подтверждением одной из гипотез о механизме сворачивания-разворачивания белков. В соответствии с этим механизмом сначала образуются вторичные структуры белка (спиральные участки и β-структуры), а затем эти структуры объединяются в единую компактную третичную структуру.

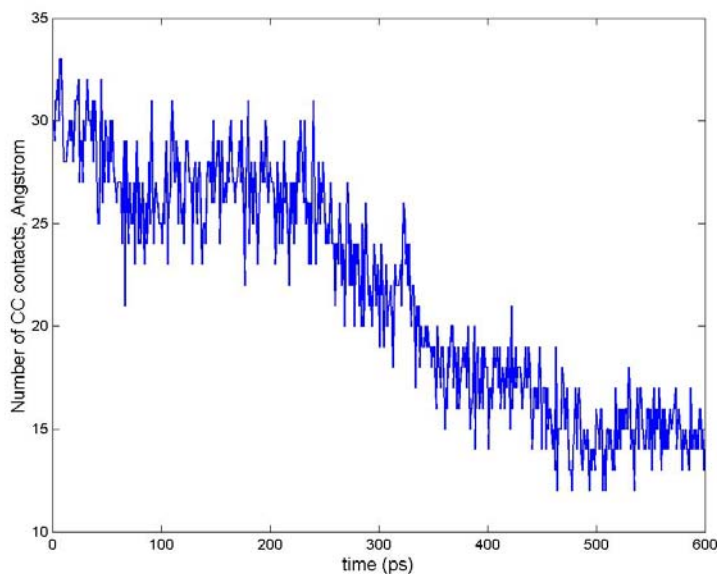


Рис.2. Зависимость от времени количества контактов Ca-Ca,.
Остальные условия как на рис.1.

В последующих сериях экспериментов мы выясняли, как влияют внешние условия на стабильность промежуточного состояния. Наиболее интересны, на наш взгляд, результаты изучения таких зависимостей от температуры. Мы выполнили несколько серий экспериментов, в которых процедура механического растягивания молекулы совмещалась с увеличением температуры образца.

Хорошо известно, что повышение температуры приводит к разрушению пространственной структуры молекул белков, причем этот процесс, как правило, затрагивает одновременно все участки молекулы белка. Насколько нам известно, выполнить в реальных условиях, с использованием атомного силового микроскопа, растяжение молекулы при произвольной температуре не представляется возможным по техническим причинам. Компьютерный эксперимент свободен от таких ограничений.

Из наших результатов исследований промежуточного состояния при разных температурах следует, что это состояние при повышении температуры становится менее стабильным.

Обнаружено, что после 300 пс количество контактов, для которых по-прежнему выполняется критерий «контакта», уменьшается от среднего значения 25 до 10. Интересно, что количество контактов к концу симуляции не равно нулю, т.е. несмотря на экстремальные условия, некоторые участки молекулы белка оставались нативными, неповрежденными. Сравнивая этот результат с результатами аналогичных наблюдений, но без участия методики управляемой молекулярной динамики, можно заметить, что без применения методики УМД при высокой температуре молекула быстро теряет все нативные контакты. Причины такого различия будут выясняться в последующих работах.

Литература

1. Onuchic, J.N., Luthey-Schulten, Z., and Wolynes, P.G. (1997) Theory of protein folding: The energy landscape perspective. *Annu. Rev. Phys. Chem.* 48, 545-600.
2. Kale L., Skee R., Bhandarkar M., Brunner R., Gursoy A., Krawetz N., Phillips J., Shinozaki A., Varadarajan K., and Schulten K.. *NAMD2: Greater scalability for parallel molecular dynamics.* *J. Comp. Phys.*, 151, 283-312, (1999).
3. Кости́ков А.П. Применение метода молекулярного динамического моделирования в биофизике. Сборник "Пошуки і знахідки", Выпуск 3, Славянск, СГПУ, 2004, стр. 7-9.
4. Кости́ков А.П., Медведева И.В. Исследование разворачивания белков при механических возмущениях. Сборник "Пошуки і знахідки", Выпуск 9, том 4, Славянск, СГПУ, 2009, стр. 112-117.

Кулик А.В., Кости́ков А.П.

¹Студент 5 курса группы 5М–2 физико-математического факультета СГПУ,

²Доцент кафедры физики СГПУ

Исследование когерентной динамики белков

Компьютерное моделирование молекулярной динамики биополимеров в настоящее время широко используются для изучения их свойств, структуры, динамики и термодинамики. В частности, был предложен и развит метод изучения когерентных свойств атомных осцилляторов белка, в котором молекула подвергается кратковременным возмущениям, а затем наблюдается отклик системы. Метод называют температурным эхо.

Суть явления заключается в следующем. Движение атомов в глобулярных белках можно описать как набор слабо взаимодействующих гармонических осцилляторов. При этом линейные суперпозиции сходных атомных осцилляторов образуют так называемые нормальные моды. Поскольку в нормальных модах участвуют индивидуальные атомные колебания разных частей молекулы, то можно говорить о делокализации нормальных мод по всему белку. Экспериментально существует возможность синхронизации, через соответствующее возмущение, этих нормальных мод, переводя систему в так называемое фазовое когерентное состояние, в котором нормальные моды колеблются в фазе. Степень когерентности системы может быть определена вторым сигналом, который, интерферируя с когерентными нормальными модами, может привести к резонансам, которые называют эхо и могут регистрироваться экспериментально.

Целью данной работы было исследование особенностей динамики исследуемых молекул белков в условиях возбуждения в них когерентных

колебаний. Появление и затухание когерентности в белках проявляются в эффекте температурного эхо. В частности, была поставлена задача выяснить, существует ли зависимость параметров температурного эхо от вторичной структуры молекул.

В качестве метода исследования использован метод молекулярно-динамического моделирования (МДМ). Мы использовали программу моделирования NAMD /2/. Процедура подготовки молекулы к компьютерному моделированию (симуляции) динамики проводилась по нашей стандартной методике /3/. Некоторые приемы моделирования были разработаны ранее /4/. Основная часть методики регистрации температурного эхо и обработки результатов выполнены в настоящей работе.

В качестве объектов исследований мы выбрали три белка, близких по размерам, но сильно различающимся по набору пространственных структур. В одном из белков (1ubq.pdb) присутствовали α -спираль и β -структуры. Во втором белке (1bdd.pdb) вторичная структура содержала практически только α -спирали. Третий белок (1csp.pdb) практически не содержал спиральных структур. Ниже подробно описаны наши данные для одного из исследуемых белков – 1bdd, для остальных белков приводятся только окончательные результаты.

После приведения молекулы в равновесное состояние при нормальных условиях (температура – 300К, давление – 1 атм), была выполнена специальная симуляция для нахождения параметров автокорреляционной функции. Из полученных данных мы получили экспоненциальное представление автокорреляционной функции:

$$C_{TT}(t) = \exp(-t/\tau_0)$$

Показатель экспоненты, вычисленный нами для исследуемого белка:

$$\tau_0 = 2,648 \text{ фс} (2,648 \cdot 10^{-15} \text{ с})$$

В последующих экспериментах нашей задачей была генерация температурного эхо и выяснение скорости затухания когерентных колебаний. Иначе говоря, перед нами стояла задача выяснить, как долго сохраняется возможность наблюдения температурного эхо после процедуры его генерации.

На рис.1 представлен график, из которого можно понять процедуру генерации температурного эхо. В диапазоне от 0 фс до 500 фс выполнялась симуляция динамики молекулы при постоянной температуре T_0 (в данном случае – 370 К). На 500-й фемтосекунде скорости атомов принудительно сбрасывались к значению, соответствующему температуре $T_1 = 0 \text{ К}$, (синхронизирующий сигнал), затем в системе самопроизвольно устанавливалась новая температура на уровне $T_0/2$, при этом все осцилляторы молекулы становятся когерентными. На 700-й фемтосекунде выполнялся 2-й сброс температуры (тестирующий сигнал). После этого ведется наблюдение за системой без каких-либо воздействий и через определенное время можно наблюдать кратковременный сброс температуры (температурное эхо). В представленном эксперименте сигнал эхо находится при 900 фс

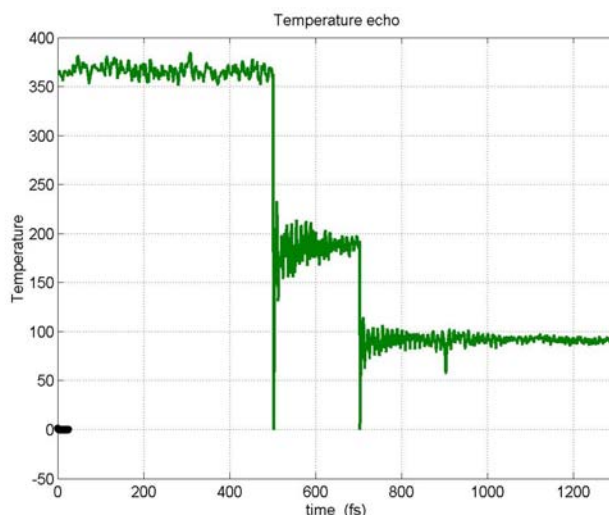


Рис.1. Типичный эксперимент по наблюдению температурного эхо. При 500 фс и 700 фс температура принудительно сбрасывалась до нуля, при 900 фс виден сигнал температурного эхо.

Второе переназначение скоростей после времени задержки τ является «зондирующим сигналом», который тестирует степень когерентности системы в момент, когда он применяется. Глубина эхо и момент времени, когда оно происходит, являются количественными характеристиками когерентности внутренней динамики белков.

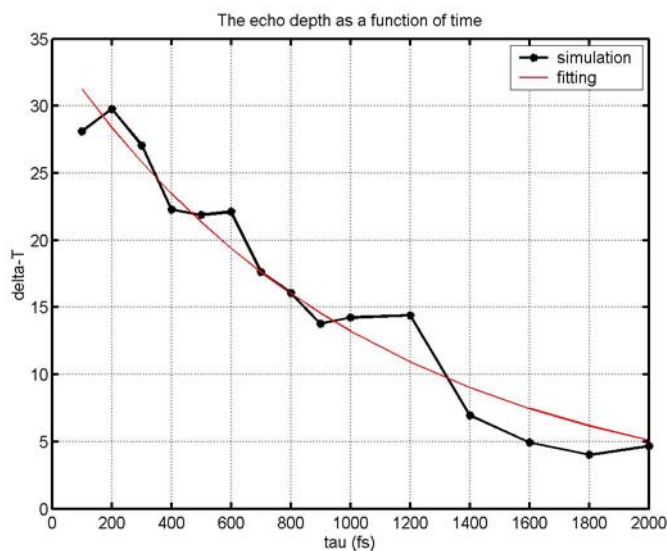


Рис.2. Глубина эхо как функция времени для белка 1bdd.

Мы провели серию симуляций температурного эхо для разных промежутков времени (τ) между синхронизирующим и тестирующим импульсами сброса температуры – от 100 фс до 2000 фс. Результаты исследования зависимости глубины сигнала температурного эхо от времени между синхронизирующим и тестирующим сигналами показаны на рис.2.

Данные, представленные на рис.2 можно представить в виде экспоненциальной зависимости (сплошная линия на рисунке) вида:

$$\Delta T = \beta(1) * \exp(-t / \beta(2))$$

где ΔT – глубина температурного эхо, $\beta(1)$ – амплитуда экспоненциальной зависимости, $\beta(2)$ – параметр, имеющий смысл времени дефазировки. Из наших данных были получены параметры $\beta(1)$ и $\beta(2)$:

$$\beta(1) = 34,4 \quad \beta(2) = 1048 \text{ фс.}$$

Таким образом, время дефазировки для исследуемого белка оказалось достаточно большим, около 1 пикосекунды. Это означает, что дефазировка нормальных мод для атомов белка относительно медленный процесс, несмотря на наличие ангармоничных вкладов в потенциал взаимодействия атомов. Другими словами, если обеспечить когерентность всех осцилляторов молекулы белка, то эта когерентность сохраняется в течение 1 пс. Если учесть, что многие колебания в белке имеют период порядка 1 фс, то понятно, что за время порядка 1 пс (1000 фс) произойдет порядка 1000 колебаний таких осцилляторов, т.е. когерентность сохраняется в течение очень большого времени.

Аналогичные эксперименты мы выполнили для двух других белков: 1ubq и 1csp.

В таблице 1. представлены характеристики всех трех исследованных нами белков, а также полученные из наших данных параметры температурного эхо.

Таблица 1. Характеристики белков. τ_0 – параметр автокорреляционной функции, τ_d – время дефазировки.

Белок (код)	α -спираль, %	β -структура, %	τ_0 (фс)	τ_d (фс)
1bdd	60	-	2,65	1048
1ubq	23	34	2,43	782
1csp	4	55	2,67	1094

Сравнивая результаты экспериментов по наблюдению температурного эхо для трех исследуемых белков можно заметить, что параметры эффекта температурного эхо не коррелируют с особенностями пространственной структуры молекул. Из наших предварительных экспериментов можно предположить, что эффект температурного эхо может заметно зависеть от плотности упаковки молекулы белка, в частности от температуры образца.

Подводя итоги нашей работы можно заключить следующее.

Температурное эхо может быть полезным для выяснения ангармонических свойств белковых систем. Наши результаты показывают, что затухание глубины эхо как функция времени может дать полезную информацию о временной шкале колебательной декогерентности.

Литература

1. Xu, D., Schulten K., Becker O.M., Karplus M. Temperature quench echoes in proteins. J.Chem.Phys. 103(8), 3112-3123 (1995).
2. Kale L., Skee R., Bhandarkar M., Brunner R., Gursoy A., Krawetz N., Phillips J., Shinozaki A., Varadarajan K., and Schulten K.. NAMD2: Greater scalability for parallel molecular dynamics. J. Comp. Phys., **151**, 283-312, (1999).
3. Костиков А.П. Применение метода молекулярного динамического моделирования в биофизике. Сб. "Пошуки і знахідки", Вып. 3, Славянск, СГПУ, 2004, стр. 7-9.
4. Костиков А.П., Скакуненко А.Г. Исследование неравновесных свойств молекул белков. Сб. "Пошуки і знахідки", Вып. 9, том 4, Славянск, СГПУ, 2009, стр.122-125.

Мазурина Ю.А., Костиков А.П.

¹Студентка 5 курса группы 5М–2 физико-математического факультета СГПУ,

²Доцент кафедры физики СГПУ

Исследование α -спиральных структур полипептидов и белков с использованием метода Управляемой Молекулярной Динамики

Проблема самоорганизации (самопроизвольного сворачивания) белков состоит из целого ряда сложных вопросов, ответы на которые пытаются найти очень большое количество исследовательских групп, в которые входят физики, биологи, математики.

Вторичная структура белков представлена набором β -структур и спиральных участков. Один из самых распространенных спиральных элементов вторичной структуры белков – α -спираль. Структура α -спирали образуется, если линейная цепочка аминокислот сворачивается в спираль, в которой каждая аминокислота образует водородные связи с соответствующей четвертой аминокислотой вдоль этой же цепочки. Несмотря на большой прогресс в понимании процессов образования и распада спиральных структур, существует целый ряд вопросов, ответы на которые либо отсутствуют, либо недостаточно изучены [1-2].

Степень устойчивости α -спиралей по отношению к различным внешним воздействиям, механизмы образования и распада спиральных структур – это те вопросы, к которым имеет прямое отношение данная работа. В частности, задачей данной работы было исследование устойчивости к механическому воздействию α -спиральных структур в белках и модельных полипептидах. В

качестве основного объекта исследования мы выбрали небольшой белок из трех α -спиралей, упакованных в компактный «пучек», код белка – 1bdd.

В качестве метода исследования использован метод молекулярно-динамического моделирования (МДМ). Мы использовали программу моделирования NAMD /3/. Метод исследования, выбранный нами в рамках МДМ – управляемая молекулярная динамика (УМД), позволяет воздействовать механически не любые участки молекулы. Как правило, при механическом воздействии положение одного из атомов молекулы фиксируется, этот атом в дальнейшем будет неподвижен. Второй атом, тоже любой, изменяет свое положение полностью контролируемым способом, – этот атом называют управляемым. В программе NAMD возможны два способа управления движением управляемого атома: постоянная скорость или постоянная сила, приложенная к этому атому. В том и другом случае в процессе симуляции динамики молекулы, она растягивается по заданному алгоритму, в конце процесса растягивания участок молекулы между двумя упомянутыми атомами становится линейным. Наблюдение за деталями процесса растягивания дает уникальную информацию о внутримолекулярных силах, аналогично информации получаемой методом атомной силовой микроскопии.

В частности, нас интересовал вопрос, что происходит с молекулой белка, если одна из ее составляющих (одна из трех α -спиралей) разворачивается. Другой вопрос – на который мы хотели получить ответ, можно ли обнаружить кооперативный характер водородных связей удерживающих структуру α -спирали.

Процедура подготовки молекулы к компьютерному моделированию (симуляции) динамики проводилась по нашей стандартной методике /4/. Процедуры УМД были аналогичны процедурам, разработанным ранее /5/.

При растягивании молекулы с постоянной скоростью мы обнаружили, что зависимость приложенной к молекуле растягивающей силы от времени имеет четко выраженный максимум (800 ± 300 пН) с последующим уменьшением силы. Оказалось, что средняя α -спиральная часть молекулы остается практически неизменной вплоть до достижения максимума силы. Если принять во внимание, что при растягивании молекулы приложенная сила компенсируется внутримолекулярными силами взаимодействия, становится очевидным, что максимальное значение этих сил в исследуемой молекуле составляет (800 ± 300 пН). После достижения этого максимума мы наблюдали разрушение всех трех α -спиралей молекулы и их взаимодействия друг с другом. Под природой сил взаимодействия в данном случае, следует подразумевать внутримолекулярные водородные связи. Известно, что именно водородные связи ответственны за структуру α -спиралей. Учитывая сказанное, интерпретация событий, происходящих после достижения максимума, сводится к разрыву всех внутримолекулярных водородных связей. В результате белковая глобула переходит в состояние вытянутой полипептидной цепочки, с полностью нарушенной третичной и вторичной структурой.

Следующий компьютерный эксперимент с той же молекулой, но при постоянной растягивающей силе, равной 500 пН, позволил лучше понять характер взаимодействий, ответственных за стабильность пространственной структуры молекулы. На рис.1 показан один из результатов такого эксперимента.

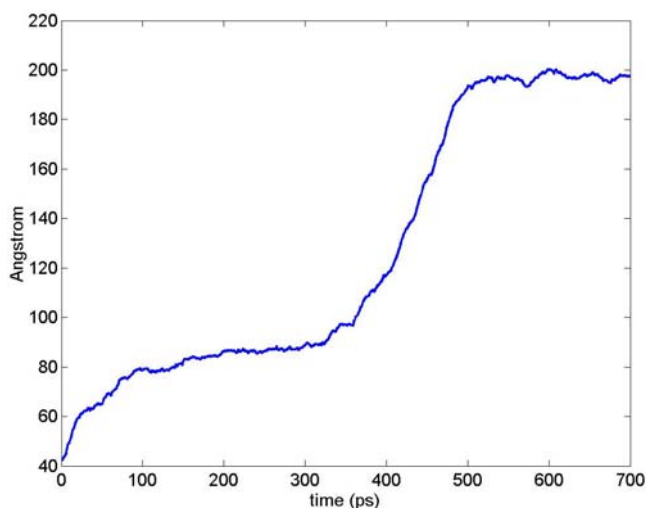


Рис.1. Зависимость расстояния от времени между N-концом (атом C α 1-го остатка) и С-концом (атом C α 60-го остатка) молекулы 1bdd в воде. Растяжение молекулы проводили при 300 К с постоянной силой 500 пН.

Как видно из рисунка в представленной зависимости имеется достаточно протяженный участок, на котором приложенная постоянная сила растягивания не приводила к заметному разворачиванию молекулы, сопровождаемому увеличением расстояния между концами молекулы. Этот участок соответствует промежуточному состоянию процесса разворачивания молекулы. Более подробное изучение позволило понять характер промежуточного состояния. Оказалось, что это наиболее устойчивая центральная часть молекулы из трех α -спиралей, объединенных водородными связями в компактную третичную структуру – «пучек» спиралей.

Поскольку из приведенного эксперимента нельзя понять существует ли какая-либо разница между водородными связями внутри каждой из α -спиралей и водородными связями между α -спиралями, мы выполнили серию экспериментов, в которых механическая сила растягивания прикладывалась только к одной из трех α -спиралей молекулы. Кроме того, мы имели возможность отделить любой из фрагментов молекулы белка и затем исследовать этот фрагмент как отдельную молекулу. В таком эксперименте полностью исключались внутримолекулярные силы взаимодействия, ответственные за третичную структуру белка. Некоторые результаты таких экспериментов приведены ниже.

На рис.2 показана зависимость от времени расстояния между двумя концами одной из α -спиралей молекулы при ее растягивании с постоянной силой, остальные части молекулы при этом могли самопроизвольно перестраивать свою пространственную структуру так, чтобы в каждый момент времени соответствовать равновесной конфигурации.

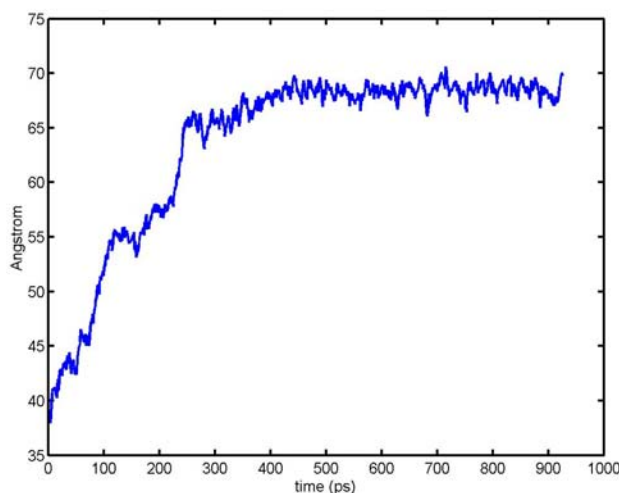


Рис.2. Зависимость от времени расстояния между неподвижным атомом C α 40-го остатка и управляемым атомом C α 60-го остатка для молекулы 1bdd в воде. Остальное – как на рисунке 1.

Из рисунка видно, что от момента начала растягивания до 300 пс расстояние между указанными атомами возрастало почти по линейному закону. Небольшая особенность наблюдалась в диапазоне 150-200 пс. В этом диапазоне времен можно заметить небольшую «ступеньку». Сравнивая эту «ступеньку» с плато на рис.1, можно сделать вывод, что в данном случае промежуточное состояние при разворачивании молекулы либо отсутствует, либо оно очень слабо выражено, т.е. не имеет четко выраженных свойств.

Более подобное исследование позволило нам установить, что наблюдаемая «ступенька» отражает взаимодействие растягиваемой α -спирали с остальной частью молекулы, т.е. отражает наличие третичной структуры белка. При выполнении аналогичного эксперимента с фрагментом молекулы белка – полипептидной цепочкой от 40-го до 60-го аминокислотных остатков мы наблюдали линейную зависимость без признаков «ступеньки». Из результатов такого эксперимента, мы можем сделать вывод, что в исследуемом полипептиде со спиральной структурой взаимодействия между любой парой соседних витков спирали равноправны. Именно поэтому разворачивание спирали происходило одновременно на всех ее участках, т.е. по кооперативному механизму.

Литература

1. Zhou Y. and Karplus M. "Interpreting the folding kinetics of helical proteins." *Nature* 401(6751): 400-403 (1999).
2. Wako, H., J. An, et al. "Environment-dependent and position-specific frequencies of amino acid occurrences in alpha-helices." *Chem-Bio Informatics Journal* 3(2): 58-77. (2003).
3. Kale L., Skee R., Bhandarkar M., Brunner R., Gursoy A., Krawetz N., Phillips J., Shinozaki A., Varadarajan K., and Schulten K.. NAMD2: Greater scalability for parallel molecular dynamics. *J. Comp. Phys.*, 151, 283-312, (1999).
4. Костиков А.П. Применение метода молекулярного динамического моделирования в биофизике. Сборник "Пошуки і знахідки", Выпуск 3, Славянск, СГПУ, 2004, стр. 7-9.
5. Костиков А.П., Медведева И.В. Исследование разворачивания белков при механических возмущениях. Сборник "Пошуки і знахідки", Выпуск 9, том 4, Славянск, СГПУ, 2009, стр. 112-117.

Худько В.В., Костиков А.П.

¹Студентка 5 курса группы 5М–2 физико-математического факультета СГПУ,

²Доцент кафедры физики СГПУ

Исследование сворачивания-разворачивания белков термофильных организмов с использованием метода Управляемой Молекулярной Динамики

При выяснении многих вопросов о функциях белков, нарушениях этих функций приходится выяснять большой круг вопросов, относящихся к структуре белка. Представления о первичной, вторичной, третичной структуре молекулы белка позволяют упорядочить массив вопросов о связи структуры белка и его функции, но сами вопросы чаще всего остаются без ответа. В частности, нет четкого понимания, почему некоторые организмы способны нормально функционировать при экстремальных условиях (очень низких или очень высоких температурах, высоких давлениях и т.п.). Ясно, что тщательное изучение всех компонентов таких организмов представляет безусловный интерес.

В нашей работе исследовался один из белков (1csp), входящий в состав термофильных организмов /1/. Наиболее яркой особенностью этого белка является его пространственная структура – набор элементов β -структуры без каких-либо признаков спиральных структур.

В качестве метода исследования использован метод молекулярно-динамического моделирования (МДМ). Мы использовали программу моделирования NAMD /2/. Метод исследования, выбранный нами в рамках МДМ – управляемая молекулярная динамика (УМД), позволяет воздействовать механически не любые участки молекулы. При механическом воздействии положение одного из атомов молекулы фиксировалось, этот атом в дальнейшем был неподвижен. Механическое воздействие прикладывается к любому другому атому молекулы, т.е. он может изменять свое положение полностью контролируемым способом, – этот атом называют управляемым. В программе NAMD возможны два способа управления движением управляемого атома: постоянная скорость или постоянная сила, приложенная к этому атому. В том и другом случае в процессе симуляции молекула растягивается по заданному алгоритму, в конце процесса растягивания участок молекулы между двумя упомянутыми атомами становится линейным. Наблюдение за деталями процесса растягивания дает уникальную информацию о внутримолекулярных силах, аналогично информации получаемой методом атомной силовой микроскопии.

Процедура подготовки молекулы к компьютерному моделированию (симуляции) динамики проводилась по нашей стандартной методике /3/. Процедуры УМД были аналогичны процедурам, разработанным нами ранее /4/.

На рис.1 показаны результаты одного из наших экспериментов. В этом эксперименте растягивающая сила 500 пН приложена к атому $C\alpha$ последнего аминокислотного остатка. Атом $C\alpha$ первого аминокислотного остатка оставался неподвижным. Из рисунка видно, что расстояние между этими атомами увеличивалось до максимального значения порядка 230Å. Это максимальное расстояние соответствовало полностью вытянутой полипептидной цепочке белка. Как видно из рисунка в процессе растягивания молекулы наблюдается не просто гладкая линейная зависимость. Можно заметить, что в двух областях графика увеличение расстояния между концами молекулы не наблюдалось при наличии постоянной растягивающей силы, на графике при этом наблюдались небольшие «ступеньки».

Для последующего анализа наших результатов использовались несколько методов наблюдения за одним и тем же процессом. В данном случае мы считали полезным воспользоваться понятием «контакты»: количество контактов, сумма расстояний между всеми контактами молекулы. Это особенно важно, поскольку наблюдение за динамикой контактов является общепринятой методикой в работах по изучению молекулярной динамики. По определению, *контактом* между атомами $C\alpha$ - $C\alpha$ называют такие два α -углеродных атома основной цепи молекул, которые не являются соседними вдоль цепи, и расстояние между которыми не превышает заданной величины. Как правило, эта величина составляла 5,4 Å. На рис.2 показана зависимость от времени количества контактов в молекуле.

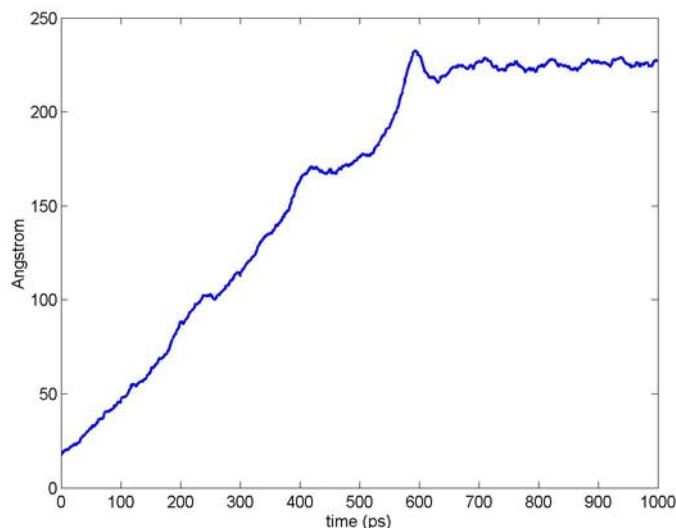


Рис.1. Зависимость расстояния между неподвижным и управляемым атомом от времени для молекулы 1csp в воде. Растяжение молекулы проводили с постоянной силой 440 пН.

Как видно из рис.2 после 550 пс количество контактов в молекуле равнялось нулю, т.е. к этому моменту времени пространственная структура белка была полностью разрушена.

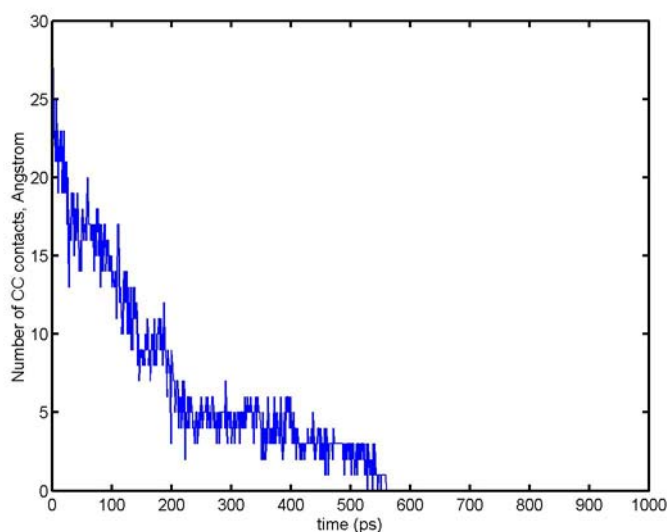


Рис.2. Зависимость от времени количества контактов $\text{C}\alpha\text{-C}\alpha$. Остальные условия как на рис.1.

При анализе результатов экспериментов при разных значениях растягивающей силы нам удалось установить, что молекула в процессе разворачивания проходит через два промежуточных состояния с повышенной устойчивостью к действию внешних возмущений. В результате такого анализа стало ясно, что в первом промежуточном состоянии несмотря на действие растягивающей силы центральная часть молекулы оставалась упакованной

компактно (не нарушалась пространственная β -структура). Нарушения пространственной структуры наблюдались только для нескольких аминокислотных остатков на С-конце и на N-конце полипептидной цепочки белка. Наглядно это можно видеть на рис.3. На рисунке 3 показаны не только неподвижный и управляемый атом, но и те аминокислотные остатки вблизи С-конца и N-конца, которые разделяют неизменившуюся часть молекулы от изменившейся (растянутой).

Во втором промежуточном состоянии развернута вся полипептидная цепочка белка кроме небольшого центрального фрагмента β -структуры – β -шпильки. На рис.3 этот фрагмент представлен в виде широких лент в середине рисунка.

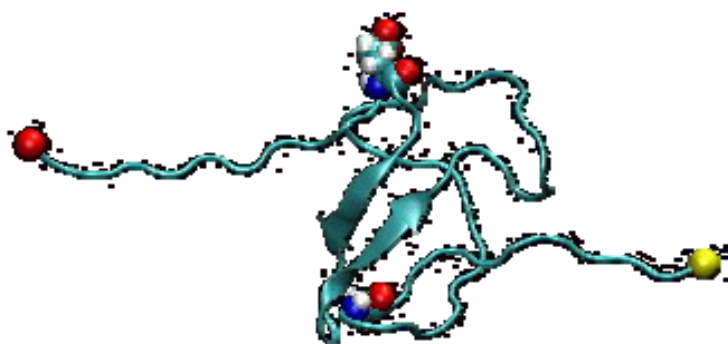


Рис.3. Пространственная структура молекулы белка 1csp после растягивания с силой 375 пН в течение 600 пс. Неподвижный и управляемый атомы показаны в виде сфер, для 12-го и 57-го аминокислотных остатков показаны все их атомы (кроме водорода), остальная часть молекулы показана сплошной лентой.

В последующих экспериментах мы выясняли степень устойчивости найденных нами промежуточных состояний при воздействии не только механических возмущений, но и высокой температуры. В результате нам удалось показать, что повышение температуры не приводит к существенным изменениям динамики структуры молекулы. Оба промежуточных состояния можно регистрировать и при высокой температуре.

Очень интересно сравнить наши результаты с результатами аналогичного исследования белка 1bdd с высоким содержанием α -структуры (Мазурина, 2010). Оказалось, что для белка 1bdd также можно выбрать условия, в которых наблюдается относительно стабильное промежуточное состояние при разворачивании молекулы. Как выяснилось в упомянутой работе стабильность промежуточного состояния белка с высоким содержанием α -структуры обусловлена взаимодействием трех α -спиралей друг с другом, т.е. взаимодействием типичным для β -структур.

Таким образом, из нашей работы можно сделать вывод, что высокая стабильность белка 1csp из термофильного организма обусловлена именно высоким содержанием β -структур в этом белке.

Литература

1. Bono S., Riechmann L., Girard E., Williams R.L., Winter G. "A segment of cold shock protein directs the folding of a combinatorial protein." Proc. Natl. Acad. Sci. U.S.A., 102, 1396-1401 (2005).
2. Kale L., Skee R., Bhandarkar M., Brunner R., Gursoy A., Krawetz N., Phillips J., Shinozaki A., Varadarajan K., and Schulten K.. NAMD2: Greater scalability for parallel molecular dynamics. J. Comp. Phys., 151, 283-312, (1999).
3. Костиков А.П. Применение метода молекулярного динамического моделирования в биофизике. Сборник "Пошуки і знахідки", Выпуск 3, Славянск, СГПУ, 2004, стр. 7-9.
4. Костиков А.П., Медведева И.В. Исследование разворачивания белков при механических возмущениях. Сборник "Пошуки і знахідки", Выпуск 9, том 4, Славянск, СГПУ, 2009, стр. 112-117.

Інформатика та методика її викладання

Данилюк К.В., Величко В.Є.

¹Студентка 5 курсу магістратури фізико-математичного факультету СДПУ,
²Завідувач кафедри алгебри СДПУ

Наближені методи розв'язку задачі про рюкзак

В статті розглянута NP-повна задача про рюкзак. Наведені різноманітні методи її розв'язання. Наведені основні принципи перспективних методів – генетичний алгоритм та алгоритм мурашиної колонії.

Ключові слова: задача про рюкзак, генетичний алгоритм, алгоритм мурашиної колонії.

Математична постановка задачі. Нехай задана скінчена множина $Q = \{q_1, q_2, \dots, q_n\}$, для кожного $q_i \in Q$ відома вартість c_i і визначений об'єм a_i . Також є рюкзак об'ємом B . Необхідно запакувати рюкзак так, щоб загальна вартість запакованих предметів була якнайбільшою, а їх загальний об'єм не перевищував B . Традиційно вважають, що c_i, a_i, B – цілі невід'ємні числа.

Введемо двійкові змінні x_1, x_2, \dots, x_n :

- $x_i = 1$, якщо предмет $q_i \in Q$ обраний для упаковки;
- $x_i = 0$ в протилежному випадку.

Тоді задача про рюкзак зводиться до наступної задачі лінійного цілочисельного програмування з булевими змінними: знайти такі значення змінних x_1, x_2, \dots, x_n , при яких досягається максимум суми

$$W = \sum_{i=1}^n c_i x_i, \quad (1)$$

і виконується обмеження

$$\sum_{i=1}^n a_i x_i \leq B. \quad (2)$$

Якщо є тільки одне обмеження виду (2), то задачу про рюкзак називають одновимірною, в протилежному випадку – багатовимірною.

Ця задача має складність **NP-повної** задачі, тобто її можна розв'язати за поліноміальний час на недетермінованій машині Тюрінга.

Огляд відомих методів розв'язання задачі. **NP-повні** задачі, які часто виникають на практиці, настільки важливі, що відмовитися від їхніх розв'язків неможливо. Звичайно, немає надій побудувати для них поліноміальний алгоритм. Однак це ще не означає, що з даною задачею взагалі нічого не можна зробити. По-перше, може виявитися, що деякий експонентний алгоритм, наприклад, переборний, працює прийнятний час на реальних даних. По-друге, можна спробувати знайти поліноміальний алгоритм, що дає не оптимальний розв'язок задачі, а близький до нього, тобто наближений розв'язок.

Знайти наближений розв'язок може бути цілком достатньо для практичного застосування.

До наближених методів для задачі про рюкзак відносять:

- жадібні алгоритми;
- алгоритми мурашиної колонії;
- генетичні алгоритми та ін.

Жадібний алгоритм для задачі про рюкзак полягає в наступному:

- спочатку множина предметів Q упорядковується за зменшенням «питомої цінності» (або ціни одиниці ваги) предметів, тобто так, щоб

$$\frac{c_1}{a_1} \geq \frac{c_2}{a_2} \geq \dots \geq \frac{c_n}{a_n};$$

- потім, починаючи з порожньої множини, до наближеного розв'язку Q' (спочатку воно порожнє) послідовно додаються предмети з упорядкованої множини Q ;

- при кожному черговому додаванні предмета в рюкзак виконується перевірка, чи не перевершує/перевищує? його вага величини того об'єму рюкзака, що залишився;

- закінчення перегляду всіх предметів завершує процес побудови наближеного розв'язку задачі про рюкзак.

Алгоритм мурашиної колонії базується на аналізі поведінки мурах. Тобто алгоритм виконує ті самі дії, які можуть виконувати мурахи під час пошуку шляхів до предмету. Для кожного мурахи дія взяти предмет залежить від трьох складових: пам'яті мурахи, важливості та віртуального сліду феромону.

Пам'ять мурахи – це список взятих мурахою предметів, які взяти повторно неможливо. Також в список необхідно включити ті предмети, взявши які ми порушуємо обмеження за об'ємом рюкзака. Позначимо через J_k список предметів, які k -та мураха може взяти на ітерації t .

Важливість – величина, обернена об'єму предмета: $\eta = 1/a_j$, a_j – об'єм i -го предмету. Важливість – це локальна інформація, яка виражає евристичне бажання взяти предмет, чим менше предмет, тим більше бажання покласти його в рюкзак.

Віртуальний слід феромону τ_j на предметі j є підтверджене досвідом мурахи бажання взяти предмет j .

Важливу роль в мурашиних алгоритмах відіграє ймовірнісно-пропорційне правило, яке визначає ймовірність k -го мурахи взяти предмет j на ітерації t :

$$P_{j,k}(t) = \begin{cases} \frac{[\tau_j(t)]^\alpha \cdot [\eta_j]^\beta}{\sum_{j \in J_k} [\tau_j(t)]^\alpha \cdot [\eta_j]^\beta}, & j \in J_k, \\ 0, & j \notin J_k \end{cases}$$

де α, β – два параметра, що задають вагу сліду феромону і важливість при виборі маршруту. Після того, як всі мурахи наповнили свої рюкзаки, відбувається зміна сліду феромону на предметах. Мураха k відкладає на предметі j наступну кількість феромону:

$$\Delta\tau_{j,k}(t) = \begin{cases} q \cdot f(T_k(t)), & \text{якщо } j \in T_k(t), \\ 0, & \text{якщо } j \notin T_k(t), \end{cases}$$

де $T_k(t)$ – набір предметів у k -го мурахи на ітерації t ; $f(T_k(t))$ – важливість цього набору предметів; q – параметр.

Для дослідження всього простору предметів необхідно забезпечити випаровування феромону за правилом: $\tau_j(t+1) = (1-p) \cdot \tau_j(t) + \Delta\tau_j(t)$, де

$\Delta\tau_j = \sum_{k=1}^m \Delta\tau_{j,k}(t)$, m – кількість мурах в колонії, $p \in [0,1]$ – коефіцієнт випаровування феромону.

На початку оптимізації кількість феромону приймають рівною невеликому додатньому числу. Кількість мурах можна назначити рівну кількості предметів.

Генетичний алгоритм базується на еволюційних принципах спадковості, мінливості і природного відбору. Загальну схему генетичного алгоритму можна представити наступним чином:

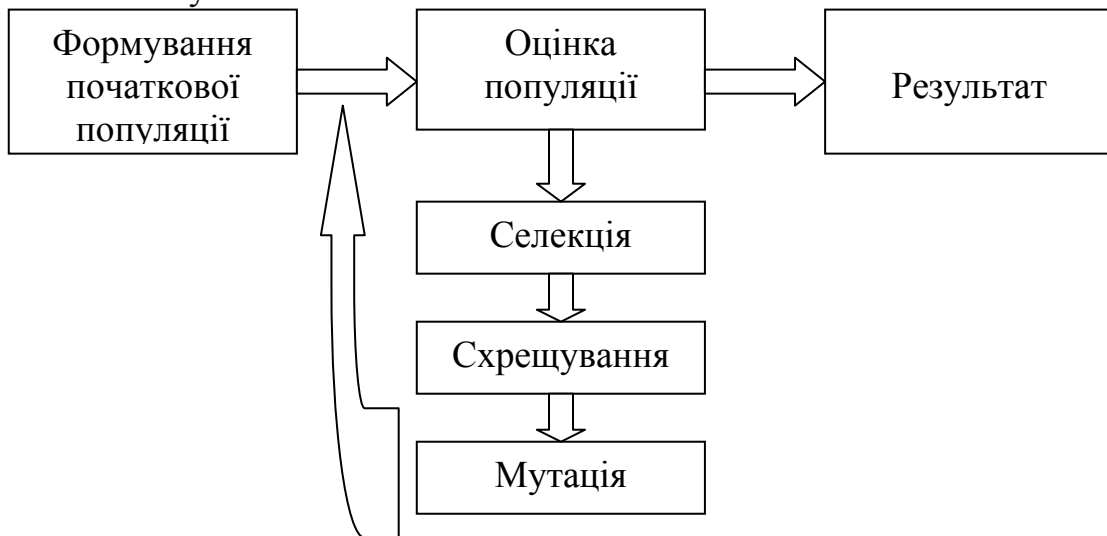


Рис. 1. Загальна схема генетичного алгоритму.

Генетичний алгоритм працює з популяцією особин, в хромосомі (генотип) кожної з яких закодовано можливий розв'язок задачі (фенотип). На початку роботи алгоритму популяція формується випадковим чином (блок «Формування початкової популяції»). Для того, щоб оцінити якість закодованих розв'язків, використовують функцію пристосованості, яка необхідна для обчислення пристосованості кожної особини (блок «Оцінювання популяції»). За результатами оцінювання особин найбільш пристосовані з них вибираються (блок «Селекція») для схрещування. В результаті схрещування вибраних особин за допомогою вживання генетичного оператора кросовера

створюється потомство, генетична інформація якого формується в результаті обміну хромосомною інформацією між батьківськими особинами (блок «Схрещування»). Створені нащадки формують нову популяцію, причому частина нащадків мутує (використовується генетичний оператор мутації), що виражається у випадковій зміні їх генотипів (блок «Мутація»). Етап, що включає послідовність «Оцінювання популяції» – «Селекція» – «Схрещування» – «Мутація», називається поколінням. Еволюція популяції складається з послідовності таких поколінь.

Для кодування інформації скористаємося наступним. Кожна хромосома представляє собою бітовий рядок, в якому закодовано розв'язок задачі. Тобто, якщо певний предмет ми будемо брати до рюкзака, то для цього предмету поставимо у відповідність 1, якщо предмет не беремо до рюкзака, то такому предмету поставимо у відповідність число 0.

Формування початкової популяції, як правило, формується випадковим чином. При цьому гени ініціалізувалися випадковими значеннями.

Оцінювання популяції необхідне для того, щоб виявити більш пристосованих і менш пристосованих особин. Для підрахунку пристосованості кожної особини використовується функція пристосованості (цільова функція)

$$f_i = f(G_i),$$

де $G_i = \{g_{ik} \mid k=1,2,\dots,N\}$ – хромосома i -ої особини, g_{ik} – значення k -го гена i -ої особини, N – кількість генів в хромосомі.

Селекція (відбір) необхідна, щоб вибрати більш пристосовані особини для схрещування. Існує безліч варіантів селекції, опишемо найбільш відомі з них.

Селекція рулетки. У даному варіанті селекції вірогідність, що i -та особина візьме участь у схрещуванні p_i , пропорційна значенню її пристосованості f_i і дорівнює

$$p_i = \frac{f_i}{\sum_j f_j}.$$

Процес відбору особин для схрещування нагадує гру в «рулетку». Круг рулетки ділиться на сектори, причому площа i -го сектора пропорційна значенню p_i . Після цього n разів «обертається» рулетка, де n – розмір популяції, і по сектору, на якому зупиняється рулетка, визначається особина, вибрана для схрещування.

Селекція усіканням. При відборі усіканням після обчислення значень пристосованості для схрещування вибираються $l \cdot n$ кращих особин, де l – «поріг відсікання», $0 < l < 1$, n – розмір популяції. Чим менше значення l , тим сильніше тиск селекції, тобто менше шансів на виживання у погано пристосованих особин. Як правило, вибирають l в інтервалі від 0,3 до 0,7.

Турнірний відбір. У разі використання турнірного відбору для схрещування, як і при селекції рулетки, відбираються n особин. Для цього з популяції випадково вибираються t особин, і найбільш пристосована з них допускається до схрещування. Говорять, що формується турнір з t особин, t – розмір турніру. Ця операція повторюється n разів. Чим більше значення t , тим більше тиск селекції. Варіант турнірного відбору, коли $t=2$, називають бінарним турніром. Типові значення розміру турніру $t=2,3,4,5$.

Відібрані в результаті селекції особини (батьківські) схрещуються і дають потомство. Хромосоми нащадків формуються в процесі обміну генетичною інформацією (із застосуванням оператора кросовера) між батьківськими особинами. Створені таким чином нащадки складають популяцію наступного покоління. Розглядатимемо випадок, коли з безлічі батьківських особин випадковим чином вибираються 2 особини і схрещуються з вірогідністю P_c , внаслідок чого створюються 2 нащадки. Цей процес повторюється до тих пір, поки не буде створено n нащадків. Вірогідність схрещування P_c є одним з ключових параметрів генетичного алгоритму і в більшості випадків її значення знаходиться в діапазоні від 0,6 до 1.

Кросовер працює наступним чином. Для одноточкового кросовера вибирають точку розриву і хромосоми батьків обмінюються значеннями починаючи з цієї точки і до кінця. Для двоточкового кросовера в хромосомах батьків випадково вибирають дві точки. Потім хромосоми батьків обмінюються між собою генами, що знаходяться між вибраними точками.

Оператор мутації використовується для внесення випадкових змін до хромосом особин. Це дозволяє «вибиратися» з локальних екстремумів і, тим самим, ефективніше досліджувати простір пошуку. Так само, як і для оператора кросовера, існує вірогідність вживання мутації P_m .

Таблиця 1

№ п/п	Оцінка	Метод гілок і кордонів	Метод динамічного програмування	Генетичний алгоритм
1	середня точність	0.9986	N/A	0.8258
	кількість обчислень	1253	1126877	1000
2	середня точність	0.9995	N/A	0.9026
	кількість обчислень	3103	3235522	1000
3	середня точність	0.9998	N/A	0.9661
	кількість обчислень	121963	6074444	1000
4	середня точність	0.9997	N/A	0.9942
	кількість обчислень	83676	8132412	1000

У серії експериментів розглядались окремі завдання, які вирішувались методом гілок і кордонів, методом динамічного програмування і генетичним алгоритмом. Експеримент показав, що для знаходження оптимального розв'язку класичні алгоритми використовують більшу кількість обчислень, ніж генетичний для популяції. Проте, середня точність класичного алгоритму вища.

Отримані результати дозволяють говорити про необхідність пошуку більш точних наближених методів розв'язання задачі про рюкзак. Одним з таких напрямків є використання так званого «методу досвіду» як для генетичного алгоритму, так і для алгоритму мурашиної колонії.

Література

1. *Кормен Т.* Алгоритмы: построение и анализ / Т. Кормен, Ч. Лейзерсон, Р. Ривест. – М.: МЦНМО: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2004.
2. *Сигал И.Х., Иванова А.П.* Введение в прикладное дискретное программирование: модели и вычислительные алгоритмы. Учебное пособие. – М.: Физматлит, 2002.
3. *Вороновский Г. К.* Генетические алгоритмы, искусственные нейронные сети и проблемы виртуальной реальности. – Х.: ОСНОВА, 1992.
4. *Макконнелл Дж.* Основы современных алгоритмов. – М.: Техносфера, 2004.
5. *Рутковская Д., Пилиньский М., Рутковский Л.* Нейронные сети, генетические алгоритмы и нечеткие системы: Пер. с польск. И. Д. Рудинского. – М.: Горячая линия – Телеком, 2004.
6. *Неймарк Е.А.* Решение нестационарной задачи о ранце при помощи генетического алгоритма. / Е.А. Неймарк // Вестник ННГУ. – 2006. – Вып.3(32). – С.133-137.
7. *Штовба С.Д.* Муравьиные алгоритмы // Exponenta Pro. Математика в приложениях. – 2004. – 4(4).

Алгоритми побудови опуклої оболонки

Останнім часом геометричні розрахунки стають все більш важливими в таких галузях, як комп'ютерна графіка, робототехніка та автоматизована розробка, тому форма об'єкта – одна з основних його властивостей. Однією з більш поширеною задач обчислювальної геометрії є побудова опуклої оболонки. При великих масивах даних розв'язок задачі може займати дуже багато часу, тому потрібно знати та вміти використовувати різноманітні підходи до знаходження опуклої оболонки. Розглянемо деякі з них.

Опуклість багатокутника з вершинами P_1, \dots, P_n , які перераховані в порядку його обходу, легко перевірити, якщо обчислити знаки косих добутків $[P_i P_{i+1}, P_{i+1} P_{i+2}]$, $i = \overline{1, n}$ (де $P_{n-1} \in P_1$, а $P_{n-2} - P_2$). Якщо ми знаємо напрямок обходу, то знак косих добутків для опуклого багатокутника визначений: при обході за годинниковою стрілкою всі косі добутки від'ємні, а проти годинникової стрілки – додатні.

Опуклою оболонкою деякої заданої множини точок називається перетин всіх опуклих множин, які містять задану множину. Для кінцевої множини точок опуклою оболонкою завжди буде опуклий багатокутник, всі вершини якого є точками вихідної множини.

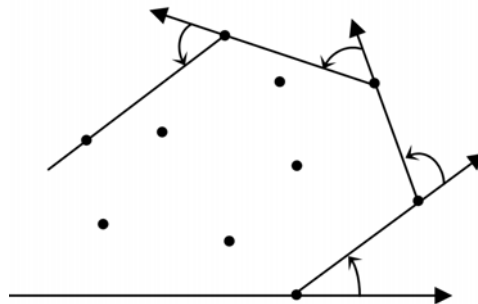


Рис. 1. Алгоритм побудови опуклої оболонки за методом Джарвиса

Завдання полягає в тому, щоб для заданої кінцевої множини точок знайти вершини опуклої оболонки цієї множини. Будемо перераховувати вершини в порядку обходу проти годинникової стрілки. Для ефективного рішення цієї задачі існує кілька різних алгоритмів [1, 2]. Приведемо найбільш просту реалізацію одного з них – алгоритму Джарвиса. Цей алгоритм іноді називають «загортанням подарунка» (рис. 1).

Перерахування точок шуканої границі опуклого багатокутника почнемо із правої нижньої точки P_1 яка завідомо належить границі опуклої оболонки. Позначимо її координати (x_1, y_1) . Наступною при зазначеному порядку обходу буде точка $P_2(x_2, y_2)$. Легко бачити, що вона, володіє такою властивістю, що всі

інші точки лежать «ліворуч» від вектора $\overrightarrow{P_1P_2}$, тобто орієнтований кут між векторами $\overrightarrow{P_1P_2}$ та $\overrightarrow{P_1K}$ невід'ємний для будь-якої іншої точки K нашої множини. Для знаходження потрібної точки P_2 перевіряємо виконання умови $[\overrightarrow{P_1P_2}, \overrightarrow{P_1K}] > 0$ з усіма точками K . Якщо точок, які задовольняють цій умові, декілька, то вершиною шуканого багатокутника стане та з них, для якої довжина вектора $\overrightarrow{P_1P_2} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$ максимальна.

Будемо робити так само й далі. Припустимо, що вже знайдена i -та вершина $P_i(x_i, y_i)$ опуклої оболонки. Для наступної точки $P_{i+1}(x_{i+1}, y_{i+1})$ косі добутки невід'ємні для всіх точок K . Якщо таких точок декілька, то вибираємо ту, для якої вектор $\overrightarrow{P_iP_{i+1}}$ має найбільшу довжину. Безпосередньо пошук такої точки можна здійснювати так. Спочатку ми можемо вважати наступною, $(i+1)$ -ю, будь-яку точку. Потім обчислюємо значення $[\overrightarrow{P_iP_{i+1}}, \overrightarrow{P_{i+1}K}]$, розглядаючи в якості K всі інші точки. Якщо для однієї з них зазначене вираження менше нуля, вважаємо наступною її та продовжуємо перевірку інших точок (аналогічно алгоритму пошуку мінімального елемента в масиві). Якщо ж значення виразу дорівнює нулю, то порівнюємо квадрати довжин векторів. У результаті за $O(N)$ операцій чергова вершина опуклої оболонки буде знайдена. Продовжуючи цю процедуру, ми рано або пізно повернемося до точки P_1 . Це буде означати, що опукла оболонка побудована.

При розв'язку даної задачі у випадку цілочисельних координат ми повністю можемо уникнути застосування дійсної арифметики, а отже, позбутися від втрати точності обчислень. В протилежному випадку в рішення можуть бути включені «зайві» точки, близькі до границі опуклої оболонки, або не враховані деякі з «потрібних» точок. Складність даного алгоритму $O(mN)$, де m – кількість точок в опуклій оболонці, в найгіршому випадку рівне N .

Наведемо одну з можливих реалізацій рішення даної задачі алгоритмом Джарвиса. Множина вихідних точок знаходиться в масиві a , всі точки, які належать опуклій оболонці, будемо записувати в масив b .

```

type dot = record x, y: integer; end;
var a, b: array[1..100] of dot;
    min, m, i, j, k, n: integer;
function vec(a1,a2,b1,b2: dot): integer;
{косий добуток векторів a1a2 та b1b2}
begin
    vec := (a2.x - a1.x)*(b2.y - b1.y) - (b2.x - b1.x)*(a2.y - a1.y)
end;
function dist2(a1,a2: dot): integer;
{квадрат довжини вектора a1a2}
begin
    dist2 := sqr(a2.x - a1.x) + sqr(a2.y - a1.y)
end;
begin
    readln(n); {кількість точок}

```

```

for i := 1 to n do
  read(a[i].x, a[i].y);
{пошук правої нижньої точки}
m := 1;
for i := 2 to n do
  if a[i].y < a[m].y then m := i else
  if (a[i].y = a[m].y) and
    (a[i].x > a[m].x) then m := i;
b[1] := a[m]; a[m] := a[1]; a[1] := b[1];
k := 1;
min := 2;
repeat {пошук наступної вершини опуклої оболонки}
  for j := 2 to n do
    if (vec(b[k],a[min],b[k],a[j]) < 0) or
      ((vec(b[k],a[min],b[k],a[j]) = 0) and
        (dist2(b[k],a[min]) < dist2(b[k],a[j])))
    then min := j;
  k := k + 1;
  b[k] := a[min];
  min := 1;
until (b[k].x=b[1].x) and (b[k].y=b[1].y); {поки не отримаємо замкнену ланку}
for j := 1 to k - 1 do {вивід результату}
  writeln(b[j].x, ' ', b[j].y)
end.

```

Існує інший алгоритм рішення цієї задачі (алгоритм Грехема) з обчислювальною складністю $O(N \log N)$, він базується на попередньому сортуванні точок вихідної множини за значенням кута в полярній системі координат із центром в одній із точок опуклої оболонки. Тобто найбільш трудомісткою задачею виявляється саме сортування вихідних точок. Сортування точок можна робити за знаком косого добутку $[\overrightarrow{P_1 P_i}, \overrightarrow{P_1 P_{i+1}}]$, де P_1 – будь-яка вершина опуклої оболонки (наприклад, права нижня точка). У відсортованому масиві точок всі зазначені добутки повинні бути невід’ємні. Точки з рівними кутами ($[\overrightarrow{P_1 P_i}, \overrightarrow{P_1 P_{i+1}}] = 0$) розташовуються в порядку збільшення довжин відповідних векторів $\overrightarrow{P_1 P_i}$ (рис. 2).

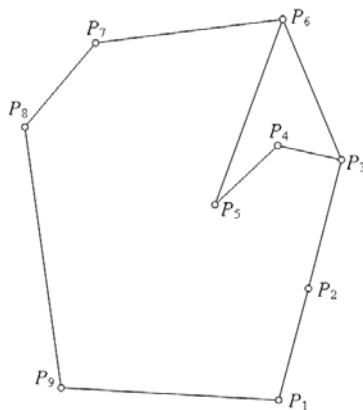


Рис. 2. Вершини опуклої оболонки множини точок

Далі в перегляді за Грехемом використовується стек, у якому зберігаються точки, які є кандидатами в опуклу оболонку. Спочатку в стек потрапляє перша з відсортованих точок. Потім – сусідня з нею вершина опуклої оболонки. Якщо на першому із променів точок декілька, то це точка цього променя P_i , яка найбільш віддалена від P_1 . Нехай у вершині стека перебуває точка P_k . Розглянемо наступну в порядку збільшення полярного кута точку вихідної множини P_i . Поки ділянка ламаної $P_{k-1}P_kP_i$ не стане опуклою, зі стека видаляється чергова точка P_k . Далі P_i переходить до стеку. Під час закінчення перегляду всіх точок у стеці будуть перебувати всі вершини опуклої оболонки. Так як будь-яка точка додається в стек рівно один раз, та й видаляється вона з нього не більше одного разу, тому час перегляду становить $O(N)$. Наведемо реалізацію саме такого перегляду. Для наочності сортування проведемо «бульбашковим» алгоритмом. У якості стека використається масив b . Описи змінних та функцій збігаються з наведеними вище.

```

type dot = record x, y: integer; end;
var a, b: array[1..100] of dot;
    min, m, i, j, k, n: integer;
function vec(a1,a2,b1,b2: dot): integer;
{косий добуток векторів a1a2 та b1b2}
begin
    vec := (a2.x - a1.x)*(b2.y - b1.y) - (b2.x - b1.x)*(a2.y - a1.y)
end;
function dist2(a1,a2: dot): integer;
{квадрат довжини вектора a1a2}
begin
    dist2 := sqr(a2.x - a1.x) + sqr(a2.y - a1.y)
end;

begin
    readln(n);
    for i := 1 to n do
        read(a[i].x, a[i].y);
    {пошук правої нижньої точки}
    m := 1;
    for i := 2 to n do
        if a[i].y < a[m].y then m := i else
            if (a[i].y = a[m].y) and
                (a[i].x > a[m].x) then m := i;
    {запишемо її масив оболонки}
    b[1] := a[m];
    a[m] := a[1];
    a[1] := b[1];
    {інші точки сортуємо по значенню полярного кута}
    for i := n downto 3 do
        for j := 2 to i - 1 do
            if (vec(a[1],a[j],a[1],a[j + 1]) < 0) or
                ((vec(a[1],a[j],a[1],a[j + 1]) = 0) and
                (dist2(a[1],a[j]) > dist2(a[1],a[j + 1])))
            then
                begin
                    b[n] := a[j];

```

```
    a[j] := a[j + 1];
    a[j + 1] := b[n]
end;
{пошук другої вершини оболонки}
i := 2;
while vec(a[1],a[i + 1],a[1],a[2]) = 0 do
    i := i + 1;
b[2] := a[i];
b[3] := a[i + 1];
k := 3;
for i := i + 2 to n do
begin
    {перевірка опуклості}
    while vec(b[k-1],b[k],b[k],a[i]) <= 0 do
        k := k-1; {видаляємо точку зі стека}
    k := k + 1;
    b[k] := a[i] {добавляємо точку в стек}
end;
for j := 1 to k do {вивід результату}
    writeln(b[j].x, ' ', b[j].y)
end.
```

Таким чином, було розглянуто алгоритми пошуку опуклої оболонки для множини точок на площині. На них спирається рішення великої кількості складних, зокрема олімпіадних, задач, тому їх розуміння та використання на практиці є дуже важливим.

Література

1. Андреева Е.В. Геометрические задачи на олимпиадах по информатике // Информатика № 14/2002.
2. Кормен Т., Лейзерсон Ч., Ривест Р. Алгоритмы. Построение и анализ. М.: МЦНМО, 2000.
3. Курант Р., Роббинс Г. Что такое математика. М.: ОГИЗ, государственное изд-во технико-теоретической литературы, 1947.
4. Окулов С.М. 100 задач по информатике. Киров: Изд-во ВГПУ, 2000.
5. Станкевич А.С. Решение задач I Всероссийской командной олимпиады по программированию. Информатика № 12/2001.
6. Шикин Е.В., Боресков А.В., Зайцев А.А. Начала компьютерной графики. М.: Диалог-МИФИ, 1993.

Саманцов О.О., Пірус Є.М.

¹Студент 2 курсу ХНУРЕ, спеціальність «Програмна інженерія»,

²Старший викладач кафедри алгебри СДПУ

Використання середовища MS Excel для розв'язання оптимізаційних задач вибору

Стаття присвячена розв'язку оптимізаційних задач економіки за допомогою надбудованого засобу «Пошук розв'язків» середовища MS Excel

Ключові слова: *оптимізаційна задача, пошук розв'язку, задача вибору.*

Для вирішення будь-якої економічної задачі математичними методами необхідна побудова математичної моделі. Аналізуючи наявну інформацію, людина приймає рішення. Якість прийнятого рішення залежить від багатьох факторів: від досвіду, знань, точності наявної інформацією, інтелекту, інтуїції і т.п.

У багатьох ситуаціях ми застосовуємо моделі, розроблені раніше, але іноді треба побудувати нову модель (або модифікувати стару) самостійно. Правильний вибір моделі є першим кроком на шляху одержання рішення. Математичні моделі в економіці повинні будуватися в процесі діалогу економіста – практика з математиком. Після того, як модель побудована, ми вирішуємо отримане математичне завдання. Отримане рішення треба перевірити на правдоподібність і з точки зору математика, і з точки зору економіста. На цій стадії модель часто уточнюється.

Як побудувати математичну модель? При побудові моделі треба вибрати основні, суттєві ознаки об'єкта і записати їх на мові математики. Спочатку треба зрозуміти ситуацію так, щоб її можна було розповісти іншій людині. Потім визначити математичну мову, на якій буде будуватися наша модель. Замість того, щоб сказати «треба знайти план дій», слід вказати, як його можна формалізувати.

План може бути заданий визначенням значення змінних x, y , або вектора $z = (z_1, z_2, \dots, z_n)$, або матриці A і т.п. Далі необхідно визначити множину допустимих варіантів, тобто множину обмежень, якій допустимі варіанти повинні задовольняти. Після цього треба відповісти на запитання «як порівнювати варіанти?». Зазвичай визначається деяка функція (вона називається цільовою функцією або функцією корисності). Для порівняння двох допустимих варіантів ми для кожного з них підраховуємо значення цієї функції і оголошуємо кращим те значення, за якого значення функції більше (або менше).

У результаті багато моделей можна записати у вигляді задачі математичного програмування.

Знайти $\max f(x)$, $x \in A$, де $f(x)$ – цільова функція, а A множина допустимих варіантів.

У випадку, якщо функція $f(x)$ – лінійна, а множина обмежень задана системою лінійних рівнянь і нерівностей, задача математичного програмування перетворюється у задачу лінійного програмування.

Розглянемо одну з оптимізаційних економічних задач, так звану задачу про призначення.

Постановка задачі. Припустимо, що є n різних робіт A_1, A_2, \dots, A_n і n механізмів B_1, B_2, \dots, B_n , кожен з яких може виконати будь-яку роботу, але з неоднаковою ефективністю. Продуктивність механізму B_i при використанні роботи A_j позначимо через C_{ij} , $i = 1, \dots, n$; $j = 1, \dots, n$. Необхідно так розподілити механізми по роботах, щоб сумарний ефект від їх виконання був максимальним. Ця задача зветься *задачею вибору* або *задачею про призначення*. Формально вона записується так.

Необхідно вибрати таку послідовність елементів $\{C_{1,j_1}, C_{2,j_2}, \dots, C_{n,j_n}\}$ з матриці $C = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & \dots & C_{1n} \\ C_{21} & C_{22} & \dots & C_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ C_{n1} & C_{n2} & \dots & C_{nn} \end{pmatrix}$, щоб сума $\sum_{k=1}^n C_{k,j_k}$ була максимальною і при

цьому із кожного рядка і стовпця матриці C було вибрано рівно один елемент.

Для розв'язання такого роду задач найчастіше застосовують так званий «угорський метод».

Алгоритм угорського методу складається з попереднього етапу і не більше, ніж $(n-2)$ послідовно виконуваних ітерацій. Кожна ітерація пов'язана з еквівалентними перетворюваннями матриці, отриманої внаслідок проведення попередньої ітерації, а також з вибором в ній максимального числа незалежних нулів. Кінцевим результатом ітерації є збільшення числа незалежних нулів на одиницю. Як тільки число незалежних нулів досягне n , то проблему набору вирішено, а оптимальний варіант призначення визначається позиціями незалежних нулів в останній матриці.

Попередній етап. Відшуковують максимальний елемент в j -му стовпці та всі елементи цього стовпця послідовно віднімають від максимального. Названу процедуру виконують над усіма стовпцями матриці C . В результаті отримують матрицю з невід'ємними елементами, у кожному стовпці якої є хоча б один нуль.

Далі розглядають i -й рядок одержаної матриці, відшуковують її мінімальний елемент a : і від кожного елемента даного рядка віднімають мінімальний. Цю процедуру повторюють з усіма рядками. В результаті

отримаємо матрицю C_0 ($C_0 \sim C$), в кожному рядку і стовпці якої є хоча б один нуль. Описаний процес перетворення C в C_0 зветься зведенням матриці.

Знаходимо довільний нуль у першому стовпці й відмічаємо його зірочкою. Далі переглядаємо другий стовпець, і якщо в ньому знайдеться нуль, що розташований в рядку, де немає ще нуля із зірочкою, то відмічаємо його зірочкою. Аналогічно переглядаємо один за одним всі стовпці матриці C_0 й відмічаємо, якщо можливо, наступні нулі знаком "*". Очевидно, що нулі матриці C_0 , відмічені зірочкою, є незалежними. На цьому попередній етап закінчується.

(k+1)-а ітерація. Припустимо, що k -ту ітерацію вже проведено внаслідок чого одержано матрицю C_k . Якщо в ній вже є рівно n нулів із зірочкою, то процес розв'язання закінчується. В іншому випадку переходимо до $(k+1)$ -ї ітерації.

Кожна ітерація починається першим, а закінчується другим етапом. Між ними може декілька разів проводитися пара етапів: третій -перший. Перед початком ітерації знаком «+» виділяють стовпці матриці C_k , які містять нулі з зірочками.

Перший етап. Переглядають невиділені стовпці C_k . Якщо в них немає нульових елементів, то переходять до третього етапу. В іншому випадку, якщо невиділений нуль матриці C_k знайдено, то можливий один з двох випадків: 1) рядок, що містить невиділений нуль, містить також і нуль із зірочкою; 2) цей рядок не містить нуля із зірочкою.

У другому випадку переходимо одразу до другого етапу, відмітивши цей нуль штрихом.

У першому випадку цей невиділений нуль відмічають штрихом і виділяють рядок, в якому він розташований (знаком «+» праворуч від рядка). Переглядають цей рядок, знаходять нуль із зірочкою й скасовують знак «+» виділення стовпця, в якому розташовано даний нуль.

Відтак проглядають цей стовпець (який вже став невиділеним) і відшуковують у ньому невиділений нуль (або нулі), в якому він розташований. Цей нуль відмічають штрихом і виділяють рядок, де він розташований. Далі розглядають цей рядок і шукають у ньому нуль із зірочкою.

Цей процес за скінченне число кроків закінчується одним з двох результатів:

1) всі нулі матриці C_k виявилися виділеними, тобто розташовуються у виділених рядках або стовпцях. Тоді переходять до третього етапу;

2) знайдеться такий невиділений нуль в рядку, в якому немає нуля із зірочкою. Тоді переходять до другого етапу, відмітивши цей нуль штрихом.

Другий етап. На цьому етапі будують такий ланцюжок із нулів матриці C_k : вихідний нуль зі штрихом, нуль із зірочкою, що розташований в одному стовпці з першим нулем, потім нуль із штрихом, розташований в одному рядку з попереднім нулем із зірочкою і т.д.

Можна довести, що описаний процес побудови ланцюжка однозначний і скінчений, при цьому ланцюжок завжди починається і закінчується нулем зі штрихом.

Далі над елементами ланцюжка, що знаходиться на непарних місцях ($0'$), ставимо зірочки, знищуючи їх над елементами на парних позиціях (тобто 0^*). Відтак знищуємо всі позначки типу штрих над елементами C_k і знаки виділення «+». Кількість незалежних нулів збільшується на одиницю. На цьому $(k+1)$ -ша ітерація закінчується.

Третій етап. До цього етапу переходять після першого, якщо всі нулі матриці C_k виділені. У цьому випадку серед невиділених елементів C_k знаходять мінімальний й позначають його через h ($h > 0$). Віднімають h від усіх елементів матриці C_k , розташованих у невиділених рядках і додають до всіх елементів виділених стовпців. В результаті отримують нову матрицю C'_k , еквівалентну до C_k . Зауважимо, що при такому перетворенні, всі нулі з зірочкою матриці C_k залишаються нулями і в C'_k , крім того, в ній з'являються нові невиділені нулі. Тому переходять знову до першого етапу. Виконавши перший етап, залежно від його результату або переходять до другого етапу, або знову повертаються на третій етап.

Після скінченного числа повторів пара етапів третій-перший обов'язково закінчиться переходом на другий етап. Після його виконання кількість незалежних нулів збільшиться на одиницю і $(k+1)$ -а ітерація закінчиться.

А тепер розглянемо як можна розв'язати дану задачу в середовищі Ms Excel. Чотири робітника можуть виконувати чотири види робіт. Вартості робіт задано наступною матрицею.

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 6 & 3 \\ 9 & 10 & 7 & 3 \\ 4 & 5 & 11 & 7 \\ 8 & 7 & 8 & 5 \end{pmatrix}$$

В цій матриці рядки відповідають робітникам, а стовпці – роботам. Необхідно скласти план виконання робіт так, щоб всі роботи були виконані, кожний робітник був завантажений тільки однією роботою, а сумарна вартість робіт була мінімальною. Відзначимо, що дана задача є збалансованою, тобто кількість робіт співпадає з кількістю робітників. Якби задача біла не збалансованою, то перед початком її розв'язку необхідно збалансувати, ввівши відсутню кількість рядків або стовпчиків з достатньо великими штрафними вартостями робіт.

Для розв'язку даної задачі побудуємо математичну модель. Нехай змінна $x_{ij} = 1$, якщо i -тим робітником виконується j -та робота, та $x_{ij} = 0$, якщо i -тим робітником не виконується j -та робота.

Тоді модель має наступний вид :

потрібно мінімізувати
$$z = \sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^4 c_{ij} * x_{ij},$$

при обмеженнях
$$\sum_{j=1}^4 x_{ij} = 1, j \in [1,4],$$

$$\sum_{j=1}^4 x_{ij} = 1, i \in [1,4], x_{ij} \in \{0,1\}, i \in [1,4], j \in [1,4].$$

Для розв'язання даної задачі внесемо дані в таблицю середовища MS Excel. В комірки A1:D4 внесемо значення матриці вартостей робіт. В комірку G1 впишемо «Вартість робіт». Блок клітин F2:I5 відведемо під шукані невідомі. В комірку J1 внесемо цільову функцію «=СУММПРОИЗВ(F2:I5; A1:D4)», яка обчислює загальну вартість робіт. В комірки J2..J5 відповідно внесемо формули «=СУММ(F2:I2)», «=СУММ(F3:I3)», «=СУММ(F4:I4)», «=СУММ(F5:I5)», в комірки F6, G6, H6, J6 відповідно внесемо формули «=СУММ(F2:F5)», «=СУММ(G2:G5)», «=СУММ(H2:H5)», «=СУММ(I2:I5)».

Розв'язок даної задачі про призначення проведемо за допомогою. Засобу «Поиск решений». Тобто виберемо команду *Сервис, Поиск решения (Tools? Solver)*. Потім заповнимо вікно діалогу, що відкриється, тобто заповнимо всі поля цього вікна діалогу. В поле «установить целевую ячейку» впишемо \$J\$1. В блоці перемикачів вибрати «минимальному значению». В поле «изменяя ячейки» впишемо \$F\$2:\$I\$5. В поле обмежень потрібно вписати наступні обмеження : \$F\$2:\$I\$5 ≤ 1, \$F\$2:\$I\$5 = целое, \$F\$2:\$I\$5 ≥ 0, \$F\$6:\$I\$6 = 1, \$J\$2:\$J\$5 = 1.

В вікні діалогу **Параметры** пошуку розв'язку встановити флажок *Линейная модель*. Після натискання кнопки **Выполнить (Solve)** засіб пошуку розв'язку знайде оптимальний розв'язок.

Література

1. Копылов Г.Н., Суханова Н.Н. Математические методы в экономике: Методическое пособие. – Волгоград : Издательство ВолГУ, 2002. – 108с.
2. Гарнаев А.Ю. Использование MS EXCEL и VBA в экономике и финансах. – СПб.: БХВ – Санкт-Петербург, 2000. – 336 с. : ил.

Возможность и сложность распознавания конечного графа коллективом агентов

Рассматривается задача распознавания неизвестного графа коллективом агентов. Два агента-исследователя передвигаются по графу, изменяют и считывают метки на элементах графа и передают информацию агенту-экспериментатору, который строит представление исследуемого графа. Предложен алгоритм, который распознает любой конечный неориентированный граф. Для распознавания графа агентам требуется 2 различные краски, кубическое (от числа вершин графа) число шагов и квадратичная память. Метод основан на методе обхода графа в глубину.

1. Введение

Основной проблемой компьютерной науки является проблема взаимодействия управляющей и управляемой систем (управляющего автомата, агента и его операционной среды). В рассмотренном ниже случае взаимодействие этих систем представляется как процесс перемещения агентов по графу среды. Целенаправленное перемещение агента в его операционной среде невозможно без формирования достаточно полной модели среды. В вопросе моделирования операционных сред определен ряд подходов, одним из которых является топологический. В этом случае агенту доступна информация только о связях между различными областями среды и недоступна метрическая и алгоритмическая информация о среде. Зачастую подобная ситуация возникает в роботике [1]. Топологические модели представляют собой графы с помеченными различными способами вершинами, дугами, инциденторами.

В настоящее время выделились три основные задачи исследования среды агентом: 1) самолокализация агента; 2) контроль соответствия модели среды и самой среды (проверка карты); 3) построение агентом модели карты среды [1]. Задача распознавания среды (построения карты) с помощью тех или иных средств агента находится в центре внимания и ей посвящено значительное количество работ. Однако на наш взгляд, мало исследована возможность и сложность распознавания графа более чем одним агентом [2].

В настоящей работе предложен новый алгоритм распознавания графа в котором используется три агента: два агента-исследователя (АИ), которые перемещаются по графу, и агент - экспериментатор (АЭ), который принимает сообщения АИ и по ним строит представление исследуемого графа, причем, основное внимание уделено анализу того, что и как распознается на каждом шаге алгоритма.

2. Основные определения и обозначения

2.1 Раскрашенные графы

Рассматриваются конечные, неориентированные графы без петель и кратных ребер. Все неопределяемые понятия общеизвестны. Пусть $G=(V,E)$ - граф, у которого V - множество вершин, E - множество ребер, т.е. двухэлементных подмножеств (u,v) , где $u,v \in V$. Тройку $((u,v),v)$ будем называть инцидентором (“точкой прикосновения”) ребра (u,v) и вершины v . Множество таких троек обозначим I . Множество $L=V \cup E \cup I$ назовем множеством элементов графа G . Функцией раскраски графа G назовем отображение $\mu: L \rightarrow \{w,r,y,b\}$, где w интерпретируется как белый цвет (краска), r - красный, y - желтый, b - черный. Пара (G,μ) называется раскрашенным графом.

Последовательность u_1, u_2, \dots, u_k попарно смежных вершин называется путем в графе G , а k - длина пути. При $u_1 = u_k$ этот путь называется циклом. Окрестностью $O(v)$ вершины v будем называть множество элементов графа, состоящее из вершины v , всех вершин u смежных с v , всех ребер (v,u) и всех инциденторов $((v,u),v), ((v,u),u)$. Мощность множеств вершин V и ребер E обозначим через n и m соответственно. Ясно что $m \leq \frac{n(n-1)}{2}$. Изоморфизмом графа G и графа H назовем такую биекцию $\varphi: V_G \rightarrow V_H$, что $(v,u) \in E_G$ точно тогда, когда $(\varphi(v), \varphi(u)) \in E_H$. Таким образом, изоморфные графы равны с точностью до обозначения вершин и раскраски их элементов.

2.2 Мобильные агенты

Мобильные агенты A и B передвигаются по графу из вершины v в вершину u по ребру (v,u) . При этом агенты могут изменять окраску вершин v,u , ребра (v,u) , инциденторов $((v,u),v), ((v,u),u)$. Находясь в вершине v , агенты A и B воспринимают (“видят”) метки всех элементов окрестности $O(v)$ и на этом основании определяют по какому ребру они будут перемещаться и как будут перекрашивать элементы графа. АЭ передает, принимает и идентифицирует сообщения АИ, обладает конечной, неограниченно растущей внутренней памятью, в которой фиксируется результат функционирования АИ на каждом шаге, и, кроме того, постепенно выстраивается представление графа G вначале неизвестного агентам, списками ребер и вершин.

2.3 Постановка задачи

Требуется разработать такой алгоритм функционирования АИ (т.е. передвижения по графу, раскраски его элементов и передачи информации АЭ) и АЭ (восстановления графа по данным полученным от АИ), что АИ будучи помещены в произвольные вершины произвольного неизвестного АИ и АЭ графа G , все элементы которого окрашены цветом w , через конечное число шагов обойдут его, пошагово передавая АЭ информацию. АЭ в свою очередь, используя эту информацию, через конечное число шагов восстановит граф H , изоморфный G , т.е. распознает G .

3. Распознавание графа

Предлагаемый алгоритм основан на стратегии поиска в глубину. Эта стратегия такова: агенты идут «вглубь», пока это возможно, возвращаются назад, ищут другой путь с еще не посещенными вершинами и не пройденными ребрами, в случае обнаружения смежной вершины окрашенной в «чужой» цвет метим все перешейки из текущей вершины в чужую область и сообщаем второму АИ, через АЭ о необходимости вернуться и распознать помеченные перешейки. Пока второй агент не распознает все перешейки, выбор дальнейшего пути перемещения первым агентом изменяется. В нем поиск перешейков выполняется непосредственно перед проверкой выполнения условий, связанных с распознаванием дерева, построенного данным АИ. Если отсутствуют все возможные варианты перемещения, наличие которых проверяется до проверки на наличие перешейка, то при обнаружении его, текущий агент останавливается до того момента, пока все помеченные перешейки не будут распознаны вторым агентом.

Стратегия поиска в глубину хорошо известна. Известен ряд алгоритмов поиска в глубину для известного графа. Предлагаемая ниже стратегия обладает рядом особенностей. Во - первых, граф G агентам не известен. Во - вторых, при прохождении вершин графа G агенты создают неявную нумерацию пройденных вершин: при первом посещении вершины она окрашивается красным цветом, если это агент A и желтым цветом в случае агента B и ей фактически ставится в соответствие номер, равный значению переменной $Cч_A$ для агента A или $Cч_B$ для агента B . Агент A ведет нумерацию нечетными числами, а агент B четными, другими словами переменные $Cч_A$ и $Cч_B$ принимают соответственно нечетные и четные значения. На основе этой нумерации и происходит восстановление графа путем построения графа H изоморфного G . В процессе поиска агенты строят неявные деревья поиска в глубину и относительно этих деревьев все ребра разделяются на древесные, т.е. принадлежащие деревьям и окрашиваемые при первом прохождении по ним в красный (желтый) цвет, обратные – не принадлежащие дереву и окрашиваемые при первом прохождении в черный цвет и ребра перешейки, которые соединяют деревья. Древесные ребра проходятся как минимум два раза и при последнем проходе окрашиваются агентом в черный цвет, обратные проходятся 1 раз, а ребра перешейки проходятся каждым агентом по крайней мере 2 раза.

Древесные ребра распознаются агентами при первом проходе по ним. Красные (желтые) вершины графа G , на каждом шаге алгоритма, образуют красный (желтый) путь. С помощью этого пути распознаются обратные ребра, при проходе в новую вершину красный (желтый) путь удлиняется, при проходе назад (в случае если это не возврат для распознавания перешейков) – укорачивается, при распознавании обратного ребра – не изменяется. Вершина, у которой все инцидентные ребра распознаны красится черным. Алгоритм оканчивает работу, когда красный и желтый пути становятся пустыми, а все вершины черными.

Рассмотрим алгоритм работы агента A :

1. Агент A красит $(\mu(v) := r)$;
2. Запрос AN ;
3. *if* $AN=0$ *then do*
4. Запрос F ;
5. *if* $F=0$ *then* $МЕТИМ_ПЕР_A(v)$;
6. *else* $ВЫБОР_ХОДА_A(v)$;
7. *end do*;
8. *else* $РАСП_ПЕР_A(v)$;

Рассмотрим процедуры, используемые в данном алгоритме.

$МЕТИМ_ПЕР_A(v)$:

1. *if* в $O(v)$ обнаружено ребро, у которого $(\mu(v,u) = w) \text{ and } (\mu(u) = y)$ *then do*
2. Агент A выполняет процедуру $МЕТИМ_AB(v)$;
3. *go to* 1 данной процедуры;
4. *end do*;
5. *else do*
6. Агент A запрашивает у АЭ значение переменной E ;
7. *if* $E=0$ *then* $ВЫБОР_ХОДА_A(v)$;
8. *else do*
9. Агент A выполняет процедуру $ФИКС_A(v)$;
10. *go to* 2 алгоритма обхода;
11. *end do*;
12. *end do*;

$ВЫБОР_ХОДА_A(v)$:

1. *if* в $O(v)$ обнаружено ребро, у которого $(\mu(v,u) = w) \text{ and } (\mu(u) = \mu(v) = r)$ *then do*
2. Агент A выполняет процедуру $РАСП_A(v)$;
3. *go to* 2 алгоритма обхода;
4. *end do*;
5. *else if* в $O(v)$ обнаружено ребро, у которого $(\mu(v,u) = w) \text{ and } (\mu(u) = w)$ *then do*
6. Агент A выполняет процедуру $ВПЕРЕД_A(v)$;
7. *go to* 2 алгоритма обхода;
8. *end do*;
9. *else if* в $O(v)$ есть ребро, у которого $(\mu(v,u) = w) \text{ and } (\mu(u) = y)$ *then do*
10. Агент A выполняет процедуру $СТОИТ_A(v)$;
11. *go to* 2 алгоритма обхода;
12. *end do*;
13. *else if* в $O(v)$ есть ребро, у которого $(\mu(v,u) = y)$ *then do*
14. Агент A выполняет процедуру $СТОИТ_A(v)$;
15. *go to* 2 алгоритма обхода;
16. *end do*;
17. *else if* в $O(v)$ есть ребро, у которого $(\mu(v,u) = r) \text{ and } (\mu(u) = y)$ *then do*
18. Агент A выполняет процедуру $СТОИТ_A(v)$;
19. *go to* 4 алгоритма обхода;

20. *end do*;
21. *else if* в $O(v)$ есть ребро, у которого $(\mu(v,u)=r) \text{ and } (\mu(v)=r) \text{ and } (\mu((v,u),v)=r)$ *then do*
22. Агент A выполняет процедуру $НАЗАД_A(v)$;
23. *go to* 2 алгоритма обхода;
24. *end do*;
25. *else* агент A выполняет процедуру $СТОП_A$;
- $РАСП_ПЕР_A(v)$:**
1. $Z:=K$
2. *if* в $O(v)$ обнаружено ребро, у которого $(\mu(v,u)=y)$ *then do*
3. *if* $((K=Z) \text{ or } (K=1)) \text{ and } (Z \neq 1)$ *then* Агент A выполняет $РАСП_ABB(v)$;
4. *else* Агент A выполняет процедуру $РАСП_ABbb(v)$;
5. Агент A запрашивает у АЭ значение переменной K ;
6. *if* $K \neq 0$ *then go to* 2 данной процедуры;
7. *else* Агент A выполняет процедуру $ОБН_A(v)$;
8. *if* $Z \neq 1$ *then do*
9. *if* в $O(v)$ есть ребро, т.ч. $(\mu((v,u),v)=r) \text{ and } (\mu(v,u)=b) \text{ and } (\mu((v,u),u)=r)$ *then do*
10. Агент A выполняет процедуру $ВПЕРЕД_AR_N(v)$;
11. *go to* 9 данной процедуры;
12. *end do*;
13. *else if* в $O(v)$ есть ребро, т.ч. $(\mu(v,u)=r) \text{ and } (\mu(u)=r) \text{ and } (\mu((v,u),u)=r)$ *then do*
14. Агент A выполняет процедуру $ВПЕРЕД_AR(v)$;
15. *go to* 13 данной процедуры;
16. *end do*;
17. *else go to* 2 алгоритма обхода;
18. *end do*;
19. *else go to* 13 данной процедуры
20. *end do*;
21. *else do*
22. Агент A выполняет процедуру $ОТСТУП_A(v)$;
23. *go to* 2 данной процедуры;
24. *end do*;

$ВПЕРЕД_A(v)$: агент A выбирает из $O(v)$ произвольное ребро (v,u) , у которого $\mu(v,u)=w, \mu(u)=w$, переходит по нему в вершину u , окрашивая при этом $\mu(v,u):=r, \mu(u):=r, \mu((v,u),u):=r$, выполняет $v:=u$ и записывает в список M : $ВПЕРЕД_A$;

$НАЗАД_A(v)$: агент A выбирает из $O(v)$ произвольное ребро (v,u) у которого $((\mu(v,u)=r) \text{ and } (\mu((v,u),v)=r)) \text{ and } (\mu(v)=r)$ и переходит по нему в вершину u , окрашивая при этом $\mu(v):=b, \mu(v,u):=b$, выполняет $v:=u$ и записывает в список M : $НАЗАД_A$;

$СТОИТ_A(v)$: агент A не выполняет никаких действий, в M записывает: $СТОИТ_A$;

$МЕТИМ_AB(v)$: агент A выбирает из $O(v)$ ребро (v,u) у которого $(\mu(v,u)=w) \text{ and } (\mu(u)=y)$, переходит по нему в вершину u , окрашивая

$\mu(v,u) := r$, $\mu((v,u),u) := r$, выполняет $v := u$ и записывает в список M : ВПЕРЕД_АВ, на следующем шаге агент A выбирает из $O(v)$ ребро, у которого $((\mu(v,u)=r) \text{ and } (\mu(v)=y))$ и переходит по нему в вершину u , выполняет $v := u$ и записывает в список M : НАЗАД_АВ;

РАСП_АВВ(v): агент A выбирает из $O(v)$ ребро (v,u) у которого $\mu(v,u)=y$ и переходит по нему в вершину u , окрашивая $\mu(v,u) := r$, $\mu((v,u),u) := b$, выполняет $v := u$ и записывает в список M : ВПЕРЕД_АВВ. На следующем шаге агент A выбирает из $O(v)$ ребро (v,u) у которого $((\mu(v,u)=r) \text{ and } (\mu((v,u),v)=b))$ и переходит по нему в вершину u окрашивая $\mu((v,u),v) := r$, $\mu(v,u) := b$, $\mu((v,u),u) := r$, выполняет $v := u$ и записывает в список M : НАЗАД_АВВ;

РАСП_АВВb(v): агент A выбирает из $O(v)$ ребро (v,u) у которого $\mu(v,u)=y$ и переходит по нему в вершину u , окрашивая $\mu(v,u) := r$, $\mu((v,u),u) := b$, выполняет $v := u$ и записывает в список M : ВПЕРЕД_АВВ. На следующем шаге агент A выбирает из $O(v)$ ребро (v,u) у которого $((\mu(v,u)=r) \text{ and } (\mu((v,u),v)=b))$ и переходит по нему в вершину u , окрашивая $\mu(v,u) := b$, $\mu((v,u),u) := b$, выполняет $v := u$ и записывает в список M : НАЗАД_АВВ;

ВПЕРЕД_AR_N(v): агент A выбирает из $O(v)$ ребро (v,u) у которого $(\mu((v,u),v)=r) \text{ and } (\mu(v,u)=b) \text{ and } (\mu((v,u),u)=r)$ и переходит по нему в вершину u , окрашивая $\mu((v,u),v) := b$, $\mu((v,u),u) := b$, выполняет $v := u$ и записывает в список M : ВПЕРЕД_AR_N;

ВПЕРЕД_AR(v): агент A выбирает из $O(v)$ ребро (v,u) у которого $(\mu(v,u)=r) \text{ and } (\mu(u)=r) \text{ and } (\mu((v,u),u)=r)$ и переходит по нему в вершину u , выполняет $v := u$ и записывает в M : ВПЕРЕД_AR;

ОТСТУП_A(v): агент A выбирает из $O(v)$ ребро (v,u) у которого $((\mu(v,u)=r) \text{ and } (\mu(v,u),v)=r))$ и переходит по нему в вершину u , выполняет $v := u$ и записывает в M : ОТСТУП_A;

ФИКС_A(v): агент A записывает в M : ФИКС_A;

ОБН_A(v): агент A записывает в M : ОБН_A;

РАСП_A(v) (распознавание обратного ребра):

1. Агент A выбирает из $O(v)$ произвольное ребро (v,u) у которого $((\mu(v)=\mu(u)=r) \text{ and } (\mu(v,u)=w))$ и переходит по нему в вершину u ;
2. Агент A красит $\mu(v,u)=b$;
3. Агент A выбирает из $O(u)$ произвольное ребро (u,l) у которого $(\mu(u,l)=r) \text{ and } (\mu((u,l),l)=r) \text{ and } (\mu(l)=r)$ и переходит по нему в вершину l ;
4. $u:=l$;
5. Агент A записывает в M : РАСП_A
6. *while* в окрестности $O(u)$ есть ребро (u,l) , у которого $(\mu(u,l)=r) \text{ and } (\mu((u,l),l)=r) \text{ and } (\mu(l)=r)$ *do*
7. агент A переходит по ребру (u,l) в вершину l ;
8. $u:=l$;
9. Агент A записывает в M : ОТСТУПИЛ_A;

10. *end do*;

11. Агент A записывает в M : РЕБРО_РАСПОЗНАНО_А;

СТОП_А(v): агент A красит $\mu(v) := b$, агент A останавливается.

Алгоритм работы агента B аналогичен алгоритму работы агента A .

Алгоритм «Восстановление»:

1. $Cч_A := 1$; (счетчик числа посещенных вершин графа G агента A)

2. $Cч_B := 2$; (счетчик числа посещенных вершин графа G агента A)

3. $AN := 0$;

4. $BN := 0$;

5. $N_A := 0$; (номер вершины из кот. мы помечали агентом A перешейки)

6. $N_B := 0$; (номер вершины из кот. мы помечали агентом B перешейки)

7. $N := \emptyset$;

8. $M := \emptyset$;

9. $F := 0$; (количество перешейков из вершины N_A)

10. $K := 0$; (количество перешейков из вершины N_B)

11. $E := 0$; (если $E = 1$, то на предыдущем шаге агент A пометил перешеек)

12. $L := 0$; (если $L = 1$, то на предыдущем шаге агент B пометил перешеек)

13. $i := 0$; (подсчет номера второй вершины перешейка и обратного ребра для A)

14. $j := 0$; (подсчет номера второй вершины перешейка и обратного ребра для B)

15. $t := 1$; (длина списка номеров вершин красного пути)

16. $p := 1$; (длина списка номеров вершин желтого пути)

17. $r(t) := Cч_A$; (номера вершин красного пути)

18. $y(p) := Cч_B$; (номера вершин желтого пути)

19. $V_H := \{1, 2\}$;

20. $E_H := \emptyset$;

21. *While* ($M \neq \emptyset$) *or* ($N \neq \emptyset$) *do*

22. *if* $M \neq \emptyset$ *then do*

23. Прочитать в Mes сообщение из M и удалить его из очереди M ;

24. $ОБР_СП_A()$;

25. *end do*;

26. *if* $N \neq \emptyset$ *then do*

27. Прочитать в Mes сообщение из N и удалить его из очереди N ;

28. $ОБР_СП_B()$;

29. *end do*;

30. *end do*;

31. Печать V_H , E_H .

Рассмотрим используемые в алгоритме «восстановление» процедуры.

ОБР_СП_А():

1. *if* $Mes = \langle \text{ВПЕРЕД_A} \rangle$ *then* $ВПЕРЕД_A()$;

2. *if* $Mes = \langle \text{ВПЕРЕД_AB} \rangle$ *then* $ВПЕРЕД_AB()$;

3. *if* $Mes = \langle \text{ВПЕРЕД_ABV} \rangle$ *then* $ВПЕРЕД_ABV()$;

4. *if* $Mes = \langle \text{НАЗАД_A} \rangle$ *then* $\text{НАЗАД_A}()$;
5. *if* $Mes = \langle \text{НАЗАД_AB} \rangle$ *then* $\text{НАЗАД_AB}()$;
6. *if* $Mes = \langle \text{НАЗАД_ABB} \rangle$ *then* $\text{НАЗАД_ABB}()$;
7. *if* $Mes = \langle \text{ФИКС_A} \rangle$ *then* $\text{ФИКС_A}()$;
8. *if* $Mes = \langle \text{ОБН_A} \rangle$ *then* $\text{ОБН_A}()$;
9. *if* $Mes = \langle \text{РАСП_A} \rangle$ *then* $\text{РАСП_A}()$;
10. *if* $Mes = \langle \text{ОТСТУП_A} \rangle$ *then* $\text{ОТСТУП_A}()$;

ВПЕРЕД_A(): выполняется серия операций: $Cч_A := Cч_A + 2$; $t := t + 1$;
 $r(t) := Cч_A$; $V_H := V_H \cup \{Cч_A\}$; $E_H := E_H \cup \{r(t-1), r(t)\}$;

НАЗАД_A(): из списка $r(1) \dots r(t)$ удаляется элемент $r(t)$, $t := t - 1$;

ВПЕРЕД_AB(): F присваивается значение $F + 1$;

НАЗАД_AB(): E присваивается значение 1 ;

ВПЕРЕД_ABB(): $E_H := E_H \cup \{N_B, r(t-i)\}$;

НАЗАД_ABB(): K присваивается значение $K - 1$;

ОТСТУП_A(): i присваивается значение $i + 1$;

ФИКС_A(): выполняются операции: $N_A := Cч_A$, $BN := 1$ и $E := 0$;

ОБН_A(): отменяется команда «назад» для A ($AN := 0$), и $i := 0$;

РАСП_A():

1. Прочитать в Mes сообщение из M и удалить его;
2. *While* $Mes = \langle \text{ОТСТУПИЛ_A} \rangle$ *do*
3. $i := i + 1$;
4. *end do*;
5. $E_H := E_H \cup \{r(t), r(t-i)\}$;
6. $i := 0$;

Процедуры обработки списка сообщений от агента B аналогичны.

4. Свойства алгоритма распознавания

Теорема 1 Выполняя алгоритм распознавания, агенты распознают любой граф G с точностью до изоморфизма.

Теорема 2 Временная сложность алгоритма распознавания равна $O(n^3)$, а емкостная - $O(n^2)$. При этом алгоритм использует 3 краски.

5. Выводы

Выполняя алгоритм распознавания, АИ и АЭ строят граф H изоморфный исследуемому графу G . При этом каждому АИ требуется 2 краски, одна из которых совпадает по цвету для обоих АИ. Алгоритм останавливается через конечное число шагов, число которых является величиной $O(n^3)$. При этом емкостная сложность есть величина $O(n^2)$.

Литература

1. Dudek G, Jenkin M. Computational principles of mobile robotics – Cambridge Univ. press, Cambridge, 2000. – 280 p.
2. Грунский И.С., Татаринев Е.А. Распознавание конечного графа блуждающим по нему агентом. - Вестник ДонНУ, - естеств. науки. – 2009, вып.1. – С. 492-497.

Сьомкін В.С., Глазова В.В.

¹Доцент кафедри геометрії та методики викладання математики СДПУ,

²Асистент кафедри геометрії та методики викладання математики СДПУ

Вивчення питань «Формалізація і моделювання» в «Шкільному курсі інформатики та методики її навчання»

У шкільній інформатиці чітко окреслені п'ять основних змістовно-методичних ліній курсу:

- лінія інформації;
- лінія інформаційних систем;
- лінія формалізації і моделювання;
- лінія інформаційних технологій;
- лінія алгоритмізації та програмування.

Міжпредметність інформатики дає можливість використовувати отримані знання практично в усіх галузях природничих та соціальних наук. Тому формування інформаційної культури учнів постає з часом дійсно актуальною проблемою, вирішення якої стає для вчителів інформатики нагальною задачею. Основним компонентом інформаційної культури можна вважати вміння переходити від змістовного наповнення знання до модельної формалізації цього знання і навпаки. А для підтвердження цієї тези необхідно додатково зазначити про вміння, пов'язані з дослідженнями інформаційних моделей у комп'ютерному середовищі.

Запорукою досягнення цієї мети є якісна підготовка майбутніх учителів інформатики до проведення такої роботи. Кожен вчитель інформатики повинен:

- з одного боку, під час аналізу умови задачі та побудови її інформаційної моделі знати, у якому програмному середовищі можна цю модель обробити, не обмежуючись можливістю мов програмування;
- з другого, маючи велику кількість різноманітних програмних засобів, орієнтуватися в класах задач, які можна розв'язати за допомогою цих засобів.

У процесі професійної підготовки з питань інформаційного моделювання майбутній учитель інформатики повинен оволодіти:

- змістом теорії інформаційного моделювання і формалізації;
- операційними вміннями і навичками зі створення та опрацювання моделей у комп'ютерному середовищі, готовністю систематично використовувати інструментальні програми як засіб організації своєї діяльності, вміннями ухвалювати рішення, які мають бути вироблені на основі усестороннього аналізу отриманих результатів комп'ютерного дослідження;
- методикою проектування процесу навчання учнів комп'ютерному моделюванню із застосуванням програм загального та спеціального призначення як засобу навчання.

Теоретичні основи навчального моделювання розглядаються в курсі «ШКІ та методика її навчання» у контексті оволодіння знаннями про основні етапи розв'язання практичної задачі: постановка задачі, побудова моделі, вибір готового ПЗ, розробка алгоритму розв'язання задачі з використанням вибраного ПЗ, дослідження алгоритму за комп'ютером, аналіз результатів.

Закріплення теоретичних знань з моделювання відбувається на семінарських, практичних та лабораторних заняттях з курсу «ШКІ та методика її навчання». Комплекси цих занять можна розділити на дві взаємодоповнюючі групи:

1. Заняття, що безпосередньо супроводжують вивчення теми «Моделювання й формалізації».
2. Заняття, які передбачають застосування знань із області моделювання в процесі розв'язування задач з інших розділів шкільної інформатики.

Перша група занять супроводжується опрацюванням студентами основних понять розділу, осмисленням їх сутності, ролі, етапів та методів їх формування. Студентами відпрацьовуються вміння уточнювати дані у недовизначених задачах, умови їх існування, визначаються галузі науки, апарат якої дасть змогу побудувати модель їх розв'язання. Студенти набувають навичок формалізації текстової і графічної інформації. Розглядаються підстави для класифікації моделей, визначаються рівні засвоєння учнями змісту цих понять. Більш детально розглядаються поняття інформаційної, математичної, імітаційної моделей та методів, які покладено в основу побудови цих моделей. На семінарських заняттях в реферативній формі студенти ознайомлюються з різноманітними моделями та їх роллю в тих чи інших наукових дослідженнях. На цих же заняттях студентам пропонується побудувати моделі задач зі шкільних підручників або з інших методичних посібників, обговорюються програмні засоби, які можуть бути використані для реалізації розроблених моделей.. Цей процес, як правило, супроводжується розробкою відповідних конспектів уроку чи їх фрагментів.

Завершується перша група занять циклом лабораторних робіт, на яких здійснюється вивчення різних моделей за допомогою певних засобів моделювання: студенти в комп'ютерному класі фронтально або індивідуально будують комп'ютерні моделі задач, що були розглянуті на практичних заняттях, або задач, індивідуально запропонованих кожному з них. В якості засобів моделювання можуть бути, наприклад, текстові й графічні редактори, електронні таблиці, СУБД тощо. У подальшому комп'ютерні моделі діагностуються, проводиться експериментальне дослідження, отримані результати аналізуються.

До побудови моделей учитель найчастіше звертається під час розв'язання задач з використанням електронних таблиць. Тому, готуючись до такої роботи, студенти розв'язують багато задач, в основі яких лежать математичне і імітаційне моделювання. Використовуються рекурентні формули, різності

відношення, скінченні суми, чисельні методи, що засновані на отриманні великої кількості реалізацій стохастичного процесу (метод Монте-Карло) тощо.

Наведемо деякі задачі, що можуть бути запропоновані студентам у процесі виконання лабораторного практикуму з «Шкільного курсу інформатики та методики її навчання».

Задача №1.

Мета моделювання.

Визначите свою ідеальну вагу. Побудуйте табличну модель, що визначає вашу ідеальну вагу, дає рекомендації по її врегулюванню, а також визначає тип статури. За допомогою цієї моделі складіть відповідні характеристики для студентів вашої групи.

Інформаційна модель.

Довгий час ми користувалися формулою Брока: вага дорівнює зростанню в сантиметрах мінус 100. Зараз введені поправки для різних пропорцій тіла.

- Якщо зріст менше 155 см, віднімайте 95.
- Від 155 до 165 см - віднімайте 100.
- Зріст 165 - 175 - віднімаємо 105.
- Зріст вище 175 см - віднімаємо 110.

Нині в моді формула індексу маси тіла - ІМТ. Ще його звуть індексом Кетле. Треба розділити свою вагу в кілограмах на зростання в метрах, зведене в квадрат.

- Зайва худина: нижче 19,5.
- Норма: результат від 19,5 до 24,9.
- Надлишкова вага: 25 - 27,9.
- Ожиріння 1-ої міри: 28 - 30,9.
- Ожиріння 2-ої міри: 31 - 35,9.
- Ожиріння 3-ої міри: 36 - 40,9.
- Ожиріння 4-ої міри: більше 41.

Антропологи називають трьох основних типів статури: астенік, нормостенік, гіперстенік.

Астенік - людина з довгими ногами і руками, вузькими плечима, стегнами і грудною кліткою. Обмін речовин злегка підвищений.

Нормостенік - нормальна людина з нормальним обміном речовин. Таких більшість. Повнота загрожує при неправильному живленні з переважанням високоуглеводних продуктів, загостреному сидячим способом життя.

Гіперстенік - людина з широкими плечима, укороченими руками, ногами, шиєю. Таких ще в народі називають «ширококостими». Обмін речовин сповільнений. Тому ним більш всього і загрожує повнота.

Який тип вашої статури?

Великим і вказівним пальцями правої руки обхватите зап'ястя лівій в тому місці, де виступає кісточка. Обхватили легко, навіть з перебором - *астенік*. Обхватили, навіть напружитися довелося - *нормостенік*. Обхват не вийшов, як не старалися, - *гіперстенік*.

Математична модель.

У відповідні комірки внести формули:

• **Вага, що рекомендується:** =ЕСЛИ(B2<155;B2-95;ЕСЛИ(И(B2>155;B2<165); B2-100; ЕСЛИ(И(B2>165;B2<175); B2-105;B2-110))).

• **Зауваження:** У Вас =ABS(C2-E2).

• **Індекс маси тіла:** =C2/(B2^2/10000).

• **Діагноз:** =ЕСЛИ(И(H2>19,5;H2<24,9);"норма";ЕСЛИ(H2<19,5;"зайва худина"; ЕСЛИ(И(H2>25;H2<27,9); "надлишкова вага"; ЕСЛИ(И(H2>28;H2<30,9);"ожиріння 1-ої міри ";ЕСЛИ(И(H2>31;H2<35,9); "ожиріння 2-ї міри"; ЕСЛИ(И(H2>36;H2<40,9);"ожиріння 3-ї міри";"ожиріння 4-ї міри"))))))))

• **Тип статури:** =ЕСЛИ(D2="легко";"астенік";ЕСЛИ(D2="з трудом";"нормостенік";"гіперстенік")).

Комп'ютерний експеримент.

Таблиця 1.

Ріст людини	Вага людини	Обхват кисті	Вага, що рекомендується	Зауваження: У Вас	(кг)	Індекс маси тіла	Діагноз	Тип статури
182	96	з трудом	72	зайвих	24	28,98	ожиріння 1-ої міри	нормостенік
175	63	легко	65	недостає	2	20,57	норма	астенік
175	98	з трудом	65	зайвих	33	32,00	ожиріння 2-ї міри	нормостенік
165	123	не обхвачую	55	зайвих	68	45,18	ожиріння 4-ї міри	гіперстенік
165	70	з трудом	55	зайвих	15	25,71	надлишкова вага	нормостенік
145	43	легко	50	недостає	7	20,45	норма	астенік

Висновки: Проте слід враховувати, що деякі фахівці вважають, що нинішні норми ваги занижені. Отже якщо ви, вивчивши таблицю, виявите, що з кілограмами трішки перебрали, але із здоров'ям все гаразд, то і не мучтеся з схудненням. Не варто за будь-яку ціну скидати вагу нижче вказаних норм ціною власного здоров'я!

Задача №2.

Мета моделювання. Скласти модель біоритмів для конкретної людини від вказаної поточної дати (дня відліку) на місяць вперед з метою подальшого аналізу моделі.

Інформаційна модель.

Об'єкт "людина"

- має керовані параметри: дата народження; день відліку; тривалість прогнозу.
- має некеровані параметри (константи): період фізичного циклу: 23 дні; період емоційного циклу: 28 днів; період інтелектуального циклу: 33 дні.

Математична модель.

Формули для розрахунків:

$$R_f = \sin\left(\frac{2\pi x}{23}\right) - \text{фізичний цикл}; R_e = \sin\left(\frac{2\pi x}{28}\right) - \text{емоційний цикл};$$

$$R_i = \sin\left(\frac{2\pi x}{33}\right) - \text{інтелектуальний цикл};$$

Комп'ютерна модель.

Для моделювання використовуємо середовище електронної таблиці, в якій інформаційна і математична моделі об'єднуються в таблицю, яка має дві області:

- вихідні дані – константи і керовані параметри;
- розрахункові дані (результати).

Комп'ютерний експеримент.

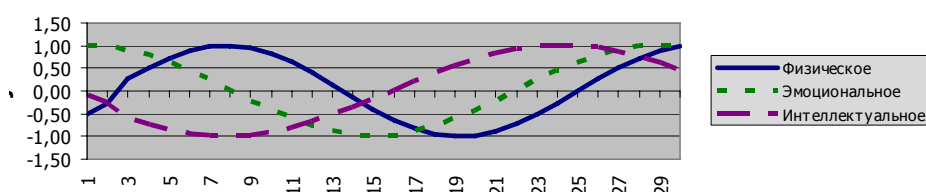
Таблиця 2.

Період фізичного циклу	23	Дата народження	22.04.1976
Період емоційного циклу	28	Дата відліку	20.01.2010
Період інтелектуального циклу	33	Тривалість прогнозу	30

Результати.

Порядковий день	Фізичний	Емоційний	Інтелектуальний
20.01.2010	-0,52	0,97	-0,10
21.01.2010	-0,27	1,00	-0,28
...
18.02.2010	0,89	1,00	0,62
19.02.2010	0,98	0,97	0,46

Діаграма 1.

Аналіз результатів:

За діаграмою учень може визначити день для реалізації свого освітнього потенціалу, день для відвідування театру або музею, день для поліпшення своїх спортивних досягнень.

Задача №3.

Мета моделювання. Скласти модель розрахунку, чисельності зростаючої популяції вовків, щоб чисельність зайців була відносно стабільною (тобто дорівнювала приблизно 1000) протягом перших п'яти років існування популяції. Як змінюватиметься чисельність популяції зайця протягом наступних п'яти років? Представити дані графічно.

Вихідні данні:

- Початкова чисельність популяції зайця (жертви) – 1000 особин ($N_{zo} = 1000$).
- Початкова чисельність популяції вовка (хижак) – 20 особин ($N_{bo} = 20$).
- Частина популяції зайця, що вижила до кінця кожного року, збільшує свою чисельність на 30 % ($P_z = 0,3$).
- Річний приріст популяції вовків – 10% ($P_v = 0,1$).
- Один вовк споживає по 40 зайців щорік ($R_{lv} = 40$).
- Смертність зайця по інших причинах дорівнює нулю.
- Смертність вовків дорівнює нулю.

Всіх набутих в результаті розрахунків значень мають бути цілими невід'ємними числами, оскільки вони вказують на абсолютну кількість тварин. Не можна округлювати значення. Можна брати лише цілу частину.

Математична модель:

$N_{30} = 1000$ $P_3 = 0,3$ $R_{1B} = 40$	$P_B = 0,1$ $N_{B0} = ?$	$N_3 = N_{30}$ $N_3 = (N_3 - N_B * R_{1B}) * (1 + P_3)$ $N_B = N_{B0} + N_{B0} * P_B$
---	-----------------------------	---

Експеримент у середовищі електронних таблиць Excel

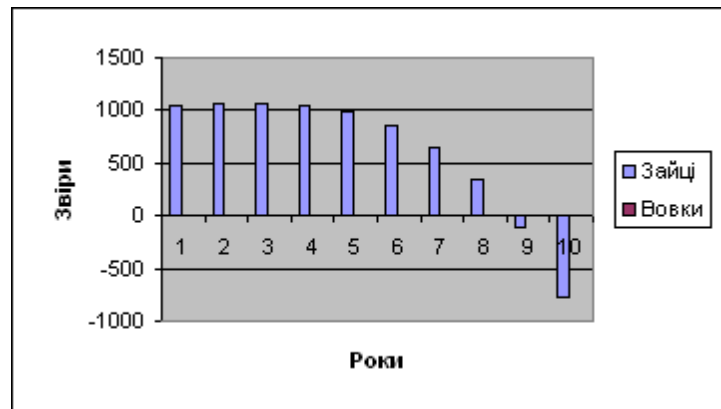
У завданні потрібно підібрати таку початкову кількість вовків, при якій чисельність зайців мінімально змінюватиметься протягом перших п'яти років існування. Підбирати початкове число будемо у ячейку N_{B0} .

Таблиця 3.

Зайці (умова)		Вовки (умова)		Кількість вовків
N_{30}	P_3	R_{1B}	P_B	N_{B0}
1000	0,3	40	0,1	5

Діаграма 2

Роки	Зайці	Вовки
0	1000	5
1	1040	5,5
2	1066	6,05
3	1071,2	6,655
4	1046,5	7,3205
5	979,784	8,05255
6	854,9866	8,857805
7	650,8767	9,743586
8	339,4733	10,71794
9	-116,018	11,78974
10	-763,89	12,96871



Аналіз результатів: При вивченні діаграми можна зробити наступні висновки. Порівняно невелика популяція вовка в п'ять особин здатна стримувати зростання популяції зайця і впродовж перших 5-6 років існування підтримувати її приблизно на одному рівні.

Задача №4.

Уздовж річки знаходяться ділянки посівів медоносних рослин: еспарцет, соняшник, гречка, овочі, а також є фруктовий сад, посадка липи, великий луг з різнотрав'ям. Потрібно вибрати місце розташування пасіки, виходячи з таких критеріїв: пасіка має бути поблизу річки і відстань від неї до самої видаленої медоносної ділянки має бути мінімальним.

Мета моделювання. Скласти модель пошуку місця розташування пасіки, що задовольняє умові задачі.

Інформаційна модель:

- ділянки річки вважається прямолінійною;
- вибирається система координат, у якій вісь ОХ напрямлена вздовж річки;

– в цій системі задаються координати розташування 7 медоносних ділянок (еспарцет, соняшник, гречка, овочі, фруктовий сад, посадка липи, луг з різнотрав'ям) з урахуванням того, що вони знаходяться з обох сторін річки;

– шириною річки можна знехтувати;

– початок координат поєднуємо з абсцисою самій лівій ділянки;

– довжина ділянки річки обмежується абсцисою самої правої медоносної ділянки;

– на даному проміжку розглядаються кінцеве число можливих положень пасіки, що знаходяться на одній відстані друг від друга (шаг дискредитації);

– для кожного положення пасіки обчислюється відстань від кожної медоносної ділянки та серед них вибирається найбільша відстань.

Шуканий результат є положенням пасіки на березі річки.

Математична модель:

– відстань між точками знаходимо за формулою $R = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$;

– для кожного положення пасіки знаходимо 7 відстаней (до кожній ділянки) і серед них знаходимо максимальну відстань;

– серед максимальних відстаней знаходимо мінімальну;

– знайдена мінімальна відстань відповідає координатам положення пасіки.

Комп'ютерна модель. Для моделювання використовуємо середовище електронної таблиці, в якій інформаційна і математична моделі об'єднуються в таблицю, яка має дві області:

– вихідні дані – константи і керовані параметри;

– розрахункові дані (результати).

Комп'ютерний експеримент:

Таблиця 4.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1				Шаг =	2	км					
2		Координати ділянок		Положення пасіки							
3	№	x	y	0	2	4	6	8	10	12	14
4	1	0	2	2,0000	2,8284	4,4721	6,3246	8,2462	10,1980	12,1655	14,1421
5	2	1,5	-3,5	3,8079	3,5355	4,3012	5,7009	7,3824	9,1924	11,0680	12,9808
6	3	3,8	-13	13,5440	13,1240	13,0015	13,1848	13,6616	14,4028	15,3701	16,5239
7	4	6	15,5	16,6208	16,0078	15,6285	15,5000	15,6285	16,0078	16,6208	17,4428
8	5	8,5	12,5	15,1162	14,0890	13,2853	12,7475	12,5100	12,5897	12,9808	13,6565
9	6	9,5	-14	16,9189	15,8824	15,0416	14,4309	14,0801	14,0089	14,2215	14,7054
10	7	14	5	14,8661	13,0000	11,1803	9,4340	7,8102	6,4031	5,3852	5,0000
11			Макс.:	16,9189	16,0078	15,6285	15,5000	15,6285	16,0078	16,6208	17,4428
12		Мінім.	відстань.:	15,5000							

Висновки до задачі: Таким чином пасіку треба встановлювати в 6 км від абсциси самої лівої медоносної ділянки біля річки.

Рамки статті не дозволяють розглянути весь спектр задач, що пропонуються студентам, але зауважимо, що головним при їх відборі є їх прикладний «життєвий» характер. В задачах не завжди зрозуміло «що дано» і «як це подати», «що треба отримати» і «в якому вигляді», який математичний апарат задіяти і в якому програмному середовищі реалізувати. З нашої точки зору, навчити учнів діяти в схожих ситуаціях - є головною задачею інформатики.

Література

1. *Бочкин А.И.* Методика преподавания информатики: Учеб. пособие. - Мн.: Выш.шк., 1998.- 430 с.
2. Інформатика: Підручник для 10–11 кл. загальноосвіт. навч. закладів/ І.Т.Зарецька, А.М.Гуржій, О.Ю.Соколов. У 2-х част. Ч. 2. – К.: Форум, 2004. – 288 с.
3. *Лапчик М.П.* и др. Методика преподавания информатики.: Учеб. пособие для студентов пед. вузов. - М., «Академия», 2001 г. 624с.
4. *Морзе Н.В.* Методика навчання інформатики. Ч. II Методика навчання інформаційних технологій. – К.: Навчальна книга, 2003. –288 с.

Овчарова О.І.

Старший викладач кафедри алгебри СДПУ

Організація самостійної роботи студентів гуманітарних спеціальностей при вивченні дисципліни «Інформатика та ТЗН»

Здатність студента до самостійного навчання лежить в основі кредитно-модульної системи підготовки кадрів. Проблема формування навичок до самостійної роботи у студентів в умовах особистісно орієнтованого навчання є актуальною і ключовою в системі якісної підготовки майбутніх фахівців. [1]

Сучасна організація навчання у вищих навчальних закладах потребує кардинальної перебудови. З націленості на запам'ятовування готових знань необхідно перейти до формування вміння творчо навчатися, переробляти наукові знання на суспільний досвід до потреб практики.

Таким чином, основою викладання у вищих навчальних закладах повинен стати методологічний принцип діяльнісного підходу, при реалізації якого не викладач навчає, а студент навчається сам в процесі власної діяльності. Роль

викладача в таких умовах перетворюється на роль організатора навчальної діяльності студентів, а не людини, яка лише передає свої знання.

Самостійна робота є важливим засобом організації навчального процесу в педагогічних навчальних закладах, оскільки майбутній вчитель повинен бути підготовлений до процесу самовдосконалення, підвищення своєї кваліфікації, творчого пошуку. Самостійне навчання – це шлях до педагогічної творчості.

Активність особистості студента виявляється у постановці мети самостійної роботи, її плануванні, визначенні засобів, самообілізації та самоконтролі, оцінці результатів. Самостійна робота вимагає інтенсивного мислення, вирішення різноманітних пізнавальних задач, ведення записів, осмислення та запам'ятовування навчальної інформації.

Для забезпечення якості самостійного навчання студента необхідно створити певні умови:

- 1) систематичне виконання студентами всіх видів самостійної роботи, що потребує чіткого графіка самостійної роботи студента та забезпечення відповідного контролю;
- 2) комплексний підхід до самостійної роботи, при якому студент під час самостійного навчання спирається на інформацію отриману під час лекції, практичного заняття, порівнюючи при цьому інформацію з різних джерел, доповнюючи та уточнюючи отримані знання;
- 3) необхідність формування у студента пізнавального інтересу, пізнавальної мотивації навчання;
- 4) наукове, навчально-методичне, технічне забезпечення підготовки студентів. [2]

Впровадження в навчальний процес засобів сучасних інформаційних технологій також сприяє зміні характеру пізнавальної діяльності студентів у бік її більшої самостійності і пошукового характеру.

Навчальна програма дисципліни «Інформатика та ТЗН» для гуманітарних спеціальностей передбачає самостійну роботу студентів, оскільки кількість годин, відведених для аудиторних занять не може охопити весь навчальний матеріал даного курсу.

При вивченні дисципліни «Інформатика та ТЗН» застосовуються різні форми самостійної роботи студентів: закріплення лекційного матеріалу, вивчення теоретичного матеріалу визначених тем, виконання індивідуальних завдань, підготовка до виконання лабораторних робіт, написання рефератів і т.д. При цьому студенти використовують різноманітні джерела інформації – підручники, методичні посібники, журнали, а також засоби сучасних інформаційних технологій – мережу Інтернет, електронні підручники, довідники і т.п.

Самостійна робота є невід'ємною складовою будь-якої, освіти. Однак чи не найважливіше місце, як за обсягом, так і за значенням, вона займає у навчальному процесі студента-заочника.

При заочному навчанні особливо доцільним є перенесення акценту з пріоритету діяльності викладача на самостійну пізнавальну діяльність студента, на створення у нього позитивно-емоційного відношення до навчання. [1]

Особлива увага приділяється самостійній роботі при вивченні дисципліни «Інформатика та ТЗН» студентами заочного відділу, де для аудиторних занять відводиться лише 6-8 годин. Тому більшу частину навчального матеріалу студентам приходится вивчати самостійно. При цьому виникають деякі проблеми та труднощі.

Пошук необхідної літератури, для вивчення за допомогою неї тем, відведених на самостійну роботу потребує певного часу та зусиль студентів - заочників. Але в умовах нетривалої за часом сесії та перевантаженого розкладу занять на заочному відділенні зробити це досить складно.

Для більш ефективного та раціонального вивчення навчального матеріалу студентами заочної форми навчання нами розроблені методичні посібники «Інформатика та ТЗН», «Використання засобів сучасних інформаційних технологій і ТЗН на уроках мови та літератури», які доступні кожному студенту.

Ці методичні посібники в стислій, доступній формі містять теоретичні відомості основних тем даного курсу, а також завдання для виконання лабораторних робіт, контрольні запитання, список рекомендованої літератури для більш поглибленого вивчення кожної теми.

Слід зазначити, що завдання до лабораторних робіт крім традиційних, що спираються на викладений теоретичний матеріал та приклади, виконання яких розміщено в якості зразків, містять ще й завдання творчого характеру. Для виконання завдань такого типу бажаним є використання сучасних інформаційних технологій.

Використання даних посібників дозволяє більш ефективно організувати навчальний процес під час установчої та екзаменаційної сесії, більш раціонально використовувати навчальний час студентами заочної форми навчання, що має позитивні відгуки з боку студентів та викладачів.

Література

1. *Калашник Н.Г., Вертегел В.Л.* Самостійна робота – потужний засіб сучасної освіти і виховання. – Запоріжжя, 2005.
2. *Панасенко Е.В.* Самостійна робота студентів у вищому педагогічному навчальному закладі // Рідна школа. – 2007. – № 5.

Мультимедійна презентація як сучасний засіб навчання

В статті розглянуті питання підвищення мотивації навчання шляхом використання сучасних комп'ютерних технологій. Зокрема розглянуте питання використання слайдових презентацій з використанням гіпертекстових посилань, аудіо та відео вставок.

Ключові слова: *сучасні комп'ютерні технології, технічні засоби навчання, слайдові презентації.*

Щоб успішно розвивати пізнавальні процеси в навчальній діяльності, необхідно шукати більш сучасні засоби й методи навчання. Використання комп'ютера з його величезними універсальними можливостями і буде одним з таких засобів.

Персональний комп'ютер - універсальний навчальний засіб, що може бути з успіхом використано на різноманітних за змістом і організації навчальних і позаурочних заняттях.

Застосування комп'ютерних інформаційних технологій у навчанні - одна з найбільш важливих і стійких тенденцій розвитку світового освітнього процесу. Інформаційна технологія навчання - це процес підготовки і передачі інформації засобами комп'ютерної техніки.

Мультимедійна форма представлення навчальної інформації найбільш актуальна на сьогоднішній день у зв'язку з комп'ютеризацією процесу навчання. З метою розвитку особистості потрібна інша методика представлення навчального матеріалу: вона повинна сприяти розвитку мислення і пізнавальної активності, забезпечувати індивідуальну траєкторію навчання. У даному контексті наочність вимагає безперервної присутності викладача, або безпосередньо керуючи процесом сприйняття й переробки інформації, або віртуально – через організацію й структуру навчального матеріалу з урахуванням психологічних особливостей сприйняття комп'ютерної інформації.

Найбільш доступним засобом для створення власних комп'ютерних навчальних продуктів є програма Power Point – майстер створення презентацій. Викладач може перетворити презентацію в захоплюючий спосіб залучення студентів в освітню діяльність. Причому презентація може стати своєрідним планом заняття, його логічною структурою, тобто може бути використана на будь-якому етапі заняття або на будь-якому виді заняття, будь то: вивчення нового матеріалу або закріплення, контроль знань або домашнє завдання тощо.

Презентація дає можливість викладачу виявити творчість, індивідуальність, уникнути формального підходу до проведення занять. Вона забезпечує викладачу можливість для:

- інформаційної підтримки;
- ілюстрування;
- використання різноманітних вправ;
- економії часу й матеріальних засобів;
- розширення освітнього простору уроку.

Завдяки використанню презентацій у студентів спостерігається:

- концентрація уваги;
- включення всіх видів пам'яті: зорової, слухової, моторної, асоціативної;
- більше швидке й глибоке сприйняття матеріалу;
- підвищення інтересу до вивчення предмета;
- зростання мотивації до навчання.

На жаль, використання презентацій викладачами під час навчального процесу часто зводиться до заміни написів на дошці. Головними перевагами використання навчальних презентацій у навчальному процесі є інтерактивність і підвищена ефективність сприйняття. Застосування кольорів, графіки й анімації, звуку, сучасних засобів відеотехніки дозволяє моделювати різноманітні ситуації й середовища, розвиваючи при цьому творчі й пізнавальні здібності учнів.

Презентації сприяють перетворенню заняття в інтерактивну дію. Інтерактивне навчання – це спеціальна форма організації пізнавальної діяльності, що дозволяє здійснити взаємодію викладача і студента, студента і комп'ютера, що має цілком конкретні й прогнозовані цілі. Одна з таких цілей складається в створенні комфортних умов навчання, таких, при яких студент відчуває свою успішність, свою інтелектуальну заможність, що робить продуктивним сам процес навчання. Від викладача залежить організувати навчальний процес за допомогою презентацій таким чином, що практично всі учні виявляються залученими в процес пізнання.

Наш досвід застосування комп'ютерних слайдових презентацій у навчальному процесі підкреслив безсумнівні переваги цього виду навчання:

- інтеграція гіпертексту (використання гіперпосилань) і мультимедіа (об'єднання аудіо-, відео- і анімаційних ефектів) у єдину презентацію дозволяє зробити виклад навчального матеріалу системним, яскравим і переконливим;
- сполучення усного лекційного матеріалу з демонстрацією слайда-фільму дозволяє концентрувати увагу студентів на особливо важливих моментах навчального матеріалу.

Форми і місце використання мультимедійної презентації (або навіть окремого її слайда) на занятті залежать, звичайно, від змісту цього заняття, мети, що ставить викладач. Проте, наша практика дозволяє виділити деякі загальні, найбільш ефективні прийоми застосування таких посібників:

- При вивченні й закріпленні нового матеріалу. Дозволяє ілюструвати різноманітними наочними засобами. Застосування особливо корисно в тих випадках, коли необхідно показати динаміку розвитку якого-небудь процесу.
- Для поглиблення знань, як додатковий матеріал до уроків

Використання комп'ютерів у навчальній діяльності на сучасному етапі виглядає цілком природним з погляду студента і є одним з ефективних засобів підвищення мотивації до навчання і розвитку творчих здібностей.

Література

1. *Кравченя Э.М.* Технические средства обучения в школе: Учебное пособие. – ТетраСистемс, 2005.
2. *Коджаспирова Г.М., Петров К.В.* Технические средства обучения и методика их использования. М. Издательский центр «Академия». 2007.
3. *Роберт И.В.* Современные информационные технологии в образовании: дидактические проблемы; перспективы использования. - М.: «Школа-Пресс», 1994. – 205 с.
4. Новые педагогические и информационные технологии в системе образования // Под ред. Е.С. Полат. - М.: Академия, 1999. – 224 с.

Пилипенко В.Ю.

Старший викладач кафедри алгебри СДПУ

Про впровадження математичних пакетів у навчальний процес

Сучасне людство переживає період становлення інформаційного суспільства, одними з основних видів діяльності якого стають виробництво і використання інформації, а комп'ютеризація є частиною цього процесу. Інформація стає головним ресурсом науково-технічного і соціально-економічного розвитку світової спільноти та істотно впливає на прискорений розвиток науки, техніки і різних галузей господарства, грає значну роль в процесах виховання і освіти, культурного спілкування між людьми, а також в інших соціальних областях. Очевидно, що інформатизація освіти є ключовою умовою розвитку суспільства, вона накладає свій відбиток не тільки на організацію знання в сучасній картині світу, але й на способи і прийоми мислення.

Сьогодні в учбовому процесі вищої школи разом з мовами програмування, електронними таблицями пропонується використовувати такі засоби інформаційних технологій, як інтегровані математичні пакети, створення яких було почате ще в 80-і роки минулого сторіччя, проте рівень інтерфейсу пакетів, що дозволив ефективно використовувати їх в учбовому процесі, був досягнутий тільки наприкінці двадцятого століття. Математичний пакет з погляду педагогіки є дидактичним засобом навчання, яке за наявності відповідної методики викладання дозволяє оптимізувати учбовий процес. Математичний пакет з погляду інформатики - це інформаційна технологія, призначена для автоматизації вирішення математичних завдань в різних галузях науки, техніки та освіти, що інтегрує в себе сучасний інтерфейс користувача, вирішування математичних завдань (як чисельних, так і аналітичних) і засоби візуалізації результатів розрахунків (обчислень). Одна з головних переваг математичних пакетів полягає в тому, що вони, звільняючи користувача від рутинних обчислень, вивільняють час для обдумування алгоритмів вирішення завдань і способів їх рішення, дають можливість представлення результатів обчислень максимально в наочній формі, а також мають вбудовані функції, що містять реалізацію того або іншого чисельного методу.

Нові широкі можливості для вдосконалення математичної освіти на всіх її етапах – від цілеспрямованого навчання і освіти до комплексної підготовки людини до професійної діяльності і самореалізації надають універсальні математичні програмні продукти типу Mathcad, Maple, MatLab, Mathematica і т.ін.

Універсальні математичні пакети дають можливість легко реалізувати стандартними засобами програми найважливіші з методичної точки зору принципи: “Від простого до складного” і “Максимальна наочність і зручність роботи”. Перший принцип забезпечує поєднання індивідуальних інтересів студентів і цілеспрямованого формування у них навичок самостійної пізнавальної діяльності. Його реалізація дає можливість студентам застосувати для вирішення поточного освітнього завдання різні способи, схематичний опис яких можна дати таким чином: стандартне рішення задачі (використання програми як “надпотужний калькулятор” для виконання розрахунків за алгоритмами, запропонованими викладачем); поглиблене рішення задачі (стандартне рішення задачі, що супроводжується самостійним аналізом і розробкою алгоритму рішення задачі); поглиблене вивчення суті досліджуваних закономірностей (поглиблене рішення задачі, що супроводжується “віртуальними експериментами”). Реалізація принципу «Наочність і зручність» забезпечується стандартними можливостями універсальних математичних пакетів.

Методичною основою роботи з математичними пакетами є комплексний підхід, що полягає в

- поступовому ускладненні вживаних інформаційних технологій по мірі зростання кваліфікації студента і підвищення складності завдань, що виникають перед ним;
- узгодженому підвищенні рівня знань в області нових інформаційних технологій і розширенні глибини знань, придбаних з інших дисциплін;
- поступовому, від курсу до курсу, посиленні мотивації у студента до самостійного вивчення і використання можливостей сучасних інформаційних технологій за рахунок поступового ускладнення вирішуваних завдань з профільних дисциплін.

Впровадження математичних пакетів в учбовий процес показує, що разом з розвитком навичок роботи з новими програмними продуктами забезпечує формування математичної освіти як в рамках конкретної дисципліни, так і впродовж всього навчання у вузі, з поступовим перетворенням комп'ютера в руках студента з інструменту чисельної обробки в інструмент аналізу і пізнання навколишнього світу. При цьому досягається підвищення рівня знань в області математичних розрахунків і розширення глибини і знань, придбаних з інших дисциплін, у тому числі із спеціальних.

Методика викладання математики

Гурковська Н.О.

Студентка 5 курсу групи 5М-1 фізико-математичного факультету СДПУ

Гуманітаризація шкільної профільної освіти: всі за та проти

Анотація. Удосконалення процесу навчання старшої школи, зокрема введення його профільності, виявило значну кількість проблем, пов'язаних з викладанням непрофільних предметів у класах різної профільності. Метою даної статті є висвітлення проблем, пов'язаних з викладанням математики у класах соціально-гуманітарного профілю та наведення можливих шляхів виходу з ситуації, що виникла.

Ключові слова: профілізація, гуманітарний профіль, Концепція профільного навчання, професійна та учнівська компетентності, методи навчання.

Постановка проблеми. Проблемою дослідження виступає визначення доцільності впровадження та аналіз недоліків профілізації з наголосом на гуманітарний нахил в сучасній освіті і недбале відношення до викладання математики в класах з таким уклоном.

Аналіз досліджень і публікацій з теми. Цією проблемою займалися багато дослідників та науковців, зокрема В. Гузеєв, В. Григоренко, Н. Бібік, О. Панішева. Кажучи більш детально, слід наголосити, що роботи вказаних вище науковців стосуються визначення конкретних шляхів удосконалення процесу профілізації та створення умов для його оптимізації. Так, наприклад, О. Панішева розробила програму спецкурсу для майбутніх вчителів ВНЗ, що викладатимуть у класах відповідного профілю. В цьому збірнику дуже чітко окреслені головні питання, на які слід звернути увагу при підготовці фахівців цього напрямку. В. Гузеєв, В. Григоренко проводять роботу по визначенню змісту математичного матеріалу, що має бути включений у програми класів відповідного профілю. Н. Бібік займається проблемою впровадження профільного навчання в педагогічній теорії та практиці. Вони заклали основи проблеми, що визрівала з самого початку реформування загальної шкільної освіти.

Постановка завдання. Головним завданням нашої статті є проведення дослідження, яке викриває кризисні явища у сфері профільної освіти.

Виклад основного матеріалу дослідження. Після введення в освітній кругообіг Концепції профільного навчання [3], що була затверджена рішенням колегії Міносвіти і науки України від 25.09.2003 і розроблена на виконання Закону України "Про загальну середню освіту" (651-14), постанови Кабінету Міністрів України від 16.11.2000 р. N 1717 (1717-2000-п) "Про перехід загальноосвітніх навчальних закладів на новий зміст, структуру і 12-річний термін навчання", рекомендації щодо викладання конкретних предметів перетерпіли суттєвих змін. Не стала винятком і математика. Багато сучасних освітян і науковців, зокрема В. Гузєєв, В. Григоренко, вважають, що викладання математики в залежності від профілю повинно проводитись «по-різному» [2]. Але саме розуміння слова «по-різному» є дуже абстрактним та суб'єктивним. На сучасному етапі найбільш великі хвилювання викликають питання, що пов'язані з викладанням вказаного предмета у класах соціально-гуманітарного профілю навчання (філологічний, філософський, правовий, історично-гуманітарний та ін.). Це пояснюється декількома причинами. По-перше, це питання є досить мало висвітленим у сучасній методичній літературі (на відміну, наприклад, від класів фізико-математичного та економічного профілів навчання). По-друге, це дуже низький рівень методичної забезпеченості навчального процесу у цьому напрямку (недостатня підготовка фахівців при роботі з учнями-гуманітаріями, а вірніше її відсутність, нестача підручників та методичної літератури та ін.). По-третє, це високий ступінь невмотивованості навчальним процесом самими учнями («Навіщо я буду вчити, якщо все одно не зрозумію?»), неможливість її забезпечення вчителями та викладачами, і як наслідок, недбале ставлення до викладання математики у цих класах і збоку викладачів («Навіщо пояснювати, якщо вони все одно не зрозуміють?»). Також треба звернути увагу на специфіку учнів класів соціально-гуманітарного профілю навчання, що стосується психолого-фізіологічної характеристики таких учнів. Н. Бібік гуманітаріїв характеризує так: «Мрійники з яскравими фантазіями і уявою. У своїй поведінці схильні покладатися на інтуїцію, більше довірятися почуттю, ніж свідомості. Властиві бурхливі емоційні реакції, невміння тримати себе в руках. Артистичні. М'які до себе і всіх навколо себе. Відкриті. Екстраверти. Нетерплячі» [1]. О.В. Панішева, як це б жорстко не звучало, наводить таке «визначення» учнів класів гуманітарного профілю: «правопівкулеві особи з усіма наслідками» [4]. Як зазначають провідні науковці у галузі психології та фізіології, проблема навіть не в тому, щоб правильно викласти та пояснити, а в тому що докорінне протиріччя лежить в психологічній організації розумової діяльності вчителя та учнів, бо вчитель математики це, перш за все, людина-аналітик, а учень-гуманітарій – людина-евристик. Тому лівова частина проблем у викладанні математики учням-гуманітаріям стосується невідповідності професійних якостей викладачів до критеріїв процесу навчання. В загальному випадку, це можна назвати своєрідною проблемою вироблення компетентностей

достатнього рівня (математичних та професійних) як з боку учня, так з боку і викладача.

Ми вважаємо за потрібне навести свою суб'єктивну точку зору з приводу цього питання та висвітлити найбільш доцільні шляхи виходу із ситуації, що виникла.

Нами був проведений аналіз стану викладання та вивчення математики. Робота проводилась з учнями ліцею Слов'янського державного педагогічного університету загальної кількості 115 чоловік. Особлива увага приділялась класам соціально-гуманітарного профілю навчання, серед яких історико-гуманітарний та філологічний класи допрофільного напрямку навчання (9 клас) та гуманітарний, філософський та правовий класи профільного напрямку навчання (10-11 класи). Для порівняння були також опитані учні фізико-математичного профілю навчання (11 клас).

Акцент у нашому дослідженні ставився на виявлення «досконалого» вчителя та визначення рівня знань сучасних старшокласників з математики класів соціально-гуманітарного профілю навчання. Також ми доторкнулись виділення конкретних факторів вмотивованості учнів-гуманітаріїв з математики та причин її відсутності.

Перш за все нас хвилювало питання про те, чи цікавляться учні математикою і отримано дуже не втішний результат: 80% школярів вважають математику не цікавою і пропонують зменшити кількість годин її вивчення, хоча 75% з них вважає за потрібне засвоєння математичного матеріалу «для загальнокультурного розвитку». Які ж причини викликали такий стрибкоподібний регрес зацікавленості математикою? Ми виділили ряд найбільш «популярних» причин, що вказували учні у процесі опитування:

- не розуміння матеріалу (40%);
- неуважність (15%);
- лінощі, комп'ютерні ігри (20%);
- професійна некомпетентність вчителя (10%);
- відсутність інтересу до предмета (15%).

Слід зазначити, що не вмотивованість вивчення математичних дисциплін пояснюється тим, що учні не обирають взагалі математику основою для своєї майбутньої професійної діяльності (85%), тому і відношення до неї відповідне. А ті, хто все ж таки зважився на такий крок, змушені займатися математикою додатково (45%). Тому не дарма деякі методисти підіймають питання про законне обґрунтування репетиторства. Але з іншого боку, такий захід поставить під сумнів компетентне викладання математики шкільними вчителями. До плюсів такого розвитку подій вони відносять матеріальний аспект. Тоді ж, якщо дивитися ще більш радикально виникає дуже доречне питання: Навіщо школа взагалі потрібна? Така невтішна статистика викликає низку запитань, головним з яких стає питання про доцільність впровадження соціально-гуманітарного профілю у середню школу. Чи є необхідним такий крок? Наведемо з цього приводу деякі спостереження. На жаль, як з'ясувалося, в

учнів подібних класів зовсім не розвинене абстрактне мислення. Спробуємо пояснити цей факт. Починаючи з 5-го класу ми намагаємось розвивати в дітях просторове уявлення. Але чому багатьом учням у 10-му класі при вивченні стереометрії дуже важко уявити просторові фігури? Висновок напрашується сам по собі. Учні не вміють «уявляти» і тому вивчення геометрії стає для них тортурями. Це підтверджують і результати опитування, адже 90% старшокласників вважають алгебру більш простою та зрозумілою, бо «там немає задач на доведення». Наведемо ще один факт. Аналізуючи причини вибору даного профілю можна сказати, що в таких класах опиняються ті діти, що не потрапили в класи інших профілів. Саме таку причину, дослівно «не вистачило місця» зазначили 55% опитаних. Ми вважаємо, що не варто ставити питання про скасування даного виду профілю так категорично, адже що будуть робити ті учні, що зовсім не отримали нахилів до математики суто спадково? На нашу думку, обираючи профіль людина повинна не керуватися аргументами по типу: «там буде легше», «слава богу, там не має математики», а обирати свідомо покладаючись на свої природні особливості. Тому у нагоді стане психологічна діагностика нахилів учня, яку бажано проводити починаючи з 1-го класу.

Важливим є також зміст математичного матеріалу в класах соціально-гуманітарного профілю. На нашу думку, є недоречним «крамсання» навчального часу до 2 годин математики на тиждень. Спрощення повинно виражатись, перш за все в полегшенні математичного базису. В чому воно полягає? Дослідники визнають існування безпосереднього, стихійного зв'язку між вмінням розв'язувати математичні задачі і можливістю бути вільною людиною. Синонімом вільної людини є грамотна людина, тому одна з найважливіших цілей при навчанні математики – логічно грамотне володіння мовою. Не правописом, звичайно, а вмінням точно виразити свою думку, точно зрозуміти, що сказано чи написано.

Психологи ігнорують складність реального життєвого мислення, яке проявляється у плануванні людиною свого життя, у прийнятті найважливіших рішень. Цьому можна і потрібно навчати у школі. І навчання мисленню, яке йде на уроках математики, у цьому процесі відіграє дуже важливу роль.

Говорячи про навчання математики, мова повинна йти не про стандартні задачі з задачників – їх, можливо, у житті ніколи й не зустрінеться, але про перенесення навичок мислення на життєві проблеми. Отже, потрібно вчити дітей бути більш інтелектуальними при підході до життєвих проблем. І тут математику не замінити нічим.

Одним із основних питань є питання про те, якими якостями повинен володіти вчитель математики, щоб дійсно навчити. На сучасному етапі набір компетентностей, які повинен мати вчитель в своєму педагогічному арсеналі змінився. Проведений аналіз показав, що на думку учнів він є наступним:

- креативний;
- добрий;
- обізнаний;
- розуміючий;
- уважний;
- справедливий;
- комунікабельний;
- з почуттям гумору;
- стильний;

Отже, ми бачимо, що Вчитель це перш за все не тільки Професіонал, але і Людина. Якщо казати про таку складову як «Людина», то сумлінному вчителю допоможе кропітлива праця над собою, самовиховання та терпіння. А що ж стосується професійної компетентності вчителя математики? Це сукупність відповідних форм, методів та засобів викладання, вміле та доцільне використання яких і формує креативне світобачення вчителя. Загалом, креативне уявлення не обмежується простим використанням вказаних елементів, це перш за все сукупність якостей, що «характеризуються здатністю до продукування принципово нових ідей». Тому вчитель математики соціально-гуманітарного класу – це людина обдарована, творча. І тому, на нашу думку, перед вищою педагогічною освітою стає завдання виховання саме таких фахівців. Одним із заходів з приводу такого виховання може стати введення спеціального курсу, спрямованого на підготовку кадрів такого напрямку роботи.

Цей курс має включати загальні методи роботи з учнями-гуманітаріями та вироблення спеціальних форм та засобів роботи у відповідних умовах. Причому не аби яке місце має посісти вироблення найефективніших способів застосування вказаних методів та форм, що повинні підпорядковуватись загальним нормам навчального процесу.

Але цього буде замало. Тому вчитель повинен сам виробляти відповідні методи роботи зі школярами-гуманітаріями. У нагоді стане вміння адаптуватися до умов навчального процесу, тобто бачити очима учня. І в цьому допоможуть прийоми ейдетики, алегорій, уособлень, знання творів відомих світових письменників, наприклад, «Аліса в стране чудес», який має дуже великий математичний потенціал. Також можна використовувати історичний матеріал, яскраві наглядні посібники, елементи гри. Але всі ці методи повинні мати в собі відповідну літературну канву. Саме тут і будуть встановлюватись різноманітні міжпредметні зв'язки.

Не треба також забувати про учнівську математичну компетентність, рівень якої прямим чином залежить від рівня знань, який є доволі низьким:

- низький рівень (15%);
- середній рівень (55%);
- достатній рівень (25%);
- високий рівень (5%).

Слід також зазначити, що більш втішним виявився «бажаний» рівень знань учнів:

- низький рівень (5%);
- середній рівень (30%);
- достатній рівень (50%);
- високий рівень (15%).

Саме ця розбіжність у рівні знань учнів вказує на глибинні проблеми процесу навчання математики у класах соціально-гуманітарного профілю, які ми можемо подолати, рухаючись вказаним шляхом.

Висновки. Отже, окреслена вище ситуація викликає не аби які хвилювання. Тому метою усього наукового суспільства є вироблення доцільних методів та прийомів удосконалення процесу гуманітаризації та профілізації сучасної шкільної освіти. При цьому головним є не зниження якості освіти, що є найважливішим із завдань. Тому головний упор треба накладати на методи мотиваційної сфери (засоби ейдетики, використання історичного матеріалу, завдань з творчим гуманітарним спрямуванням). Але, при цьому не слід забувати про підвищення фахової підготовки, виховання «інтегрованого» викладача, який окрім неперевершеного володіння професійними навичками та вміннями, буде мати гуманітарний творчий потенціал, такий собі «математик-філолог». Тому, на нашу думку, процес «створення» «досконалого» вчителя має починатись з вузівської підготовки та не обмежуватись лише спецкурсом, з невеликим обсягом матеріалу, а проходити через увесь навчальний процес та удосконалюватись протягом усього життя.

Література

1. Бібік Н. Проблема профільного навчання в педагогічній теорії і практиці / Надія Бібік // Директор школи, ліцею, гімназії. – 2005. – № 5. – С. 20–26.
2. Гузеев В.В. Гуманитарный прорыв в образовании возможен / Вячеслав Гузеев // Народное образование. – 2006. – № 2. – С. 123–129.
3. Концепція профільного навчання в старшій школі: кн. вчителя математики: Довід.-метод. видання / упор. Прокопенко Н.С., Щекань Н.П. – Х.: ТОРСІНГ ПЛЮС, 2006. – 288 с.
4. Панішева О.В. Формування готовності майбутніх учителів математики до роботи в класах гуманітарного профілю: Навч.-метод. Посіб. Для викладачів вищ. Навч. Закл. / Ольга Вікторівна Панішева: Держ. закл. «Луган. Нац. ун-т імені Тараса Шевченка». – Луганськ: Вид-во ДЗ «ЛНУ імені Тараса Шевченка», 2009. – 172с.

Черних Ю.І.

Студентка 5 курсу групи 5М-1 фізико-математичного факультету СДПУ,

Про методичні особливості використання інтерактивних методів в процесі навчання математики

Анотація: У статті розглядаються питання, пов'язані з особливостями використання інтерактивних методів на уроках математики. Аналізуються проблеми, які спричиняють неприйнятне співвідношення «затрати – ефективність». Виділяються і характеризуються технології групової роботи, найбільш прийнятні для навчання математики.

Ключові слова: *інтерактивні методи навчання, інтерактивні технології, групова робота.*

Логіка розвитку сучасної цивілізації ставить перед освітою завдання, для виконання яких необхідно формулювати нові концептуальні ідеї навчання, що органічно поєднують елементи традицій та інновацій.

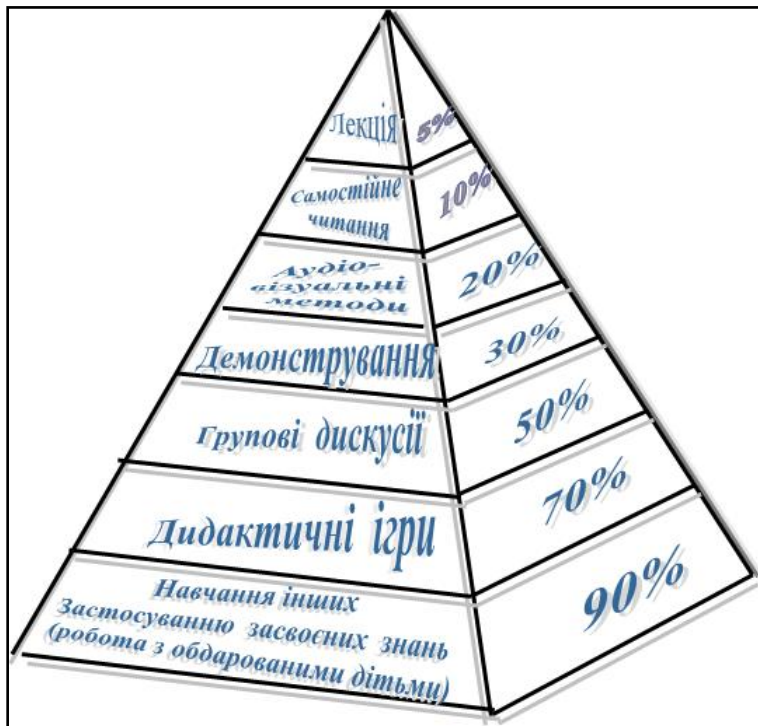
Сучасному навчально-виховному процесу притаманні переважання вербальних методів навчання і виховання, недооцінка значення спілкування школярів для розв'язування провідних задач і завдань на уроках математики, відсутність цікавих для учнів форм та методів організації навчальної діяльності тощо. Тому навчальною потребою сучасної системи освіти при викладанні математики є впровадження нових форм та методів навчання і виховання, що забезпечують розвиток особистості кожного школяра. Розв'язанню цієї проблеми, на думку фахівців, сприяє впровадження інтерактивних технологій навчання на уроках математики.

Інтерактивними називають методи, що дозволяють вчитися взаємодіяти між собою; а навчання – інтерактивним, якщо воно побудоване на взаємодії всіх, хто навчається, включаючи педагога. «Інтерактивний – означає здатність взаємодіяти чи знаходитись в режимі бесіди, діалогу з чим-небудь (наприклад, комп'ютером) або ким-небудь (людиною)» [2]. Отже, інтерактивне навчання – це перш за все діалогове навчання, в ході якого здійснюється взаємодія вчителя та учня.

За часи Радянського Союзу використання інтерактивних методів широко практикувалося у 20-х роках ХХ ст. (проектний, лабораторно-бригадний метод, виробничі, трудові екскурсії, практики). Подальша розробка цих методів присутня в працях В.О.Сухомлинського (60-ті рр.), а також в «педагогіці співпраці» (70-80-ті рр.), про яку говорилося в роботах В.Ф. Шаталова, Ш.А. Амонашвілі, С.Н. Лисенкової та ін. Особливої уваги заслуговує досвід американських колег, оскільки в останні десятиліття ХХ ст. там проводилися багаточисленні експерименти та наукові дослідження в області інтерактивних методів, розроблені відповідні рекомендації для вчителів.

Дослідження, проведені у 80-х рр. національним тренінговим центром (США, штат Меріленд), показали, що інтерактивні методи дозволяють різко збільшити відсоток засвоєння матеріалу. Результати цього дослідження

відображено у діаграмі, яка отримала назву «піраміда навчання».



На цій діаграмі можна побачити, що найменший процент засвоєння мають пасивні методики (лекція-5%, читання – 10%), а найбільший – інтерактивні (дискусійні групи – 50%, практика через дію – 70%, навчання інших чи негайне використання – 90%) [2].

Усе викладене вище зовсім не означає, що потрібно використовувати лише інтерактивне навчання. До того ж ми знаємо чудових

педагогів, лекції яких майже дослівно збереглися в нашій пам'яті. Є такі учні, які добре засвоюють матеріал при читанні (розвинена зорова пам'ять). Але можна погодитися, що в середньому закономірність, відображену «пірамідою», можуть прослідкувати практично усі педагоги, та не треба забувати, що для навчання важливі всі рівні пізнання, кожному з яких притаманні свої методичні особливості.

Математика – одна з найскладніших дисциплін, що вивчається у школі. Тому перед нами постає проблема, для розв'язання якої ми повинні:

- проаналізувати інтерактивні методики та технології;
- провести їх класифікацію;
- визначити можливість їх використання на уроках математики.

Аналіз літератури показав, що можна виділити кілька класифікацій інтерактивних технологій [1],[3],[4]. Кожна класифікація залежить від того, хто і як розуміє той чи інший метод чи прийом. Найбільш відомими є такі:

- технології кооперативного навчання (робота в парах, ротаційні трійки, карусель, два – чотири – всі разом, робота в малих групах, коло ідей);
- технології колективно – групового навчання (мікрофон, незакінчені речення, мозковий штурм, навчаючи – учусь або «Броунівський» рух, ажурна пилка, дерево рішень);
- технології ситуативного моделювання (симуляції або імітаційні ігри, судові слухання, рольова гра);

- технології дискусійних питань (метод ПРЕС, займи позицію, зміни позицію, неперервна шкала думок, дискусія, ток-шоу).

Результати опитування вчителів та практика свідчать про те, що в реальному навчанні тільки невелика кількість вчителів використовує інтерактивні методи. Нестандартні уроки проводяться дуже рідко, найчастіше під час перевірок та атестацій, коли від вчителя очікують на щось цікаве, незвичайне.

Організація інтерактивного навчання вимагає від вчителя високого рівня підготовки як методичної, яка визначає зміст та методи проведення нестандартного уроку математики, так і практичної. Підготовка, перш за все, передбачає моделювання життєвих ситуацій, використання рольових ігор, спільне вирішення проблеми на основі аналізу обставин та відповідної ситуації. Математика, на відміну від гуманітарних дисциплін, займається проблемами абстрактного характеру, які мають досить опосередкований зв'язок з життям. Тому досить часто пропонувані для опрацювання інтерактивними методами проблеми виявляються надуманими, замість того, щоб сприяти мотивуванню досягнення навчальних цілей, зміщують їх на другий план. Тоді активність учнів замикається на собі.

Аналіз значної кількості публікацій показав, що пропонувані прийоми і навіть конкретні розробки уроків навряд чи будуть використані у реальному навчальному процесі. Назвемо причини такого положення:

– проведення інтерактивного уроку потребує довготривалої підготовки; вчитель має визначити цілі і задачі, які потрібно реалізувати та результат, який він очікує від учнів, намітити шляхи її досягнення; побудувати модель уроку; завчасно організувати підготовку учнів;

– активне оперування складними математичними категоріями у їх взаємозв'язку і взаємопроникненні, побудова цікавих і значимих математичних моделей нажаль виявляються складними для більшості вчителів, а інтерактивні методи потребують володіння такими вміннями від учнів;

– використання описаних технологій потребує значно більших затрат навчального часу у порівнянні із традиційними, тому їх використання є виправданим лише за умови значного підвищення ефективності навчання математики;

– доволі часто у пропонованих у літературі для вчителів рекомендаціях невірно трактуються і описуються відповідні прийоми, під модними назвами реально криються всім добре відомі традиційні методи опитування;

– учні не звикли до подібного роду роботи на уроці і тому вчителю буває дуже важко сконцентрувати їх увагу та досягти поставленої мети. Наприклад, в процесі дискусії на уроці вчитель повинен контролювати кожний крок уроку, бо дуже часто цей метод призводить до нехтування основної дидактичної мети, яку було поставлено на початку уроку. Як наслідок – урок буде невдалим, час – марно втраченим.

Останнім часом кардинально змінилися умови навчання. Більшість шкіл має належне обладнання, наприклад: інтерактивні дошки, мультимедійні проектори тощо. Застосувати такі технології для підготовки і проведення інтерактивного уроку неважко. За умови, що в школі належним чином викладається інформатика, учням можна запропонувати створити комп'ютерні презентації і продемонструвати їх на уроці. Корисно проводити такого роду роботу з учнями 10 – 11 класів, особливо на уроках стереометрії. Інколи учням важко уявити складні геометричні тіла та їх комбінації, а комп'ютерні презентації спрощують цей процес і демонструють усі елементи побудови до найважливіших деталей. На власному досвіді ми впевнилися, що використовувати інноваційні технології на уроці неважко і часу для цього потрібно небагато. Такі уроки допомагають учням проявити свої креативні здібності, розвинути просторове уявлення, розширити кругозір, підвищити інтерес до вивчення математики.

Аналіз літератури [1], [5], [7], опитування вчителів – практиків та власний досвід дозволяє зробити висновок, що одним із найбільш прийнятних методів, характерних для навчання є групова робота (технології кооперативного та колективного навчання). Така форма роботи не потребує великих коштів для реалізації, займає небагато часу для підготовки та з легкістю використовується на уроках. Проблема неготовності учнів до подібної форми організації навчального процесу, з якою може зіткнутися вчитель, долається досить швидко.

Групова форма навчання повинна одночасно розв'язувати три основні задачі:

- конкретно – пізнавальну, що пов'язана безпосередньо з навчанням;
- комунікативно – розвивальну, яка сприяє формуванню основних навичок спілкування всередині та за межами даної групи;
- соціально – зорієнтовану, що виховує громадянські якості, необхідні для адекватної соціалізації індивіда у соціумі. [3]

Краса цього методу полягає у тому, що учні всієї групи об'єднані спільною метою і знають, що успіх роботи залежить від праці кожного – тільки тоді можна досягти особистої мети, коли товариші по групі також досягнуть успіху.

Важливо оптимально поєднувати в залежності від цілей уроку, форми організації пізнавальної діяльності, методи навчання та зміст навчального матеріалу. Бажано, вивчення нової теми почати із знайомства учнів з планом вивчення даної теми або сумісного планування (в залежності від конкретного класу), який складаємо у вигляді таблиці.

З таблиці учні бачать, на яких уроках буде здійснюватися вивчення нового матеріалу, контроль, рефлексія, корекція; де робота організована по групах, індивідуально, фронтально, на яких уроках оцінки отримують всі. Самостійні роботи пропонуємо диференціювати. На наш погляд, учні оцінять доступність такої інформації.

Організація інтерактивного навчання може здійснюватись на будь-якому етапі вивчення теми, в залежності від змісту навчального матеріалу, рівня підготовки класу використовуються різні методи навчання. Але найчастіше при вивченні нового матеріалу для формування теоретичних знань використовують проблемно-пошукові методи, оскільки для організації роботи необхідні базові знання з теми. На етапі формування знань, вмінь і навичок репродуктивні методи поступово можна змінити на частково пошукові, оскільки необхідно формування вмінь учнів використовувати отримані знання в нестандартній, зміненій ситуації. Крім того, на цьому етапі, а також на етапі узагальнення та систематизації знань та вмінь можна використовувати проблемні та дослідницькі методи, метод проектів.

Використання форм групової роботи залежать від даного типу уроку, «Набір» цих форм також визначається змістом навчального матеріалу, рівнем підготовки класу, наявністю часу.

При інтерактивному навчанні важливе місце займає організація навчального простору. Необхідно шукати оптимальні варіанти розташування учбових місць в залежності від кількості груп, числа учнів у кожній групі. У відповідь на такий маневр у учнів виникає відповідна реакція: готовність включитися в процес навчання.

Групи можна формувати за бажанням самих учнів або за бажанням вчителя, в залежності від того, чого очікує вчитель від групової роботи. Найпоширенішими є розбиття учнів по парах, по 3 – 5 осіб у кожній групі, але не виключаються й інші комбінації, залежно від кількості учнів.

Групи працюють за такою схемою:

- одержують від учителя чітку інструкцію щодо виконання певного завдання;
- виконують своє завдання доти, поки всі учні групи не готові дати відповідь на поставлене запитання;
- обмінюються інформацією з членами іншої групи, створюючи нові групи з представниками, що мали інше завдання, тобто вчать, навчаючи один одного;
- об'єднуються в коло однодумців з метою перевірки виконання завдань, поставлених учителем.

Презентація групового розвитку поставленої задачі, аналіз задачі, рефлексія, загальний висновок про роботу у групах, додаткова інформація вчителя для груп.

Під час перевірки виконання завдань груп відбувається як індивідуальна, так і групова звітність, коли учні делегують представника для захисту своїх результатів і за виступом оцінюється робота групи або вчитель вибирає сам учня, який буде знайомити усіх присутніх з роботою своєї групи.

Важливим етапом є аналіз уроку, рефлексія. Вчитель може провести анкетування, тестування, запропонувати учням провести аналіз із використанням різного роду методик. Під час групової роботи вчитель виконує

різні функції: контролює хід роботи в групах, відповідає на питання, регулює суперечки, порядок роботи, при необхідності допомагає окремим учням або групі.

Групова форма роботи може бути застосована на уроках різних типів. Важливо оптимально поєднувати в залежності від цілей уроку, форми організації пізнавальної діяльності, методи навчання та зміст навчального матеріалу.

Висновки. У результаті організації навчальної діяльності із застосуванням інтерактивних технологій на уроках математики в учнів розвиваються й ускладнюються психічні процеси – сприйняття, пам'ять, увага, уява тощо; виявляються такі логічні операції як аналіз і синтез, абстракція й узагальнення, формуються воля й характер тощо; при використанні різноманітних видів творчої діяльності на уроках в учнів розвиваються математичні здібності та проявляється інтерес до предмета. Велика кількість різноманітних і доступних учням видів робіт, включених у зміст знань, де застосовуються інтерактивні технології, дає поживу для розуму, розвиває уяву, спостережливість, розширює кругозір, знайомить з важливими елементами професійної діяльності, впливає на формування стійких пізнавальних інтересів, а в майбутньому – і на вибір роду занять, пов'язаних з математикою.

Складність організації таких уроків пов'язана перш за все з підготовкою вчителя і учнів та з умовами, які створено в навчальному закладі. Використання інтерактивних форм роботи має бути обумовлене перш за все ефективністю реалізації навчальних та виховних цілей системи уроків.

Література

1. Інтерактивні технології на уроках математики: навч.посіб./ Уклад.: І.С.Маркова. – Х.: Вид.група «Основа», 2009. – 126,(2)с.
2. *Маслова Л.В.* Активные и интерактивные методы преподавания на уроках истории и обществознании // <http://www.urokam.net.ua>
3. Страздина Е.А. Интерактивное обучение на уроках математики // <http://www.ПЕДСОБЕТ.org.ru>
4. *Крикунова Л.* Застосування інтерактивних технологій – один із напрямків удосконалення навчально-виховного процесу на уроках математики // <http://www.telmanovo.ua>
5. Інтерактивні технології навчання: теорія, досвід: методичний посібник./Авт.-уклад.: – О.Пометун, Л.Пироженко. – 2007р.
6. Моделювання сучасного уроку математики в школі: навч.посіб./Уклад.: Н.І.Труш, Б.Б.Беседін, Г.М.Бірюкова, Л.Г.Плесканьова. – Словянськ, 2009р.- 103с.
7. Інтерактивні технології навчання // <http://www.tolerspace.org.ua>

Пилипенко В.Ю.

Вчитель вищої категорії, старший вчитель ЗОШ № 10 м. Слов'янськ

Використання проектних технологій на уроках математики

Для того, щоб підтримувати у учнів інтерес до знань на уроках математики, необхідно будувати навчання на активній основі, через доцільну діяльність учня, погодившись з його особистим інтересом. Пріоритет в цьому відношенні належить проектно-дослідницькому методу.

Процес навчання по методу проектів – процес двосторонній; для успіху навчання потрібна не тільки висока якість роботи вчителя, але і активна діяльність учнів, їх бажання оволодіти передаваними вчителем знаннями, їх неугасаючий інтерес до навчання. Для того, щоб учень сприймав знання як дійсно потрібні, йому необхідно поставити перед собою і вирішити **значущу для нього проблему, узятую з життя**, застосувати для її вирішення певні знання і уміння, у тому числі і нові, які ще належить придбати, і отримати у результаті реальний, відчутний результат.

Презентації проводились протягом всього уроку і перемежались з діяльністю учнів. Результат перевершив всі мої очікування — діти захопилися, і коли я запитала, хотіли б вони самі спробувати створити щось подібне, то по виразу їх обличчя я зрозуміла, що цей тайм залишився за мною. З цієї миті я з учнями почала працювати над різними проектами. До кінця навчального року ми створили декілька проектів, серед яких і інформаційно-дослідницькі, і практико-орієнтовані, і оглядові, за такими темами:

5 клас

1. Розв'язування рівнянь. Мандруємо областями України. (розділ "Натуральні числа", тема: "Рівняння".)
2. Урок повторення з теми: "Натуральні числа". Математична версія казки О.Толстого "Золотий ключик, або пригоди Буратіно".
3. Дії з десятковими дробами. Планети Сонячної системи.
4. Інтегрований урок з математики та історії. Тема: "Велика Перемога. Узагальнення та систематизація знань за курс 5 класу".
5. «Відсоткові розрахунки. Розв'язування прикладних задач. Цікаві пізнавальні задачі на відсотки».

6 клас

Координатна площина. Математична географія, інтегрований урок.

8 клас

1. "Голос води". Розв'язування квадратних рівнянь.
2. Теорема Піфагора.

11 клас

1. Піраміди навколо нас.
2. Первісна. Інтеграл.

Оскільки ці проекти були в основному підготовлені до кінця навчального року, то вони зіграли неоціниму роль під час підсумкового повторення вивченого матеріалу на уроках математики. Під час підготовки проектів, працюючи в групах за інтересами, учні змогли зі всією винахідливістю, кмітливістю проявити свої творчі дарування, вчилися і переймали один у одного те, чого не уміли самі, ділилися своїм досвідом з товаришами.

Таким чином, представляючи на презентаціях проекти під час підсумкового повторення, я добилася відразу декількох цілей:

1. учнями з цікавістю був повторений вивчений матеріал;
2. під час роботи над проектами вони змогли дізнатися багато нового і познайомити з новими і цікавими відомостями і фактами своїх товаришів;
3. школярі вчилися працювати з додатковою літературою і займалися пошуком нової інформації в Інтернеті;
4. виховували в собі вміння слухати товаришів і оцінювати інші проекти;
5. розвинули інтерес до проектної діяльності;
6. вчилися працювати в колективі;
7. навчилися самостійно планувати свою діяльність.

Підводячи підсумок, можна з упевненістю сказати, що уроки з використанням нових технологій, а саме технології проектів, школярам дуже подобаються, на них учні вчаться не тільки застосовувати вміння і навички, отримані на уроках математики, але і самі активно включаються в пізнавальну діяльність, знайомляться з реаліями сучасного життя, вчаться активізувати свою творчість і індивідуальність, вчаться застосовувати математичні знання на практиці.

Для вчителя результат такої роботи також важливий: його учні самостійно здобувають нові знання, вчаться аналізу нестандартних ситуацій, систематизують пошук рішень, закріплюють знання, отримані від вчителя, розвивають себе. На таких уроках відбувається єднання вчителя і учнів.

Чукаріна І.В.

Студентка 5 курсу групи 5М-1 фізико-математичного факультету СДПУ

Про умови створення і функціонування шкільного підручника математики

Анотація: у статті розглядаються питання, пов'язані з умовами створення і функціонування шкільного підручника математики.

Ключові слова: *підручник, підручникотворення.*

На сучасному етапі розвитку української національної школи оновлення й удосконалення змісту навчання передбачає якісні зміни в теорії та практиці підручникотворення, оскільки суспільні й державні вимоги до якості освіти детермінують і нові вимоги до навчальної книги. Запровадження державного освітнього стандарту, нової структури школи, акцент на самостійне опрацювання навчального матеріалу потребують і нового підручника[7].

Утім, сучасні дослідження засвідчують не завжди високу якість шкільних підручників, зокрема: невідповідність європейським стандартам, віковим і психологічним особливостям дітей, перевантаженість матеріалами, відсутність спрямованості на набуття стимулів до навчання тощо.

Психолого-педагогічні функції шкільних підручників досліджували М. Бурда, Н. Буринська, Ю. Гільбух, О. Дусавицький, Г. Костюк, І. Лернер, Н. Менчинська, В. Онищук, М. Ричик, Н. Тализіна, С. Якиманська та ін.

Історію навчальних видань як соціально-педагогічного феномену вивчали історики педагогіки (Л. Березівська, Н. Бігданець-Білоskalенко, Т. Гавриленко, Т. Завгородня, О. Замашкіна, І. Курляк, І. Руснак, О. Сухомлинська, Б. Ступарик та ін.). Педагогічні аспекти ілюстративного оформлення підручників розробляли Ю. Антал, І. Бай, Н. Гончарова, Я. Кодлюк, В. Ривчин та ін.

Створення якісного підручника – справа неймовірно складна і відповідальна, яка вимагає високого професіоналізму, наукової чи предметної компетентності й морально-правової відповідальності.

При цьому слід пам'ятати, що підручник – це насамперед навчальна книга. До того ж книга надзвичайно складна (чи не найскладніша), яка має не просто відтворювати зміст і структуру якоїсь науки, галузі знань або іншої форми соціального досвіду. Вона повинна:

- по-перше, відтворювати цей зміст якомога точніше, без надмірних спрощень і перекручень;
- по-друге, відтворювати його стисло і зв'язно;
- по-третє – доступно, зрозуміло й, бажано, цікаво для людей певного віку, переважно дітей і молоді;

– по-четверте, передавати цей зміст із наперед визначеною навчальною, виховною чи розвивальною метою, що задаються суспільними та особистісними цілями освіти тощо.

Останнім часом у зв'язку із зміною парадигми загальної середньої освіти знову гостро постали проблеми підручника та підручникотворення. Вони проявляється у багатьох аспектах. В умовах реформи підручника математики виявився ряд серйозних труднощів.

Однією з таких проблем є визначення змісту та структури шкільного підручника. Підручники математики відповідають програмі, але порядок розташування окремих розділів не є коректним [2]. З точки зору багатьох фахівців та вчителів-практиків окремі підручники є доволі перенасиченими і надзвичайно складними для учнів [1, 10, 11].

Не менш серйозною проблемою є професійна неготовність вчителів до нововведень. Значна частина вчителів не докладає зусиль до усвідомлення методичної концепції побудови підручника, розуміння особливостей логіки побудови обґрунтувань тощо. Тим більше, що автори підручників у окремих випадках самі допускають недбалість у характеристиках концепції підручника, як наприклад зауваження про «конкретно-дедуктивний» виклад геометричного матеріалу основної школи та «частково-аксіоматичний» метод обґрунтувань [8].

На питання «Чому ви користуєтесь саме цим підручником?» найчастіше можна почути лише відповідь: «Тому що ці підручники надійшли до шкільної бібліотеки». Тобто, яким би невдалим не був підручник, вчитель не має можливості замінити його на інший, бо не має вибору. Звісно, вчитель може придбати потрібні підручники з предмету для кожного класу за власні кошти. Але ж кожен рік купувати підручники, які імпонують вчителю, для батьків є занадто дорогим «задоволенням». Тим паче, якщо їх треба купувати не з якогось окремого предмету, а у комплекті.

На сучасному етапі у багатьох школах відсутні комплекти підручників для всіх класів з 5 по 12, які були б написані єдиним авторським колективом та в повній мірі відповідали б програмі середньої школи. Це призводить до порушення принципу наступності у навчанні.

Дуже актуальним є питання про помилки у підручниках з математики. Так, у підручнику з алгебри шестикласникам пропонується запам'ятати, що «Числовий множник буквеного виразу називають коефіцієнтом» [9, с. 227]. Але автори чомусь не беруть до уваги те, що буквений вираз може мати й вигляд $3a+2b$ і в цьому випадку стає незрозумілим, який з числових множників слід вважати його коефіцієнтом.

У тому ж підручнику далі стверджується: «Якщо обидві частини рівняння помножити або поділити на одне й те саме число, відмінне від нуля, то нове рівняння залишиться правильним» [9, с. 232]. Правда, яке рівняння слід вважати «правильним», для учня залишається таємницею, бо серед математичних понять такого знайти не вдається.

В іншому підручнику [3, с. 42] автори пояснюють, що «Записи, складені з чисел і букв, сполучених знаками відношень, називають виразами». З цього пояснення зразу ж випливає, що $4a = 8$ слід вважати виразом, але $3a + 2b$ виразом не буде. Навряд чи хтось з математиків з цим погодиться ...

З видання у видання в підручнику алгебри і початків аналізу для 10 класу ми зустрічаємо «Функція $x = \frac{1}{2}y - \frac{3}{2} = \varphi(y)$ називається оберненою до функції $y = 2x + 3 = f(x)$ » [10, с. 99]. Це математичне речення має логічну структуру означення $Dfd = Dfn$, хоча за смислом воно не може вважатися означенням.

На наступній сторінці можна знайти таку пару означень:

- «Функція f , яка має обернену, називається оборотною» [10, с.100].
- «Оберненою до даної оборотної функції $y = f(x)$ називається така функція $x = \varphi(y)$, яка кожному y з множини значень функції $y = f(x)$ ставить у відповідність єдине число x з її області визначення» [10, с. 100].

Ці «означення» утворюють порочне коло, бо перше з них «визначає» оборотну функцію, як таку, що має обернену, а друге – обернену функцію до оборотної. Більше того, друге з цих означень не відповідає прийнятому у математиці трактуванню оберненої функції. Звичайно, сподіватися, що учні усвідомлять смисл того, про що йдеться в цих означеннях, мабуть, не варто: в кращому випадку ці два означення будуть формально завчені напам'ять[9].

Ті ж автори в темі «Вступ до статистики», розглядаючи «Середні значення», чомусь відносять до них середнє квадратичне відхилення σ і в кінці параграфу роблять висновок, що «Розглянуті моду, медіану і середні значення називають мірами центральної тенденції» [11, с. 286]. Але загальновідомо, що середнє квадратичне відхилення не є тим показником, що характеризує центральну тенденцію статистичної вибірки, бо воно якраз дає уявлення про «величину» степені відхилення від неї.

На жаль, перелік помилок у шкільних підручниках з математики наведеними вище прикладами не вичерпується, що дає підставу говорити не тільки про нагальну необхідність уточнення концептуальних засад викладення матеріалу окремих тем, а й доопрацювання змісту підручників з математики та методичних матеріалів до них[9].

При створенні будь-якого підручника повинні враховуватися насамперед інтереси його користувача – учня чи студента, їхні вікові психо-фізіологічні та інші особливості й можливості. Тому жоден підручник не повинен потрапляти в навчальний заклад, не пройшовши попередньої наукової, методичної, гігієнічної тощо оцінки й не отримавши відповідного грифа Міністерства освіти і науки («Рекомендовано» або «Затверджено»)[5, с. 99].

Звичайно, найкращий підручник не може замінити живого слова вчителя, а є лише інструментом у його руках. Проте аби цей інструмент

використовувався ефективно і грамотно, потрібно, щоб підготовка педагогічних кадрів обов'язково включала відповідні курси з теорії та методики підручника. Методичні особливості й можливості різних підручників повинні повніше висвітлюватись і аналізуватись на сторінках педагогічної преси, а розгляд нових підручників із кожного предмета повинен постійно здійснюватися в системі післядипломної освіти педагогічних кадрів.

Необхідною умовою ефективного використання шкільного підручника є цілеспрямоване формування в учнів спеціальних навичок роботи з математичним текстом, яке не може вичерпуватись роботою у позаурочний час. Останнім часом суттєво змінилось відношення учнів до читання книги взагалі, а математичної, в особливості. Тому значна увага вчителя повинна бути приділена опрацюванню матеріалу підручника безпосередньо на уроці. Учні мають отримати спеціальні приписи, пам'ятки тощо. При цьому доцільно виробити в учнів стійкий імунітет до використання посібників, які за аналогією із назвою непотрібної і навіть шкідливої їжі можна назвати «сміттям». До цього розряду відносяться усі без винятку «решебники», які нажаль випускаються практично одночасно з усіма підручниками і збірниками задач. Наявність такої літератури калічить учнів і вбиває математичну освіту.

Автори сучасних підручників, які є фахівцями свого предмету, не завжди враховують основні вимоги до організації засвоєння їх змісту, ігнорують положення теорії і методики навчання, висвітлюють у диспропорції теоретичні, емпіричні та практичні компоненти змісту, розкривають його в одній стандартній логіці. Такі підручники і посібники не допомагають, а заважають учителям використовувати розроблені дидактикою і методикою різні типи уроків, не забезпечують достатньою мірою розвиток таких психічних процесів, як усвідомлення матеріалу, осмислення зв'язків між його елементами, формування вмінь застосовувати знання у стандартних і змінених умовах. А розробка підручника творчою групою, у яку будуть входити спеціалісти з педагогіки та психології, а не тільки вчителі-предметники, зможе усунути недоліки підручників методичного характеру [4, с. 165].

У зв'язку з відсутністю у підручниках названих аспектів, великий тягар лягає на розум і професійне обдарування вчителя. Він повинен компенсувати всі вади підручника, який мав би допомагати йому без додаткових затрат часу й зусиль планувати й організовувати проведення уроку.

Випускники педагогічних ВНЗ останнього часу зауважують, що змістовно новому викладанню студентів не навчають далеко не завжди (бо у викладача зі стажем є лекції, написані кілька років тому, а нові невідомо, чи ще розробить). А у школі ентузіаст із сучасним розумінням змісту освіти швидко “приходить до розуму”, бо тиснуть колеги старого загартування, які вважають недоречним щось змінювати. Трапляється і навпаки: надбання минулого беззаперечно відкидають, натомість викладання за новим змістом через його так звану “щойноспеченість” набуває спотвореного вигляду.

Загалом творчість учителя може згладжувати недоліки чи компенсувати неповноту підручника.

Оскільки підручник є одним із джерел отримання учнями інформації, не можна не зробити зауваження про можливі нові його форми, пов'язані з використанням комп'ютерних технологій. Нині з'явилося чимало електронних підручників із фізики, історії, економіки, географії, інших дисциплін. Нажаль прийняттого варіанту підручника математики поки що не існує. Було б добре, щоб для кожного друкованого єдиного підручника з окремого предмета було розроблено електронні варіанти, а також різні додаткові електронні посібники, які б використовували мультимедійні засоби. Доцільно розпочати створення в Україні найсучасніших засобів навчання й наукового приладдя, що сприятиме впровадженню в життя підручників майбутнього. Бажано не розробляти десятки різних підручників із кожної шкільної дисципліни, а створювати творчі групи для розробки єдиного основного підручника для відповідного профілю навчання, які можуть швидко поновлюватися, змінюватись і, можливо, стануть основою для недрукованих підручників у майбутньому.

Література

1. *Апостолова Г.В.* Геометрія: 9: дворівневий підручник для загальноосвітніх навчальних закладів. – К., «Генеза», 2009. – 304 с.
2. *Бевз Г.П., Бевз В.Г.* Математика: Підруч. для 6 кл. серед. шк. – К. «Зодіак» – ЕКО», 2006. – 304 с.
3. *Возняк Г.М., Литвиненко Г.М., Маланюк М.П.* Математика: Проб підруч. для 5 кл. серед. шк. – К.: Освіта, 1996. – 224 с.
4. *Жерар Ф.-М., Роежер К.* «Як розробляти та оцінювати шкільні підручники». – К.: Анод, 2001. – 352 с.
5. Інститут педагогіки АПН України Проблеми сучасного підручника: збірник наукових праць: Київ – Луцьк, 2007.—120 с.
6. *Литвиненко Г.М., Возняк Г.М.* Математика: Проб підруч. для 6 кл. серед. шк. – К.: Освіта, 1996. – 287 с.
7. *Лукіна Т.О.* Якість українських підручників для середніх загальноосвітніх шкіл: проблеми оцінювання і результати моніторингу: Метод. посіб. – К.: ВЦ «Академія», 2004. – 200 с.
8. *Мерзляк А.Г., Полонський В.Б., Якир М.С.* Алгебра: 7: підр. для загальноосв. навч. закладів. – «Гімназія», 2009. – 320 с.
9. *Труш Н.І.* Про діалектику взаємовідношення дидактичних принципів науковості та доступності в процесі навчання математики: Журнал «Педагогічна наука: історія, теорія, практика, тенденції розвитку», випуск №2, 2008.
10. *Шкіль М.І., Слєпкань З.І., Дубінчук О.С.* Алгебра і початки аналізу: Підруч. для 10 кл. загальноосвіт. навч. закладів. – К.: Зодіак-ЕКО, 2002. – 272 с.
11. *Шкіль М.І., Слєпкань З.І., Дубінчук О.С.* Алгебра і початки аналізу: Підруч. для 11 кл. загальноосвіт. навч. закладів. – К.: Зодіак-ЕКО, 2002. – 384 с.

Методика викладання фізики

Олійник Р.В., Вороная К.П.

¹Доцент кафедри фізики СДПУ,

²Студентка 5 курсу групи 5М–2 фізико-математичного факультету СДПУ

Формування експериментальних умінь учнів при вивченні фізики у базовій школі

У сучасних умовах розвитку суспільства перед школою особливо гостро постає проблема підготовки не «носіїв знань», а активних, мислячих особистостей, які здатні не лише орієнтуватися та пристосовуватися до нових умов, але й змінювати їх, пізнавати оточуючий світ та впливати на нього. Саме тому першочерговим завданням, що постає перед учителем, є озброєння учнів системою умінь і навичок навчальної праці. Від сформованості цих умінь значною мірою залежатиме навченість дітей, темпи переробки і засвоєння ними наукової та технічної інформації і в остаточному підсумку якість знань учнів.

У навчанні фізики провідну роль відіграють експериментальні вміння. Це обумовлено тим, що фізика — експериментальна наука. Усі її висновки і досягнення спираються на правильно поставлений експеримент, спостереження і вимірювання. Тому одним з головних завдань курсу є формування і розвиток в учнів експериментальних умінь і дослідницьких навичок.

До сьогодні немає чіткого вичерпного визначення, що таке експериментальні вміння. Ми розділяємо думку багатьох авторів, та вважаємо, що більш вдалим є розуміння під експериментальними вміннями таких умінь, які дозволяють учням успішно здійснювати самостійну експериментальну діяльність, проводити дослідження.

З огляду на неоднозначності, що трапляються в методичній літературі та навчальних програмах щодо повного вичерпного списку експериментальних умінь учнів, ми запропонували власний перелік умінь, який ґрунтується на аналізі навчальних програм з фізики, науково-методичної літератури, узагальненні передового педагогічного досвіду та власних спостереженнях за експериментальною діяльністю учнів на уроках фізики.

Проблемі формування експериментальних умінь, присвячена велика кількість досліджень А.В.Усової, А.А. Боброва, Н.В. Кочергіної, І.С. Войновича, О.С. Кодікової. Та складені рекомендації, відносяться переважно до учнів старших класів і студентів, тоді як основи засвоєння експериментального виду діяльності, потрібно наполегливо формувати вже в сьомих і восьмих класах. До того ж ці дослідження, проведені раніше, а робіт, присвячених формуванню експериментальних умінь учнів базової школи на якісно новому рівні, з використанням інноваційних технологій навчання, на сьогодні недостатньо.

У сучасній основній школі рівень сформованості експериментальних умінь учнів, недостатній. Це обумовлено тим, що по-перше, програма з фізики, містить перелік умінь та рекомендує їх формування, без будь-якої системи. По-друге, формування експериментальних умінь вимагає достатньої кількості обладнання, що, найчастіше, не мають в своєму розпорядженні школи. По-третє, відповідна діяльність потребує багато часу на уроці. Сьогодні, учителю доводиться вирішувати проблему, як ущільнити матеріал - за меншу кількість годин встигнути виконати програму, закладену стандартом. Тому пізнавальна діяльність учнів носить, в основному, репродуктивний характер. Як результат діти, виконавши в процесі навчання кілька сотень дослідів, до моменту закінчення середньої школи не можуть визначити характерні риси експерименту як методу наукового пізнання, виділити в ньому основні операції та виконати їх самостійно.

Отже, при умовах, які нині склалися у середній школі, уміння самостійно проводити експеримент, ставити найпростіші дослідів формуються в учнів вкрай повільно. З огляду на це, ми поставили завдання скорегувати формування експериментальних умінь та розглянути «стандартний випадок» можливості їх набуття.

Сучасний зміст курсу фізики створює сприятливі умови для набуття учнями базової школи експериментальних вмінь. Основними напрямками цього процесу є виконання експерименту, експериментальних завдань, спостережень.

Навчальний фізичний експеримент як органічна складова методичної системи навчання фізики забезпечує формування в учнів необхідних практичних умінь, дослідницьких навичок та особистісного досвіду експериментальної діяльності, завдяки яким вони стають спроможними у межах набутих знань розв'язувати пізнавальні завдання засобами фізичного експерименту.

Для того щоб учні могли якісно оволодіти основами фізичного експерименту, необхідно спланувати роботу вчителя та створити систему завдань, виконання яких передбачало б формування експериментальних вмінь. Під час виконання учнями різних видів фізичного експерименту можна запропонувати завдання, які наведені у роботах Шарко В.Д. Проаналізувавши їх, ми дійшли висновку, що для успішного формування експериментальних умінь найкраще слугуватимуть експериментальні задачі, експериментальні завдання творчого та дослідницького характеру, в тому числі домашні.

Метою експериментальних задач є формування в учнів важливої психологічної установки: знання потрібні для того, щоб їх застосовувати на практиці. Експериментальні задачі навчають учнів ставити мету експерименту, планувати хід виконання і виконувати експеримент, робити відповідні висновки. Такі задачі можуть бути поставлені на будь-якому етапі уроку, але при цьому змінюються дидактичні функції задач, методика постановки їх розв'язування.

Нагадаємо, що психолого-педагогічною основою формування вмінь є діяльність. Та не будь-яка діяльність призводить до їх формування. Обов'язковим атрибутом діяльності повинна бути організованість. У школі основними формами організованої діяльності є урок (демонстраційний та фронтальний експеримент, лабораторні роботи, роботи фізичного практикуму), домашні досліди та спостереження, позакласна робота (участь у гурті, виготовлення саморобних приладів), факультативи. Кожна форма занять має свій спектр можливостей у розвитку експериментальних вмінь.

Методики формування усіх видів експериментальних умінь, не можна розглядати відокремлено. Наприклад, розглядаючи методику формування умінь виконувати експеримент, ми торкаємося методики формування умінь планувати та підготувати експеримент, а також методики формування умінь здійснювати вимірювання, обробляти та інтерпретувати результати експерименту. При розгляді методики формування умінь проводити спостереження, ми також розглядаємо вище зазначені методики.

Починати формування експериментальних умінь у сучасній школі потрібно, насамперед, з ознайомлення з такими методами пізнання, як спостереження та експеримент, з особливостями цих методів, з основними структурними елементами, з яких складаються ці методи. Потім необхідно виробити вміння виконувати кожен дію (основну складову діяльності), а надалі сукупність дій. Для формування вміння аналізувати результати експерименту можна використовувати такі методи навчання, як метод проблемного викладу, метод навчальних демонстрацій, фронтальна бесіда та інші. Головне сформувати цілісне уявлення про спостереження та експеримент, як методи пізнання.

Перші кроки, щодо формування експериментальних вмінь учнів Краматорської загальноосвітньої школи №35 нами вже зроблені та отримані добрі результати. Діти вже не інтуїтивно виділяють спостереження та експеримент, а й називають їх характерні ознаки, зазначають мету, умови, план проведення, роблять висновки про проведене дослідження.

Все це, було досягнуто деяким переліком дій, які ми провели в навчальному закладі, а саме:

- внесли корективи в календарно-тематичне планування фізики 9 фізико-математичного класу (програми 12-річної школи), які передбачають відповідну цілеспрямовану діяльність;

- розробили різні форми навчальних занять, на яких запропонували напрямки дій, засоби, види експериментальних умінь, що можливо сформували в учнів з теми «Магнітне поле»;

- розробили матеріали, що ознайомлюють учнів з особливостями експериментальних вмінь, навчають набувати їх при спостереженнях, фронтальних експериментах, виконанні дослідницьких та конструкторських завдань, розв'язанні експериментальних задач в класі, домашніх умовах та позакласних заходах.

Проведене дослідництво дозволяє нам створити методичні матеріали, які допоможуть починаючому фахівцю організувати таку важливу та вкрай необхідну роботу по формуванню експериментальних вмінь.

Жоден вчитель не повинен забувати про те, що саме від рівня сформованості експериментальних умінь залежить успіх майбутньої діяльності дитини. Ні один заклад освіти не може навчити свого випускника всьому, дати йому рецепти на всі випадки життя, але він може і зобов'язаний озброїти випускника досвідом наукового пізнання, який дасть змогу, в міру потреби засвоювати нову інформацію, доповнювати знання, розширювати свій кругозір. З огляду на викладене, особливого значення набуває формування в молоді вже у шкільному віці стійкого інтересу до знань, озброєння її навичками і вміннями, які після здобуття середньої освіти забезпечать людині можливість не відставати від прискороного науково-технічного прогресу. Саме до таких умінь і належать експериментальні, які є фундаментом для самоорганізації, саморозвитку особистості.

Література

1. *Войтович І.С., Галатюк Ю.М.* Формування експериментальних умінь учнів на першому ступені вивчення фізики //Вісник Житомирського педагогічного університету. – Житомир:РВВ ЖДУ,2003. – Випуск 14.
2. *Грудинін Б.* Домашні експериментальні завдання та спостереження за розвитком творчої активності учнів //Фізика та астрономія в школі. – 2002. – № 3(28), травень-червень.
3. *Спенникова Е.В.* Формирование умения школьников анализировать результаты эксперимента и делать выводы.//Физика в школе.- 2005. №1.
4. *Усова А.В., Бобров А.А.* Формирование учебных умений и навыков учащихся на уроках физики. – М.: Просвещение, 1988.
5. *Усова А.В., Вологодская З.А.* Самостоятельная работа учащихся по физике в средней школе . – М.: Просвещение, 1981.
6. *Шарко В.Д.* Сучасний урок фізики: технологічний аспект / Посібник для вчителів і студентів. – К.: 2005.

Олійник Р.В., Горошенко М.О.

¹*Доцент кафедри фізики СДПУ,*

²*Студентка 5 курсу групи 5М–2 фізико-математичного факультету СДПУ*

Ігрові технології на уроках фізики

Останнім часом в умовах реорганізації структури освіти особливо гостро постає питання формування зацікавленого ставлення учня до вивчення певного предмету, зокрема фізики. Фізика – одна з небагатьох дисциплін, яка може і повинна мати значну зацікавлену нею аудиторію, оскільки її необхідність і практичну значимість доводять фактично всі діючі на сьогодні прилади, пристрої, конструкції в побуті та на роботі.

Є різні шляхи активізації навчальної діяльності з фізики в основній (і не лише) школі, але найбільш ефективним з-поміж інших завдяки вродженій схильності всіх живих істот до нього є застосування ігрового методу навчання, що є досить доведеним на сьогодні фактом. Завдяки цьому, вчителі з багаторічним стажем, намагаючись зацікавити учнів своїм предметом на уроках, широко використовують ігрову діяльність. Якщо вдається виявити в учнів ширший інтерес, залучити їх до спільної творчості, то це вже успіх вчителя, це крок дитини до розуміння фізики, законів розвитку Всесвіту.

Гра, являється простим та близьким людині способом пізнання навколишньої дійсності, є найбільш природним та доступним шляхом до оволодіння тими або іншими знаннями, вміннями та навиками.

Гра, як одне з найдивовижніших явищ людського життя привертала до себе увагу філософів та дослідників різних епох (Платон, Аристотель, Гегель, Шиллер, Спенсер).

У вітчизняній педагогічній літературі зустрічаються різні погляди і підходи до суті дидактичних можливостей ігор. Деякі вчені, наприклад, Л.С. Шубіна, Л.І. Крюкова та інші, відносять їх до методів навчання. У.П. Бедерканова, Н.Н. Богомоллова характеризують ігри як засіб навчання. Ігрову діяльність як проблему розробляли Д. Ушинський, П.П. Блонський, С.Л. Рубінштейн.

Найглибше технологія гри як форми організації і вдосконалення учбового процесу розглянута С.Ф. Занько, Ю.С. Тюнниковим і С.М. Тюнниковою, які вважають, що до розвитку теорії проблемного навчання, її основних понять, принципів, методів гра не могла отримати, і не мала педагогічної логіки побудови ні в аспекті дидактичної інтерпретації структури і змісту проблем, ні в аспекті організації здійснення процесу гри.

Отже, зрозуміло що ця тема досить актуальна і цікавить не лише філософів, батьків та вихователів, а й вчителів, тому що ігрові технології у школі почали використовувати порівняно недавно.

Актуальність проблеми посилюється тим, що середня школа переходить з 11-річної на 12-річну, а значить, змінюються програми предметів. В цьому році

по програмі 12-річної школи вперше навчаються учні 9-го класу що, обумовило нас застосовувати ігрові технології саме у цьому класі.

У сучасній школі гру з метою активізації та інтенсифікації навчального процесу використовують як на уроці так і в позаурочний час. Навчальна гра передбачає ігрове моделювання подій та явищ, що вивчаються, вона також має чітко поставлену мету навчання та відповідний меті результат.

Дидактична гра сприяє підвищенню рівня культури учня. Серед ігор, що використовують учителі, переважають кросворди, чайнворди, вікторини (О.Пруцакова). Однак, підвищуючи рівень знань учнів, вони не впливають на їхні ціннісні орієнтації, свідомість. Водночас існує багато ігор, розроблених як зарубіжними, так і вітчизняними педагогами, спрямованих на формування системного мислення, свідомості та ціннісних орієнтацій, природоохоронної діяльності.

Єдиного погляду на статус гри в навчанні немає. Деякі вчені вважають її методом навчання, інші — засобом навчання або навіть формою навчання. У будь-якому випадку гра стимулює пізнавальну активність учнів.

У дидактиці немає єдиної класифікації навчальних ігор, кожен дослідник пропонує свою класифікацію. На нашу думку, найбільш вдалою являється класифікація Г. Селевко.

- ✓ За видом діяльності: фізичні (рухливі), інтелектуальні (розумові), трудові, соціальні, психологічні
- ✓ За характером педагогічного процесу: навчаючі, тренувальні, контролюючі, узагальнюючі; пізнавальні, виховні, розвиваючі; репродуктивні, продуктивні, творчі; комунікативні, діагностичні, профорієнтаційні та інші.
- ✓ За характером ігрової методики: предметні, сюжетні, рольові, ділові, імітаційні, ігри-драматизації.
- ✓ За предметними областями виділяють ігри за всіма шкільними циклами.
- ✓ За ігровим середовищем: з предметами та без них, настільні, кімнатні, вуличні, місцеві, комп'ютерні та з різними засобами пересування.

У навчальному процесі використовують різні варіанти гри. За методикою проведення, дидактичною метою та шляхами її досягнення ігри поділяються на імітаційні, рольові, сюжетні, ігри-змагання, ігри-драматизації.

О.С. Газман вважає, що в першу чергу ігри потрібно розділити на наступні види:

1. Ігри з фіксованими відкритими правилами (більшість дидактичних ігор, пізнавальні та рухливі, інтелектуальні, музичні, ігри-забави та атракціони).
2. Ігри зі скритими правилами (сюжетно-рольові ігри).

Кожен дослідник пропонує свою класифікацію, яка тим або іншим відрізняється від класифікації інших. Але незважаючи на відмінності, усіма авторами виділяються такі види ігор, як фронтальні, індивідуальні, групові, сюжетно-рольові.

Дуже важливим питанням є правильне використання ігор на уроці, бо навіть дуже цікаві ігри можуть нашкодити.

При проведенні уроку фізики з використанням дидактичної гри вчителю необхідно продумати наступні питання методики, виявленні Коваленко В. Г.

1. Які вміння та навички в області фізики ученики засвоюють в процесі гри? Які розвиваючи та виховні цілі ставляться при проведенні гри?
2. Скільки учнів буде приймати участь у грі?
3. Які дидактичні матеріали та наочності знадобляться у ході гри?
4. Як з найменшою втратою часу познайомити учнів з правилами?
5. На який час розрахована гра?
6. Як забезпечити участь у грі всіх учнів?
7. Як організувати спостереження за дітьми, щоб виявити їх активність?
8. Який висновок слід повідомити учням наприкінці гри?

Використання гри у навчальному процесі вимагає дотримуватися деяких правил:

1. Гра повинна бути попередньою сходиною до більш важливих речей.
2. Гра повинна скінчитися раніше ніж набридне учням.
3. Гра повинна проходити під наглядом вчителя.

Важливим питанням ігрової діяльності є врахування вікових особливостей учнів. При їх правильному врахуванні та дотриманні інших обов'язкових вимог у учнів 7-х, 8-х класів, при використанні ігрових моментів, формується стійкий інтерес до розгляду фізичних явищ, в 9-10-х класах спеціально підібрані ігри сприяють розвитку інтересу до пояснення цих явищ, а в 11-му (12-му) класі – їх світоглядному поясненню.

При систематичному використанні на уроках ігрових технологій спостерігаються наступні результати:

- ✓ формуються такі якості особистості як терпіння, наполегливість, відповідальність, цікавість, спрямованість до пізнавальної діяльності;
- ✓ виробляється вміння самостійно добувати знання та застосовувати їх на практиці;
- ✓ створюється позитивний морально-психологічний клімат в класі для розвитку особистостей учнів;
- ✓ підвищується рівень розвитку комунікативних навичок учнів;
- ✓ розвивається спостережливість, вміння бачити незвичайне в знайомих речах.

Саме такі результати ми спостерігали під час проведення педагогічного експерименту у 9 класі (тема «Електричний струм у різних середовищах») педагогічного Слов'янського ліцею (гуманітарного напрямку навчання). Як показують багаторічні дослідження вчителів, учні середніх шкіл, ліцеїв, особливо учні гуманітарних класів, не володіють необхідними інтелектуальними навичками для глибокого розуміння явищ, процесів, описаних в даних розділах. В таких ситуаціях вчитель використовує альтернативні методи навчання, наприклад ігрові технології.

Отже, проводячи експеримент ми, майже на кожному уроці, використовували ігрові моменти такі як:

- ✓ Кросворд – на уроці вивчення нових знань – призначений для відпрацювання нових понять. Учні розгадували кросворд, склавши ключове слово, пояснювали його зміст (тема «Електричний струм в металах»)
- ✓ Аукціон – пропонували для перевірки знань (тема «Електричний струм у рідинах» – аукціон «Позолоти ручку»);
- ✓ Конкурс казкарів – використовували для роботи з підручником – в домашніх умовах; учні, прочитавши параграф підручника, складали за змістом казку (тема «Електричний струм у напівпровідниках» - казка «Подорож електрончика»);
- ✓ Задача без вимог – учням наводили умови задач, в яких не сформульовані вимоги. Школярам треба було скласти запитання до описання ситуації та відповісти на них (тема «Електричний струм у напівпровідниках» – «Погаси світло на відстані»);
- ✓ Перевертні – завдання полягли у складанні слів – фізичних понять – із літер, що написані на картках, розкритті їх фізичного змісту та характеристики (тема «Електричний струм у газах»: «арксі» – іскра, «агуд» – дуга).

В результаті дослідження нами було відмічено, що часто переможцями ігор становляться «слабші» у навчанні учні. В ході ігрової діяльності у них проявляються терпіння та наполегливість, тобто ті якості, яких їм не вистачає при систематичній підготовці домашнього завдання.

Захопившись грою, учні не помічають, що вчаться, запам'ятовують нове, орієнтуються в незвичайних ситуаціях, а також поповнюють запас своїх понять, уявлень, розвивають фантазію. Ігрові елементи дають змогу вчителям зацікавити учнів і протягом досить тривалого часу підтримувати їхній інтерес до складних питань, властивостей і явищ, на яких у звичайних умовах зосередити увагу дітей не завжди вдається. Більш ніж у будь-якій іншій діяльності, в колективній грі виявляються особисті якості кожного, формуються стосунки з ровесниками.

Ігри важливо проводити систематично й цілеспрямовано на кожному занятті, починаючи з елементарних ігрових ситуацій, поступово ускладнюючи й урізноманітнюючи їх у міру накопичення в учнів знань, вироблення вмінь і навичок, розвитку логічного мислення, виховання кмітливості, самостійності, тобто таких якостей інтелектуальної сфери, які характеризують творчу особистість.

Таким чином, гра є своєрідним поштовхом для творчого пошуку нових навчальних технологій, що забезпечують інтенсифікацію учбового процесу.

Література

1. Буряк. Ю. «Розвиток творчих здібностей учнів на уроках фізики»//Фізика №36 2004р. ст. 22-24
2. Занько С. Ф. и др. «Игра и ученье». — М., 1992.
3. Інтерактивні вправи та ігри. – Харків: Вид. Група «Основа», 2010 –144с
4. Селевко Г.К. «Современные образовательные технологии: учебное пособие». М., 1998.

Олійник Р.В., Діденко М.А.

¹Доцент кафедри фізики СДПУ,

²Студентка 5 курсу групи 5М–2 фізико-математичного факультету СДПУ

Застосування методу проектів на уроках фізики у старшій школі

На тлі глибоких соціальних змін у всьому світі спостерігається загальна спрямованість на гуманізацію освіти, тому з початку дев'яностих років ХХ століття система освіти знаходиться у стадії реформування. Необхідність реформ викликана, зокрема, тим, що сучасне інформаційне суспільство ставить перед всіма типами учбових закладів і, перш за все, перед школою завдання підготовки відповідних випускників, здатних адаптуватися до життя в цьому суспільстві. Ось і зараз наша система середньої освіти перебуває у стадії переходу на нову програму – програму 12-річної освіти.

Реформування системи освіти спрямоване, у першу чергу, на переосмислення цілей та цінностей освітнього процесу. Це впливає не лише на перегляд змісту та мети, а й методів навчання. До того ж у світі прогресує технологічний напрямок розвитку суспільства та людства в цілому, що зумовлює використання нових засобів навчання – комп'ютерних технологій. За даних обставин у сучасних педагогів з'явилося першочергове завдання – пошук нових педагогічних технологій.

Велику цікавість у педагогів, як теоретиків, так і практиків, викликала така педагогічна технологія як метод проектів.

Метод проектів виник ще на початку ХІХ ст. в США. Спочатку цей термін з'явився в практиці підготовки інженерів ще в 1824 році. Першу спробу використання проектної технології для організації навчання зробив С. Редді, але він не дав даному методу педагогічного обґрунтування. Детальний розгляд проблема організації навчання за методом проектів отримала в роботах Д. Дьюї, В.Х. Кіпатрика, Е. Колінгса та ін.. Цей метод знайшов своє відображення в педагогічній теорії та практиці різних країн: Великої Британії, США, Німеччини, Бельгії, Фінляндії, Італії, Нідерландів, Бразилії, Японії тощо. У цих країнах нова педагогічна технологія досить успішно себе проявила під час педагогічних експериментів й нині використовується як у повному обсязі, так і в окремих її елементах.

Метод проектів цікавить не лише зарубіжних педагогів. Починаючи з 20-х років ХХ ст.. цією технологією активно займалися й вітчизняні педагоги: Н.К. Крупська, Н.М. Тулайков, П.В. Архангельський, Б. Левітан, С.Т. Шацький, В.В. Ігнат'єв, М.В. Крупеніна, В.М. Шульгін та ін.. Сучасні підходи до проектної технології знайшли своє відображення в роботах І.Г. Єрмакова, О.М. Коберника, Є.С. Полата, С.О. Сисоєва та ін..

Спробуємо розібратися, у чому полягає сутність методу проектів.

Чіткого визначення методу проектів немає. У широкому розумінні метод проектів (з грецького – «дослідження») – це система навчання, за якої учні набувають знань в процесі планування та виконання завдань-проектів, які поступово ускладнюються. У більш вузькому розумінні метод проектів – це сукупність педагогічних прийомів та операцій, здійснюваних викладачем та учнями у процесі діяльності з метою активізації пізнавальних інтересів учнів, направлених на отримання та закріплення нових знань, умінь та навичок, розвиток творчих здібностей та набуття досвіду практичного вирішення самостійно поставлених завдань.

Із назви та визначення методу проектів зрозуміло, що для організації навчання за даною педагогічною технологією застосовують проекти.

Проект – це спеціально організований вчителем і самостійно виконуваний учнями комплекс дій, що завершуються створенням творчого продукту. Є.С. Полат пов'язував проект з проблемою, що «може означати справжню ситуацію творчості».

Метод проектів завжди орієнтований на самостійну діяльність учнів – індивідуальну, парну, групову, яку учні виконують протягом певного відрізання часу.

Із використанням методу проектів дещо змінюється роль вчителя: він стає орієнтиром для учнів, що спрямовує їх пізнавальну діяльність у необхідне за освітньою програмою русло. Зазвичай вчителем даються первинні знання, які учні потім під пильним поглядом вчителя поглиблюють самостійно, проходячи шляхом дослідника, який вже відкрив певний закон, дослідив певне явище тощо. Таким чином, учні мають можливість відчувати себе першовідкривачами.

На зорі свого існування метод проектів використовувався здебільшого як технологія виробництва продукту споживання, тобто його застосовували здебільшого у процесі викладання трудового навчання. В наш час метод проектів також активно використовують під час викладання іноземних мов, інформатики, фізики, астрономії тощо.

Використання методу проектів вимагає ретельної організації роботи як учня, так і самого вчителя. Починати треба з удосконалення календарно-тематичного планування: в ньому необхідно передбачити різні види діяльності та її зміст, що відповідають проектній технології навчання (створення проектів, розв'язання нестандартних проблем, використання діяльнісної технології і т.п.).

Ми спробували використати метод проектів у педагогічному експерименті при викладанні фізики у 11-му класі педагогічного ліцею м. Слов'янськ фізико-математичного профілю, де запропонували учням розробити проекти теми «Хвильова оптика».

Відомо, що розрізняють такі види проектів:

- дослідницькі;
- творчі;
- ігрові;
- інформаційні.

У практиці викладання фізики з обраної теми в ліцеї ми використали останні – інформаційні, які спрямовані на збирання інформації про деякий об'єкт, явище, її аналіз, узагальнення фактів. Такі проекти потребують добре продуманої структури:

- мета проекту, його актуальність, методи отримання та обробка інформації;
- результат;
- презентація.

При вивченні теми «Хвильова оптика» учням були запропоновані проекти на теми: «Волоконна оптика та її застосування», «Світловоди у в техніці та побуті», «Таємниці мильних міхурів», «Кольорові явища в природі». Безпосередньо на уроках учні повинні були опанувати проектну технологію шляхом створення міні-проектів. Ґрунтуючись на тексти посібників та підручників, власні попередні спостереження вони обговорювали теми: «Веселка», «Поляризація та автомобіль», «Інтерференція – це красиво!», «Дифракція – цікаво!».

Важливим в цій роботі нам вбачається не тільки її кінцевий результат (проект), а процес поетапної, регламентованої діяльності усіх його учасників (означення мети, збирання інформації, аналіз, формулювання висновків, подання інформації і т.п.).

У своїй роботі ми планували різні за тривалістю проекти:

- короткотривалі (кілька уроків);
- середньої тривалості (від тижня до місяця).

У подальшій діяльності ми плануємо довготривалі проекти (кілька місяців).

У нашому досліді ми проводили роботу над проектом щоуроку, виділяючи 7-15 хвилин для пояснення, обґрунтування та стимулювання діяльності учнів. Приводимо приблизну послідовність діяльності вчителя у ході організації роботи учнів над проектом.

1-й урок: пояснення сутності поняття «проект» та «проектної діяльності»;

2-й урок: обговорення проблем, які необхідно дослідити;

3-й урок: розбиття класу на групи та обговорення типу діяльності учнів кожної дослідницької групи;

4-й урок: обговорення тем для дослідження кожної групи;

5-й урок: вибір тем проектів та їх мотивування;

6-й урок: створення логічного ланцюжка можливостей дослідження теми;

7-й урок: показ учням як можна дослідити будь-яку тему («Як би це зробив я?»);

8-й урок: обговорення джерел інформації;

9-й урок: вибір доповідачів, розробка тезисів доповіді для майбутнього презентування результатів проекту;

10-й урок: презентація проекту.

У ході дослідження стало зрозуміло, що учням найцікавіше висувати свої власні гіпотези та, на основі добутих у ході підготовки проекту знань, доводити свої теорії.

Як висновок зауважимо, що метод проектів дозволяє дещо виходити за рамки програми, мотивувати вивчення фізики, закріплювати теоретичні знання на практиці, глибоко пізнавати закони природи та визначати корисну та правдиву інформацію у нашому багато інформаційному суспільстві, а за відсутності обладнання – ще й самостійно виготовляти деякі прилади.

Література

1. Полат Е.С. Метод проектов на уроках иностранного языка // Иностранные языки в школе. 2000. №2. С. 31 - 36
2. Педагогика. Учебное пособие / Под ред. П.И. Пидкасистого. – М.: Высшее образование, 2006. – 220.
3. Шафрин Ю.А. Основы компьютерной технологии. – 3-е изд., – М.: АБФ, 1998. – 656с.
4. Дьюи Дж. «Школа и общество» (1925) – цит. по «Педагогическая логика. 2003/04 учебный год. Метод проектов в школе» / Спец. прилож. к журналу «Лицейское и гимназическое образование», вып. 4, 2003
5. Основы творческо-конструкторской деятельности: Методы и организация: Учебник для студ. высш. учеб. заведений / В.М. Заенчик, А.А. Карачев, В.Е. Шмелев. – М.: Издательский центр «Академия», 2004. – 256 с.
6. Тихонов А.С. Творческий потенциал учебного проектирования // Школа и производство. 1995 №1
7. Новые педагогические и информационные технологии в системе образования/ Под ред. Е.С.Полат – М., 2000
8. Полат Е.С. Метод проектов на уроках иностранного языка // Иностр. языки в школе. – 2000. №2 – С.3-10

Шурыгина Л.С., Рашевская Е.И.

¹*Доцент кафедры физики СГПУ,*

²*Студентка 5 курса группы 5М–2 физико-математического факультета СГПУ*

Вопросы синергетики в курсе физики

Проблемы совершенствования образования, сокращения отставания его от современного состояния науки очень актуальны в период быстрого развития последней. Огромное количество появляющихся теорий и экспериментальных фактов невозможно втиснуть в рамки соответствующей дисциплины. Но в этом нет и необходимости. Нужно учить, главным образом, не тому «что думать», а «как думать» в соответствии с современным мировоззрением. Дидактической обработке подлежат в первую очередь те направления развития науки, те открытия, которые вносят новое в естественнонаучную картину мира, изменяют представления о научной рациональности. В последние десятилетия особенно привлекательным в этом отношении является междисциплинарное направление исследований открытых нелинейных систем, которое Г. Хакен назвал синергетикой. По мнению члена-корреспондента РАН М.В. Волькенштейна синергетика – новое мировоззрение, отличное от ньютоновского классицизма. На международном философском конгрессе в 2002 г. (г. Москва) синергетика была названа ядром формирующейся картины мира постнеклассической науки XXI века.

Синергетика, нелинейная динамика быстро развиваются. Считается, что к настоящему времени сформировались три парадигмы синергетики [1]. Учитывая время появления соответствующих концептуальных схем, моделей постановки и решения проблем, первой можно назвать парадигму самоорганизации, второй – парадигму детерминированного хаоса, третьей – парадигму самоорганизованной критичности или парадигму сложности.

Наша работа посвящена проблемам совершенствования образования в соответствии с первыми двумя парадигмами. Вопросы, связанные с третьей парадигмой (изучение свойств масштабно-инвариантных систем, степенные законы распределения и т.п.), – темы для последующих исследований.

В литературе по дидактике физики признается необходимость и возможность учитывать парадигмы синергетики при формировании содержания физического образования [2-4]. В некоторых общеобразовательных учебных заведениях (Москва, Саратов, Ижевск) планируется изучение элементов синергетики. Кроме того, считается общепризнанным, что синергетические принципы должны быть положены в основу образовательных технологий. Педагогика имеет дело с открытыми нелинейными сложными системами: содержание образования, система знаний и умений учащихся и т.д. Именно такие системы изучает синергетика. Один из ее основателей физик Г. Хакен в последние годы занялся разработкой синергетического подхода к изучению деятельности мозга.

Нами отобрана минимальная по объему система понятий и представлений, важных для методологического основания курса физики:

- соотношение динамических и статистических закономерностей, понятие детерминированного хаоса;
- понятие неустойчивости и ее роль в эволюции природных систем;
- понятие нелинейности, линейность как первое приближение в познании нелинейной реальности, свойства нелинейных систем.

Успех ньютоновской механики привел к длительному господству убеждения, что первичными, наиболее фундаментальными являются динамические законы. С появлением квантовой механики положение изменилось – признана фундаментальность статистических законов в микромире. Хотя поиск «скрытых параметров» продолжался долго. Во второй половине XX века стало ясно, что статистическое описание является фундаментальным не только в микромире, но и на макроскопическом уровне структурной организации материи.

Знаменательно признание, сделанное президентом Международного союза теоретической и прикладной механики в 1986 г.: «Мы все глубоко сознаем сегодня, что энтузиазм наших предшественников по поводу великолепных достижений ньютоновской механики побудил их к обобщениям в этой области ... которые, как мы теперь понимаем, были ложными. Нас не покидает коллективное желание признать свою вину за то, что мы вводили в заблуждение широкие круги образованных людей, распространяя идеи о детерминизме систем, удовлетворяющих законам движения Ньютона, - идеи, которые, как выяснилось после 1960 г., оказались неправильными». (Цитируется по [5, с.85]). «Детерминизм, долгое время казавшийся символом научного познания в настоящее время сведен до положения свойства, справедливого только в ограниченном круге ситуаций», - доказывает И. Пригожин [5]. Кроме того, вследствие чрезвычайной чувствительности большинства динамических систем к начальным условиям («эффект бабочки») и вытекающему отсюда свойству неустойчивости траекторий (фазовых траекторий), вероятности обретают объективный смысл.

Анализ результатов анкетирования учителей физики показал, что примерно половина из них считает первичными, наиболее фундаментальными динамические закономерности. Утверждение о возможности как субъективного, так и объективного характера случайных событий, приведенные в учебном пособии для 10 кл. [6], не смог объяснить ни один из учителей. Эти данные следует учитывать при формировании содержания физического образования. Как известно, субъективная интерпретация имеет своим источником наше незнание. Объективная интерпретация возможна для неустойчивых динамических систем даже при малом числе частиц.

Понятие неустойчивости динамических систем и, следовательно, представления о необходимости несводимого вероятностного их описания, вполне доступны не только студентам, но и учащимся общеобразовательных

школ [7]. Динамическая неустойчивость движения выражается экспоненциальной расходимостью близких в начальный момент траекторий. Следствием этого является их перемешивание (система в ограниченном объеме). Это позволяет при изучении молекулярной физики перейти от описания системы на основе уравнений движения частиц к более простому описанию с помощью функций, сглаженных по объему перемешивания. Это радикально меняет способ описания, система частиц заменяется сплошной средой. При этом нарушается временная симметрия, появляется необратимость.

Мода на синергетику привела к появлению не совсем корректного учебного материала, формирующего привычку к поверхностности знаний. Например, в одной из московских школ предлагается знакомить учащихся с S-теоремой Климонтовича Ю.Л. (http://sins.xaoc.ru/lectures/lecture_10_03.html). По нашему мнению это возможно, в лучшем случае, в курсе теоретической физики. Речь идет об установлении критериев относительной степени упорядоченности стационарных состояний в пространстве управляющих параметров. Если за начало отсчета степени хаотичности принять стационарное состояние, соответствующее нулевому значению управляющего параметра, то, по мере удаления от этого состояния вследствие изменения управляющего параметра, значение энтропии, отнесенное к заданному значению средней энергии, уменьшается. Для того, чтобы доказать это утверждение, нужно знать: каноническое распределение Гиббса, связь энтропии с функцией распределения для неравновесных состояний, способ перенормировки функции распределения и энтропии к одной и той же энергии. Естественно, в средней школе сделать это невозможно.

Таким образом, так называемые парадигмы синергетики должны учитываться при формировании содержания физического образования как в высших, так и в общеобразовательных учебных заведениях при условии доступности материала. Кроме того, со свойствами открытых нелинейных систем нужно знакомить будущих учителей всех специальностей на базе школьных знаний по математике.

Литература

1. Малинецкий Г.Г., Поталов А.Б. Современные проблемы нелинейной динамики / Изд. 2-е, исправл. и доп.- М.: Эдиториал УРСС, 2002.-360 с.
2. Тарасов Л.В. Современная физика в средней школе. М.: Просвещение, 1990.
3. Зорина Л.Я. Отражение идей самоорганизации в содержании образования // Педагогика, №4, 1996, с. 105-109.
4. Виненко В.Г. Синергетика в школе //Педагогика №2, 1997, с.55-60
5. Пригожин И., Стенгерс С. Время, хаос, квант. К решению парадокса времени: Пер. с англ.- М.: Эдиториал УРСС, 2003.- 240 с.
6. Гончаренко С.У. Фізика 10 кл: Пробний навчальний посібник для ліцеїв та класів природничо-наукового профілю. - К.: Освіта, 1995.
7. Шуригіна Л.С., Павлов С.В. Про вивчення поняття необоротності / Пошуки і знахідки. Матеріали наукової конф. СДПУ, Слов'янськ, 2009. – с. 119-121.

Калимбет А.З., Батан Я.В.

¹*Старший преподаватель кафедры физики СГПУ,*

²*Старший лаборант кафедры физики СГПУ*

Вопросы философии в процессе преподавания курса «Оптика»

«В слове СВЕТ заключена вся физика»
Уильям Брэгг

Широкие возможности для формирования у студентов научного мировоззрения, для формирования диалектического мышления содержатся в процессе преподавания курса «Оптика».

Основная задача формирования мировоззрения – дать студентам некоторую сумму философских знаний, причем очень важно чтобы эти знания превратились в убеждения.

Решение этой задачи очевидно невозможно в отрыве от изучения конкретных физических явлений, и особенно в отрыве от преподавания курса «Оптика».

Почему? Дело в том, что в данном вопросе учение о свете (Оптика) занимает главенствующее место среди других разделов физики. Ведь основные представления о свете человек вырабатывал ещё на заре цивилизации, ибо 80% информации об окружающем нас макром мире мы получаем при помощи зрения.

Ещё в I веке до н.э. Лукреций в своей знаменитой поэме «О природе вещей» говорил: «...Оттого страх всех смертных объемлет, что много видят явлений на земле и на небе. Коих причины никак усмотреть и понять не умеют...».

История развития учения о свете, в свою очередь, наглядно подтверждает необходимость изучения оптических явлений во взаимосвязи с категориями и законами философской науки.

Наконец, не надо особых доказательств, чтобы осознать ту огромную роль, которую выполняет оптическая наука, оптическая промышленность в народном хозяйстве в ускорении научно-технического прогресса.

В современных учебниках по оптике вопросам философии и методологии отводится довольно скромное место. Очевидно это связано с процессом перестройки и с необходимостью поиска новых подходов интерпретации тех или иных явлений.

По мнению авторов решать задачу формирования у студентов мировоззрения эффективнее во время чтения лекций, по крайней мере, начинать решать эту задачу. В этом случае возможны два варианта – либо излагать

вопросы философии в виде специальной лекции в конце определенной темы (или модуля), либо излагать одновременно с изучаемым материалом.

Автор, читая лекции для специальности «Физика», избран второй вариант, именно этот вариант плодотворнее.

Рассматривая главные исторические этапы развития учения о свете, необходимо подчеркивать, что развитие оптических теорий – это процесс всё более глубокого и полного раскрытия природы света, как диалектический процесс приближения к познанию истины.

«В теории познания, как и во всех других областях науки, следует рассуждать диалектически, т.е. не предполагать неизменяемым наше сознание, а разбирать, каким образом из незнания является знание...» (В.И.Ленин, «Материализм и эмпириокритицизм»).

Практическая история развития оптики вплоть до конца XIX века – это борьба между корпускулярными и волновыми представлениями о свете. Общеизвестно, что авторитет Ньютона негативно повлиял на развитие волновой теории света, родоначальником которой в конце XVII века был молодой Гюйгенс. Лишь через полтора столетия благодаря Френелю волновая теория в полной мере получила свое развитие.

Все это можно констатировать как выполнение закона единства и борьбы противоположностей.

Возникновение электромагнитной теории света, в конечном счете было подготовлено предшествующим развитием теоретической мысли, в частности волновой теории Френеля. Сама идея родилась из потребностей практики, экспериментальные факты из электродинамики подсказывали ученым дальнейший путь развития оптики.

Наглядным примером подтверждения философских категорий является возникновение специальной теории относительности. Во-первых, возникновение СТО означает не что иное, как разрешение противоречий между старым и новым содержанием принципа относительности в соответствии с законом единства и борьбы противоречий.

В самом начале изучения темы «Поляризация света» возникает вопрос: Каким требованиям должны соответствовать физические тела, с помощью которых можно обнаружить асимметрию (а, следовательно, и поперечность) световых колебаний? Исходя из вышеупомянутого закона о взаимосвязи явлений и предметов природы, можно сделать вывод: физические тела, с помощью которых можно обнаружить асимметрию (а значит поляризацию) сами должны обладать асимметрией своих свойств.

Накопление экспериментальных фактов к концу XIX столетия создало ситуацию, когда объяснения целого ряда оптических явлений оказалось невозможным с точки зрения волновых свойств электромагнитного излучения.

В частности, именно в этой ситуации оказались такие оптические явления как тепловое излучение, фотоэффект, люминесценция, давление света, и д.р. Например, попытке объяснить теоретически опытную кривую

распределения энергии в спектре абсолютно черного тела возникла так называемая «ультрафиолетовая катастрофа» – расхождение теоретической кривой с опытной в области ультрафиолетовой части спектра.

Выход из создавшейся ситуации был предложен М.Планком в 1900г. посредством совершенно новой гипотезы – излучение и поглощение света происходит не непрерывно, а отдельными порциями, получившими название квантов света. Эти представления распространились за пределы оптики и теперь составляют основу современной физики.

Решительная логика старых представлений и возникновения новых – характерная черта диалектического пути развития науки, в том числе оптики. И в то же время, сколько бы революционной не была ломка старых воззрений, новая физическая теория, если она глубже вскрывает строение и свойства материи, всегда содержит в себе элементы старой теории.

Необходимо подчеркнуть, что «нет надобности приходить в ужас по поводу того, что ступень познания, на которой находится современное естествознание, также не окончательна...условным в познании являются пределы приближения наших знаний к абсолютной истине, но безусловно существование этой истины и неуклонное приближение к ней нашего познания» (Ф.Энгельс, Анти-Дюринг).

В статье преследовалась лишь одна цель – привлечь внимание читателя к постановке этого вопроса, а также убедить в необходимости дальнейшего его изучения, возможно с помощью сотрудничества кафедры физики и кафедры философии.

Литература

1. Кучерук *І.М.*, Горбачук *І.Т.* Згальний курс фізики. Оптика. Квантова фізика. Т.3., Київ. «Техніка», 1999.
2. Вавилов *С.И.* Диалектика световых явлений. М. «Наука», 1955.
3. Энгельс *Ф.* Анти-Дюринг. М. «Просвещение», 1961.
4. Ленин *В.И.* Материализм и эмпириокритицизм. (соч.Г.14 гл II, гл. V). М.Наука. 1954.

Овчаренко В.П., Кофель С.О.

¹Доцент кафедри фізики СДПУ,

²Студентка 5 курсу групи 5М–2 фізико-математичного факультету СДПУ

Шляхи удосконалення знань першокурсників з шкільного курсу фізики

В сфері модернізації педагогічної освіти одне з провідних місць займає впровадження сучасних засобів навчання. Велика роль в реалізації цього шляху належить самостійній роботі студентів і контролю знань та вмінь вчитися.

В школах для оцінки результатів навчальної діяльності запроваджується зовнішнє оцінювання випускників, яке має багато переваг. З метою удосконалення підготовки майбутніх вчителів шкіл при вивченні фізики можна теж запропонувати такий тип контролю знань як внутрішнє тестування. Тести навчальності можна використовувати на всіх етапах дидактичного процесу. З їх допомогою можна проводити попередній, поточний, тематичний і підсумковий контроль знань та навичок студентів з даної дисципліни. Зрозуміло, не всі необхідні характеристики засвоєння можна отримати, використовуючи тестування, такі, наприклад, як уміння конкретизувати свою відповідь прикладами; знання фактів, уміння логічно і доказово висловлювати свої думки, деякі інші характеристики знань. А це значить, що тестування повинно обов'язково використовуватись з іншими традиційними формами і методами перевірки.

Студенти-першокурсники, які поступили вчитись в педагогічний університет, і будуть майбутніми вчителями фізики, повинні мати не тільки достатній, а набагато вищий рівень знань та вмінь з шкільного курсу фізики. Але більшість студентів при вступі в університет складали іспити за тестами з математики. А тому ми повинні бути впевнені, що студенти мають певні знання з шкільного курсу фізики і мають навички розв'язування тестів різного типу за шкільною програмою. Для цього було проведено початковий контроль знань та вмінь студентів. Були запропоновані тестові завдання, які по складності дорівнювали тестам зовнішнього тестування для випускників шкіл. При створенні тестів навчальні елементи, які треба було перевірити, визначались на основі функціонально-структурного аналізу програмного матеріалу. Після визначення цих елементів встановлювався необхідний рівень засвоєння кожного з них:

1) репродуктивний рівень, який забезпечує формальне сприйняття основного навчального матеріалу програми без вільного володіння ним;

2) аналітико-синтетичний рівень, який забезпечує вивчення навчального матеріалу в відповідності з вимогами навчальної програми. На цьому рівні студенти повинні вміти аналізувати фізичні ситуації з використанням фізичних законів;

3) творчий рівень, який передбачає глибоке вивчення навчального матеріалу, характеризується здатністю до розв'язування нестандартних навчальних задач.

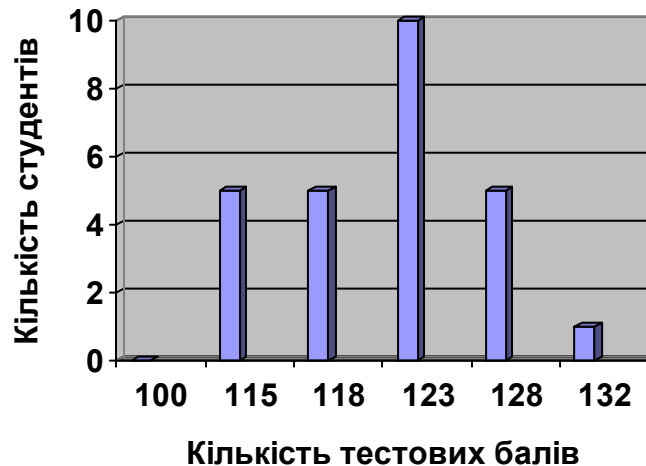


Рис .1

Завдання складалось із 35 тестів, де 30% було питань, які відповідають репродуктивному рівню, 50% питань аналітико-синтетичному рівню і 20% питань, що відповідають творчому рівню. В формуванні питань і відповідей використовувалась термінологія стабільних підручників з фізики. Знання студентів оцінювали за правилами зовнішнього тестування випускників шкіл. За еталонний розподіл оцінок був прийнятий нормальний розподіл оцінок на інтервалі (100...200) балів із середнім значенням 150 і середньоквадратичним відхиленням 20 балів. На рис. 1 показана діаграма розподілу тестових балів, отриманих при початковому зрізу знань, яка свідчить про низьку початкову підготовку студентів з шкільного курсу фізики.

Ми побачили, що 100% студентів мають бали нижче середнього, тобто їх знання мають репродуктивний рівень і невелика частина мають навички, які належать до аналітико-синтетичного рівня. Виходячи з цих результатів, виникає потреба в необхідності такої роботи зі студентами на заняттях з шкільного курсу фізики, яка дала б змогу більшості студентів досягти достатнього рівня знань та вмінь, щоб потім їх удосконалити і підняти на творчий рівень. Для виконання цієї мети необхідно було знайти такі методи і засоби роботи зі студентами на заняттях, щоб у них з'явилася потреба займатися самоосвітою. Тільки плідна робота студентів і викладачів допоможе ліквідувати недоліки в знаннях студентів. Для полегшення роботи викладача і студентів було розроблено багато тестів різної складності з кожної теми

розділів «механіка» та «молекулярна фізика». Ці тести використовувались викладачем при проведенні аудиторних занять, студентами для їх самостійної роботи, для додаткових занять викладача зі студентами, для різних типів контролю знань студентів. Методичні матеріали включали не тільки тексти завдань, а також вказівки до розв'язку нестандартних завдань, відповіді до всіх тестів, що давало змогу студентів проводити самоконтроль. Всі ці матеріали були доступні всім студентам, бо були надруковані та існували в електронному вигляді. Після ретельної роботи було проведено підсумкове тестування. Підсумкове завдання складалось з 35 тестів, але їх склад був значно вищий, ніж в початковому зрізі: 5 % - репродуктивного рівня, 60 % - аналітично-синтетичного, 40 % - творчого рівня. Результати тестування наведено на рисунку 2.

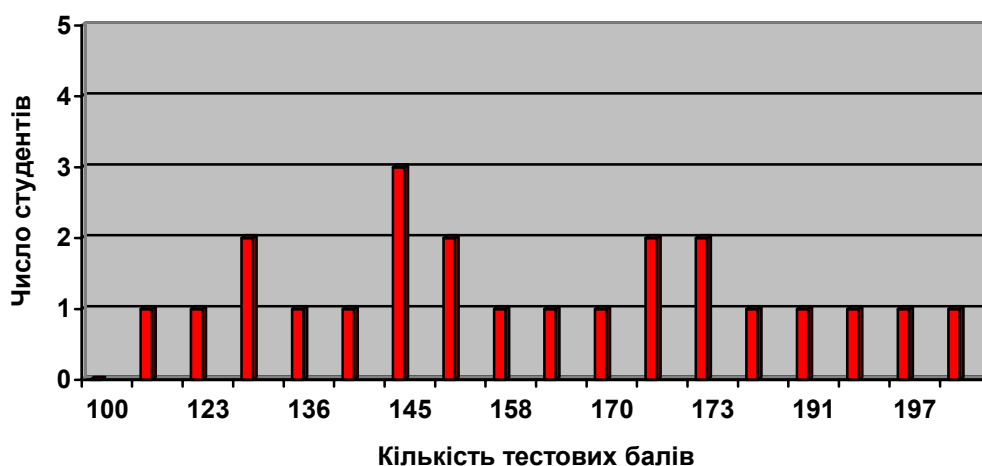


Рис. 2

Кількість студентів, які мають рейтинг вище середнього складає 67 %, а нижче середнього 33 %. Результати експерименту свідчать про активізацію пізнавальної діяльності студентів, підвищенню зацікавленості і творчого підходу до процесу навчання, про підвищення їх рівня знань та вмінь.

Таким чином, впровадження тестування в учбовий процес показало, що воно має позитивні наслідки і може бути використаний поряд з традиційними формами навчання.

Овчаренко В.П., Чернишова О.В.

¹Доцент кафедри фізики СДПУ,

²Студентка 5 курсу групи 5М–2 фізико-математичного факультету СДПУ

Організація самостійної роботи першокурсників при вивченні фізики

Самостійна робота – це робота студентів, яка планується та виконується по завданню і методичному керівництву викладача. Вона необхідна не тільки для оволодіння дисципліною, але і для формування навичок самостійної роботи взагалі; учбової, наукової, професійної діяльності, для того щоб самостійно вирішувати проблеми, знаходити конструктивний вихід із кризової ситуації тощо.

Незалежно від спеціалізації і характеру роботи, будь-який починаючий спеціаліст повинен мати фундаментальні знання, професійні вміння і навички діяльності, досвід соціально-оціночної роботи. Ці складові освіти формуються в процесі самостійної роботи студентів. Вища школа відрізняється від середньої методологією учбової роботи і ступенем самостійності навчання. Самостійна робота – не самоціль, а засіб боротьби за глибокі та міцні знання, засіб формування у студентів умінь і навичок застосовувати знання на практиці, розвивати активність і самостійність. Організаційні форми навчання повинні відрізнятися від шкільних, бо студенти інакше ставляться до навчання. Вони узгоджують мету навчання зі своїми практичними потребами, життєвими планами і перспективами у відповідності зі своїм професійним становленням. Спрямованість інтересів студентів педагогічних вузів на оволодіння професією повинно знайти відображення насамперед у змісті пропонованих їм завдань для самостійної роботи.

Згідно до положення про організацію навчального процесу у вищих навчальних закладах, самостійна робота студентів є однією із форм організації навчання, причому самостійна робота студентів є основним засобом оволодіння навчальним матеріалом у час, вільний від обов'язкових навчальних занять. Навчальний час, відведений для самостійної роботи студента, регламентується робочим навчальним планом і повинен становити не менше 1/3 та не більше 2/3 загального обсягу навчального часу студента, відведеного для вивчення конкретної дисципліни. Зміст самостійної роботи студента над конкретною дисципліною визначається навчальною програмою дисципліни, методичними матеріалами, завданнями та вказівками викладача.

Для правильної оцінки сформованості вмінь та навичок самостійної роботи і ефективності методів, які застосовуються педагогами, важливо визначити відповідні критерії та рівні. В останній час особливо важливе значення набуває визначення критеріїв та рівнів сформованості вмінь та

навичок пізнавального характеру у зв'язку з тим, що вміння самотійно набувати знання розглядається як одне з важливіших завдань навчання. Одне з важливіших пізнавальних вмінь – вміння набувати знання на основі самотійної роботи з друкованим текстом. Аналіз видів діяльності з учбовою та додатковою літературою показав, що на першому курсі студентів треба навчити раціональним засобам організації самотійної роботи. Для цього ми провели ряд занять, на яких вчили студентів роботі з книгою: знаходити у тексті відповіді на питання, що пропонувались викладачем; вміню пояснювати малюнки, аналізувати графіки, працювати з таблицями, користуватись предметними показниками. З метою поглиблення і систематизації отриманих знань провели ряд семінарських занять, на яких студенти вчилися аналізувати ситуацію, висловлювати свою думку і захищати її. Формування експериментальних вмінь та навичок практичного характеру студенти набувають, виконуючи лабораторні роботи. Дуже важливо продумати методику проведення лабораторних робіт так, щоб вона давала студентам широкі можливості для проявлення ініціативи і самотійності в знаходженні оптимальних засобів розв'язку поставлених задач.

У процесі навчання фізиці необхідно правильно поєднувати різні види лабораторних робіт. Необхідно пам'ятати, що обов'язкова умова успішного виконання студентами лабораторних робіт з елементами дослідження – оволодіння елементарними вміннями, без яких неможливе виконання важких дослідів. Тому викладачу необхідно включати до учбового процесу лабораторні роботи як дослідницького характеру, надаючи студентам більше самотійності у їх виконанні, так і роботи практичного характеру, гармонійно їх поєднуючи. Разом з тим необхідно прагнути того, щоб при виконанні кожної роботи студенти пізнавали щось нове: відкривали для себе можливість застосування більш раціональних засобів вимірювання величини, уявляли характер залежності, яка пов'язує її з іншими величинами, здійснювали переніс вмінь на вимірювання інших величин і т. ін.

Звідси висновок – викладачу необхідно розробити такі методичні рекомендації, основою яких були б впевненість викладача у достатності усієї попередньої теоретичної і практичної підготовки студентів. Всі ці рекомендації ми враховували при розробці методичних матеріалів по виконанню лабораторних робіт.

Ще одним із найважливіших засобів набуття умінь та навичок практичного застосування наукових знань є розв'язування фізичних задач. Одночасно це засіб розвитку мислення, формування волі і характеру особливості. У педвузі – це один із важливіших засобів підготовки кваліфікованого вчителя фізики.

У набутті умінь та навичок розв'язку задач вирішальне значення має самотійна праця студентів. Йдеться не лише про виконання домашніх завдань, але й активну участь на практичних заняттях, про самотійне розв'язування конкурсних та олімпіадних задач, йдеться про систематичну роботу кожного

студента Для цього ми підібрали по кожній темі курсу змістовні і навчальні задачі, розробили систему питань, які перевірили б готовність студентів в теоретичному плані, залучили студентів до самостійного розв'язку задач. Більшість аудиторних занять проходила не за традиційною схемою (один розв'язує, а інші копіюють), а за схемою, коли кожний студент самостійно розв'язує задачу, а потім перед аудиторією захищає свій метод розв'язку, а студенти рецензують і запропоновують свій підхід. Це вносить творчий характер в аудиторну роботу і виробляє зацікавленість у студентів, активізує їх пізнавальну діяльність. Таким чином, наш експеримент показав, що ефективність самостійної роботи багато в чому залежить не тільки в провадженні нових форм СРС, а й від методичного забезпечення цієї роботи. Тому на початку занять всім студентам були запропоновані такі методичні матеріали:

- 1) лекції в електронному варіанті;
- 2) список основної та додаткової літератури до кожної теми розділів;
- 3) інструкції до виконання лабораторних робіт, де вказані методичні рекомендації по виконанню та питання контролю знань з цього типу роботи студента;
- 4) методичні матеріали по розв'язку задач, в якому вказано який теоретичний матеріал студент повинен знати, питання самоконтролю цих знань, основні типи задач середньої і підвищеної складності, тренувальні задачі, задачі підвищеної складності для самостійного розв'язку, завдання контролю цього типу роботи викладачем.

Високий рівень якості освіти взагалі і навчання зокрема забезпечується багатьма факторами, найважливішими серед яких є здібності студентів та їхні бажання досягнути успіхів у певній галузі предметних знань, рівень володіння вчителем педагогічною майстерністю і технологією викладання, інформаційно-методична забезпеченість навчального процесу, ефективна система контролю якості навчання тощо. Результати роботи з першокурсниками по реалізації оптимальних методів самостійної роботи і контролю за нею показав що:

1. значення самостійної роботи студентів у процесі навчання настільки велика, що її треба планувати, утворювати для неї спеціальні форми та методи;
2. треба враховувати, що від курсу до курсу її значення та об'єми повинні зростати;
3. для досягнення максимальних результатів з СРС необхідно мати методичні матеріали, які повинні бути доступними для кожного студента.
4. треба навчити студентів раціональним засобам організації самостійної роботи.

Тільки використання всіх цих засобів у сукупності дає можливість підготувати висококваліфікованого вчителя.

Зміст

Від редакційної колегії серії.....	3
------------------------------------	---

Бондарєва Ю., Смоляр Д., Ганзера Г.О., Плєсканьова Л.Г.

Внесок викладачів математики Слов'янського педагогічного інституту у Перемогу у Великій Вітчизняній війні.....	4
--	---

Математика

Чайченко С.О., Лисинська Н.І.

Наближення операторами спеціального вигляду на класах неперервних функцій, визначених на дійсній осі.....	7
---	---

Новиков О.А., Шулик Т.В.

Интегральные представления уклонений повторных сумм Валле Пусена на класах аналитических функций.....	15
---	----

Божко В.О., Ковальов В.І.

Метод ітерацій для побудови періодичних розв'язків сингулярно збурених нелінійних диференціальних рівнянь.....	25
--	----

Божко В.О., Ковальов В.І., Ковальова Л.В.

Ймовірнісна модель полів напруг пружно-пластичного півпростору при заглибленні в нього системи інденторів.....	28
--	----

Сілін Є.С.

Сильні середні відхилень операторів Валле Пуссена.....	31
--	----

Сторожилова О.В., Сторожилова Н.В., Кадубовський О.А.

Двокольорові $O - i$ N – діаграми.....	41
--	----

Саприкіна Ю.С., Мазур С.Ю., Кадубовський О.А.

Двокольорові O – діаграми з одним чорним циклом.....	51
--	----

Манойло Т.О., Сіра М.І., Кадубовський О.А.

Про число неізоморфних та нееквівалентних хордових діаграм.....	61
---	----

Близнець Т.Ф., Пашенко З.Д.

Про підстановки Гаспара Монжа.....	71
------------------------------------	----

Кайдан Н.В., Остимчук Г.С.

Застосування циклічних кодів в теорії кодування	76
---	----

Татьянчиков А.О.

Дослідження проблеми стійкості криптографічних систем.....	79
--	----

Бондар Є.О.

Ідемпотенти вінцевих голоморфів напівгруп.....	83
--	----

Фізика

Уколов А.И., Надточий В.А., Калимбет А.З, Москаль Д.С.

О применимости методик определения параметров рекомбинации носителей заряда к приповерхностным слоям полупроводника..... 88

Бутенко Р.А., Костиков А.П.

Исследование роли гидрофобных взаимодействий для устойчивости бета-шпильки методом МДМ с использованием УМД..... 95

Кривошеенко Д.А., Костиков А.П.

Исследование промежуточных состояний самосборки белков методами моделирования молекулярной динамики..... 99

Кулик А.В., Костиков А.П.

Исследование когерентной динамики белков..... 103

Мазурина Ю.А., Костиков А.П.

Исследование α -спиральных структур полипептидов и белков с использованием метода Управляемой Молекулярной Динамики..... 107

Худько В.В., Костиков А.П.

Исследование сворачивания-разворачивания белков термофильных организмов с использованием метода Управляемой Молекулярной Динамики..... 111

Інформатика та методика її викладання

Данилюк К.В., Величко В.Є.

Наближені методи розв'язку задачі про рюкзак..... 116

Рубан М.М.

Алгоритми побудови опуклої оболонки..... 122

Саманцов О.О., Пірус Є.М.

Використання середовища MS Excel для розв'язання оптимізаційних задач вибору..... 127

Стёпкин А.В.

Возможность и сложность распознавания конечного графа коллективом агентов..... 132

Сьомкін В.С., Глазова В.В.

Вивчення питань «Формалізація і моделювання» в «Шкільному курсі інформатики та методики її навчання»..... 140

Овчарова О.І.

Організація самостійної роботи студентів гуманітарних спеціальностей при вивченні дисципліни «Інформатика та ТЗН»..... 147

Батуніна В.П.

Мультимедійна презентація як сучасний засіб навчання..... 150

Пилипенко В.Ю.

Про впровадження математичних пакетів у навчальний процес..... 152

Методика викладання математики

Гурковська Н.О.

Гуманітаризація шкільної профільної освіти: всі за та проти..... 155

Черних Ю.І.

Про методичні особливості використання інтерактивних методів в процесі навчання математики..... 161

Пилипенко В.Ю.

Використання проектних технологій на уроках математики 167

Чукаріна І.В.

Про умови створення і функціонування шкільного підручника математики..... 169

Методика викладання фізики

Олійник Р.В., Вороная К.П.

Формування експериментальних умінь учнів при вивченні фізики у базовій школі..... 174

Олійник Р.В., Горошенко М.О.

Ігрові технології на уроках фізики..... 178

Олійник Р.В., Діденко М.А.

Застосування методу проектів на уроках фізики у старшій школі..... 182

Шурыгина Л.С., Рашевская Е.И.

Вопросы синергетики в курсе физики..... 186

Калимбет А.З., Батан Я.В.

Вопросы философии в процессе преподавания курса «Оптика»..... 189

Овчаренко В.П., Кофель С.О.

Шляхи удосконалення знань першокурсників з шкільного курсу фізики..... 192

Овчаренко В.П., Чернишова О.В.

Організація самостійної роботи першокурсників при вивченні фізики... 195

Збірник наукових праць

ПОШУКИ І ЗНАХІДКИ

Серія: фізико-математичні науки

Випуск 1

Том I

Матеріали наукової конференції

Слов'янського державного педагогічного університету

20 – 22 квітня, 2010.

Дизайн, верстка: Кадубовський О.А.

Відповідальні за випуск: Кадубовський О.А., Величко В.Є.



Підприємець Маторін Б.І.

Свідоцтво про внесення суб'єкта видавничої справи до Державного реєстру видавців, виготівників і розповсюджувачів видавничої продукції ДК №3141, видане Державним комітетом телебачення та радіомовлення України від 24.03.2008 р.

Підписано до друку 15.04.2010 р.
Формат 60×84 1/16. Ум. др. арк. 12,5.
Зам. № 179. Тираж 100 прим.

84116, м. Слов'янськ, вул. Г. Батюка, 19.
Тел./факс (06262) 3-20-99; тел. (0626) 66-53-56

