Державний вищий навчальний заклад
«Донбаський державний
педагогічний університет»
Фізико-математичний факультет

ISSN 2413-2667 (Print)
ISSN 2415-3079 (Online)

ЗБІРНИК НАУКОВИХ ПРАЦЬ

фізико-математичного факультету ДДПУ

Випуск №13

Слов’янськ, 2023

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ДЕРЖАВНИЙ ВИЩИЙ НАВЧАЛЬНИЙ ЗАКЛАД
«ДОНБАСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ ПЕДАГОГІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ»

ISSN 2413-2667 (Print)
ISSN 2415-3079 (Online)

ЗБІРНИК НАУКОВИХ ПРАЦЬ фізико-математичного факультету ДДПУ

Заснований у 2010 році

Випуск 13

*Рекомендовано вченою радою
Донбаського державного педагогічного університету
як наукове видання*

Слов'янськ – 2023

The Ministry of Education and Science of Ukraine

State Higher Educational Institution
«DONBAS STATE PEDAGOGICAL UNIVERSITY»

ISSN 2413-2667 (Print)
ISSN 2415-3079 (Online)

SCIENTIFIC WORKS of the Faculty of Physics and Mathematics of Donbas State Pedagogical University

Founded in 2010

Issue 13

Recommended by the Academic Council
of Donbas State Pedagogical University
as a scientific publication

Sloviansk, 2023

УДК 51+53+37.016:[51+53+004].

З – 41

Збірник наукових праць фізико-математичного факультету ДДПУ / гол. ред. С.О. Чайченко. Слов'янськ : Вид-во Б.І. Маторін. 2023. Вип. 13. 180 с.

Для студентів, аспірантів та науковців в галузі фізико-математичних наук; вчителів та викладачів фізико-математичних дисциплін та інформатики в закладах загальної середньої та вищої освіти.

РЕДАКЦІЙНА КОЛЕГІЯ

доктор фіз.-мат. наук, професор Чайченко С.О. – головний редактор (ДДПУ);
доктор фіз.-мат. наук, доцент Костіков О.П. – заст. гол. ред. (ДДПУ);
доктор пед. наук, професор Величко В.Є. – заст. гол. ред. (ДДПУ);
кандидат фіз.-мат. наук, доцент Кадубовський О.А. – заст. гол. ред. (ДДПУ);
кандидат фіз.-мат. наук, доцент Чуйко О.В. (ДДПУ);
кандидат фіз.-мат. наук, доцент Турка Т.В. (ДДПУ);
кандидат фіз.-мат. наук, доцент Стьопкін А.В. (ДДПУ);
кандидат фіз.-мат. наук, доцент Кайдан Н.В. (ДДПУ);
кандидат педагогічних наук, доцент Беседін Б.Б. (ДДПУ);
кандидат педагогічних наук, доцент Глазова В.В. (ДДПУ);
кандидат педагогічних наук, доцент Лимарєва Ю.М. (ДДПУ).

РЕЦЕНЗЕНТИ

АВРАМЕНКО О.В. – доктор фізико-математичних наук, професор;
професор кафедри математики Національного університету «Києво-Могилянська академія»

МАСИЧ В.В. – доктор педагогічних наук, професор;
завідувач кафедри фізики і хімії Харківського національного педагогічного університету імені Г.С. Сковороди.

РЕКОМЕНДОВАНО ДО ДРУКУ

вченою радою державного вищого навчального закладу «Донбаський державний педагогічний університет», протокол № 2 від 19.10.2023 р.

За достовірність посилань, цитат і результатів експериментів відповідальність несуть автори.

© Слов'янськ, ДДПУ, 2023

Від редакційної колегії

Шановні читачі!

Ви тримаєте в руках тринадцятий випуск «Збірника наукових праць фізико-математичного факультету ДДПУ» ДВНЗ «Донбаський державний педагогічний університет». Видання наукових праць викладачів, студентів та молодих науковців фізико-математичного факультету ДДПУ започатковано у 2010 році, коли результати наукових досліджень було опубліковано окремою серією «Фізико-математичні науки» в збірнику наукових праць «Пошуки і знахідки» за матеріалами науково-практичної конференції «Актуальні питання науки і освіти» (Слов'янськ, СДПУ, 20-22 квітня 2010 р.)

Метою збірника є підтримка наукової активності як серед здобувачів вищої освіти, так і серед молодих викладачів ДДПУ та інших ЗВО.

Основу тринадцятого випуску збірника складають оригінальні повнотекстові статті (в авторській редакції) переважно із числа доповідей, зроблених під час секційних засідань на цьогорічній Всеукраїнській науково-практичній конференції студентів і молодих учених «Перспективні напрямки сучасної науки та освіти», Слов'янськ, ДДПУ, 18–19 травня 2023 р. Основні результати доповідались на секційних засіданнях та були рекомендовані до друку головами секцій, завідувачами випускових кафедр («фізики», «математики та інформатики», «методики навчання математики та методики навчання інформатики») та керівниками студентських наукових робіт.

Засновники збірника мають намір зробити його максимально відкритим як для авторів, так і для читачів. Він виходить один раз на рік у друкованому та електронному вигляді. Електронна версія журналу та інформація щодо співпраці з авторами є доступною на офіційному сайті збірника за адресою URL: http://ddpu.edu.ua/fizmatzbirnyk/begin.htm

Запрошуємо до співпраці. Наснаги та творчих успіхів!

Члени редакційної колегії.

МАТЕМАТИКА.
ФІЗИКА

УДК 514.112.3

Гриценко Т.Ю., Кадубовський О.А.
[1] *здобувач магістерського РВО фізико-математичного факультету, ДВНЗ «ДДПУ»*
e-mail: taras.gritsenko01@gmail.com, ORCID 0000-0002-3199-2730
[2] *кандидат фіз.-мат. н., доцент кафедри математики та інформатики, ДВНЗ «ДДПУ»*
e-mail: kadubovs@ukr.net, ORCID 0000-0003-2045-810X

ПРО МЕТРИЧНІ СПІВВІДНОШЕННЯ В ПРЯМОКУТНОМУ ТРИКУТНИКУ ТА СУМІЖНІ ПИТАННЯ

Стаття присвячена систематизації та узагальненню відомостей про метричні співвідношення у прямокутному трикутнику. Для фіксованого переліку його елементів детально розглянуто три найбільш поширені типи метричних задач на знаходження: 1) елементів прямокутного трикутника за двома його катетами; 2) невідомого катета за відомим катетом та одним з інших його елементів; 3) катетів прямокутного трикутника за двома його елементами. Приділяється увага особливостям розв’язування задач третього типу в загальному вигляді (без числових значень величин). Розв’язки (в загальному вигляді) 72 із 96 з принципово різних зазначених вище задач подано у вигляді відповідних метричних співвідношень, 60 з яких можуть бути використані для формулювання відповідних маловідомих ознак рівності прямокутних трикутників та одержання наслідків у вигляді нерівностей для його елементів. Також наведено 38 властивостей-ознак прямокутного трикутника у вигляді відповідних метричних співвідношень. Запропонований авторами підхід до систематизації та подання метричних співвідношень (в узагальненому вигляді та вигляді таблиць) дозволяє ефективно розв’язувати значно ширше коло метричних задач на знаходження невідомого елементу прямокутного трикутника за двома іншими його елементами (із зазначеного переліку) та генерувати відповідні метричні співвідношення як наслідки з вже наведених.

Ключові слова: *прямокутний трикутник, метричні співвідношення, ознаки рівності, властивості-ознаки, шкільний курс геометрії.*

Вступ

«Розв’язування прямокутних трикутників» є наскрізною змістовною лінією шкільного курсу геометрії 8-9 класів. А навички застосувань метричних співвідношень в трикутнику, зокрема прямокутному, є одними з програмних результатів навчання. Задачі на розв’язування трикутників, зокрема прямокутних, стали традиційними й під час проведення ЗНО та НМТ з математики. А з урахуванням очевидного прикладного аспекту в багатьох галузях людської діяльності, важко переоцінити важливість та вміння розв’язування задач на знаходження невідомого елемента прямокутного трикутника за двома іншими його елементами.

З іншого боку – класифікація об’єктів, типізація задач, виокремлення ключових/опорних із сукупності принципово різних задач та систематизація і узагальнення відомостей з певної теми шкільного курсу математики є саме тим видом професійної творчості, який допомагає ґрунтовному формуванню відповідних математичних компетентностей та на нашу думку повинен бути включений не лише в програму підготовки майбутніх вчителів математики, а й у програму курсів підвищення кваліфікації. За переконанням авторів [12], зазначений вид діяльності дає можливість опанувати справжню математичну культуру та підготуватися для її передачі своїм учням.

З оглядом літератури, присвяченої задачам на прямокутний трикутник, детально можна ознайомитися в [12]. Слід окремо виділити роботу [13], в якій наведено низку маловідомих «властивостей-ознак» прямокутного трикутника та вказівки до їх доведення; запропоновано класифікацію ознак за методами і прийомами їх доведення та можливі підходи до пошуку нових ознак прямокутного трикутника. Пізніше, в роботі [14] співавтором було наведено детальне розв'язання обернених тверджень до двох добре відомих властивостей прямокутного трикутника, які, навіть досвідченими вчителями (за результатами спілкування та методичного практикуму на конкурсі вчителів), помилково сприймаються як ознаки прямокутного трикутника.

Використовуючи ідею, запропоновану В.Б. Фурсенком[1], в роботі [12] запропоновано наступний підхід до систематизації метричних задач на прямокутний трикутник шляхом виокремлення шести основних їх типів: I (тип) – на знаходження невідомих елементів прямокутного трикутника за двома (відомими) його катетами; II – на знаходження невідомого катета трикутника за відомим катетом та одним з його елементів; III – на знаходження невідомих катетів за двома (відомими) його елементами, з яких принаймні один є лінійним; IV – на обчислення відстаней між двома певними точками прямокутного трикутника; V – на визначення кутів між основними відрізками трикутника; VI – задачі мішаного характеру.

Якщо обмежитися розглядом найбільш основних з елементів прямокутного трикутника (*катетами, гострими кутами, медіанами, бісектрисами, висотою, опущеною з вершини прямого кута, радіусами вписаного, описаного та зовнівписаних кіл, площею, периметром та проекціями катетів на гіпотенузу*), то стає коректним питання щодо розгляду «повної системи задач» в сенсі та межах перших трьох із зазначених вище типів. За результатами аналізу, представленого у роботі [12], в діючих підручниках, найбільш поширених і змістовних посібниках та збірниках задач сукупно зустрічаються не більше 20 відсотків від загальної кількості зазначеної вище «повної системи задач». Останнє дає підстави констатувати, що автори навіть дуже поважних збірників, що видавались до сьогодення, стояли на невірному шляху, коли добирали та пропонували задачі.

Саме тому дана стаття й присвячена викладу формул, що є розв'язками задач I, II та III типів у загальному вигляді. Цю статтю слід вважати логічним продовженням роботи [12]. Є також сподівання, що представлений матеріал стане корисним для цільової аудиторії, принаймні як довідковий під гаслом «Енциклопедія метричних співвідношень у прямокутному трикутнику».

[1] Фурсенко В.Б. Лексикографическое изложение конструктивных задач геометрии треугольника. Математика в школе. 1937. № 5. С. 22-26.

1. Основні поняття та попередні відомості

Нижче наведемо основні метричні співвідношення для прямокутного трикутника за діючими підручниками [1–8]:

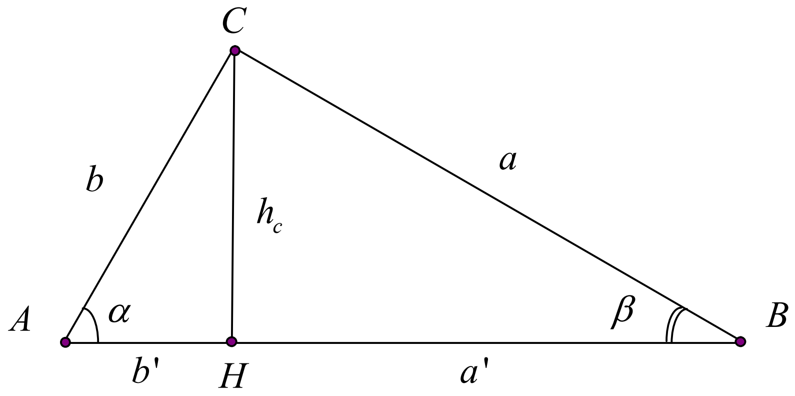


Рис. 1: до основних метричних співвідношень у прямокутному трикутнику

$$\sin\alpha = \frac{a}{c} = \cos\beta, \ \cos\alpha = \frac{b}{c} = \sin\beta, \ \mathrm{tg}\,\alpha = \frac{a}{b} = \mathrm{ctg}\,\beta, \quad \mathrm{ctg}\,\alpha = \frac{b}{a} = \mathrm{tg}\,\beta \tag{1}$$

$$\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}, \qquad \mathrm{ctg}\,\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}, \qquad \mathrm{tg}\,\alpha\cdot\mathrm{ctg}\,\alpha = 1 \tag{2}$$

$$a^2 = a'\cdot c, \qquad b^2 = b'\cdot c, \qquad \frac{a'}{b'} = \frac{a^2}{b^2} \tag{3}$$

$$h_c^2 = a'\cdot b' \tag{4}$$

$$a^2 + b^2 = c^2, \qquad c = \sqrt{a^2+b^2}, \qquad a = \sqrt{c^2-b^2}, \qquad b = \sqrt{c^2-a^2} \tag{5}$$

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1, \qquad \sin^2\beta + \cos^2\beta = 1 \tag{6}$$

$$r = \frac{a+b-c}{2} = \frac{ab}{a+b+c} = (p-a)\,\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2} = (p-b)\,\mathrm{tg}\frac{\beta}{2} = p-c \tag{7}$$

$$m_a = \frac{1}{2}\sqrt{4b^2+a^2}, \ m_b = \frac{1}{2}\sqrt{4a^2+b^2}, \ m_c = \frac{c}{2} = R, \ m_a^2 + m_b^2 = 5m_c^2 \tag{8}$$

$$h_a = b, \qquad h_b = a, \qquad h_c = \frac{ab}{c} = \sqrt{a'b'}, \quad \frac{1}{h_a^2} + \frac{1}{h_b^2} = \frac{1}{h_c^2} \tag{9}$$

$$S = \frac{1}{2}ab = \frac{1}{2}ch_c = \frac{a^2\,\mathrm{tg}\,\beta}{2} = \frac{b^2\,\mathrm{tg}\,\alpha}{2} = \frac{ac\sin\beta}{2} = \frac{bc\sin\alpha}{2} \tag{10}$$

Відтепер і в подальшому будемо використовувати наступні позначення для елементів прямокутного трикутника ABC – (рис. 2):

a, b, c – довжини сторін BC, CA та AB (відповідно);

α, β, $\gamma = 90^0$ – (градусні) міри кутів $\angle A$, $\angle B$ і $\angle C$ (відповідно);

r – радіус кола, вписаного у $\triangle ABC$; I – центр цього кола; A_1, B_1, C_1 – точки дотику зазначеного кола зі сторонами BC, CA та AB (відповідно);

R – радіус кола, описаного навколо $\triangle ABC$;

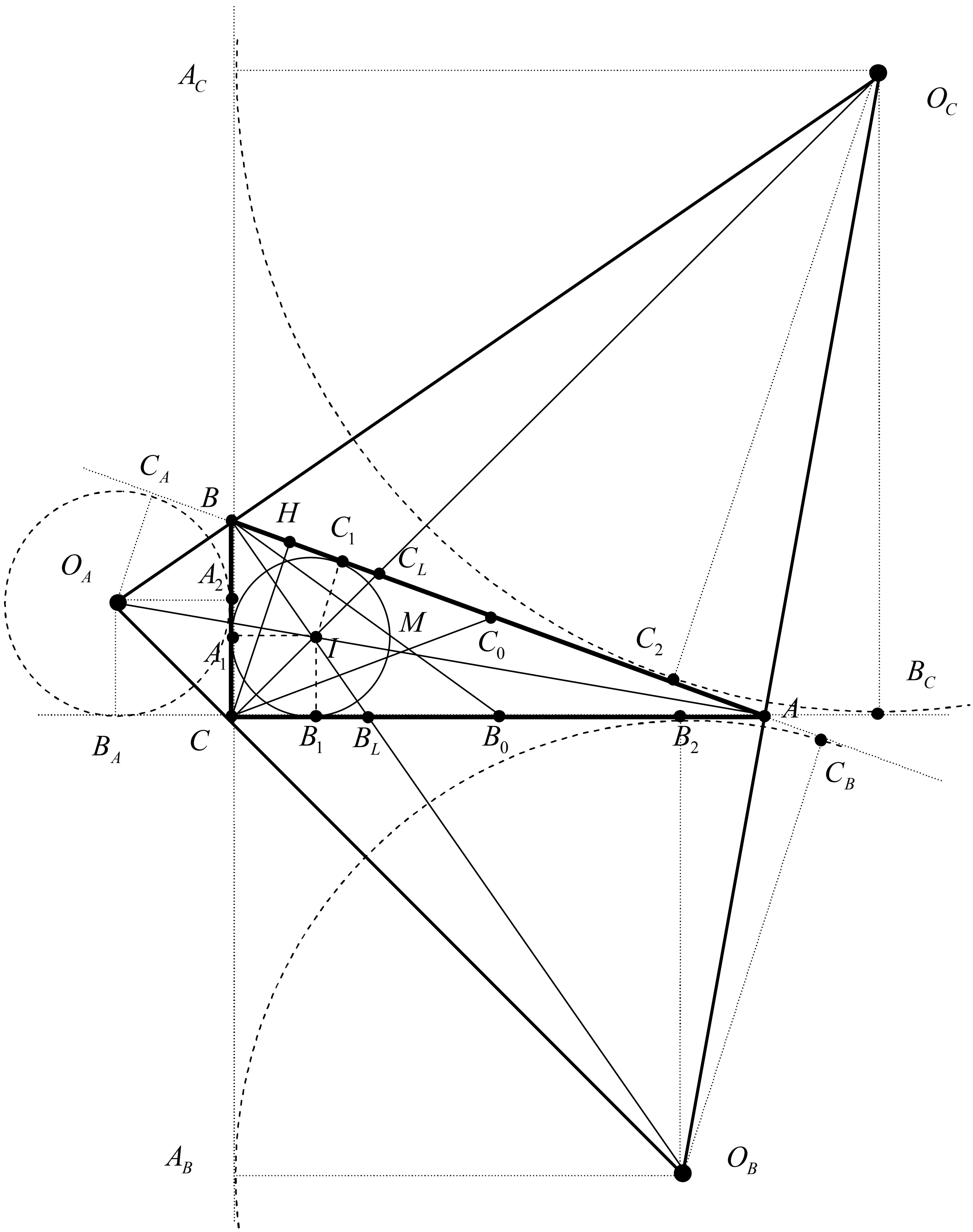


Рис. 2: до основних елементів прямокутного трикутника

r_a, r_b, r_c – радіуси зовнівписаних кіл $\triangle ABC$, які дотикаються сторін BC, CA та AB (відповідно); O_A, O_B, O_C – центри зазначених кіл; A_2, B_2, C_2 – точки дотику зазначених кіл зі сторонами BC, CA та AB (відповідно);

m_a, m_b, m_c – медіани $\triangle ABC$, які проведені до сторін BC, CA та AB (відповідно); A_0, B_0, C_0 – середини сторін BC, CA та AB (відповідно); M – точка перетину зазначених медіан (**центр тяжіння**);

l_a, l_b, l_c – бісектриси $\triangle ABC$, які проведені до сторін BC, CA та AB (відповідно); A_L, B_L, C_L – основи зазначених бісектрис; I – точка перетину бісектрис;

P, S – периметр та площа $\triangle ABC$ (відповідно);

a', b' – довжини проекцій катетів BC та CA (відповідно), $CH = h_c$ – висота $\triangle ABC$.

2. Основна частина

Розіб'ємо наступні елементи прямокутного трикутника на шість груп наступним чином:

1) $\{a\}$; 2) $\{b\}$;

3) $\{m_a; l_a; a'; r_a\}$; 4) $\{m_b; l_b; b'; r_b\}$;

5) $\{c(m_c, R); h_c; S; P(r_c); r; l_c\}$;

6) $\left\{\alpha = 90^\circ - \beta; \beta\right\}$.

Тоді загальна кількість метричних задач **I типу** (на знаходження елементів прямокутного трикутника за двома його катетами) становить **12**, а **II** типу (на знаходження невідомого катета трикутника за відомими катетом та одним з його елементів) – **15**. Загальна ж кількість задач **III типу** (на знаходження катетів за двома його елементами, з яких принаймні один є лінійним) насправді становить не 65 (як зазначено в [12]), а **69**. Тому, для фіксованого набору елементів прямокутного трикутника існує точно **96** суттєво різних задач, які й складають повну (в сенсі та межах трьох зазначених типів) систему метричних задач на прямокутний трикутник.

Подальший виклад буде присвячено розв’язкам задач саме II і III типів, сформульованих в загальному вигляді (без числових значень величин). Останнє зовсім не означає, що метою викладу є «кінцеві формули». Навпаки – вони повинні бути результатом відповідних досліджень та стати основою для відповідних наслідків і застосувань. Не можна не погодитися з авторами роботи [12], які наголошують на тому, що «при розв’язуванні задач з числовими даними часто втрачається «загальна картина» розв’язування задачі, взаємозв'язок з підзадачами. І як наслідок – пасивне засвоєння прийомів та методів розв'язування задач, озброєння учнів та студентів якими і є головною задачею при вивченні шкільного курсу математики».

Але спочатку наведемо нижче загальновідомі (в математичній та методичній літературі) формули для визначення/знаходження основних елементів $\{\alpha/\beta$; c (R, m_c); h_c, S; P (r_c); r; r_a, r_b; l_c; m_a, m_b; a', b'; l_a, $l_b\}$ прямокутного трикутника за відомими катетами a і b.

1. Формули для знаходження основних елементів $\{\alpha/\beta;\ c\ (R,\ m_c);\ h_c,\ S;\ P\ (r_c);\ r;\ r_a,\ r_b;\ l_c;\ m_a,\ m_b;\ a',\ b';\ l_a,\ l_b\}$ прямокутного трикутника за відомими катетами a і b:

$$\alpha:\quad \sin\alpha=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\qquad \cos\alpha=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\qquad \mathrm{tg}\,\alpha=\frac{a}{b}\qquad \mathrm{ctg}\,\alpha=\frac{b}{a}\tag{1.1}$$

$$\beta:\quad \sin\beta=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\qquad \cos\beta=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\qquad \mathrm{tg}\,\beta=\frac{b}{a}\qquad \mathrm{ctg}\,\beta=\frac{a}{b}\tag{1.2}$$

$$c=\sqrt{a^2+b^2}\qquad R=\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{2}=\frac{c}{2}\qquad m_c=\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{2}=\frac{c}{2}\tag{1.3}$$

$$h_c=\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{ab}{c}\qquad h_a=b\qquad h_b=a\tag{1.4}$$

$$S=\frac{1}{2}ab\tag{1.5}$$

$$P=a+b+\sqrt{a^2+b^2}=a+b+c=2p\tag{1.6}$$

$$r_c=\frac{a+b+\sqrt{a^2+b^2}}{2}=\frac{a+b+c}{2}=\frac{P}{2}=p$$

$$r=\frac{a+b-\sqrt{a^2+b^2}}{2}=\frac{a+b-c}{2}=\frac{ab}{a+b+\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{ab}{a+b+c}=p-c\tag{1.7}$$

$$r_a=\frac{a-b+\sqrt{a^2+b^2}}{2}=\frac{a-b+c}{2}=p-b\tag{1.8}$$

$$r_b=\frac{-a+b+\sqrt{a^2+b^2}}{2}=\frac{-a+b+c}{2}=p-a$$

$$l_c=\frac{ab\sqrt{2}}{a+b}\tag{1.9}$$

$$m_a=\sqrt{\frac{a^2}{4}+b^2}\qquad m_b=\sqrt{\frac{b^2}{4}+a^2}\tag{1.10}$$

$$a'=\frac{a^2}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{a^2}{c}\qquad b'=\frac{b^2}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{b^2}{c}\tag{1.11}$$

$$l_a=\frac{b}{a}\sqrt{2\left(a^2+b^2-b\sqrt{a^2+b^2}\right)}=b\sqrt{\frac{2\sqrt{a^2+b^2}}{b+\sqrt{a^2+b^2}}}=\frac{b}{a}\sqrt{2c\left(c-b\right)}\tag{1.12}$$

$$l_b=\frac{a}{b}\sqrt{2\left(a^2+b^2-a\sqrt{a^2+b^2}\right)}=a\sqrt{\frac{2\sqrt{a^2+b^2}}{a+\sqrt{a^2+b^2}}}=\frac{a}{b}\sqrt{2c\left(c-a\right)}$$

Зауваження 1. В роботі [12] зазначається, що розв’язування 24 задач (із 84 принципово різних задач II і III типу) в загальному вигляді зводяться до розв’язування рівнянь третього і четвертого (не біквадратних) степеня. Оскільки зазначені задачі є мало відомими та майже не висвітлено у математичній та методичній літературі, то наслідуючи авторів [12], маємо своїм обов’язком акцентувати увагу учнів, студентів та молодих вчителів саме на таких задачах:

1) $\{a,l_a\}$ $(\{b,l_b\})$;
2) $\{h_c,l_a\}$ $(\{h_c,l_b\})$;
3) $\{S,a'\}$ $(\{S,b'\})$;
4) $\{S,l_a\}$ $(\{S,l_b\})$;
5) $\{P,m_a\}$ $(\{P,m_b\})$;
6) $\{P,a'\}$ $(\{P,b'\})$;
7) $\{P,l_a\}$ $(\{P,l_b\})$;
8) $\{r,m_a\}$ $(\{r,m_b\})$;
9) $\{r,a'\}$ $(\{r,b'\})$;
10) $\{r,l_a\}$ $(\{r,l_b\})$;
11) $\{r_a,m_a\}$ $(\{r_b,m_b\})$;
12) $\{r_a,m_b\}$ $(\{r_b,m_a\})$;
13) $\{r_a,a'\}$ $(\{r_b,b'\})$;
14) $\{r_a,b'\}$ $(\{r_b,a'\})$;
15) $\{r_a,l_a\}$ $(\{r_b,l_b\})$;
16) $\{r_a,l_b\}$ $(\{r_b,l_a\})$;
17) $\{l_c,m_a\}$ $(\{l_c,m_b\})$;
18) $\{l_c,a'\}$ $(\{l_c,b'\})$;
19) $\{l_c,l_a\}$ $(\{l_c,l_b\})$;
20) $\{m_a,l_a\}$ $(\{m_b,l_b\})$;
21) $\{m_a,l_b\}$ $(\{m_b,l_a\})$;
22) $\{a',l_a\}$ $(\{b',l_b\})$;
23) $\{a',l_b\}$ $(\{b',l_a\})$;
24) $\{l_a,l_b\}$.

На рахунок наведених 24 задач автори представленої статті не виключають, що для деяких з них можуть існувати специфічні (штучні) заміни, які, з урахуванням необхідних додаткових досліджень в загальному випадку, дозволять подати їх розв’язки в явному вигляді.

Для решти 60 (із 84 принципово різних задач II і III типу в загальному вигляді) нижче в явному вигляді наведено розв’язки таких задач.

Відповідні розв’язки-формули подано у вигляді умовних таблиць, кожна з яких визначається одним з елементів прямокутного трикутника. А відповідні метричні співвідношення (для знаходження невідомих катетів) подано для пари «вихідних-відомих» (з фіксованого у статті набору) елементів, перший з яких у таблиці є спільним.

В різних таблицях зазначені розв’язки-формули (для однакових пар «вихідних-відомих» елементів) повторюються. Але таких підхід до подання розв’язків авторами зроблений свідомо. Одна з причин – цілісність та повнота (для фіксованого набору елементів прямокутного трикутника) подання матеріалу. Інша – намір спростити користування читачів наведеним у статті матеріалом та надія авторів на використання цільовою аудиторією у майбутньому наведених формул як довідкового матеріалу.

Через природні обмеження на обсяги статей нижче без додаткових пояснень наведено 11 (умовних) таблиць, що містять лише формули (без виводу та розв’язань) для знаходження невідомих катетів прямокутного трикутника за двома іншими його елементами з фіксованого переліку { a; α; β; $c=2R=2m_c$; h_c, S; $P=2r_c$; r; r_a; r_b; l_c; m_a; m_b; a'; b'; l_a; l_b }.

2. Формули для знаходження невідомого катета b (a) прямокутного трикутника за відомим катетом a (b) та одним з основних його елементів:

$\{a;\alpha\}$: $$b=\frac{a}{\sin\alpha}\sqrt{1-\sin^2\alpha}=\frac{a}{\sqrt{1-\cos^2\alpha}}\cos\alpha=\frac{a}{\operatorname{tg}\alpha}=a\operatorname{ctg}\alpha \quad (2.1)$$

$\{a;\beta\}$: $$b=\frac{a}{\cos\beta}\sqrt{1-\cos^2\beta}=\frac{a}{\sqrt{1-\sin^2\beta}}\sin\beta=\frac{a}{\operatorname{ctg}\beta}=a\operatorname{tg}\beta$$

$\{a;c\}$: $$b=\sqrt{c^2-a^2} \quad (2.2)$$

$\{a;m_c\}$: $$b=\sqrt{(2m_c)^2-a^2}$$

$\{a;R\}$: $$b=\sqrt{(2R)^2-a^2}$$

$\{a;h_c\}$: $$b=\frac{ah_c}{\sqrt{a^2-h_c^2}} \quad (2.3)$$

$\{a;S\}$: $$b=\frac{2S}{a} \quad (2.4)$$

$\{a;P\}$: $$b=\frac{P(P-2a)}{2(P-a)}=\frac{P}{2}\left(1-\frac{a}{P-a}\right) \quad (2.5)$$

$\{a;r_c\}$: $$b=2r_c\cdot\frac{r_c-a}{2r_c-a}=2r_c\cdot\left(1-\frac{r_c}{2r_c-a}\right)$$

$\{a;r\}$: $$b=2r\cdot\frac{a-r}{a-2r}=2r\cdot\left(1+\frac{r}{a-2r}\right) \quad (2.6)$$

$\{a;r_a\}$: $$b=2r_a\cdot\frac{a-r_a}{2r_a-a}=2r_a\cdot\left(\frac{r_a}{2r_a-a}-1\right) \quad (2.7)$$

$\{a;r_b\}$: $$b=2r_b\cdot\frac{r_b+a}{2r_b+a}=2r_b\cdot\left(1-\frac{r_b}{2r_b+a}\right) \quad (2.8)$$

$\{a;l_c\}$: $$b=\frac{al_c}{a\sqrt{2}-l_c} \quad (2.9)$$

$\{a;m_a\}$: $$b=\sqrt{m_a{}^2-\frac{a^2}{4}} \quad (2.10)$$

$\{a;m_b\}$: $$b=2\sqrt{m_b{}^2-a^2} \quad (2.11)$$

$\{a;a'\}$: $$b=\frac{a}{a'}\sqrt{a^2-a'^2} \quad (2.12)$$

$\{a;b'\}$: $$b=\sqrt{\frac{b'^2+b'\sqrt{b'^2+4a^2}}{2}}=\sqrt{\frac{b'}{2}\left(\sqrt{b'^2+4a^2}+b'\right)} \quad (2.13)$$

$\{a;l_b\}$: $\quad b=\dfrac{l_b^2-a^2}{a-\sqrt{l_b^2-a^2}}=\dfrac{\left(l_b^2-a^2\right)\left(a+\sqrt{l_b^2-a^2}\right)}{2a^2-l_b^2}$ (2.14)

$\{a;l_a\}$: $\quad b$ – ***корінь рівняння***

$$l_a=\frac{b}{a}\sqrt{2\left(a^2+b^2-b\sqrt{a^2+b^2}\right)}$$

3. Формули для знаходження катетів a і b прямокутного трикутника за відомим кутом α та одним з основних його елементів:

$\{\alpha;c\}$: $\quad a=c\cdot\sin\alpha \qquad b=c\cdot\cos\alpha$ (3.1)

$\{\alpha;R\}$: $\quad a=2R\sin\alpha \qquad b=2R\cos\alpha$

$\{\alpha;m_c\}$: $\quad a=2m_c\sin\alpha \qquad b=2m_c\cos\alpha$

$\{\alpha;h_c\}$: $\quad a=\dfrac{h_c}{\cos\alpha} \qquad b=\dfrac{h_c}{\sin\alpha}$ (3.2)

$\{\alpha;S\}$: $\quad a=\sqrt{2S\,\mathrm{tg}\,\alpha} \qquad b=\sqrt{2S\,\mathrm{ctg}\,\alpha}$ (3.3)

$\{\alpha;P\}$: $\quad a=\dfrac{P\sin\alpha}{\sin\alpha+\cos\alpha+1} \qquad b=\dfrac{P\cos\alpha}{\sin\alpha+\cos\alpha+1}$ (3.4)

$\{\alpha;r_c\}$: $\quad a=\dfrac{2r_c\sin\alpha}{\sin\alpha+\cos\alpha+1} \qquad b=\dfrac{2r_c\cos\alpha}{\sin\alpha+\cos\alpha+1}$

$\{\alpha;r\}$: $\quad a=\dfrac{2r\sin\alpha}{\sin\alpha+\cos\alpha-1} \qquad b=\dfrac{2r\cos\alpha}{\sin\alpha+\cos\alpha-1}$ (3.5)

$\{\alpha;r_a\}$: $\quad a=\dfrac{2r_a\sin\alpha}{\sin\alpha-\cos\alpha+1} \qquad b=\dfrac{2r_a\cos\alpha}{\sin\alpha-\cos\alpha+1}$ (3.6)

$\{\alpha;r_b\}$: $\quad a=\dfrac{2r_b\sin\alpha}{-\sin\alpha+\cos\alpha+1} \qquad b=\dfrac{2r_b\cos\alpha}{-\sin\alpha+\cos\alpha+1}$ (3.7)

$\{\alpha;l_c\}$: $\quad a=\dfrac{l_c(\sin\alpha+\cos\alpha)}{\sqrt{2}\cos\alpha} \qquad b=\dfrac{l_c(\sin\alpha+\cos\alpha)}{\sqrt{2}\sin\alpha}$ (3.8)

$\{\alpha;m_a\}$: $\quad a=\dfrac{2m_a\sin\alpha}{\sqrt{\sin^2\alpha+4\cos^2\alpha}} \qquad b=\dfrac{2m_a\cos\alpha}{\sqrt{\sin^2\alpha+4\cos^2\alpha}}$ (3.9)

$\{\alpha;m_b\}$: $\quad a=\dfrac{2m_b\sin\alpha}{\sqrt{4\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}} \qquad b=\dfrac{2m_b\cos\alpha}{\sqrt{4\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}}$ (3.10)

$\{\alpha;a'\}$: $\quad a=\dfrac{a'}{\sin\alpha} \qquad b=\dfrac{a'\cos\alpha}{\sin^2\alpha}$ (3.11)

$\{\alpha;b'\}$: $\quad a=\dfrac{b'\sin\alpha}{\cos^2\alpha} \qquad b=\dfrac{b'}{\cos\alpha}$ (3.12)

$\{\alpha;l_a\}$: $\quad a=l_a\cos\dfrac{\alpha}{2}\,\mathrm{tg}\,\alpha \qquad b=l_a\cos\dfrac{\alpha}{2}$ (3.13)

$\{\alpha;l_b\}$: $\quad a=l_b\sqrt{0{,}5\cdot\left(1+\sin\alpha\right)}\,\mathrm{tg}\,\alpha \qquad b=l_b\sqrt{0{,}5\cdot\left(1+\sin\alpha\right)}$ (3.14)

DOI: https://doi.org/...

Зауваження 2. Одним з основних підходів до одержання формул-розв'язків для наведених нижче задач є розв'язання відповідної системи рівнянь (з урахуванням співвідношень (1.1) – (1.12)) з двома змінними a і b. Проте такий підхід не завжди є найбільш раціональним у порівнянні з прийомами застосування допоміжного кута, кола та допоміжних побудов тощо. Крім того, формальне розв'язування відповідної системи (залишаючи за лаштунками визначення та основні метричні співвідношення для елементів прямокутного трикутника) не завжди призводить до правильної відповіді, а інколи, навіть сильних учнів та студентів призводить до помилкового висновку щодо декількох розв'язків. На захист зазначеного підходу слід відзначити принципову можливість на уроках алгебри під час вдосконалення навичок з розв'язування систем рівнянь з двома змінними, дидактичний матеріал наповнити задачами геометричного змісту.

Специфіка зазначеного вище способу полягає у необхідності проведення додаткових досліджень у таких ситуаціях, як:

1) якщо розв'язання системи зводиться до розв'язання квадратного або біквадратного рівняння, то необхідно переконатися в тому, що дискримінант набуває невід'ємних значень для відповідної пари елементів прямокутного трикутника; причому, якщо дискримінант вдається подати у вигляді квадрату многочлена, то його слід подавати з невід'ємною основою;
2) обов'язково перевірити, який з коренів (квадратного/біквадратного) рівняння для визначення невідомого a (чи b) набуває додатних значень;

якщо обидва корені додатні (такі приклади є серед задач нижче), то необхідно додатково перевірити, який з них суперечить основним метричним співвідношенням для елементів прямокутного трикутника;

3) якщо формули для кожного з двох елементів (за якими визначаємо невідомі a і b) прямокутного трикутника є симетричними відносно a і b, то відповідна система буде симетричною та матиме два симетричні розв'язки; проте, з урахуванням ознаки рівності прямокутних трикутників «за двома катетами», таку пару симетричних розв'язків слід вважати одним розв'язком, бо довжини катетів (без позначень) визначаються однозначно; іншими словами – якщо такий прямокутний трикутник існує, то, з точністю до рівності фігур, він є єдиним).

4. Формули для знаходження катетів a і b прямокутного трикутника за гіпотенузою c (радіусом R / медіаною m_c) та одним з його елементів:

$\{c;\alpha\}$: $a = c\cdot\sin\alpha \qquad b = c\cdot\cos\alpha$ (4.1)

$a = 2R\cdot\sin\alpha = 2m_c\cdot\sin\alpha \qquad b = 2R\cdot\cos\alpha = 2m_c\cdot\cos\alpha$

$\{c;\beta\}$: $a = c\cdot\cos\beta \qquad b = c\cdot\sin\beta$

$a = 2R\cdot\cos\beta = 2m_c\cdot\cos\beta \qquad b = 2R\cdot\sin\beta = 2m_c\cdot\sin\beta$

$\{c;h_c\}$: $$a,b = 0,5\cdot\left(\sqrt{c^2+2ch_c}\mp\sqrt{c^2-2ch_c}\right) \qquad (4.2)$$

$\{R;h_c\}$: $$a,b=\sqrt{R^2+Rh_c}\mp\sqrt{R^2-Rh_c}$$

$\{c;S\}$: $$a,b=0,5\cdot\left(\sqrt{c^2+4S}\mp\sqrt{c^2-4S}\right) \tag{4.3}$$

$\{R;S\}$: $$a,b=\sqrt{R^2+S}\mp\sqrt{R^2-S}$$

$\{m_c;S\}$: $$a,b=\sqrt{m_c^2+S}\mp\sqrt{m_c^2-S}$$

$\{c;P\}$: $$a,b=0,5\cdot\left(P-c\mp\sqrt{(P+c)^2-2P^2}\right) \tag{4.4}$$

$\{c;r_c\}$: $$a,b=0,5\cdot\left(2r_c-c\mp\sqrt{(2r_c+c)^2-8r_c^2}\right)$$

$\{R;r_c\}$: $$a,b=r_c-R\mp\sqrt{(r_c+R)^2-2r_c^2}$$

$\{c;r\}$: $$a,b=0,5\cdot\left(c+2r\mp\sqrt{c^2-4rc-4r^2}\right) \tag{4.5}$$

$\{R;r\}$: $$a,b=R+r\mp\sqrt{(R-r)^2-2r^2}$$

$\{c;r_a\}$: $$a=\frac{2r_a-c+\sqrt{c^2+4cr_a-4r_a^2}}{2} \qquad b=\frac{c-2r_a+\sqrt{c^2+4cr_a-4r_a^2}}{2} \tag{4.6}$$

$\{R;r_a\}$: $$a=r_a-R+\sqrt{(R+r_a)^2-2r_a^2} \qquad b=R-r_a+\sqrt{(R+r_a)^2-2r_a^2}$$

$\{c;r_b\}$: $$a=\frac{c-2r_b+\sqrt{c^2+4cr_b-4r_b^2}}{2} \qquad b=\frac{2r_b-c+\sqrt{c^2+4cr_b-4r_b^2}}{2}$$

$\{R;r_b\}$: $$a=R-r_b+\sqrt{(R+r_b)^2-2r_b^2} \qquad b=r_b-R+\sqrt{(R+r_b)^2-2r_b^2}$$

$\{c;l_c\}$: $$a,b=\sqrt{\frac{c^2\mp\sqrt{c^4-l_c^2\left(l_c+\sqrt{l_c^2+2c^2}\right)^2}}{2}} \tag{4.7}$$

$\{c;m_a\}$: $$a=2\sqrt{\frac{c^2-m_a^2}{3}} \qquad b=\sqrt{\frac{4m_a{}^2-c^2}{3}} \tag{4.8}$$

$\{c;m_b\}$: $$a=\sqrt{\frac{4m_b{}^2-c^2}{3}} \qquad b=2\sqrt{\frac{c^2-m_b^2}{3}}$$

$\{c;a'\}$: $$a=\sqrt{a'\cdot c} \qquad b=\sqrt{c^2-a'\cdot c}=\sqrt{(c-a')c} \tag{4.9}$$

$\{c;b'\}$: $$a=\sqrt{c^2-b'\cdot c}=\sqrt{(c-b')c} \qquad b=\sqrt{b'\cdot c}$$

$\{c;l_a\}$: $$a=\frac{1}{4c}\cdot\sqrt{16c^4-l_a^2\left(l_a+\sqrt{l_a^2+8c^2}\right)^2};\ b=\frac{l_a}{4c}\left(l_a+\sqrt{l_a^2+8c^2}\right) \tag{4.10}$$

$\{c;l_b\}$: $$a=\frac{l_b}{4c}\left(l_b+\sqrt{l_b^2+8c^2}\right);\ b=\frac{1}{4c}\cdot\sqrt{16c^4-l_b^2\left(l_b+\sqrt{l_b^2+8c^2}\right)^2} \tag{4.11}$$

5. Формули для знаходження катетів a і b прямокутного трикутника за висотою h_c та одним з основних його елементів:

$$\{h_c;\alpha\}: \quad a=\frac{h_c}{\cos\alpha} \qquad b=\frac{h_c}{\sin\alpha} \tag{5.1}$$

$$\{h_c;\beta\}: \quad a=h_c/\sin\beta \qquad b=h_c/\cos\beta$$

$$\{h_c;c\}: \quad a,b=\frac{1}{2}\left(\sqrt{c^2+2ch_c}\mp\sqrt{c^2-2ch_c}\right) \tag{5.2}$$

$$\{h_c;R\}: \quad a,b=\sqrt{R}\left(\sqrt{R+h_c}\mp\sqrt{R-h_c}\right)$$

$$\{h_c;m_c\}: \quad a,b=\sqrt{m_c}\left(\sqrt{m_c+h_c}\mp\sqrt{m_c-h_c}\right)$$

$$\{h_c;S\}: \quad a,b=\sqrt{S}\left(\sqrt{\frac{S}{h_c^2}+1}\mp\sqrt{\frac{S}{h_c^2}-1}\right) \tag{5.3}$$

$$\{h_c;P\}: \quad a,b=\frac{P}{4(P+h_c)}\left(P+2h_c\mp\sqrt{P^2-4Ph_c-4h_c^2}\right) \tag{5.4}$$

$$\{h_c;r_c\}: \quad a,b=\frac{r_c}{2r_c+h_c}\left(r_c+h_c\mp\sqrt{(r_c-h_c)^2-2h_c^2}\right)$$

$$\{h_c;r\}: \quad a,b=\frac{r}{h_c-2r}\left(h_c-r\mp\sqrt{(h_c+r)^2-2h_c^2}\right) \tag{5.5}$$

$$\{h_c;r_a\}: \quad a=\frac{r_a}{2r_a-h_c}\left(r_a-h_c+\sqrt{(r_a+h_c)^2-2h_c^2}\right) \qquad b=\frac{r_a}{2r_a-h_c}\left(h_c-r_a+\sqrt{(r_a+h_c)^2-2h_c^2}\right) \tag{5.6}$$

$$\{h_c;r_b\}: \quad a=\frac{r_b}{2r_b-h_c}\left(h_c-r_b+\sqrt{(r_b+h_c)^2-2h_c^2}\right) \qquad b=\frac{r_b}{2r_b-h_c}\left(r_b-h_c+\sqrt{(r_b+h_c)^2-2h_c^2}\right)$$

$$\{h_c;l_c\}: \quad a,b=\frac{\sqrt{2}h_cl_c}{2h_c^2-l_c^2}\left(h_c\mp\sqrt{l_c^2-h_c^2}\right) \tag{5.7}$$

$$\{h_c;m_a\}: \quad a=\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{4m_a^2-3h_c^2+\sqrt{\left(4m_a^2-3h_c^2\right)^2-16m_a^2h_c^2}} \qquad b=\frac{\sqrt{2}}{4}\sqrt{4m_a^2+3h_c^2-\sqrt{\left(4m_a^2+3h_c^2\right)^2-64m_a^2h_c^2}} \tag{5.8}$$

$$\{h_c;m_b\}: \quad a=\frac{\sqrt{2}}{4}\sqrt{4m_b^2+3h_c^2-\sqrt{\left(4m_b^2+3h_c^2\right)^2-64m_b^2h_c^2}} \qquad b=\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{4m_b^2-3h_c^2+\sqrt{\left(4m_b^2-3h_c^2\right)^2-16m_b^2h_c^2}}$$

$\{h_c;a'\}$: $a=\sqrt{h_c^2+a'^2}$ $b=\dfrac{h_c}{a'}\sqrt{h_c^2+a'^2}$ (5.9)

$\{h_c;b'\}$: $a=\dfrac{h_c}{b'}\sqrt{h_c^2+b'^2}$ $b=\sqrt{h_c^2+b'^2}$

6. Формули для знаходження катетів a і b прямокутного трикутника за площею S та одним з основних його елементів:

$\{S;\alpha\}$: $a=\sqrt{2S\cdot\operatorname{tg}\alpha}$ $b=\sqrt{2S\cdot\operatorname{ctg}\alpha}$ (6.1)

$\{S;\beta\}$: $a=\sqrt{2S\cdot\operatorname{ctg}\beta}$ $b=\sqrt{2S\cdot\operatorname{tg}\beta}$

$\{S;c\}$: $$a,b=0,5\cdot\left(\sqrt{c^2+4S}\mp\sqrt{c^2-4S}\right) \qquad (6.2)$$

$\{S;R\}$: $$a,b=\sqrt{R^2+S}\mp\sqrt{R^2-S}$$

$\{S;m_c\}$: $$a,b=\sqrt{m_c^2+S}\mp\sqrt{m_c^2-S}$$

$\{S;h_c\}$: $$a,b=\sqrt{S}\left(\sqrt{\frac{S}{h_c^2}+1}\mp\sqrt{\frac{S}{h_c^2}-1}\right) \qquad (6.3)$$

$\{S;P\}$: $$a,b=\frac{P^2+4S\mp\sqrt{\left(P^2-4S\left(3-2\sqrt{2}\right)\right)\left(P^2-4S\left(3+2\sqrt{2}\right)\right)}}{4P} \qquad (6.4)$$

$\{S;r_c\}$: $$a,b=\frac{r_c^2+S\mp\sqrt{\left(r_c^2-S\left(3-2\sqrt{2}\right)\right)\left(r_c^2-S\left(3+2\sqrt{2}\right)\right)}}{2r_c}$$

$\{S;r\}$: $$a,b=\frac{r^2+S\mp\sqrt{\left(r^2-S\left(3-2\sqrt{2}\right)\right)\left(r^2-S\left(3+2\sqrt{2}\right)\right)}}{2r}=$$
$$=\frac{S+r^2\mp\sqrt{\left(S-r^2\left(3-2\sqrt{2}\right)\right)\left(S-r^2\left(3+2\sqrt{2}\right)\right)}}{2r} \qquad (6.5)$$

$\{S;r_a\}$: $a=\dfrac{r_a^2-S+\sqrt{\left(S-r_a^2\right)^2+8Sr_a^2}}{2r_a}$ $b=\dfrac{S-r_a^2+\sqrt{\left(S-r_a^2\right)^2+8Sr_a^2}}{2r_a}$ (6.6)

$\{S;r_b\}$: $a=\dfrac{S-r_b^2+\sqrt{\left(S-r_b^2\right)^2+8Sr_b^2}}{2r_b}$ $b=\dfrac{r_b^2-S+\sqrt{\left(S-r_b^2\right)^2+8Sr_b^2}}{2r_b}$

$\{S;l_c\}$: $$a,b=\frac{\sqrt{2}}{l_c}\left(S\mp\sqrt{S\left(S-l_c^2\right)}\right) \qquad (6.7)$$

$\{S;m_a\}$: $a=\sqrt{2}\sqrt{m_a^2-\sqrt{m_a^4-4S^2}}$ $b=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{m_a^2+\sqrt{m_a^4-4S^2}}$ (6.8)

$\{S;m_b\}$: $a=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{m_b^2+\sqrt{m_b^4-4S^2}}$ $b=\sqrt{2}\sqrt{m_b^2-\sqrt{m_b^4-4S^2}}$

7. Формули для знаходження катетів a і b прямокутного трикутника за периметром P (радіусом $r_c = p$) та одним з основних його елементів:

$$\{P;\alpha\}: \quad a = \frac{P\sin\alpha}{\sin\alpha + \cos\alpha + 1} \qquad b = \frac{P\cos\alpha}{\sin\alpha + \cos\alpha + 1} \tag{7.1}$$

$$\{r_c;\alpha\}: \quad a = \frac{2r_c\sin\alpha}{\sin\alpha + \cos\alpha + 1} \qquad b = \frac{2r_c\cos\alpha}{\sin\alpha + \cos\alpha + 1}$$

$$\{P;\beta\}: \quad a = \frac{P\cos\beta}{\sin\beta + \cos\beta + 1} \qquad b = \frac{P\sin\beta}{\sin\beta + \cos\beta + 1}$$

$$\{r_c;\beta\}: \quad a = \frac{2r_c\cos\beta}{\sin\beta + \cos\beta + 1} \qquad b = \frac{2r_c\sin\beta}{\sin\beta + \cos\beta + 1}$$

$$\{P;c\}: \quad a,b = 0,5\cdot\left(P - c \mp \sqrt{(P+c)^2 - 2P^2}\right) \tag{7.2}$$

$$\{P;R\}: \quad a,b = 0,5\cdot\left(P - 2R \mp \sqrt{(P+2R)^2 - 2P^2}\right)$$

$$\{P;m_c\}: \quad a,b = 0,5\cdot\left(P - 2m_c \mp \sqrt{(P+2m_c)^2 - 2P^2}\right)$$

$$\{r_c;c\}: \quad a,b = 0,5\cdot\left(2r_c - c \mp \sqrt{(2r_c+c)^2 - 8r_c^2}\right)$$

$$\{r_c;R\}: \quad a,b = r_c - R \mp \sqrt{(r_c+R)^2 - 2r_c^2}$$

$$\{r_c;m_c\}: \quad a,b = r_c - m_c \mp \sqrt{(r_c+m_c)^2 - 2r_c^2}$$

$$\{P;h_c\}: \quad a,b = \frac{P}{4(P+h_c)}\left(P + 2h_c \mp \sqrt{P^2 - 4Ph_c - 4h_c^2}\right) \tag{7.3}$$

$$\{r_c;h_c\}: \quad a,b = \frac{r_c}{2r_c + h_c}\left(r_c + h_c \mp \sqrt{(r_c-h_c)^2 - 2h_c^2}\right)$$

$$\{P;S\}: \quad a,b = \frac{P^2 + 4S \mp \sqrt{\left(P^2 - 4S\left(3-2\sqrt{2}\right)\right)\left(P^2 - 4S\left(3+2\sqrt{2}\right)\right)}}{4P} \tag{7.4}$$

$$\{r_c;S\}: \quad a,b = \frac{r_c^2 + S \mp \sqrt{\left(r_c^2 - S\left(3-2\sqrt{2}\right)\right)\left(r_c^2 - S\left(3+2\sqrt{2}\right)\right)}}{2r_c}$$

$$\{P;r\}: \quad a,b = 0,25\cdot\left(P + 2r \mp \sqrt{(P+2r)^2 - 16Pr}\right) \tag{7.5}$$

$$\{r_c;r\}: \quad a,b = 0,5\cdot\left(r_c + r \mp \sqrt{(r_c+r)^2 - 8r_c r}\right)$$

$$\{P;r_a\}: \quad a = \frac{2Pr_a}{P + 2r_a} \qquad b = \frac{P}{2} - r_a \tag{7.6}$$

$\{P;r_b\}$: $a=\dfrac{P}{2}-r_b$ $\qquad b=\dfrac{2Pr_b}{P+2r_b}$

$\{r_c;r_a\}$: $a=2r_cr_a/(r_c+r_a)$ $\qquad b=r_c-r_a$

$\{r_c;r_b\}$: $a=r_c-r_b$ $\qquad b=2r_cr_b/(r_c+r_b)$

$$\{P;l_c\}:\quad a,b=\frac{P\left(P\mp\sqrt{\left(P-2\sqrt{2}l_c-2l_c\right)\left(P-2\sqrt{2}l_c+2l_c\right)}\right)}{2\left(2P-l_c\sqrt{2}\right)} \tag{7.7}$$

$$\{r_c;l_c\}:\quad a,b=\frac{2r_c\left(r_c\mp\sqrt{\left(r_c-l_c\sqrt{2}-l_c\right)\left(r_c-l_c\sqrt{2}+l_c\right)}\right)}{4r_c-l_c\sqrt{2}}$$

8. Формули для знаходження катетів a і b прямокутного трикутника за радіусом r та одним з основних його елементів:

$$\{r;\alpha\}:\quad a=\frac{2r\sin\alpha}{\sin\alpha+\cos\alpha-1}\qquad b=\frac{2r\cos\alpha}{\sin\alpha+\cos\alpha-1} \tag{8.1}$$

$$\{r;\beta\}:\quad a=\frac{2r\cos\beta}{\cos\beta+\sin\beta-1}\qquad b=\frac{2r\sin\beta}{\cos\beta+\sin\beta-1}$$

$$\{r;c\}:\quad a,b=0,5\cdot\left(c+2r\mp\sqrt{c^2-4rc-4r^2}\right) \tag{8.2}$$

$$\{r;R\}:\quad a=R+r\mp\sqrt{(R-r)^2-2r^2}\qquad b=R+r\pm\sqrt{(R-r)^2-2r^2}$$

$$\{r;m_c\}:\quad a=m_c+r\mp\sqrt{(m_c-r)^2-2r^2}\qquad b=m_c+r\pm\sqrt{(m_c-r)^2-2r^2}$$

$$\{r;h_c\}:\quad a,b=\frac{r}{h_c-2r}\left(h_c-r\mp\sqrt{(h_c+r)^2-2h_c^2}\right) \tag{8.3}$$

$$\{r;S\}:\quad a,b=\frac{S+r^2\mp\sqrt{\left(S-r^2\left(3-2\sqrt{2}\right)\right)\left(S-r^2\left(3+2\sqrt{2}\right)\right)}}{2r} \tag{8.4}$$

$$\{r;P\}:\quad a,b=0,25\cdot\left(P+2r\mp\sqrt{(P+2r)^2-16Pr}\right) \tag{8.5}$$

$$\{r;r_c\}:\quad a,b=0,5\cdot\left(r_c+r\mp\sqrt{(r_c+r)^2-8r_cr}\right)$$

$$\{r;r_a\}:\quad a=r+r_a\qquad b=\frac{2rr_a}{r_a-r} \tag{8.6}$$

$$\{r;r_b\}:\quad a=\frac{2rr_b}{r_b-r}\qquad b=r+r_b$$

$$\{r;l_c\}:\quad a,b=\frac{2r\left(r\mp\sqrt{\left(r-l_c\sqrt{2}-l_c\right)\left(r-l_c\sqrt{2}+l_c\right)}\right)}{4r-l_c\sqrt{2}} \tag{8.7}$$

9. Формули для знаходження катетів a і b прямокутного трикутника за радіусом $r_a = p - b$ ($r_b = p - a$) та одним з основних його елементів:

$$\{r_a;\alpha\}:\quad a = \frac{2r_a \sin\alpha}{\sin\alpha - \cos\alpha + 1} \qquad b = \frac{2r_a \cos\alpha}{\sin\alpha - \cos\alpha + 1} \tag{9.1}$$

$$\{r_a;\beta\}:\quad a = \frac{2r_a \cos\beta}{\cos\beta - \sin\beta + 1} \qquad b = \frac{2r_a \sin\beta}{\cos\beta - \sin\beta + 1}$$

$$\{r_b;\alpha\}:\quad a = \frac{2r_b \sin\alpha}{-\sin\alpha + \cos\alpha + 1} \qquad b = \frac{2r_b \cos\alpha}{-\sin\alpha + \cos\alpha + 1}$$

$$\{r_b;\beta\}:\quad a = \frac{2r_b \cos\beta}{-\cos\beta + \sin\beta + 1} \qquad b = \frac{2r_b \sin\beta}{-\cos\beta + \sin\beta + 1}$$

$$\{r_a;c\}:\quad a = r_a - R + \sqrt{\left(R + r_a\right)^2 - 2r_a^2} \qquad b = R - r_a + \sqrt{\left(R + r_a\right)^2 - 2r_a^2} \tag{9.2}$$

$$\{r_a;R\}:\quad a = r_a - R + \sqrt{\left(R + r_a\right)^2 - 2r_a^2} \qquad b = R - r_a + \sqrt{\left(R + r_a\right)^2 - 2r_a^2}$$

$$\{r_a;m_c\}:\quad a = r_a - m_c + \sqrt{\left(m_c + r_a\right)^2 - 2r_a^2} \qquad b = m_c - r_a + \sqrt{\left(m_c + r_a\right)^2 - 2r_a^2}$$

$$\{r_b;c\}:\quad a = \frac{c - 2r_b + \sqrt{c^2 + 4cr_b - 4r_b^2}}{2} \qquad b = \frac{2r_b - c + \sqrt{c^2 + 4cr_b - 4r_b^2}}{2}$$

$$\{r_b;R\}:\quad a = R - r_b + \sqrt{\left(R + r_b\right)^2 - 2r_b^2} \qquad b = r_b - R + \sqrt{\left(R + r_b\right)^2 - 2r_b^2}$$

$$\{r_b;m_c\}:\quad a = m_c - r_b + \sqrt{\left(m_c + r_b\right)^2 - 2r_b^2} \qquad b = r_b - m_c + \sqrt{\left(m_c + r_b\right)^2 - 2r_b^2}$$

$$\{r_a;h_c\}:\quad a = \frac{r_a}{2r_a - h_c}\left(r_a - h_c + \sqrt{\left(r_a + h_c\right)^2 - 2h_c^2}\right); \tag{9.3}$$

$$b = \frac{r_a}{2r_a - h_c}\left(h_c - r_a + \sqrt{\left(r_a + h_c\right)^2 - 2h_c^2}\right)$$

$$\{r_b;h_c\}:\quad a = \frac{r_b}{2r_b - h_c}\left(h_c - r_b + \sqrt{\left(r_b + h_c\right)^2 - 2h_c^2}\right);$$

$$b = \frac{r_b}{2r_b - h_c}\left(r_b - h_c + \sqrt{\left(r_b + h_c\right)^2 - 2h_c^2}\right)$$

$$\{r_a;S\}:\quad a = \frac{r_a^2 - S + \sqrt{\left(S - r_a^2\right)^2 + 8Sr_a^2}}{2r_a} \qquad b = \frac{S - r_a^2 + \sqrt{\left(S - r_a^2\right)^2 + 8Sr_a^2}}{2r_a} \tag{9.4}$$

$$\{r_b;S\}:\quad a = \frac{S - r_b^2 + \sqrt{\left(S - r_b^2\right)^2 + 8Sr_b^2}}{2r_b} \qquad b = \frac{r_b^2 - S + \sqrt{\left(S - r_b^2\right)^2 + 8Sr_b^2}}{2r_b}$$

$$\{r_a;P\}:\quad a = \frac{2Pr_a}{P + 2r_a} \qquad b = \frac{P}{2} - r_a \tag{9.5}$$

$$\{r_a;r_c\}:\quad a=\frac{2r_cr_a}{r_c+r_a}\qquad b=r_c-r_a$$

$$\{r_b;P\}:\quad a=\frac{P}{2}-r_b\qquad b=\frac{2Pr_b}{P+2r_b}$$

$$\{r_b;r_c\}:\quad a=r_c-r_b\qquad b=\frac{2r_cr_b}{r_c+r_b}$$

$$\{r_a;r\}:\quad a=r+r_a\qquad b=\frac{2rr_a}{r_a-r}\tag{9.6}$$

$$\{r_b;r\}:\quad a=\frac{2rr_b}{r_b-r}\qquad b=r+r_b$$

$$\{r_a;r_b\}:\quad a=\frac{\sqrt{r_a^2+6r_ar_b+r_b^2}+r_a-r_b}{2}\qquad b=\frac{\sqrt{r_a^2+6r_ar_b+r_b^2}-r_a+r_b}{2}\tag{9.7}$$

$$\{r_a;l_c\}:\quad a=\frac{2r_a\left(r_a+b\right)}{2r_a+b}=\frac{bl_c\sqrt{2}}{2b-l_c\sqrt{2}}=\frac{r_a+l_c\sqrt{2}+\sqrt{r_a^2+l_c^2}}{4r_a+l_c\sqrt{2}}\cdot 2r_a\tag{9.8}$$

$$b=\frac{2r_a\left(a-r_a\right)}{2r_a-a}=\frac{al_c\sqrt{2}}{2a-l_c\sqrt{2}}=\frac{l_c\sqrt{2}-r_a+\sqrt{r_a^2+l_c^2}}{4r_a-l_c\sqrt{2}}\cdot 2r_a$$

$$\{r_b;l_c\}:\quad a=\frac{2r_b\left(b-r_b\right)}{2r_b-b}=\frac{bl_c\sqrt{2}}{2b-l_c\sqrt{2}}=\frac{l_c\sqrt{2}-r_b+\sqrt{r_b^2+l_c^2}}{4r_b-l_c\sqrt{2}}\cdot 2r_b$$

$$b=\frac{2r_b\left(r_b+a\right)}{2r_b+a}=\frac{al_c\sqrt{2}}{2a-l_c\sqrt{2}}=\frac{r_b+l_c\sqrt{2}+\sqrt{r_b^2+l_c^2}}{4r_b+l_c\sqrt{2}}\cdot 2r_b$$

10. Формули для знаходження катетів a і b прямокутного трикутника за бісектрисою l_c та одним з основних його елементів:

$$\{l_c;\alpha\}:\quad a=\frac{l_c(\sin\alpha+\cos\alpha)}{\sqrt{2}\cos\alpha}\qquad b=\frac{l_c(\sin\alpha+\cos\alpha)}{\sqrt{2}\sin\alpha}\tag{10.1}$$

$$\{l_c;\beta\}:\quad a=\frac{l_c(\cos\beta+\sin\beta)}{\sqrt{2}\sin\beta}\qquad b=\frac{l_c(\cos\beta+\sin\beta)}{\sqrt{2}\cos\beta}$$

$$\{l_c;c\}:\quad a,b=\sqrt{\frac{c^2\mp\sqrt{c^4-l_c^2\left(l_c+\sqrt{l_c^2+2c^2}\right)^2}}{2}}\tag{10.2}$$

$$\{l_c;R\}:\quad a,b=\sqrt{\frac{4R^2\mp\sqrt{16R^4-l_c^2\left(l_c+\sqrt{l_c^2+8R^2}\right)^2}}{2}}$$

DOI: https://doi.org/...

$\{l_c;m_c\}$:
$$a,b=\sqrt{\frac{4m_c^2\mp\sqrt{16m_c^4-l_c^2\left(l_c+\sqrt{l_c^2+8m_c^2}\right)^2}}{2}}$$

$\{l_c;h_c\}$:
$$a,b=\frac{\sqrt{2}h_cl_c}{2h_c^2-l_c^2}\left(h_c\mp\sqrt{l_c^2-h_c^2}\right) \tag{10.3}$$

$\{l_c;S\}$:
$$a,b=\frac{\sqrt{2}}{l_c}\left(S\mp\sqrt{S\left(S-l_c^2\right)}\right) \tag{10.4}$$

$\{l_c;P\}$:
$$a,b=\frac{P\left(P\mp\sqrt{\left(P-2\sqrt{2}l_c-2l_c\right)\left(P-2\sqrt{2}l_c+2l_c\right)}\right)}{2\left(2P-l_c\sqrt{2}\right)} \tag{10.5}$$

$\{l_c;r_c\}$:
$$a,b=\frac{2r_c\left(r_c\mp\sqrt{\left(r_c-l_c\sqrt{2}-l_c\right)\left(r_c-l_c\sqrt{2}+l_c\right)}\right)}{4r_c-l_c\sqrt{2}}$$

$\{l_c;r\}$:
$$a,b=\frac{2r\left(r\mp\sqrt{\left(r-l_c\sqrt{2}-l_c\right)\left(r-l_c\sqrt{2}+l_c\right)}\right)}{4r-l_c\sqrt{2}} \tag{10.6}$$

$\{l_c;r_a\}$:
$$a=\frac{2r_a\left(r_a+b\right)}{2r_a+b}=\frac{bl_c\sqrt{2}}{2b-l_c\sqrt{2}}=\frac{r_a+l_c\sqrt{2}+\sqrt{r_a^2+l_c^2}}{4r_a+l_c\sqrt{2}}\cdot 2r_a \tag{10.7}$$
$$b=\frac{2r_a\left(a-r_a\right)}{2r_a-a}=\frac{al_c\sqrt{2}}{2a-l_c\sqrt{2}}=\frac{l_c\sqrt{2}-r_a+\sqrt{r_a^2+l_c^2}}{4r_a-l_c\sqrt{2}}\cdot 2r_a$$

$\{l_c;r_b\}$:
$$a=\frac{2r_b\left(b-r_b\right)}{2r_b-b}=\frac{bl_c\sqrt{2}}{2b-l_c\sqrt{2}}=\frac{l_c\sqrt{2}-r_b+\sqrt{r_b^2+l_c^2}}{4r_b-l_c\sqrt{2}}\cdot 2r_b$$
$$b=\frac{2r_b\left(r_b+a\right)}{2r_b+a}=\frac{al_c\sqrt{2}}{2a-l_c\sqrt{2}}=\frac{r_b+l_c\sqrt{2}+\sqrt{r_b^2+l_c^2}}{4r_b+l_c\sqrt{2}}\cdot 2r_b$$

11. Формули для знаходження катетів a і b прямокутного трикутника за медіаною m_a (m_b) та одним з основних його елементів:

$\{m_a;\alpha\}$:
$$a=\frac{2m_a\sin\alpha}{\sqrt{\sin^2\alpha+4\cos^2\alpha}} \qquad b=\frac{2m_a\cos\alpha}{\sqrt{\sin^2\alpha+4\cos^2\alpha}} \tag{11.1}$$

$\{m_a;\beta\}$:
$$a=\frac{2m_a\cos\beta}{\sqrt{\cos^2\beta+4\sin^2\beta}} \qquad b=\frac{2m_a\sin\beta}{\sqrt{\cos^2\beta+4\sin^2\beta}}$$

$\{m_b;\alpha\}$:
$$a=\frac{2m_b\sin\alpha}{\sqrt{4\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}} \qquad b=\frac{2m_b\cos\alpha}{\sqrt{4\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}}$$

$$\{m_b;\beta\}:\quad a=\frac{2m_b\cos\beta}{\sqrt{4\cos^2\beta+\sin^2\beta}}\qquad b=\frac{2m_b\sin\beta}{\sqrt{4\cos^2\beta+\sin^2\beta}}$$

$$\{m_a;c\}:\quad a=2\sqrt{\frac{c^2-m_a^2}{3}}\qquad b=\sqrt{\frac{4m_a{}^2-c^2}{3}}\tag{11.2}$$

$$\{m_b;c\}:\quad a=\sqrt{\frac{4m_b{}^2-c^2}{3}}\qquad b=2\sqrt{\frac{c^2-m_b^2}{3}}$$

$$\{m_a;R\}:\quad a=2\sqrt{\frac{4R^2-m_a^2}{3}}\qquad b=2\sqrt{\frac{m_a{}^2-R^2}{3}}\tag{11.3}$$

$$\{m_b;R\}:\quad a=2\sqrt{\frac{m_b{}^2-R^2}{3}}\qquad b=2\sqrt{\frac{4R^2-m_b^2}{3}}$$

$$\{m_a;m_c\}:\quad a=2\sqrt{\frac{4m_c^2-m_a^2}{3}}\qquad b=2\sqrt{\frac{m_a{}^2-m_c^2}{3}}\tag{11.4}$$

$$\{m_b;m_c\}:\quad a=2\sqrt{\frac{m_b{}^2-m_c^2}{3}}\qquad b=2\sqrt{\frac{4m_c^2-m_b^2}{3}}$$

$$\{m_a;h_c\}:\quad a=\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{4m_a^2-3h_c^2+\sqrt{\left(4m_a^2-3h_c^2\right)^2-16m_a^2h_c^2}}\tag{11.5}$$

$$b=\frac{\sqrt{2}}{4}\sqrt{4m_a^2+3h_c^2-\sqrt{\left(4m_a^2+3h_c^2\right)^2-64m_a^2h_c^2}}$$

$$\{m_b;h_c\}:\quad a=\frac{\sqrt{2}}{4}\sqrt{4m_b^2+3h_c^2-\sqrt{\left(4m_b^2+3h_c^2\right)^2-64m_b^2h_c^2}}$$

$$b=\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{4m_b^2-3h_c^2+\sqrt{\left(4m_b^2-3h_c^2\right)^2-16m_b^2h_c^2}}$$

$$\{m_a;S\}:\quad a=\sqrt{2}\sqrt{m_a^2-\sqrt{m_a^4-4S^2}}\qquad b=\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{m_a^2+\sqrt{m_a^4-4S^2}}\tag{11.6}$$

$$\{m_b;S\}:\quad a=\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{m_b^2+\sqrt{m_b^4-4S^2}}\qquad b=\sqrt{2}\sqrt{m_b^2-\sqrt{m_b^4-4S^2}}$$

$$\{m_a;m_b\}:\quad a=2\sqrt{\frac{4m_b{}^2-m_a^2}{15}}\qquad b=2\sqrt{\frac{4m_a{}^2-m_b^2}{15}}\tag{11.7}$$

$$\{m_a;a'\}:\quad a=\sqrt{\frac{a'\left(3a'+\sqrt{9a'^2+64m_a^2}\right)}{8}}\ ;\ b=\sqrt{m_a^2-\frac{3a'^2+a'\sqrt{9a'^2+64m_a^2}}{32}}\tag{11.8}$$

$$\{m_b;b'\}:\quad a=\sqrt{m_b^2-\frac{3b'^2+b'\sqrt{9b'^2+64m_b^2}}{32}}\ ;\ b=\sqrt{\frac{b'\left(3b'+\sqrt{9b'^2+64m_b^2}\right)}{8}}$$

$\{m_b;a'\}$: $a=\sqrt{\dfrac{a'\left(\sqrt{9a'^2+16m_b^2}-3a'\right)}{2}}$; $b=2\sqrt{m_b^2-\dfrac{a'\left(\sqrt{9a'^2+64m_b^2}-3a'\right)}{8}}$ (11.9)

$\{m_a;b'\}$: $a=2\sqrt{m_a^2-\dfrac{b'\left(\sqrt{9b'^2+64m_a^2}-3b'\right)}{8}}$; $b=\sqrt{\dfrac{b'\left(\sqrt{9b'^2+16m_a^2}-3b'\right)}{2}}$

12. Формули для знаходження катетів a і b прямокутного трикутника за проекцією a' (b') та одним з основних його елементів:

$\{a';\alpha\}$: $a=a'/\sin\alpha$ $b=a'\cos\alpha/\sin^2\alpha$ (12.1)

$\{b';\beta\}$: $a=b'\cos\beta/\sin^2\beta$ $b=b'/\sin\beta$

$\{a';\beta\}$: $a=a'/\cos\beta$ $b=a'\sin\beta/\cos^2\beta$

$\{b';\alpha\}$: $a=b'\sin\alpha/\cos^2\alpha$ $b=b'/\cos\alpha$

$\{a';c\}$: $a=\sqrt{a'\cdot c}$ $b=\sqrt{c^2-a'\cdot c}=\sqrt{(c-a')c}$ (12.2)

$\{b';c\}$: $a=\sqrt{c^2-b'\cdot c}=\sqrt{(c-b')c}$ $b=\sqrt{b'\cdot c}$

$\{a';R\}$: $a=\sqrt{2a'R}$ $b=\sqrt{2(2R-a')R}$ (12.3)

$\{b';R\}$: $a=\sqrt{2(2R-b')R}$ $b=\sqrt{2b'R}$

$\{a';m_c\}$: $a=\sqrt{2a'm_c}$ $b=\sqrt{2(2m_c-a')m_c}$

$\{b';m_c\}$: $a=\sqrt{2(2m_c-b')m_c}$ $b=\sqrt{2b'm_c}$

$\{a';h_c\}$: $a=\sqrt{h_c^2+a'^2}$ $b=\dfrac{h_c}{a'}\sqrt{h_c^2+a'^2}$ (12.4)

$\{b';h_c\}$: $a=\dfrac{h_c}{b'}\sqrt{h_c^2+b'^2}$ $b=\sqrt{h_c^2+b'^2}$

$\{a';m_a\}$: $a=\sqrt{\dfrac{a'\left(3a'+\sqrt{9a'^2+64m_a^2}\right)}{8}}$; $b=\sqrt{m_a^2-\dfrac{3a'^2+a'\sqrt{9a'^2+64m_a^2}}{32}}$ (12.5)

$\{b';m_b\}$: $a=\sqrt{m_b^2-\dfrac{3b'^2+b'\sqrt{9b'^2+64m_b^2}}{32}}$; $b=\sqrt{\dfrac{b'\left(3b'+\sqrt{9b'^2+64m_b^2}\right)}{8}}$

$\{a';m_b\}$: $a=\sqrt{\dfrac{a'\left(\sqrt{9a'^2+16m_b^2}-3a'\right)}{2}}$; $b=2\sqrt{m_b^2-\dfrac{a'\left(\sqrt{9a'^2+64m_b^2}-3a'\right)}{8}}$ (12.6)

$\{b';m_a\}$: $a=2\sqrt{m_a^2-\dfrac{b'\left(\sqrt{9b'^2+64m_a^2}-3b'\right)}{8}}$; $b=\sqrt{\dfrac{b'\left(\sqrt{9b'^2+16m_a^2}-3b'\right)}{2}}$

$\{a';b'\}$: $a=\sqrt{a'(a'+b')}$ $b=\sqrt{b'(a'+b')}$ (12.7)

Зауваження 3. Аналіз дидактичного забезпечення змістової лінії «Розв'язування трикутників» дозволяє констатувати, що пропонується чимало задач, коли відомими елементами трикутника є відрізки, на які розбиває сторону трикутника основа бісектриси, точка дотику вписаного або зовнівписаного кола. Тому акцентуємо увагу на розв'язках наступних задач.

Нехай A_L, B_L, C_L – основи бісектрис прямокутного $\triangle ABC$; A_1, B_1, C_1 – точки дотику вписаного кола з його сторонами BC, CA та AB (відповідно); A_2, B_2, C_2 – точки дотику зовнівписаних кіл $\triangle ABC$ зі сторонами BC, CA та AB (відповідно) – рис. 2. Тоді мають місце наступні формули для знаходження сторін $\triangle ABC$:

1) якщо $AC_L = m$, $C_LB = n$, то:

$$a = n\cdot\frac{m+n}{\sqrt{m^2+n^2}} \qquad b = m\cdot\frac{m+n}{\sqrt{m^2+n^2}} \qquad c = m+n \tag{13.1}$$

2) якщо $CB_L = m$, $B_LA = n$, то:

$$a = m\cdot\sqrt{\frac{m+n}{n-m}} \qquad b = m+n \qquad c = n\cdot\sqrt{\frac{m+n}{n-m}} \tag{13.2}$$

3) якщо $CA_L = m$, $A_LB = n$, то:

$$a = m+n \qquad b = m\cdot\sqrt{\frac{m+n}{n-m}} \qquad c = n\cdot\sqrt{\frac{m+n}{n-m}} \tag{13.3}$$

4) якщо $AC_1 = m$, $C_1B = n$, то:

$$a = \frac{\sqrt{m^2+6mn+n^2}-m+n}{2} \qquad b = \frac{\sqrt{m^2+6mn+n^2}+m-n}{2} \qquad c = m+n \tag{13.4}$$

5) якщо $CB_1 = m$, $B_1A = n$, то:

$$a = \frac{2mn}{n-m} \qquad b = m+n \qquad c = \frac{m^2+n^2}{n-m} \tag{13.5}$$

6) якщо $CA_1 = m$, $A_1B = n$, то:

$$a = m+n \qquad b = \frac{2mn}{n-m} \qquad c = \frac{m^2+n^2}{n-m} \tag{13.6}$$

7) якщо $AC_2 = m$, $C_2B = n$, то:

$$a = \frac{\sqrt{m^2+6mn+n^2}+m-n}{2} \qquad b = \frac{\sqrt{m^2+6mn+n^2}-m+n}{2} \qquad c = m+n \tag{13.7}$$

8) якщо $CB_2 = m$, $B_2A = n$, то:

$$a = \frac{2mn}{m-n} \qquad b = m+n \qquad c = \frac{m^2+n^2}{m-n} \tag{13.8}$$

9) якщо $CA_2 = m$, $A_2B = n$, то:

$$a = m+n \qquad b = \frac{2mn}{m-n} \qquad c = \frac{m^2+n^2}{m-n} \tag{13.9}$$

Зауваження 4. Кожне метричне співвідношення у прямокутному трикутнику є його властивістю, проте не кожне з них є ознакою прямокутного трикутника. Тому, з метою цілісного подання метричних співвідношень та наслідуючи авторів робіт [11, 13], маємо своїм обов'язком навести наступні (зокрема маловідомі) «властивості-ознаки» прямокутного трикутника. А саме:

у трикутнику ABC $\angle C = 90^\circ$ ***тоді і лише тоді, коли виконується одна з наступних умов***

1) $\angle A + \angle B = \angle C$

2) $2m_c = c$

3) $2R = c$

4) $r = p - c$

5) $a^2 + b^2 = c^2$

6) $p(p-c) = (p-a)(p-b)$

7) $2p(p-c) = ab$

8) $2(p-a)(p-b) = ab$

9) $a^2 + b^2 = 4m_c^2$

10) $r_a = p - b \ (r_b = p - a)$

11) $r_c = p$

12) $2S = ab$

13) $m_a^2 + m_b^2 = 5m_c^2$

14) $S = (p-a)(p-b)$

15) $\dfrac{1}{h_a^2} + \dfrac{1}{h_b^2} = \dfrac{1}{h_c^2}$

16) $r_a + r_b = 2R$

17) $\dfrac{2c}{ab} = \dfrac{1}{r_a} + \dfrac{1}{r_b}$

18) $a = h_b \ (b = h_a)$

19) $\begin{cases} h_a \ge a \\ h_b \ge b \end{cases}$

20) $\begin{cases} a = h_a \\ b = h_b \end{cases}$

21) $a + b = h_a + h_b$

22) $R(a + b + 2R) = pc$

23) $a + b + 2R = \dfrac{2pch_c}{ab}$

24) $m_a^2 + m_b^2 = \dfrac{5}{4}c^2$

25) $c(a + b + 2m_c) = 4pm_c$

26) $c(a + b + 2R) = 4pR$

27) $\dfrac{1}{a^2b^2} = \dfrac{1}{b^2c^2} + \dfrac{1}{a^2c^2}$

28) $\sin^2\gamma = \sin^2\alpha + \sin^2\beta$

29) $\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{h_c} = \dfrac{1}{r}$

30) $S = p(p-c)$

31) $r \cdot r_c = r_a \cdot r_b$

32) $S = r \cdot r_c \ (S = r_a \cdot r_b)$

33) $R + r = \sqrt{S + R^2}$

34) $\dfrac{\sin\alpha + \sin\beta}{\cos\alpha + \cos\beta} = \sin\gamma$

35) $\mathrm{ctg}\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{b+c}{a} \ \left(\mathrm{ctg}\dfrac{\beta}{2} = \dfrac{a+c}{b}\right)$

36) $P = 2(2R + r)$

37) $r(a + b + 2R) = 2p(p-c)$

38) $a + b + 2R = \dfrac{2p \cdot AH_C \cdot BH_C}{h_c^2}$

3. Наслідки та прикінцеві зауваження

З урахуванням зауваження 3, умовну таблицю 1 доцільно доповнити й наступними співвідношеннями:

$$AC_L = b\cdot\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a+b} \qquad C_LB = a\cdot\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a+b} \tag{1.13}$$

$$CB_L = a\cdot\frac{b}{a+\sqrt{a^2+b^2}} \qquad B_LA = \sqrt{a^2+b^2}\cdot\frac{b}{a+\sqrt{a^2+b^2}} \tag{1.14}$$

$$CA_L = b\cdot\frac{a}{b+\sqrt{a^2+b^2}} \qquad A_LB = \sqrt{a^2+b^2}\cdot\frac{a}{b+\sqrt{a^2+b^2}}$$

$$AC_1 = p-a = \frac{-a+b+\sqrt{a^2+b^2}}{2} \qquad C_1B = p-b = \frac{a-b+\sqrt{a^2+b^2}}{2} \tag{1.15}$$

$$CB_1 = p-c = \frac{a+b-\sqrt{a^2+b^2}}{2} \qquad B_1A = p-a = \frac{-a+b+\sqrt{a^2+b^2}}{2} \tag{1.16}$$

$$CA_1 = p-c = \frac{a+b-\sqrt{a^2+b^2}}{2} \qquad A_1B = p-b = \frac{a-b+\sqrt{a^2+b^2}}{2}$$

$$AC_2 = p-b = \frac{a-b+\sqrt{a^2+b^2}}{2} \qquad C_2B = p-a = \frac{-a+b+\sqrt{a^2+b^2}}{2} \tag{1.17}$$

$$CB_2 = p-a = \frac{-a+b+\sqrt{a^2+b^2}}{2} \qquad B_2A = p-c = \frac{a+b-\sqrt{a^2+b^2}}{2} \tag{1.18}$$

$$CA_2 = p-b = \frac{a-b+\sqrt{a^2+b^2}}{2} \qquad A_2B = p-c = \frac{a+b-\sqrt{a^2+b^2}}{2}$$

Розв’язки представлених у статі **66** принципово різних задач про знаходження невідомих катетів прямокутного трикутника дозволяють розв’язати близько **1200** задач на знаходження невідомого елементу прямокутного трикутника за двома (відомими) його елементами, з яких принаймні один є лінійним (з фіксованого набору основних його елементів). *Ідея пропонованого авторами підходу полягає у наступному*:

1) спочатку за допомогою співвідношень (2.1) – (13.9) визначаються катети a і b прямокутного трикутника;

2) потім за допомогою співвідношень $(1.1)-(1.12)-(1.18)$ – невідомий елемент прямокутного трикутника (з фіксованого набору основних його елементів, поповнених відрізками AC_L, C_LB; CB_L, B_LA; CA_L, A_LB; AC_1, C_1B; CB_1, B_1A; CA_1, A_1B; AC_2, C_2B; CB_2, B_2A; CA_2, A_2B).

Маємо своїм обов’язком також відзначити, що хоча пропонований підхід дозволяє (в певному розумінні) звести до мінімуму кількість опорних задач та гарантовано розв’язувати зазначене вище (доволі широке) коло метричних задач, проте він далеко не завжди є раціональним.

Зміст наведених вище 13 (умовних) таблиць може стати предметом групових та / або індивідуальних завдань для учнів закладів загальної середньої освіти, довгострокових літніх завдань тощо.

Слід також розуміти, що співвідношення (2.1) – (13.9) дають в явному вигляді ознаки рівності прямокутних трикутників, бо зводяться до ознаки їх рівності «за двома катетами».

Крім того, зазначені співвідношення дозволяють одержати цілу низку (в загальному випадку маловідомих) цікавих нерівностей між лінійними елементами прямокутного трикутника. Так, наприклад, зі співвідношення (8.8) маємо, що $r_b > r$, а зі співвідношення (5.5) не важко одержати наступну нерівність

$$2r < h_c \le r\left(\sqrt{2}+1\right).$$

Проте слід мати на увазі, що *рівності* у нестрогих нерівностях для підкореневих виразів коренів парного степеня (у наведених в роботі співвідношеннях) для елементів прямокутного трикутника не завжди досягаються. І тому необхідними є додаткові дослідження щодо строгості / нестрогості знаків відповідних нерівностей. Додатково наведемо й декілька інших нерівностей, справедливість яких не важко встановити у зазначений спосіб:

$2r < a \ \left(2r < b\right)$;

$2r \le \left(\sqrt{2}-1\right)c$;

$1 < \dfrac{c+h_c}{a+b} \le \dfrac{3\sqrt{2}}{4}$;

$l_c \le \dfrac{a+b}{2\sqrt{2}}$;

$2h_c \le c$;

$2l_c \le c$;

$h_c \le l_c < h_c\sqrt{2}$;

$l_a < b\sqrt{2} \ \left(l_b < a\sqrt{2}\right)$.

Оскільки нерівностям між елементами прямокутного трикутника (за винятком тривіальних, зокрема для довжин катета та гіпотенузи) в шкільному курсі геометрії увага майже не приділяється, то автори переконані, що наведений матеріал може частково вирішити й зазначену проблему. А систематизація нерівностей для елементів прямокутного трикутника допоможе майбутнім та молодим вчителям математики, які розробляють власні задачі з числовими даними до теми «Розв'язування прямокутних трикутників».

Більше того, не дивлячись на труднощі, які традиційно виникають під час розв'язування задач в загальному вигляді, автори переконані, що саме вказаний спосіб є природнім для одержання маловідомих нерівностей для елементів трикутника та інших фігур.

Задля зручності та лаконічності подання інформації щодо розв'язності в загальному вигляді задач (на відшукання невідомого катета / невідомих катетів прямокутного трикутника за двома іншими його елементами), розв'язки яких представлено у даній статті, автори вважають за доцільне навести нижче скорочені умови 66 принципово різних таких задач:

1) $\{a;\alpha\}$ ($\{a;\beta\}$);
2) $\{a;c\}$ ($\{a;m_c\}$, $\{a;R\}$);
3) $\{a;h_c\}$;
4) $\{a;S\}$;
5) $\{a;P\}$ ($\{a;r_c\}$);
6) $\{a;r\}$;
7) $\{a;l_c\}$;
8) $\{a;r_a\}$;
9) $\{a;r_b\}$;
10) $\{a;m_a\}$;
11) $\{a;m_b\}$;
12) $\{a;a'\}$;
13) $\{a;b'\}$;
14) $\{a;l_b\}$;
15) $\{\alpha/\beta;c/R/m_c\}$;
16) $\{\alpha;h_c\}$ ($\{\beta;h_c\}$);
17) $\{\alpha;S\}$ ($\{\beta;S\}$);
18) $\{\alpha;P\}$ ($\{\alpha;r_c\}$, $\{\beta;P\}$, $\{\beta;r_c\}$);
19) $\{\alpha;r\}$ ($\{\beta;r\}$);
20) $\{\alpha;l_c\}$ ($\{\beta;l_c\}$);
21) $\{\alpha;r_a\}$ ($\{\beta;r_b\}$);
22) $\{\alpha;r_b\}$ ($\{\beta;r_a\}$);
23) $\{\alpha;m_a\}$ ($\{\beta;m_b\}$);
24) $\{\alpha;m_b\}$ ($\{\beta;m_a\}$);
25) $\{\alpha;a'\}$ ($\{\beta;b'\}$);
26) $\{\alpha;b'\}$ ($\{\beta;a'\}$);
27) $\{\alpha;l_a\}$ ($\{\beta;l_a\}$);
28) $\{\alpha;l_b\}$ $\{\beta;l_b\}$;
29) $\{c/R/m_c;h_c\}$;
30) $\{c/R/m_c;S\}$;
31) $\{c/R/m_c;P\}$ ($\{c/R/m_c;r_c\}$);
32) $\{c/R/m_c;r\}$;
33) $\{c/R/m_c;l_c\}$;
34) $\{c/R/m_c;r_a\}$ ($\{c/R/m_c;r_b\}$);
35) $\{c/R/m_c;m_a\}$ ($\{c/R/m_c;m_b\}$);
36) $\{c/R/m_c;a'\}$ ($\{c/R/m_c;b'\}$);
37) $\{c/R/m_c;l_a\}$ ($\{c/R/m_c;l_b\}$);
38) $\{h_c;S\}$;
39) $\{h_c;P\}$ ($\{h_c;r_c\}$);
40) $\{h_c;r\}$;
41) $\{h_c;l_c\}$;
42) $\{h_c;r_a\}$ ($\{h_c;r_b\}$);
43) $\{h_c;m_a\}$ ($\{h_c;m_b\}$);
44) $\{h_c;a'\}$ ($\{h_c;b'\}$);
45) $\{S;P\}$ ($\{S;r_c\}$);
46) $\{S;r\}$;
47) $\{S;r_a\}$ ($\{S;r_b\}$);
48) $\{S;l_c\}$;
49) $\{S;m_a\}$ ($\{S;m_b\}$);
50) $\{P;r\}$ ($\{r_c;r\}$);
51) $\{P;r_a\}$ ($\{r_c;r_a\}$, $\{P;r_b\}$, $\{r_c;r_b\}$);
52) $\{P;l_c\}$ ($\{r_c;l_c\}$);
53) $\{r;r_a\}$ ($\{r;r_b\}$);
54) $\{r;l_c\}$;
55) $\{l_c;r_a\}$ ($\{l_c;r_b\}$);
56) $\{r_a;r_b\}$;
57) $\{m_a;m_b\}$;
58) $\{m_a;a'\}$ ($\{m_b;b'\}$);
59) $\{m_a;b'\}$ ($\{m_b;a'\}$);
60) $\{a';b'\}$;

61) $\{AC_L;C_LB\}$
62) $\{CB_L;B_LA\}$, $\{CA_L;A_LB\}$;
63) $\{AC_1;C_1B\}$;
64) $\{CB_1;B_1A\}$, $\{CA_1;A_1B\}$;
65) $\{AC_2;C_2B\}$;
66) $\{CB_2;B_2A\}$, $\{CA_2;A_2B\}$.

Висновки

Автори мають надію, що запропонований матеріал буде цікавим вчителям і викладачам математики та стане корисним студентам і молодим вчителям математики при систематизації та узагальнені метричних співвідношень в прямокутному трикутнику. А запропонований підхід дозволить: вчителям – поширити цей досвід на випадок довільного трикутника; учням – в опануванні практичними навичками при розв'язуванні метричних задач шкільного курсу геометрії.

На думку авторів, важливою та цілком досяжною є розробка цілісного матеріалу щодо нерівностей для елементів прямокутного трикутника.

Не менш цікавим та важливим є подальша робота, пов’язана із пошуком ефективних способів розв’язання 24 задач в загальному вигляді, розв’язування яких (за результатами досліджень-спостережень авторів роботи [12]) призводить до необхідності розв’язувати рівняння третього та четвертого степеня.

Слід також відзначити, що за допомогою метричних співвідношень для трьох-чотирьох елементів прямокутного трикутника досяжними здаються й дослідження щодо зменшення кількості опорних задач, розв’язки 66 з яких наведено в даній статті.

Література

1. Геометрія : підруч. для 8 кл. закладів заг. серед. освіти / А. Г. Мерзляк, В. Б. Полонський, М. С. Якір. 2-ге видання, переробл. Х. : Гімназія, **2021**. 208 с.
2. Геометрія : підручник для 8 кл. з поглибленим вивченням математики закладів загальної серед. освіти / А.Г. Мерзляк, В.Б. Полонський, М.С. Якір. 2-ге видання, перероблене. Х. : Гімназія, **2021**. 224 с.
3. Геометрія : підруч. для 8 кл. закл. загал. серед. освіти / [А. П. Єршова, В. В. Голобородько, О. Ф. Крижановський, С. В. Єршов.]. 2 ге вид., перероб. Харків. : Вид-во «Ранок», **2021**. 256 с.
4. Геометрія : підруч. для 8 кл. закладів заг. серед. освіти / О. С. Істер. 2-ге видання, переробл. К. : Генеза, **2021**. 240 с.
5. Геометрія: підручник для 9 кл. (поглиблене вивчення) / А.Г. Мерзляк, В.Б. Полонський, М. С. Якір. Х. : Гімназія, **2021**.
6. Геометрія : підручник для 9 класу, 2-ге видання / Г.П. Бевз, Н.Г. Владімірова. К. : Видавничий дім «Освіта», **2022**.
7. Геометрія : підруч. для 9-х класів, 2-ге видання / М.І. Бурда, Н.А. Тарасенкова. К. : УОВЦ «Оріон», **2022**.
8. Геометрія : підруч. для 9 кл. загальноосвіт. навч. закл. / О. С. Істер. 2-ге видання, переробл. К. : Генеза, **2022**. 239 с.
9. Кушнір І.А. Методи розв'язання задач з геометрії: книжка для вчителя / І.А. Кушнір. К.: АБРИС, **1994**. 235 с.

10. Кушнір І.А., Фінкельштейн Л.П. Геометрія. Школа бойового мистецтва. 7-9 класи. Навчальний посібник. К.: Факт, **2001**. 232 с.
11. Кушнір І.А. Тріумф шкільної геометрії: навч. посібник для 7-11 кл. К.: Наш час, **2005**. 432 с.
12. Кадубовський О.А., Кадубовська О.Л. До питання про формування навичок при систематизації та класифікації метричних задач шкільного курсу геометрії. Проблеми трудової і професійної підготовки: Науково-методичний збірник. **2009**. Вип. 14. С. 46–54.
13. Кадубовський О.А. Ознаки та обернені теореми прямокутного трикутника / О.А. Кадубовський, В.І. Ірза // Дидактика математики: проблеми і дослідження. – Міжнародний збірник наукових робіт. – Донецьк: Вид-во ДонНУ. **2012**. Вип. 38. С. 150–164.
14. Одінцова Є.П., Кадубовський О.А. Про дві обернені задачі на прямокутний трикутник. ІІ Всеукраїнська науково-методична інтернет-конференція студентів, аспірантів та молодих вчених «Розвиток інтелектуальних умінь і творчих здібностей учнів та студентів у процесі навчання дисциплін природничо-математичного циклу «ІТМ*плюс-2021». Форум молодих дослідників». 12 листопада 2021 р. Суми : СумДПУ імені А.С. Макаренка, **2021**. С. 102 – 105. 163 с.

Taras Yu. Hrytsenko, Oleksandr A. Kadubovs'kyi
Donbas State Pedagogical University, Sloviansk, Ukraine

About metric relations in a right triangle and related issues

The article is devoted to systematization and generalization of information about metric relations in a right triangle. For a fixed list of its elements, three most common types of metric problems for finding are considered in detail: 1) elements of a right triangle in its two legs; 2) unknown leg according to the known leg and one of its other elements; 3) legs of a right triangle along its two elements. Attention is paid to the features of solving problems of the third type in general form (without numerical values of quantities). Solutions (in general) 72 of 96 of the fundamentally different above problems are presented in the form of appropriate metric relations, 60 of which can be used to formulate the corresponding little-known signs of equality of right triangles and obtain consequences in the form of inequalities for its elements. Also given are 38 feature properties of a right triangle in the form of corresponding metric relations. The proposed by the authors approach to the systematization and representation of metric relations (in a generalized form and in the form of tables) can effectively solve a much wider range of metric problems to find the unknown element of a right triangle by its other two elements (from the specified list) and generate the corresponding metric relations as consequences from the already given ones.

Keywords: *right triangle, metric relations, signs of equality, properties-signs, school geometry course.*

УДК 535.31:372.853

Ткаченко В.М., Костюк С.О., Черевань Є.О.

[1] *кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри фізики, ДВНЗ «ДДПУ»*
e-mail: tkachenkovn2@gmail.com, ORCID 0000-0003-1042-2656

[2] *здобувач магістерського РВО фізико-математичного факультету, ДВНЗ «ДДПУ»*
e-mail: kostuk1037@gmail.com, ORCID 0009-0001-8525-0046

[3] *учитель математики та фізики, Володимирівський ліцей Межівської селищної ради Дніпропетровської області*
e-mail: evgenija0604@gmail.com, ORCID 0000-0002-1265-455X

АНАЛІТИЧНИЙ АНАЛІЗ НАЙПРОСТІШИХ ОПТИЧНИХ ЦЕНТРОВАНИХ СИСТЕМ

У статті продемонстровано застосування формули тонкої лінзи до аналізу найпростіших оптичних центрованих систем. При цьому акцентовано увагу на використанні правил знаків.

Ключові слова: *найпростіші оптичні центровані системи, збиральна лінза, розсіювальна лінза, правила знаків, дійсне зображення, уявне зображення.*

Вступ

Постановка проблеми. Не в багатьох підручниках з фізики продемонстровано виведення формули тонкої лінзи. Часто автори наводять формулу (див., наприклад, [1], [4]), яка не співпадає з класичною [2], [3]. Відмінність у тому, що автори використовують різні правила знаків, які не відразу можна знайти в тексті.

Метою статті є

- порівняння формул тонкої лінзи наведених у різних підручниках;
- аналіз використаних в них правил знаків;
- застосування формули тонкої лінзи до аналізу найпростіших оптичних центрованих систем.

Основна частина

Тіло, виготовлене з прозорої речовини, обмежене двома поверхнями (у загальному випадку сферичної форми), називають оптичною лінзою. Лінзу називають тонкою коли її товщина нехтовно мала порівняно з радіусами кривизни поверхонь, що її обмежують, і відстанню предмета від лінзи. Лінза – це приклад найпростішої оптичної центрованої системи. В ній центри кривизни обох заломлюючих поверхонь знаходяться на одній прямій – головній оптичній осі.

При виведенні формули тонкої лінзи застосовують нульовий інваріант Аббе для обох сферичних заломлюючих поверхонь, що обмежують лінзу [2], [3]. В результаті отримуємо шукану формулу тонкої лінзи:

$$-\frac{1}{d}+\frac{1}{f}=\left(\frac{n_л}{n_{сер}}-1\right)\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right) \qquad (1)$$

де $n_л$ і $n_{сер}$ – абсолютні показники заломлення речовини лінзи і середовища, в якому вона знаходиться, відповідно;

d – відстань предмета від лінзи;

f – відстань від лінзи до зображення предмета;

R_1 - радіус кривизни поверхні, що обмежує лінзу, яка першою зустрічається на шляху світлового променя;

R_2 - радіус кривизни поверхні, що обмежує лінзу, яка другою зустрічається на шляху світлового променя.

Величини d, F, R_1 і R_2 - алгебраїчні, тобто можуть бути додатними і від'ємними. Для цих величин використовують правила знаків.

Правило знаків 1 (найбільш загальне).

Лінійні відрізки вздовж головної оптичної осі лінзи вважаються додатними, якщо напрям відліку їх від лінзи збігається з напрямом поширення світла, і від'ємними, якщо - в протилежний бік. Радіус кривизни поверхні вважається додатним, якщо напрям відліку від лінзи до центру кривизни збігається з напрямом поширення світла, і від'ємним, якщо - в протилежний бік.

Правило знаків 2 (менш загальне).

Якщо предмет розташувати ліворуч від лінзи, то головну оптичну вісь можна розглядати як числову вісь з нулем в оптичному центрі лінзи. Лінійні відрізки вздовж головної оптичної осі лінзи вважаються додатними, якщо вони знаходиться праворуч від лінзи і від'ємними, якщо – ліворуч. Радіус кривизни поверхні вважається додатним, якщо центр кривизни знаходиться праворуч від оптичного центру лінзи і від'ємним, якщо – ліворуч.

Права частина формули (1) називається оптичною силою лінзи D:

$$D=\left(\frac{n_л}{n_{сер}}-1\right)\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right) \qquad (2)$$

$$D=\frac{1}{F} \qquad (3)$$

де F - фокусна відстань.

Лінза називається збиральною якщо паралельні промені після заломлення в ній перетинаються в дійсній точці. Лінза є розсіювальною якщо паралельні промені після заломлення в ній стають розбіжними.

Фокусну відстань, а відповідно і оптичну силу збиральної лінзи вважають додатними, а розсіювальної - від'ємними.

DOI: https://doi.org/...

1. Проаналізуємо формулу (1) для двоопуклої лінзи. Для визначення знаків алгебраїчних величин в ній скористаємось правилом знаків 2 (див. рис. 1)

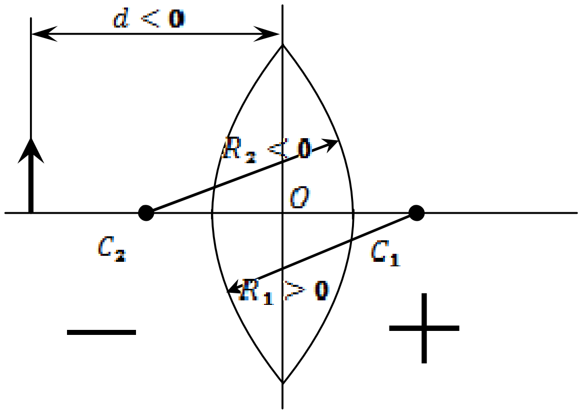


Рис. 1.: демонстрація правила знаків для двоопуклої лінзи. C_1 і C_2 – центри кривизни поверхонь, що обмежують лінзу.

Тоді права частина формули тонкої лінзи набуває вигляду:

$$D=\frac{1}{F}=\left(\frac{n_л}{n_{сер}}-1\right)\left(\frac{1}{|R_1|}-\frac{1}{-|R_2|}\right)=\left(\frac{n_л}{n_{сер}}-1\right)\left(\frac{1}{|R_1|}+\frac{1}{|R_2|}\right) \quad (4)$$

Звідки видно, що при $n_л>n_{сер}$ (надалі обмежимося цим випадком) оптична сила D і фокусна відстань F двоопуклої лінзи будуть додатними ($D>0$, $F>0$). Тобто така лінза буде збиральною (наприклад, скляна двоопукла лінза в повітрі).

Тоді, з урахуванням правила знаків, формула (1) набуває вигляду:

$$\frac{1}{|d|}+\frac{1}{f}=\frac{1}{|F|}\to f=\frac{|d|\cdot|F|}{|d|-|F|} \quad (5)$$

Із аналізу формули (5) маємо:

$$f>0,\ \text{при}\ |d|>|F| \quad (6)$$

$$f<0,\ \text{при}\ |d|<|F| \quad (7)$$

Це означає, що у випадку, коли предмет знаходиться за фокусом збиральної лінзи, його зображення буде дійсним. А коли предмет знаходиться між фокусом і збиральною лінзою, зображення буде уявним.

2. Проаналізуємо формулу (1) для двоввігнутої лінзи. Для визначення знаків алгебраїчних величин в ній скористаємось правилом знаків 2 (див. рис. 2)

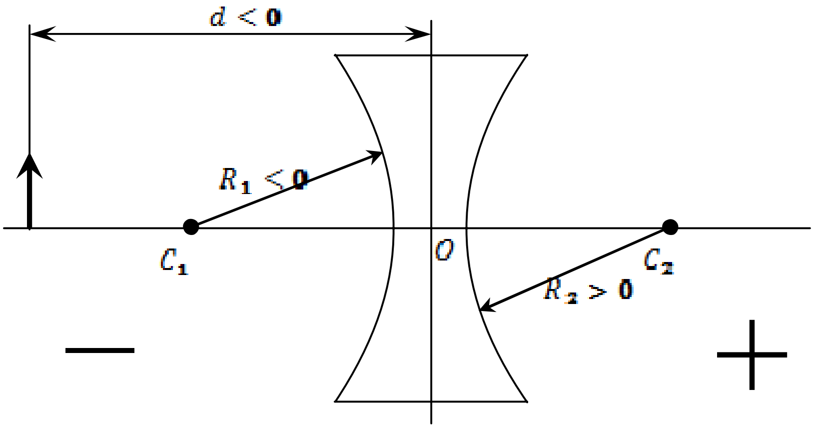


Рис. 2.: демонстрація правила знаків для двоввігнутої лінзи.

Тоді права частина формули тонкої лінзи набуває вигляду:

$$D=\frac{1}{F}=\left(\frac{n_л}{n_{сер}}-1\right)\left(-\frac{1}{|R_1|}-\frac{1}{|R_2|}\right)=-\left(\frac{n_л}{n_{сер}}-1\right)\left(\frac{1}{|R_1|}+\frac{1}{|R_2|}\right) \qquad (8)$$

Звідки видно, що при $n_л > n_{сер}$ (надалі обмежимося цим випадком) оптична сила D і фокусна відстань F двоввігнутої лінзи будуть від'ємними ($D<0, F<0$). Тобто така лінза буде розсіювальною (наприклад, скляна двоввігнута лінза в повітрі).

Тоді, з урахуванням правила знаків, формула (1) набуває вигляду:

$$\frac{1}{|d|}+\frac{1}{f}=-\frac{1}{|F|}\rightarrow f=-\frac{|d|\cdot|F|}{|d|+|F|} \qquad (9)$$

Із аналізу формули (9) маємо:

$f<0$, незалежно від співвідношення між $|d|$ і $|F|$ (10)

Це означає, що у розсіювальній лінзі зображення предмета завжди буде уявним.

Аналіз формул (4) і (8) свідчить про те, що при $n_л < n_{сер}$ двоопукла лінза стає розсіювальною, а двоввігнута – збиральною. Наприклад, таких же форм двоопукла і двоввігнута повітряні лінзи у воді.

Автори робіт [1] і [4] пропонують запис формули тонкої лінзи (1) у вигляді:

$$\frac{1}{d}+\frac{1}{f}=\left(\frac{n_л}{n_{сер}}-1\right)\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)=D=\frac{1}{F} \qquad (11)$$

У якій для алгебраїчних величин d, f, R_1, R_2, D і F використовують наступне правило знаків.

Правило знаків 3 (практичне).

Якщо лінза збиральна, то її фокусну відстань F вважають додатною. Коли ж лінза розсіювальна, то - від'ємною. Відстань f від лінзи до зображення додатна, якщо зображення дійсне, і від'ємна – коли уявне.

DOI: https://doi.org/...

Відстань d від предмета до лінзи додатна, якщо предмет дійсний, і від'ємна, коли він уявний, тобто коли на лінзу падає система збіжних пучків променів, і продовження променів кожного збіжного пучка перетинаються в деякій точці, яка є точкою уявного предмета [4].

Для опуклої поверхні лінзи радіус кривизни вважається додатним, а для ввігнутої – від'ємним.

Висновки

Аналіз для двоопуклої та для двоввігнутої лінз формули (11) із використанням *правила знаків 3* дає такі ж результати як і аналіз формули (1) із використанням *правила знаків 1*, або - *правила знаків 2*.

При виведенні формули тонкої лінзи в педагогічних закладах вищої освіти потрібно знайомити студентів з різними записами формули тонкої лінзи. Необхідно акцентувати увагу на використанні в них різних правил знаків при практичному застосуванні.

Література

1. Бар'яхтар В. Г., Божинова Ф. Я., Кірюхін М. М., Кірюхіна О. О. Фізика. 11 клас. Академічний рівень. Профільний рівень : підручник для загальноосвіт. навч. закл. Харків : Видавництво «Ранок», 2011. 320 с.
2. Кучерук І. М., Горбачук І. Т. Загальний курс фізики: навчальний посібник у 3 т. Т. 3: Оптика. Квантова фізика. Київ : Техніка, 1999. 520 с.
3. Ландсберг Г. С. Оптика. Москва : Наука, 1976. С. 272–301.
4. Нечволод М. К., Голоденко М. М., Прун А. Ф. Курс фізики. Оптика. Фізика мікрочастинок: навч. посібник. Київ : Просвіта, 2001. 322 с.

Volodymyr M. Tkachenko, Serhii O. Kostiuk, Yevheniia O. Cherevan
Donbas State Pedagogical University, Sloviansk, Ukraine;
Volodymyriv Lyceum of the Mezhiv Settlement Council, Demuryne village, Mezhivskyi district, Dnipropetrovsk region, Ukraine.

Analytical analysis of the simplest optical centered systems

The article demonstrates the application of the thin lens formula to the analysis of the simplest optical centered systems. At the same time, attention is focused on the use of sign rules.

Keywords: *the simplest optical centered systems, converging lens, diverging lens, sign rules, real image, imaginary image.*

УДК 373.5.016:531.1:51

Бєлошапка О.Я., Недоступ В.В.

[1.] *старший викладач кафедри фізики, ДВНЗ «ДДПУ»*

e-mail: kafedrafiziki2018@gmail.com, ORCID 0000-0001-7448-3832

[2] *здобувач магістерського РВО фізико-математичного факультету, ДВНЗ «ДДПУ»*

e-mail: vladislavnedostup@gmail.com, ORCID 0009-0002-2525-6849

ДО ПИТАННЯ ЗВ'ЯЗКІВ МАТЕМАТИКИ ТА ФІЗИКИ

Стаття присвячена розв'язанню задачі з механіки і наочно демонструє зв'язок математики і фізики.

Ключові слова: *механіка*, *похідна*, *механічний рух*, *кривина*, *викладання фізики*.

Вступ

Розв'язання задач механіки за допомогою можливостей аналізу є цікавим. Звичайна фізична задача розв'язується за допомогою геометрії.

Мета: показати використання міжпредметних зв'язків на прикладі задачі з механіки.

Основна частина

Матеріальна точка у полі сили тяжіння $\vec{g}$ рухається гладкою поверхнею $y = y(x)$. Знайти залежність координат точки від часу, а також модуль сили реакції в залежності від часу.

Вектор кривини кривої (як плоскої, так і просторової) природно визначити як похідну одиничного вектора дотичної за натуральним параметром:

$$\vec{k} = \frac{d\vec{\tau}}{dl}$$

Знайдемо напрямок вектора кривини

$$\vec{\tau} \cdot \vec{\tau} = \tau^2,$$

$$\frac{d\vec{\tau}}{dl} \cdot \vec{\tau} + \vec{\tau} \cdot \frac{d\vec{\tau}}{dl} = 0,$$

$$2 \cdot \left(\frac{d\vec{\tau}}{dl} \cdot \vec{\tau} \right) = 0,$$

$$\frac{d\vec{\tau}}{dl} \cdot \vec{\tau} = 0.$$

Зрозуміло, що вектор кривини перпендикулярний до одиничного вектора дотичної і спрямований у бік вогнутості кривої. Таким чином вектор кривини співнапрямлений з вектором головної нормалі кривої:

$$\vec{k} \uparrow\uparrow \vec{n}$$

Модуль вектора кривини $\vec{k}$.

$$k = \left|\frac{d\vec{\tau}}{dl}\right|.$$

Оскільки модуль відношення дорівнює відношенню модулів

$$k = \frac{\left|d\vec{\tau}\right|}{\left|dl\right|}.$$

Очевидно, що

$$\left|d\tau\right| = \left|\vec{\tau}\right| \cdot \left|d\varphi\right|.$$

Оскільки $\left|\vec{\tau}\right| = 1$, то

$$\left|d\tau\right| = \left|d\varphi\right|,$$

де $\left|d\varphi\right|$ – модуль приросту кута φ.

Маємо:

$$k = \frac{\left|d\varphi\right|}{\left|dl\right|}.$$

Важливою перевагою цієї формули є те, що вона отримана шляхом аналізу кривої незалежно від способу її задання.

Знайдемо вираз для $\left|d\varphi\right|$ і $\left|dl\right|$ у випадку якщо крива задана у декартових прямокутних координатах.

Відомо

$$\mathrm{tg}\,\varphi = \frac{dy}{dx} = y',$$

$$\varphi(x) = \mathrm{arctg}\, y',$$

$$\frac{d\varphi}{dx} = \left(\mathrm{arctg}\, y'\right)'_x,$$

$$\frac{d\varphi}{dx} = \frac{y'}{1 + \left(y'\right)^2}.$$

Таким чином модуль прирощення кута φ дорівнює

$$\left|d\varphi\right| = \frac{\left|y''\right|}{1 + \left(y'\right)^2} \cdot \left|dx\right|.$$

За теоремою Піфагора:

$$\left(dl\right)^2 = \left(dx\right)^2 + \left(dy\right)^2,$$

$$\left|dl\right| = \sqrt{\left(dx\right)^2 + \left(dy\right)^2}.$$

Замінимо $dy = y'dx$

$$|dl| = \sqrt{1+(y')^2} \cdot |dx|$$

Підставляємо і отримаємо

$$k = \frac{\dfrac{|y''|}{1+(y')^2} \cdot |dx|}{\sqrt{1+(y')^2} \cdot |dx|}.$$

Остаточно

$$k = \frac{|y''|}{\left(1+(y')^2\right)^{\frac{3}{2}}}.$$

Для задач фізики представляє інтерес природній зв'язок кривини з радіусом кривини:

$$k = \frac{1}{R}.$$

Радіус кривини кривої

$$R = \frac{\left(1+(y')^2\right)^{\frac{3}{2}}}{|y''|}.$$

Підкреслимо – ці формули для кривини та радіуса кривини справедливі лише в декартових координатах.

Також далі стануть в нагоді вирази для одиничного вектора дотичної і одиничного вектора нормалі.

За визначенням

$$\vec{\tau} = \frac{d\vec{l}}{|d\vec{l}|}$$

В декартовій системі координат можемо записати

$$d\vec{l} = dx \cdot \vec{i} + dy \cdot \vec{j},$$

де $d\vec{l}$ є вектор направлений у бік руху точки. Ми вважаємо, що точка рухається в додатному напрямку вісі Ox. Це означає що $dx > 0$

Отримаємо

$$\vec{\tau} = \frac{dx}{\sqrt{1+(y')^2}dx} \cdot \vec{i} + \frac{dy}{\sqrt{1+(y')^2}dx} \cdot \vec{j}$$

до кривої. Замінюючи $dy = y'dx$ і скоротивши отримаємо:

$$\vec{\tau}(x) = \frac{1}{\sqrt{1+(y')^2}} \cdot \vec{i} + \frac{y'}{\sqrt{1+(y')^2}} \cdot \vec{j}.$$

Таким чином ми отримали вираз для одиничного вектора дотичної, направленого в бік збільшення координати x.

Якщо б ми захотіли отримати одиничний вектор дотичної напрямлений в бік зменшення x, то зробивши ті ж самі кроки, очевидно, отримали б

$$\vec{\tau}(x) = \frac{-1}{\sqrt{1+(y')^2}} \cdot \vec{i} + \frac{y'}{\sqrt{1+(y')^2}} \cdot \vec{j}.$$

Перейдемо до відшукання одиничного вектора нормалі – вектора з одиничним модулем, який напрямлений в бік опуклості кривої. Одиничний вектор нормалі знайдемо з умови $\vec{\tau} \cdot \vec{n} = 0$, а також того факту, що вектор нормалі повинен бути направлений в бік опуклості кривої.

Проміжки опуклості кривої визначаються точками перегину які знаходяться. за відомими правилами математичного аналізу. Після того як виявлені проміжки опуклості необхідно проаналізувати $\vec{\tau} \cdot \vec{j}$ і визначити знак проекцій вектора нормалі. Цим повністю визначається одиничний вектор нормалі. Після аналізу геометричної сторони питання далі легко перейти до фізичної суті задачі.

Другий закон Ньютона має вигляд:

$$\vec{F} = m\frac{d\vec{v}}{dt}.$$

Стосовно нашої задачі

$$m\vec{g} + \vec{N} = m\frac{d\vec{v}}{dt}.$$

Спроектуємо 2-й закон Ньютона на дотичну і нормаль.

Проекція на дотичну:

$$m\frac{dv}{dt} = m\vec{g} \cdot \vec{\tau},$$

$$\frac{dv}{dt} = \vec{g} \cdot \vec{\tau}.$$

Проекція на нормаль:

$$m\frac{v^2}{R} = m\vec{g} \cdot \vec{n} - N.$$

Можемо знайти модуль сили реакції N як функцію координати x:

$$N(x) = m\vec{g} \cdot \vec{n} - m\frac{v^2}{R}.$$

Так як тертя відсутнє – справедливий закон збереження повної механічної енергії

$$E = const$$

$$\frac{mv^2}{2} + mgy = const$$

Із ЗЗЕ знайдемо залежність модуля швидкості від координати y:

$$v = v(y).$$

Вектор прискорення вільного падіння вважаємо відомим і направленим перпендикулярно до вісі Ox.

Таким чином – ми знаємо все, що необхідно для знаходження модуля сили реакції

$$N(x) = m\vec{g} \cdot \vec{n} - m\frac{v^2}{R}.$$

Сила реакції опори направлена протилежно одиничному вектору нормалі

$$\vec{N} = -N \cdot \vec{n}$$

Знаючи вектор сили реакції опори і вектор сили тяжіння – легко запишемо другий закон Ньютона, але вже в проекціях на вісі координат

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -N \cdot \left(\vec{n} \cdot \vec{i}\right).$$

Розв'язуючи це рівняння знайдемо залежність координати x від часу $x = x(t)$.

Знаючи $y = y(x)$ підстановкою знайдемо залежність координати у від часу $y = y(t)$.

Таким чином завдяки засобам геометрії ми без великого клопоту розв'язали задачу про рух матеріальної точки

Висновки

На прикладі поданої задачі можна наочно продемонструвати тісний та невід'ємний зв'язок фізики з математикою. Задачі такого типу стають в нагоді при роботі:

– у профільних класах;

– у індивідуальній роботі з обдарованими дітьми;

розширення загального світогляду здобувачів освіти у ЗЗСО та ЗВО.

– під час організації та проведення факультативних занять

Зважаючи на це, принципово важливим є формування навичок певного рівня з математики задля свідомого сприйняття та побудови математичних моделей. Беручи до уваги очевидну доступність запропонованої задачі, для розуміння здобувачами ЗЗСО, за перспективу подальших досліджень маємо пошук та використання аналогічних задач практичного спрямування у навчальному процесі з фізики.

Матеріал цієї теми сприяє активізації пізнавальної і розумової діяльності учнів, підвищує їхній інтерес і успішність у навчанні, сприяє свідомому вибору майбутньої професії.

Література

1. Програма фізики для середніх навчальних закладів.
2. Ландсберг Г.С. Елементарний підручник фізики. – К.: Радянська школа, 1967. – 456 с.
3. Бевз В. Міжпредметні зв’язки як необхідний елемент предметної системи навчання.// Ма тематика в школі.
4. Бар’яхтар В.Г. Фізика. 11 клас. Академічний рівень. Профільний рівень : Підручник для загальноосвіт. навч. закл. / В.Г. Бар’яхтар, Ф.Я. Божинова, М. М. Кірюхін, О. О. Кірюхіна. – Х. : Видавництво «Ранок», 2011. – 320 с.
5. Коршак Є.В., Ляшенко О.І., Савченко В.Ф. Фізика. 10 клас. Рівень стандарту : Підручник. – К.: Генеза, 2012. – 192 с.

Oleksandr Ya. Beloshapka, Vladislav Nedostup
Donbas State Pedagogical University, Sloviansk, Ukraine

To the question of connections of the mathematics and physics

The article is devoted to the solution of mechanics problem and it clearly demonstrates a connection of the mathematics and physics.

Keywords: *mechanics, mechanical movement, radius of curvature, teaching of physics.*

УДК 373.5.016:530.145

Войнов О.Л., Бєлошапка О.Я.

[1] *старший учитель, фахівець вищої категорії, учитель фізики, астрономії та інформатики, Миколаївський ЗЗСО І-ІІІ ст. №3 Миколаївської міської ради Краматорського р-ну Донецької обл.*

e-mail: bytic2010@gmail.com, ORCID 0000-0002-1082-6565

[2] *старший викладач кафедри фізики, ДВНЗ «ДДПУ»*

e-mail: kafedrafiziki2018@gmail.com, ORCID 0000-0001-7448-3832

ДО ВИВЧЕННЯ КВАНТОВОЇ ТЕОРІЇ В КУРСІ ФІЗИКИ В СЕРЕДНІХ НАВЧАЛЬНИХ ЗАКЛАДАХ

В статті розглядаються звідродження квантової теорії, проблема пояснення теплового випромінювання, гіпотеза Планка, світлові кванти. Автори пропонують матеріал з цієї теми, який можна використовувати під час проведення уроків.

Ключові слова: *теплове випромінювання, поглинання, абсолютно чорне тіло, ультрафіолетова катастрофа, кванти світла, фотони, гіпотеза Планка, квантова фізика, квантова теорія*.

Вступ

Роль сучасної школи полягає у формуванні гармонійної інноваційної особистості, яка здатна навчатися протягом життя та вміє орієнтуватися у навколишньому середовищі. З такої точки зору фізика як предмет корисна насамперед через потужний інструмент розвитку мислення та формування світогляду.

При вивченні багатьох фізичних явищ необхідно враховувати, що деякі фізичні величини, які вважалися раніше безперервними, складаються з елементарних квантів. Термін «квант» з'явився у фізиці в 1900 році завдяки роботам Макса Планка. Він намагався теоретично описати випромінювання, що випускається нагрітими тілами, — так зване «випромінювання абсолютно чорного тіла», здатного поглинати і випускати електромагнітне випромінювання, що падає на нього. Це й лягло в основу нової теорії.

У статті пропонується матеріал, який можна використовувати на першому уроці з вивчення квантової фізики. На основі цього матеріалу у учнів формується поняття кванта світла як мінімальної порції енергії електромагнітного випромінювання.

Основна частина

Тема. Квантова фізика. Зародження квантової теорії. Проблема пояснення теплового випромінювання. Гіпотеза Планка. Світлові кванти.

Мета. Сформувати у школярів поняття кванта світла як мінімальної порції енергії електромагнітного випромінювання.

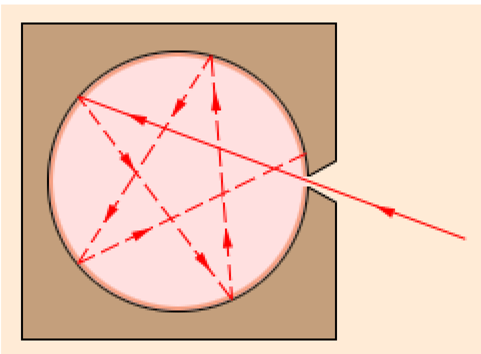
1. Повторити з матеріалу, що вивчений раніше електромагнітні хвилі, умови найефективнішого випромінювання цих хвиль.

2. Відзначити, що відкриття електромагнітних хвиль, вивчення їх властивостей та законів поширення показали, що основні властивості світла пояснюються електромагнітною теорією. Однак для повної перемоги електромагнітна теорія повинна була дати роз'яснення не лише закономірностям поширення світла, а й законам випромінювання та поглинання світла речовиною.

Існує багато різних механізмів підведення енергії до джерела світла. У випадках, коли необхідна енергія подається нагріванням, т. е. підведенням тепла, випромінювання називається тепловим чи температурним. Теплове випромінювання – це електромагнітне випромінювання, що виникає внаслідок внутрішньої енергії тіла. Таке випромінювання фізики кінця XIX століття важали дуже цікавим, бо на відміну від інших видів люмінесценції, теплове випромінювання може перебувати в стані термодинамічної рівноваги з нагрітими тілами.

Вивчаючи закономірності теплового випромінювання тіл, фізики сподівалися встановити взаємозв'язок між термодинамікою та оптикою. Якщо в замкнуту порожнину з дзеркально відбивають стінками помістити кілька тіл, нагрітих до різної температури, то, як показує досвід, така система з часом приходить у стан теплової рівноваги, при якому всі тіла набувають однакової температури. Тіла обмінюються енергією тільки шляхом випромінювання та поглинання променистої енергії. У стані рівноваги процеси випромінювання і поглинання енергії кожним тілом в середньому компенсують один одного, і в просторі між тілами густина енергії випромінювання досягає певного значення, що залежить тільки від температури тіл. Випромінювання, що відбувається в термодинамічній рівновазі з тілами, що мають певну температуру, називається рівновісним або чорним випромінюванням. Густина енергії рівновісного випромінювання та його спектральний склад залежить тільки від температури.

3. Підкреслити, що на початку XX ст. увагу і найбільший інтерес фізиків займали закономірності випромінювання нагрітих тіл, властивості яких схожі на властивості абсолютно чорного тіла, тобто тіла, яке цілком поглинає електромагнітне випромінювання, що падає на нього, з будь-якою довжиною хвилі.



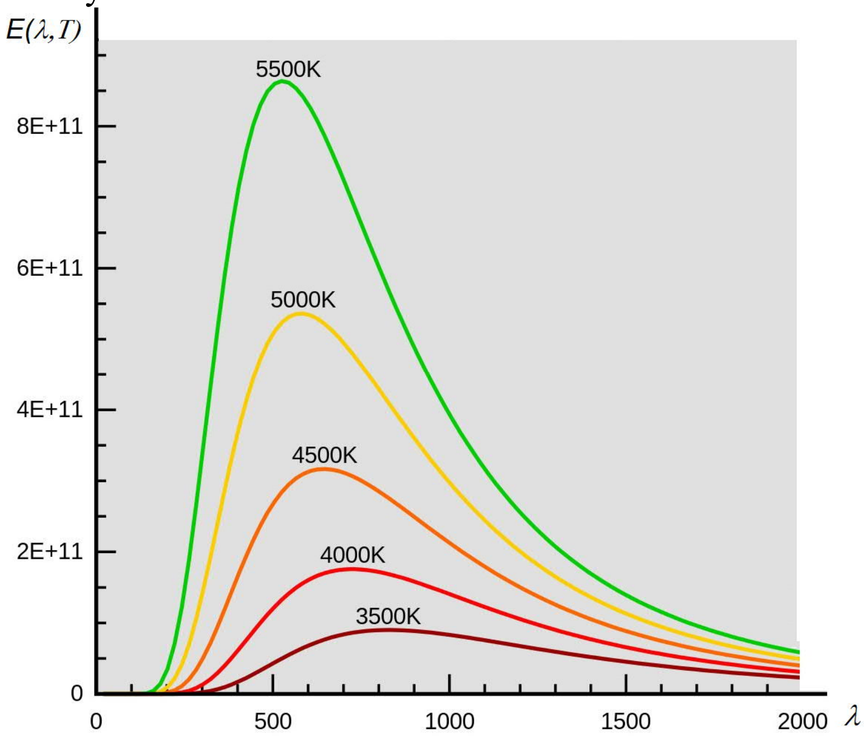
Моделлю чорного тіла може служити пустий посуд довільної форми, (куля або циліндр) з отворами в стінках. Отвори такі малі, що промінь світла, що проникла в цю посудину, практично повністю поглинається багаторазово відбиваючись від його стінок і не може вийти назовні.

Абсолютно чорних тіл у природі не буває. Хорошою моделлю такого тіла є невеликий отвір замкнутої порожнини (рис. 1).

Світло, що падає через отвір всередину порожнини, після численних відбитків буде практично повністю поглинене стінками, і отвір буде здаватися зовсім чорним. Якщо порожнина нагріта до певної температури Т і всередині встановилася теплова рівновага, то власне випромінювання порожнини, що виходить через отвір, буде випромінюванням абсолютно чорного тіла. Саме таким чином у всіх експериментах дослідження теплового випромінювання моделюється абсолютно чорне тіло.

4. Відзначити, що експериментально було встановлено, що чорне нагріте тіло випромінює електромагнітні хвилі всіх частот. Але енергія випромінювання розподіляється не рівномірно; дуже довгі та дуже короткі хвилі несуть мало енергії; найбільша енергія належить хвилям певної довжини. Ця довжина хвилі залежить від температури тіла. Так для сонячного випромінювання з температурою поверхні приблизно 6000 К максимум посідає на жовто-зелену область видимого світла. Площа фігури, обмежена графіком та віссю абсцис, пропорційна повній енергії, що випромінюється тілом за одиницю часу.

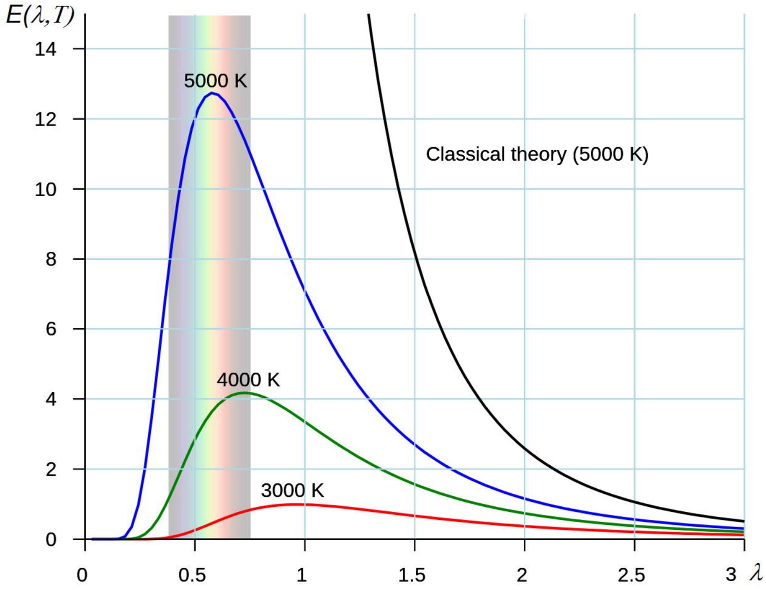
5. Підкреслити, що експериментальні дослідження показали, що загальний характер графіка зі зміною температури не змінюється, але максимум кривої за меншої температури зміщується у бік менших частот або довших хвиль $\lambda = cT = \frac{c}{\nu}$, а повна енергія випромінювання (площа, обмежена графіком) зменшується.



Фізики намагалися теоретично знайти рівняння, що відповідає цьому графіку, тобто узгоджується з експериментом. Було зроблено пропозицію, що теплове електромагнітне випромінювання здійснюється електронами, що коливаються всередині атомів. Розрахунки були зроблені на основі суворого

DOI: https://doi.org/...

застосування законів електродинаміки Максвелла та статичної фізики, але результат призвів до повної суперечності з досвідом. Графік кривої спектрального розподілу енергії, що відповідає формулі, круто йшов угору.



Це означало, що повна енергія, що випромінюється тілом за одиницю часу, нескінченно велика; фізично це означало, що тіло віддаючи енергію має охолоджуватися до абсолютного нуля і ніякої рівноваги між випромінюючим тілом і випромінюванням не існує, що суперечить дійсності. Теоретична та експериментальна крива розподілу енергії різко розходилися у області високих частот, що образно було названо П. Еренфестом як «ультрафіолетова катастрофа».

6. Відзначити, що розбіжності теоретичного рівняння з досвідом вказувало на існування якихось закономірностей, несумісних із представленими електродинаміками та класичної статистики.

Займаючись цією проблемою, М. Планк підібрав формулу, що відповідає експериментальній кривій. Але, щоб вивести «щасливо вгаданий закон» з теоретичних міркувань, Планку довелося зробити припущення про те, що енергія електрона в атомі може приймати не будь-які, а лише деякі дискретні значення, кратні величині $E_0 = h\nu$. При випромінюванні світла енергія електрона стрибком змінюється на величину $E_0 = h\nu$. Планк дійшов висновку, що процеси випромінювання та поглинання електромагнітної енергії нагрітим тілом відбуваються не безперервно, як це приймала класична фізика, а кінцевими порціями – *квантами*. Квант – це мінімальна порція енергії, що випромінюється або поглинається тілом. За теорією Планка, енергія кванта E прямо пропорційна частоті світла:

$$E = h\nu$$

де h – так звана *стала Планка*. $h = 6{,}626 \cdot 10^{-34}$ Дж · с. Стала Планка – це універсальна константа, яка у квантовій фізиці відіграє ту ж роль, що й швидкість світла у СТВ.

На основі гіпотези про переривчастий характер процесів випромінювання та поглинання тілами електромагнітного випромінювання Планк отримав формулу для спектральної світності абсолютно чорного тіла. Формулу Планка зручно записувати у формі, що виражає розподіл енергії у спектрі випромінювання абсолютно чорного тіла за частотами, а не за довжинами хвиль λ.

$$\lambda = cT = c\frac{1}{\nu} = \frac{c}{\nu}, \qquad E = h\nu = h\frac{c}{\lambda}$$

$$r(\nu, T) = \frac{2\pi\nu^2}{c^2} \cdot \frac{h\nu}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1}.$$

У цій формулі c – швидкість світла, h – стала Планка, k – стала Больцмана, T – абсолютна температура.

7. Підкреслити, що якщо прийняти цю гіпотезу, то треба укласти, що електрон, що коливається в атомі, може випускати і поглинати не довільну порцію енергії, а тільки ціле число елементарних порцій $E_0 = h\,\nu$. Отже електромагнітне випромінювання відбувається у вигляди окремих порцій, які отримали назву *світлових квантів*.

8. Звернути увагу на те, що електродинаміка Максвелла, яка правильно пояснює випромінювання електромагнітних хвиль електронами, що коливаються у дроті, виявилося непридатною до електронів в атомі. Закон квантів енергії $E_0 = h\nu$ Планка був продовженням колишньої фізики, а переворотом у ній. Наступні десятиліття все ясніше показували наскільки глибокий був цей переворот і наскільки він був необхідний. Саме за допомогою теорії квантів стало можливим розуміння атомних явищ» (М. Лауе «Історія фізики»)

9. Повторити основні найважливіші моменти матеріалу, що вивчається, зробити короткі висновки, відповісти на запитання.

Додаток

До кінця 90-х років XIX століття були виконані ретельні експериментальні вимірювання спектрального розподілу випромінювання абсолютно чорного тіла, які показали, що при кожному значенні температури T залежність $r(\lambda, T)$ має яскраво виражений максимум (рис. 2). Зі збільшенням температури максимум зміщується в область коротких довжин хвиль, причому добуток температури T на довжину хвилі λ_m, що відповідає максимуму, залишається незмінним:

$$\lambda_m T = b \quad \text{або} \quad \lambda_m = b/T.$$

Це співвідношення раніше було отримано Вином із термодинаміки. Воно виражає так званий закон усунення Вина: довжина хвилі λ_m, на яку припадає максимум енергії випромінювання абсолютно чорного тіла, обернено пропорційна абсолютній температурі *T*. Значення сталої Вина

$$b = 2{,}898 \cdot 10^{-3}\ м\,К$$

Для температур які можна практично досягнути у лабораторних умовах максимум випромінювальної здатності $r(\lambda, T)$ лежить в інфрачервоній ділянці. Тільки при $T \geq 5000$ К максимум потрапляє у видиму область спектра. Максимум енергії випромінювання Сонця припадає приблизно на 470 нм (зелена область спектру), що відповідає температурі зовнішніх шарів Сонця близько 6200 К (якщо Сонце розглядати як абсолютно чорне тіло).

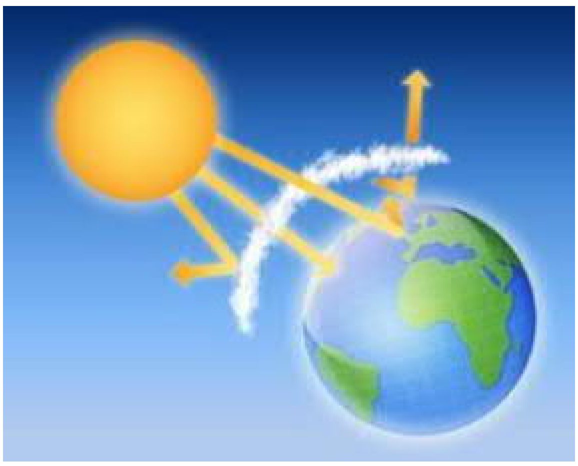
Через п'ять років А. Ейнштейн, узагальнивши ідею Планка, показав, що квантованість є загальною властивістю електромагнітного випромінювання. Згідно з ідеями Ейнштейна електромагнітне випромінювання складається з квантів, названих пізніше *фотонами*. Кожен фотон має певну енергію та імпульс.

Знання законів випромінювання та поглинання енергії тілами має важливе значення.

Теплове випромінювання Землі (інфрачервоне) поглинається атмосферою, внаслідок чого створюється сприятливий для життя тепловий режим. Таке явище прийнято називати парниковим ефектом.

Теплове випромінювання, що відіграє важливу роль у житті живих організмів поділяється на короткохвильову (від 0,3 до 3 мкм) і довгохвильову (від 5 до 100 мкм) частини. Джерелом короткохвильового випромінювання є Сонце і відкрите полум'я, а живі організми є виключно реципієнтами такого випромінювання. Довгохвильова радіація і випромінюється, і поглинається живими організмами.

Величина коефіцієнта поглинання залежить від співвідношення температур середовища і тіла, площі їх взаємодії, орієнтації цих площ, а короткохвильового випромінювання – від кольору поверхні. Так у людей білої раси поверхня шкіри відбиває близько 40% короткохвильового випромінювання, тоді як шкіра представників негроїдної раси лише 18% (швидше за все, колір шкіри негрів в еволюції не мав відношення до теплообміну). Для довгохвильового випромінювання коефіцієнт поглинання наближений до 1.



У ясний сонячний день на поверхню Землі надходить ~ 10% ультрафіолетового випромінювання, ~ 45% – видиме випромінювання, ~ 45% – інфрачервоного. Фотосинтетично активна радіація (ФАР) відповідає смузі видимого світла. ФАР використовується рослинами (фотосинтез) і становить близько 50% від сумарної енергії сонячного випромінювання (зелені рослини використовують синє та червонє, а відбивають зелене та інфрачервоне)). Потужність потоку сонячного випромінювання, що досягає земної поверхні, дорівнює 150 Вт/м^2 . Температура поверхні Сонця 6000 K, температура поверхні Землі 300 K; кожен фотон сонячного випромінювання дає 20 теплових фотонів. Життя на Землі як упорядкований процес, засновано на використанні сонячного випромінювання.

Висновки

Матеріал цього уроку є дуже важливим тому, що він уперше знайомить учнів із поняттям кванта світла, енергії кванта. Опанувавши матеріал, учні приходять до висновку, що процеси випромінювання та поглинання електромагнітної енергії нагрітим тілом відбуваються не безперервно, як це приймала класична фізика, а кінцевими порціями – *квантами*. Квант - це мінімальна порція енергії, що випромінюється або поглинається тілом.

Розвинувши та поглибивши ідею М.Планка, Ейнштейн дійшов висновку, що світло має не тільки випромінюватись та поглинатися, а й поширюватись у вигляді окремих порцій енергії – квантів електромагнітного поля (фотонів). Він вважав, що при взаємодії з речовиною фотон поводиться подібно до частки і передає свою енергію не речовині в цілому і навіть не атому, а лише окремим електронам.

Поняття кванта світла допоможе учням вивчення інших явищ природи, таких як фотоефект, тиск світла, хімічна дія світла, квантове розсіювання світла (ефект Комптона).

Важливість теми, на нашу думку, у тому, що квантова фізика викладається у 11 класі – на завершальному етапі вивчення фізики. Саме розділи квантової фізики формують цілісну картину світу та завершують формування світогляду учнів.

Матеріал неодноразово використовувався авторами під час проведення уроків фізики та факультативних занять з цієї теми у різні роки.

Література

1. Програма «Фізика 10-11» (рівень стандарту та профільний рівень), авторського колективу Національної академії наук України під керівництвом Локтєва В.М. Наказ МОН від 24.11.2017 №1539.
2. Савельев И.В. Курс общей физики. Том 3. М. : Наука, 1987. – 320 с.
3. Сущенко С.С. Викладання квантових властивостей світла у школі. Х. : Основа, 2007. – 144 с.

4. Бар'яхтар В.Г., Божинова Ф.Я. та ін. Фізика 11 кл. Академічний рівень. Профільний рівень. Х. : Відавництво «Ранок», 2011. – 320 с.
5. Фізика в школах України Науково-методичний журнал № 5–6 березень 2015 р. Збаратський Д.О. Рівняння Енштейна. Кванти світла. 11 клас. с. 65
6. Войнов О.Л., Бєлошапка О.Я. До вивчення явища фотоефекту та його законів у курсі фізики в середніх навчальних закладах. Професіоналізм педагога: теоретичні й методичні аспекти. 2018. №. 7. С. 201–210. URL: http://pptma.dn.ua/index.php/uk/arkhiv-vipuskiv/za-2018-rik/vipusk-7-2018/685-do-vivchennya-yavishcha-fotoefektu-ta-jogo-zakoniv-u-kursifiziki-v-serednikh-navchalnikh-zakladakh
7. Войнов О.Л., Бєлошапка О.Я. Тиск світла та його особливості. Досвіди Лебедєва. Збірник наукових праць фізико-математичного факультету ДДПУ 2020 №10 С.129-138
8. Войнов О.Л., Бєлошапка О.Я., Лимарєва Ю.М. Комптоновське розсіювання світла та його значення для розвитку квантової теорії. Збірник наукових праць фізико-математичного факультету ДДПУ 2020 №10 С.139-151.

Oleg Voinov, Oleksandr Beloshapka
Mykolajiv establishment of general secondary education I-III degrees No. 3 of Mykolajiv city council of Slavic district of Donetsk region, Ukraine;
Donbas State Pedagogical University, Slovians'k, Ukraine.

To the study of quantum theory in the course of physics in secondary educational institutions

This article deals withthe birth of quantum theory, the problem of explaining thermal radiation, Planck's hypothesis, light quanta. The authors offer material on this topic that can be used in the lessons.

Keywords: *thermal radiation, absorption, absolutely black body ultraviolet catastrophe, light quanta, photon, Planck's hypothesis, quantum physics, quantum theory.*

Інформатика та методика її навчання

УДК 37:004.4

Величко В.Є., Ананьєв М.С., Іванюк С.В., Шеремет М.М.
[1] *канд. фіз-мат. наук, докт. пед. наук, професор кафедри МНМ та МНІ, ДВНЗ «ДДПУ»*
e-mail: velichko@ddpu.edu.ua, ORCID 0000-0001-9752-0907
[2] *здобувач магістерського РВО фізико-математичного факультету, ДВНЗ «ДДПУ»*
e-mail: i.am.nick.ua@gmail.com, ORCID 0009-0009-5588-6893
[3] *здобувач магістерського РВО фізико-математичного факультету, ДВНЗ «ДДПУ»*
e-mail: srg.ivanuk@gmail.com, ORCID 0009-0003-5157-7002
[4] *здобувач магістерського РВО фізико-математичного факультету, ДВНЗ «ДДПУ»*
e-mail: mehastii@gmail.com, ORCID 0009-0006-1953-9016

ЕЛЕКТРОННЕ НАВЧАННЯ У ПРОЦЕСІ ВИВЧЕННЯ ПРОГРАМУВАННЯ

Інформатизація освіти є складним та неспинним процесом проходження якого є природнім запитом інформаційного суспільства до освіти. У навчальний процес додано не тільки комп’ютерне обладнання та програмне забезпечення, що реалізує інформаційні технології. Додано різноманітні підходи щодо організації навчального процесу які виникли під час розвитку комп’ютерних наук і довели свою ефективність. Видозмінились і наочні матеріали з появою електронних освітніх ресурсів, що в сою чергу спричинило нові питання їх гармонійного застосування у начальній діяльності, питання співвідношення між традиційними формами та засобами навчання та електронними та або тими, що базуються на них. У статті розглядаються питання застосування технологій та засобів електронного навчання у процесі вивчення програмування.

Ключові слова: *самостійна робота, пізнавальна діяльність, активність учнів, виховання особистості.*

Вступ

Постановка проблеми. Підготовка фахівців різних галузей та напрямів діяльності має свою специфіку. Не є виключенням і вивчення програмування. Наразі існують різноманітні методи та засоби вивчення програмування. Враховуючи зростання кількості електронних освітніх ресурсів, що використовують різні технології навчання постає питання їх огляду з позиції електронного навчання. Експерти ЮНЕСКО вважають, що для відповідності кваліфікації працівників до рівня інформаційного суспільства, необхідне впровадження в освітній процес електронного навчання, що орієнтує учнів на новий стиль освіти та сприяє розвитку їх умінь та навичок для подальшого навчання протягом усього життя [1].

Впродовж останніх років розроблено та впроваджено у навчальний процес достатню кількість електронних освітніх ресурсів. Є серед них і ті, що використовуються під час вивчення програмування. До таких електронних освітніх ресурсів відносяться не лише електронні варіанти підручників та навальних посібників. Більшість електронних освітніх ресурсів, що використовують у процесі вивчення програмування має інтерактивні компоненти за допомогою яких не тільки організовано визначення рівня засвоєння навчального матеріалу через тестування, а й широко застосована можливість запуску вихідного коду мовою програмування. Прикладом такого електронного освітнього ресурсу є документація до мови програмування JavaScript від Mozilla Foundation [2]. Окрім того є електронні освітні ресурси що перевіряють правильність вирішення задачі шляхом компілювання вихідного коду та його запуску на тестових даних. Прикладом такого електронного освітнього ресурсу є Eolymp (eolymp.com). Таким чином, електронне навчання накопичило достатню кількість ресурсів та технологій як для освітньої діяльності взагалі так і для вивчення програмування зокрема і постає питання у аналізі можливостей електронних освітніх ресурсів та шляхів їх застосування під час вивчення програмування.

Мета статті полягає у дослідження засобів та методів електронного навчання що використовуються під час вивчення програмування.

Основна частина

Останнім часом з’явилась велика кількість термінів, що пов’язані із застосуванням комп’ютерних систем в освітній діяльності. Зрозуміло, що поява будь-чого нового вимагає від користувачів достатньо часу для того, щоб термінологія стала загальноприйнятною. Тож визначимо електронне навчання як форма навчання, в якій використовуються інформаційні технології та електронні засоби для передачі знань та навичок. Наявність доступу до мережі інтернет або будь-яких інших цифрових мереж передачі даних не є обов’язковою вимогою. Більш докладно про походження та розвиток термінології електронного навчання висвітлено у дослідженні авторів Задорожна А.Д. та Гнатишена І.М. [3].

До особливостей електронного навчання варто віднести:

- доступність і гнучкість. Електронне навчання дозволяє студентам навчатися в зручний для них час і темп. Вони можуть вивчати матеріал вдома, на роботі або будь-де, де є доступ до комп’ютерної техніки;
- інтерактивність. Багато електронних освітніх ресурсів для електронного навчання надають можливість взаємодії з матеріалами та завданнями. Студенти можуть розв'язувати вправи, виконувати практичні завдання, спілкуватися з іншими студентами та викладачами через форуми та чати;
- самостійність. Електронне навчання дозволяє студентам керувати своїм власним навчанням, вибирати курси, які їх цікавлять, і працювати з навчальними матеріалами на своєму рівні;
- відстеження прогресу. Багато електронних освітніх ресурсів надають можливість відстежувати прогрес студентів, включаючи результати тестів та завдань, що надає можливість оцінити їхні досягнення;
- можливості для багатомовного навчання. Деякі електронні освітні ресурси підтримують локалізацію на різні мови, що робить їх доступними для студентів з різних країн;
- доступ до кращих світових практик. Можливість використовувати

електронні освітні ресурси, що розроблені кращими викладачами та науковими школами світу.

Багатогранність електронного навчання надає можливість використовувати різноманітні електронні освітні ресурси під час вивчення програмування. Розглянемо деякі приклади засобів електронного навчання, що можуть бути використані під час вивчення програмування як під час формального навчання так і під час самоосвітньої діяльності.

- онлайн-курси. На великій кількості платформ доступні різноманітні за складністю та направленістю навчальні матеріали за допомогою яких можливо вивчати різні мови програмування та техніки розробки програмного забезпечення. Ці курси можуть включати відеоуроки, інтерактивні завдання, підказки та можливість взаємодії з викладачем або іншими студентами тощо. Деякі платформи мають поділ на вікові групи і можуть містити завдання в ігровій формі. Є платформи, що готують до розв’язування конкретного типу задач. Є ті, що дають фундаментальну підготовку.
- відеоуроки. Багато відеоуроків на платформах, таких як YouTube, присвячені вивченню конкретних мов програмування, бібліотек, фреймворків та різних аспектів розробки програмного забезпечення. Відеоуроки корисні при вивченні конкретного вузького питання або навіть конкретної задачі одним з методів.
- інтерактивні середовища. Деякі веб-сайти надають інтерактивні середовища, де ви можете виконувати код прямо у браузері, тестувати його та спостерігати за результатами негайно. Такі платформи як Programiz, OnlineGDB, replit та інші надають можливість запускати вихідний код різними мовами програмування, причому підтримується підключення додаткових бібліотек, у тому числі й не стандартних.
- онлайн-платформи для вирішення задач. Деякі платформи, як Eolymp, LeetCode, HackerRank, CodeSignal та інші, надають вправи та завдання з програмування, що допомагають вам вдосконалити свої навички розв'язання задач та алгоритмічної роботи. Задачі поділено на категорії, перевірка правильності виконання завдання відбувається через компілювання вихідного коду та його запуску з набором тестових завдань. Ці системи не передбачають аналіз вихідного коду, а порівнюють отримані результати з контрольними тестовими відповідями.
- електронні книги та ресурси. Ви можете знайти безкоштовні або платні електронні книги, підручники та ресурси з програмування, які можна вивчати онлайн або завантажити для офлайн-використання. Електронні підручники повинні містити інтерактивні елементи для проміжного контролю засвоєння отриманих знань та навичок. Не треба виключати з цього процесу і електронні версії класичних друкованих підручників з програмування.
- спільноти та форуми. Онлайн-спільноти, такі як Stack Overflow, GitHub, Reddit та інші, де ви можете знайти відповіді на питання,

обговорювати проблеми та ділитися знаннями з іншими програмістами. Не завжди спілкування в онлайн-спільнотах приносить певні результати, тим не менш, у більшості варіантів обговорення задач та алгоритмів їх вирішення є корисним досвідом вивчення програмування.

Сучасні освітні тенденції не обходять стороною і вивчення програмування. Прикладом освітнього тренду є гейміфікація. По різному можна відноситись до такої технології навчання, тим не менш вона наразі входить до переліку світових освітніх трендів [4]. Ковтанюк М.С. та Тітова Л.О. пропонують використовувати такі ресурси як Kodable (kodable.com), CheckiO (checkio.org) та Blockly Games (blockly.games) [5]. Медведєва М.О., Жмурко О.І., Криворучко І.І. та Ковтанюк М.С. пропонують до використання CodinGame (codingame.com), CodeCombat (codecombat.com), CodeMonkey (codemonkey.com), Codewars (codewars.com), Hacker.org (hacker.org), Vim Adventures (vim-adventures.com), Elevator Saga (play.elevatorsaga.com) [6]. Кількість електронних освітніх ресурсів за допомогою яких вивчають програмування застосовуючи гейміфікацію наведеним переліком не обмежується, варто хоча б навести відомий ресурс Code.org (code.org/) на якому наявні курси, що базуються на гейміфікації з улюбленими анімаційними дитячими героями (див. рис.1). При цьому навчання на цих курсах не переобтяжене знаннями, а направлене на розвиток аналітичних здібностей, критичного мислення та формування алгоритмічного мислення.

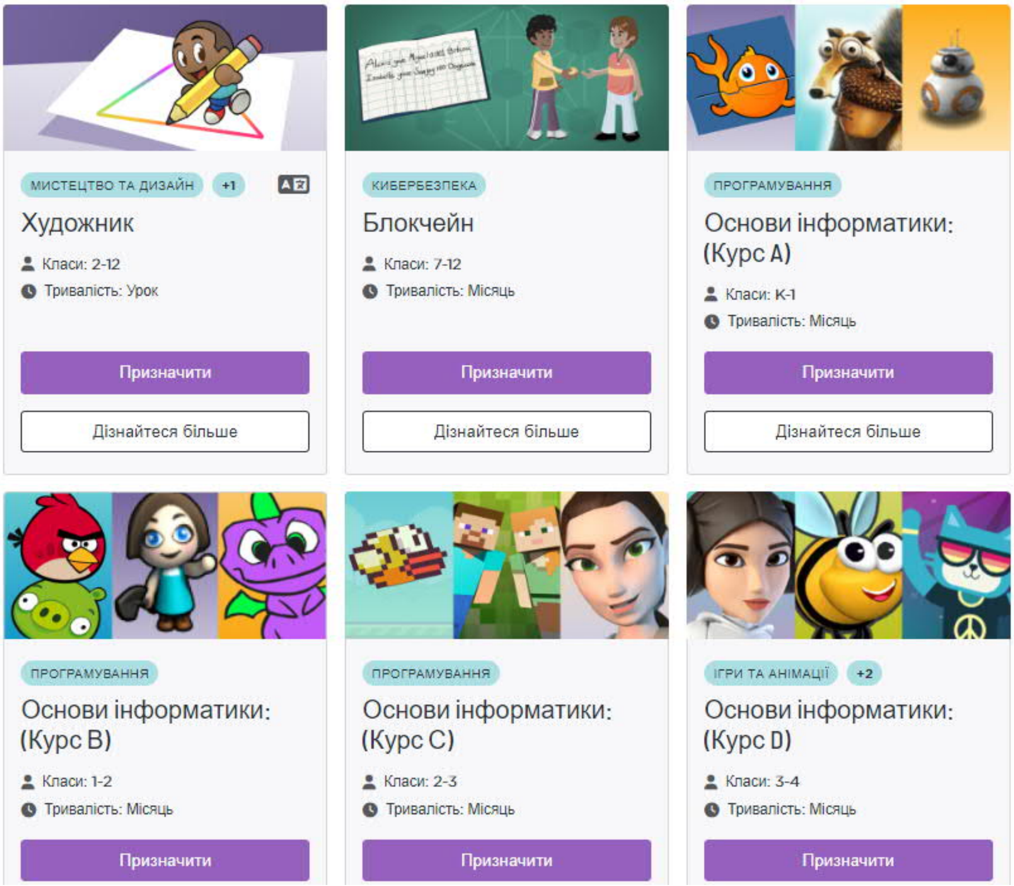


Рис. 1. Приклад гейміфікованих курсів на ресурсі Code.org

Ще один освітній тренд, що стрімко увійшов до освітнього середовища і надає не лише нові можливості навчання, а й деякі проблеми пов'язаний з розвитком так званого штучного інтелекту. До використання нейронних мереж, що здатні навчатись на масиві відомих даних а потім генерувати нові результати ми вже звикли використовуючи онлайн перекладачі. Поява великої моделі мови надала можливість створювати тексти, у тому числі навчальні, та виконувати навчання мовою, що побудована на людській. Зокрема генеративний штучний інтелект (для прикладу GPT від компанії OpenAI) має можливість не тільки вести діалог з користувачем спілкуючись так як це роблять люди, а й створювати тексти вихідних кодів багатьма мовами програмування, аналізувати вхідний код написаний користувачем та знаходити в ньому помилки. Не можна говорити про те, що генеративний штучний інтелект здатен замінити програмістів. Варто пам'ятати, що нейронна мережа навчена на вже існуючому матеріалі, і якщо подібна задача не вирішувалась, то особливої користі користувачу від використання генеративного штучного інтелекту не буде. В іншому випадку всі існуючі проблеми та задачі, над якими працює людство не одне століття, вже були б вирішеними, але цього не відбулося.

Відкрита для тестування система ChatGPT (chat.openai.com) може створювати вихідний код програми різними мовами програмування як розвязок невеликої за обсягом задачі, робити пояснення коду, пропонувати різні варіанти. Необхідно нагадати, що система не дає 100% гарантії що створений код без логічних помилок і оптимально вирішує задачу. І така система не єдина. Сервіс GitHub Copilot (github.com/features/copilot) навчений на відкритих репозиторіях GitHub вбудовується у системи розробки вихідних кодів програм таких як Visual Studio, Neovim, VS Code, JetBrains IDEs надаючи користувачу свої послуги з вирішення нескладних задач різними мовами програмування. Для його використання достатнім буде описати задачу звичайною людською мовою і система запропонує варіант вирішення. Відома платформа repl.it (replit.com) використовує штучний інтелект для: надання автоматичної підказки та допомоги під час написання коду; виявлення потенційних помилок у вихідному коді; наданні зразки коду або підказки щодо того, як розв'язати конкретну задачу; надання порад щодо оптимізації коду тощо. Таким чином, штучний інтелект широко використовується у платформах навчання програмуванню і його використання різноманітне.

Віртуальна та доповнена реальність також являють собою освітній тренд [7]. Засоби віртуальної та доповненої реальності надають навчальні матеріали в рамках свого середовища і мають контекстний напрямок навчанню програмуванню для створення нових об'єктів та їх взаємодії, нових світів тощо. До таких систем та платформ відносяться Unity Learn XR, Unreal Engine, Oculus Education, ARCore/ARKit, Hololens Development та інші. Для знайомства з програмуванням можна використовувати і існуючі віртуальні світи, наприклад Minecraft Education [4], в середовищі яких створюють навчальний матеріал, у тому числі й для вивчення програмування.

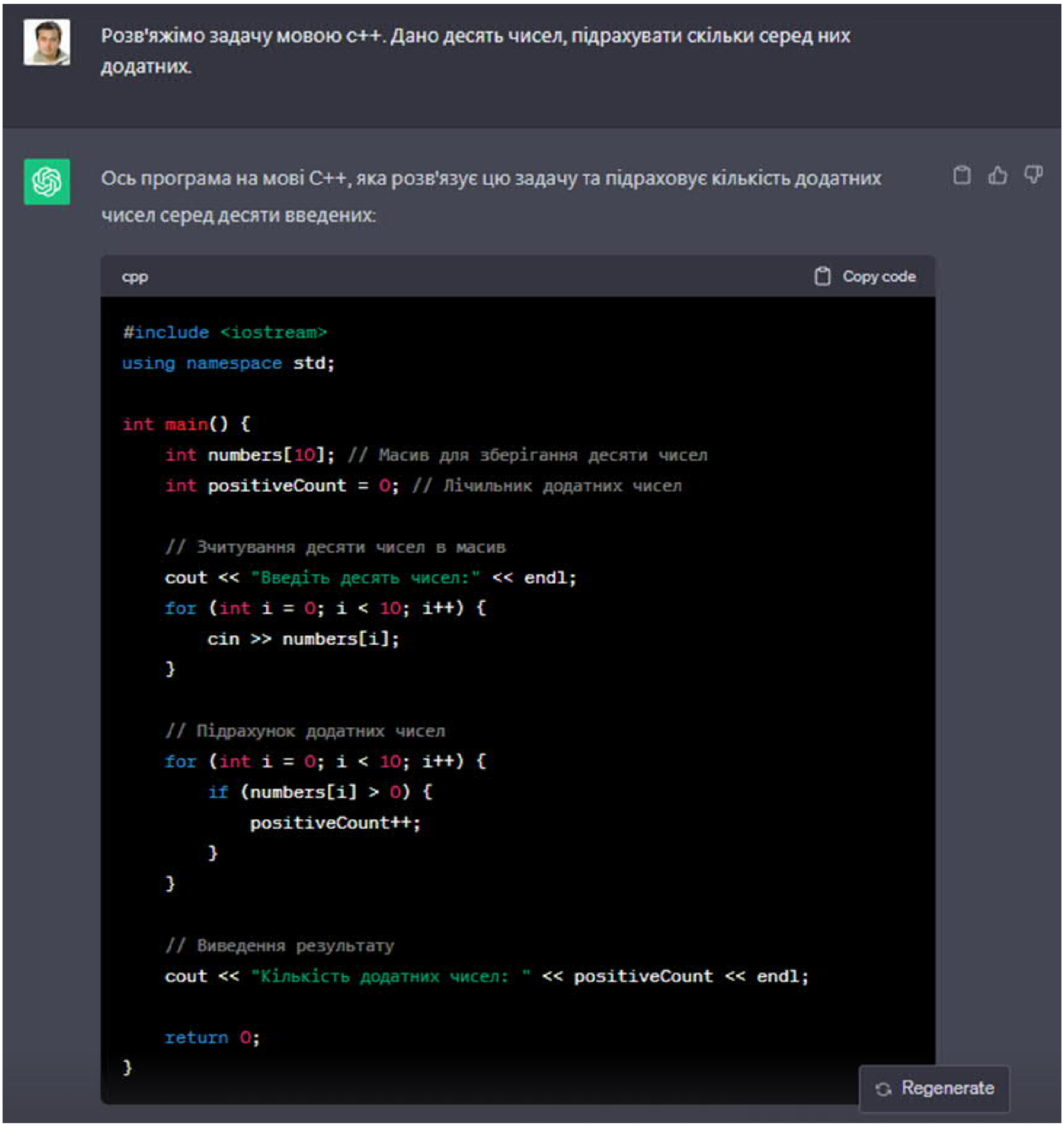


Рис. 2. Приклад створення програми системою ChatGPT v3

Корисним для вивчення програмування є використання наступного освітнього тренду – STE(A)M [8]. Цей підхід передбачає не тільки використання практичних задач з різних галузей науки, а й керування різноманітними пристроями. Зокрема для вивчення програмування цікавим дослідом є керування віртуальним, а ще краще реальним, виконавцем, наприклад у вигляді робота або будь-якого пристрою. Прикладом таких програмно-апаратних систем є LEGO Mindstorms, Arduino, Raspberry PI, VEX Robotics, Sphero, Ozobot, Cozmo, Makeblock mBot та інші. Кожна система надає можливість вивчати програмування різними способами, зазвичай це середовище створення алгоритму керування пристроєм за допомогою візуального програмування на кшталт Blockly або його форків та/або мови програмування високого рівня. Найчастіше зустрічаються такі мови керування роботами та пристроями як Python та JavaScript або їм подібні. У будь-якому випадку керування виконавцем алгоритму це не нова, але дуже цікава та корисна ідея вивчення програмування. Керування віртуальним або фізичним виконавцем алгоритму не тільки формує алгоритмічне мислення розв'язування практичної задачі, а й привчає до стандартних кроків вирішення задач засобами обчислювальної техніки, що в свою чергу є затребуваним знанням в умінням у інформаційному суспільстві..

Висновки

Програмування це не тільки отримання спеціальних знать з тієї чи іншої мови програмування, це перш за все формування алгоритмічного підходу до вирішення практичних задач. Розглянуті засоби та електронного навчання, що використовуються для вивчення програмування, у першу чергу формують саме алгоритмічну культуру та алгоритмічне мислення. Вивчення безпосередньо синтаксису мови програмування є не першочерговою задачею але необхідною через те, що практична реалізація алгоритму вирішення задачі, його тестування, пошук та виправлення помилок при реалізації алгоритму надає наочності та завершеності процесу вирішення практичної задачі і відіграє вирішальну роль при вивченні програмування.

Література

1. Bates T. National strategies for e-learning in post-secondary education and training, Fundamentals of educational planning, 70, Paris : UNESCO-IIEP, 2001. ISBN 978-92-803-1214-0, 132 p.
2. MDN Web Docs, Mozilla Foundation, https://developer.mozilla.org/enUS/docs/Web/JavaScript
3. Задорожна А.Д., Гнатишена І.М. Історія розвитку та тематичні групи англомовної термінології електронного навчання. Вчені записки ТНУ імені В.І. Вернадського. Серія: Філологія. Журналістика. Том 33 (72) №2 Ч.1 2022, https://doi.org/10.32838/2710-4656/2022.2-1/23
4. Fedorenko E.G., Kaidan N.V., Velychko V.Ye. and Soloviev V.N. Gamifcation when studying logical operators on the Minecraft Edu platform, in CEUR Workshop Proceedings, vol. 2898, pp. 107–118, 2021. https://doi.org/10.31812/123456789/4624
5. Ковтанюк М.С., Тітова Л.О. Використання ігрових симуляторів під час вивчення програмування. Комп'ютерні технології: інновації, проблеми, рішення : Тези доп. IV Всеукр. науково-техн. конф., м. Житомир, 18–20 листоп. 2021 р. Житомир, 2021. С. 95–96.

6. Медведєва М.О., Жмурко О.І., Криворучко І.І., Ковтанюк М.С. Використання ігрових онлайн-сервісів у процесі вивчення мов програмування. Актуальні питання гуманітарних наук. 2021. Т. 2, № 36. с. 248–255. https://doi.org/10.24919/2308-4863/36-2-40
7. Papadakis S., Kiv A.E., Kravtsov H.M., Osadchyi V.V., Marienko M.V., Pinchuk O.P., Shyshkina M.P., Sokolyuk O.M., Mintii I.S., Vakaliuk T.A., Azarova L.E., Kolgatina L.S., Amelina S.M., Volkova N.P., Velychko V.Ye., Striuk A.M. and Semerikov S.O. ACNS Conference on Cloud and Immersive Technologies in Education: Report. CTE Workshop Proceedings, 10, 2023, pp.1–44. https://doi.org/10.55056/cte.544
8. Velychko V.Ye., Kaydan N.V., Fedorenko O.G., Kaydan V.P. Training of practicing teachers for the application of STEM education. Journal of Physics: Conference Series 2288(1), 012033 (jun 2022), https://doi.org/10.1088/1742-6596/2288/1/012033

Vladyslav Ye. Velychko, Mykola S. Anan'yev, Sergij V. Ivanyuk, Muhajlo M. Sheremet
Donbas State Pedagogical University, Sloviansk, Ukraine;

Electronic learning in the process of learning programming

Informatization of education is a complex and continuous process, the completion of which is a natural demand of the information society for education. Not only computer equipment and software implementing information technologies have been added to the educational process. Added various approaches to the organization of the educational process that arose during the development of computer science and proved their effectiveness. Visual materials also changed with the appearance of electronic educational resources, which in turn caused new issues of their harmonious application in primary activities, the issue of the relationship between traditional forms and means of education and electronic and or those based on them. The article deals with the application of technologies and means of electronic learning in the process of studying programming.

Keywords: *e-learning, e-educational resources, learning programming, computer science*.

УДК 373.5.091.3:51:004

Глазова В.В., Бородаченко М.В.
[1] *кандидат педагогічних наук, доцент кафедри МНМ та МНІ, ДВНЗ «ДДПУ»*
e-mail: vvglazova@gmail.com, ORCID 0000-0003-0124-3760
[2] *здобувач магістерського РВО фізико-математичного факультету, ДВНЗ «ДДПУ»*
e-mail: marusiciella@gmail.com, ORCID 0009-0003-8415-9747

МЕТОДИКА ЗАСТОСУВАННЯ ДИДАКТИЧНИХ ІГОР ПІД ЧАС УРОКІВ МАТЕМАТИКИ ЗАСОБАМИ ІКТ

У статті розглянуто застосування дидактичних ігор під час уроків математики. Проаналізовано можливість застосування дидактичних ігор під час дистанційного навчання. Запропоновано ресурси для гейміфікації навчання математики засобами ІКТ. Наведено приклади використання сервісів Kahoot, Mathific і Plickers для учнів 5 класу.

Ключові слова: *гра, дидактична гра, урок математики, дистанційне навчання, вебсервіси*.

Вступ

Постановка проблеми. Останніми роками математична освіта в Україні зазнає значних змін. Так, у 2018 році було запроваджено концепцію Нової української школи (НУШ), яка спрямована на модернізацію системи освіти та підвищення якості освіти в країні. Новий підхід зосереджений на індивідуальному підході до навчання, розвитку критичного мислення та навичок вирішення проблем [3].

Однак, незважаючи на ці зусилля, стан математичної освіти в Україні все ще потребує покращення. Відповідно до результатів останнього оцінювання навчальних досягнень учнів, проведеного програмою PISA (Програма міжнародного оцінювання навчальних досягнень учнів) в 2018 році, українські школярі показали результати нижчі за середній рівень країн-членів Організації економічного співробітництва та розвитку (ОЕСР).

Пандемія Covid-19 та війна стали новими чинниками, що суттєво вплинули на освітній процес в Україні. Пандемія призвела до закриття шкіл, а учні були змушені перейти на дистанційне навчання. Цей перехід став значним викликом для системи освіти, яка не була належним чином до нього підготовлена. Деякі учні не мали доступу до технологій, а частина вчителів не була підготовлена до ефективного викладання онлайн. Як наслідок, якість освіти постраждала, а розрив у навчальних досягненнях збільшився.

Завдання цієї статті містять визначення ефективних інструментів ІКТ та дидактичних ігор для навчання математики у закладах загальної середньої освіти, приклади використання цих інструментів на синхронних, асинхронних чи змішаних уроках для покращення успішності та залученості учнів до навчального процесу, що є актуальним у нинішніх реаліях і відповідає цілям та стандартам НУШ, яка вже розпочала впровадження у середній школі. Завдяки уведенню дидактичних ігор та інструментів ІКТ під час уроків математики, вчителі можуть створити більш інтерактивне та захоплююче навчальне середовище для своїх учнів, що може призвести до покращення результатів навчання.

Вебсервіси можуть стати цінними інструментами для підвищення ефективності, привабливості та запам’ятовування уроків, сприяючи тим самим підвищенню інтересу та залученості учнів. В контексті української освіти інтеграція вебсервісів та інформаційно-комп’ютерних технологій приносить численні переваги, дозволивши освітянам створити більш динамічне та інтерактивне освітнє середовище [5].

Метою статті є висвітлення можливостей застосування дидактичних ігор під час навчання математики.

Основна частина

Дидактичні ігри були частиною освіти протягом століть, а їхня ефективність в активізації навчального процесу підтверджена численними дослідженнями. Згідно з теорією навчання Л. С. Виготського, гра є важливим аспектом когнітивного розвитку, а ігри можуть бути використані для полегшення процесу навчання. У контексті математичної освіти ігри можуть бути особливо ефективними для залучення учнів та розвитку в них критичного мислення та навичок самостійного вирішення проблемних ситуацій [2].

В умовах очного навчання дидактичні ігри можна використовувати для створення інтерактивного середовища, яке заохочує учнів до активної участі в освітньому процесі. Вони також можуть бути використані для закріплення математичних понять і надання учням можливості застосувати їх на практиці. Дослідження показали, що учні, які беруть участь у дидактичних іграх, демонструють вищий рівень залученості та мотивації. Крім того, використання дидактичних ігор під час уроків математики може допомогти зменшити тривожність і підвищити впевненість в учнів, які в іншому випадку можуть мати труднощі з предметом [4].

Під час дистанційного навчання дидактичні ігри можуть бути ефективним інструментом для залучення учнів та підтримання їхнього інтересу до предмета. Організованість учнів на дистанційному навчанні залежить від багатьох чинників і менше контролюється вчителем, тож чим більше зацікавлені діти, тим більшою буде користь від навчання. Дидактичні ігри також можуть дати учням відчуття соціального зв’язку, взаємодії із класом, що може бути особливо важливим під час дистанційного навчання, коли у дітей менше можливостей спілкуватися один з одним і вони відчувають себе «відірваними» від колективу. Використання цифрових технологій у дидактичних іграх також може надати учням можливість розвивати цифрові навички, які набувають все більшого значення в сучасному світі, а також допоможе однаково ефективно взаємодіяти і з дітьми, що навчаються дистанційно, і з дітьми, що знаходяться у шкільному класі.

Запровадження нової української школи у 5 та 6 класах дає можливість інтегрувати дидактичні ігри в навчальну програму з математики більш систематично та структуровано. НУШ робить більший акцент на активному навчанні та розвитку навичок вирішення проблемних ситуацій, що є ключовими сферами, де дидактичні ігри можуть бути ефективними. Крім того, використання інструментів ІКТ у НУШ дає можливість розвивати цифрові навички та інтегрувати технології в навчальний процес [1].

Існує багато ресурсів для гейміфікації навчання математики засобами ІКТ і можуть бути використані на уроках будь-якого типу та у будь-якій частині уроку. Розглянемо деякі з них.

Kahoot – це ігрова навчальна платформа, яка дозволяє вчителям створювати інтерактивні вікторини, опитування та дискусії. При використанні цієї платформи діти проявляють більшу активність і зацікавленість, можуть позмагатися між собою, а оцінювання проходить у веселій та цікавій формі. Так, за допомогою цього сервісу, вчитель може створювати запитання з декількома варіантами відповідей, що охоплюють різні теми. Він може використовувати різні інструменти, зокрема, приєднувати до питань зображення. Також Kahoot дозволяє вчителю встановлювати обмеження часу для кожного питання, що додає грі елемент терміновості та азарту. Впродовж гри учні набирають бали, кількість яких залежить від правильності відповіді та часу, за який учень зміг відповісти. Ці бали відображаються в таблиці лідерів, що сприяє здоровій конкуренції та мотивації. І, на останок, одним із визначних плюсів Kahoot є наявність функцій для обговорення, що дозволяють учням розмірковувати над питаннями, пояснювати свої міркування і обговорювати задану тему.

Наступний сервіс буде корисним для викладання у 5 та 6 класах. Mathific – це комплексний цифровий ресурс, який надає інтерактивні математичні завдання, вправи та ігри. Він пропонує широкий спектр математичних тем і завдань для покращення концептуального розуміння та розвитку навичок учнів. Вправи з цього сервісу можна виконувати як індивідуально, так і одночасно всім класом. Для використання цього сервісу можна надати посилання на гру всім дітям, або транслювати гру класу з інтерактивної дошки і ставити питання до класу/пропонувати виконувати вправи по черзі. Розглянемо основні переваги Mathific. По-перше, у сервісі наявні готові інтерактивні вправи до більшості математичних тем, які залучають учнів до практичного навчання, наприклад, віртуальні маніпулятори та симуляції. По-друге, Mathific пропонує варіанти завдань різних рівнів складності, що дозволяє вчителям диференціювати навчання на основі індивідуальних потреб учнів. По-третє, Mathific дозволяє вчителям відстежувати прогрес і результати учнів у вивченні різних математичних концепцій, допомагає визначити сильні сторони учнів та частини теми, які потребують додаткового пояснення. Mathific часто містить приклади з реального світу та завдання на розв'язання проблем, що дозволяє учням побачити актуальність математики в їхньому повсякденному житті.

Наступний сервіс є відмінною ідеєю для перетворення звичайного класного опитування у цікавий перфоменс. Plickers – це унікальна система відповідей, яка дозволяє вчителям збирати відповіді учнів у режимі реального часу за допомогою кодованих паперових карток. Ключові особливості Plickers містять миттєвий зворотній зв'язок, швидкий аналіз даних і одночасно можливість перевірити знання кожного окремого учня. Вчитель може ставити запитання з декількома варіантами відповідей, а учні відповідають, заповнюючи свої картки і піднімаючи їх, щоб вчитель міг побачити. За допомогою мобільного телефону вчитель миттєво сканує картки і бачить відповіді кожного учня в себе на екрані. Для уникнення проблем з використанням, Plickers надає вчителю аналіз даних і звіти, що дозволяють їм виявляти поширені помилки і відповідно коригувати інструктаж. На основі зібраних даних вчитель може надавати цілеспрямовану підтримку окремим учням, враховуючи їхні конкретні потреби.

Як же конкретно можна використовувати ці сервіси під час уроку математики? Розглянемо на прикладах фрагментів уроку математики у 5 класі.

Актуалізація опорних знань:

Використовуючи Kahoot, можна створити вікторину із запитаннями до минулої теми, з декількома варіантами відповідей. Можна також узяти зображення і словесні задачі. Учні можуть працювати індивідуально, або в командах. Після кожного запитання вчитель має заохочувати обговорення у класі, щоб діти могли поділитися своїми міркуваннями.

Формування нових знань і способів дії:

Пояснити основи нової теми можна за допомогою навчальної презентації, підручника і різних наочностей. Для того, щоб діти краще зрозуміли матеріал, можна використати програму Mathific. Наприклад, для вивчення теми «Додавання і віднімання дробів» можна використати вправу «Кішки-мишки», в якій необхідно порахувати кількість сиру на тарілці. Вона дасть дітям можливість візуально представити, що являють собою дроби і їх додавання, провести паралелі із реальним життям і можливістю використовувати отримані знання на практиці. Використовуючи інтерактивні вправи Mathific вчитель допомагає дітям візуалізувати та відпрацювати дії. В залежності від рівня учнів, можна пропонувати вправи різної складності. У Mathific є різні режими гри – діти можуть змагатися між собою, чи працювати разом. Застосування власного смартфону під час уроку і використання таких ігор також роблять уроки математики більш цікавими і привабливими для дітей.

Формувальне оцінювання наприкінці уроку можна провести у вигляді тестування за допомогою карток Plickers. Цей сервіс дозволяє внести різноманітність у проведення тестування дітей, він може бути застосований

DOI: https://doi.org/...

для проведення самостійної роботи. Сенс застосування цього сервіса полягає у тому, що учні отримують заздалегідь підготовлені картки-бланки для відповідей. Вчитель може задати низку питань, пов'язаних із темою уроку і спроектувати кожне з них на інтерактивну дошку. Для відповіді учні мають зафарбувати спеціальні поля у своїх бланках. Заповнені бланки нагадують QR-коди, які може зчитати вчитель за допомогою камери свого смартфону. При чому, у кожного учня, виходить свій унікальний код. Учні відповідають, піднімаючи картки, а вчитель сканує кімнату за допомогою мобільного пристрою, щоб зібрати відповіді. Таким чином вчитель може за секунду перевірити відповіді учнів і побачити, яким аспектам теми треба приділити більше уваги.

Висновки

Використання ресурсів для гейміфікації навчання математики засобами ІКТ, таких як Kahoot, Mathific і Plickers, може значно вдосконалити процес навчання та сприяти активній участі учнів. Використання цих ресурсів під час уроків математики може підвищити зацікавленість учнів, покращити активність та залученість до освітнього процесу, а також сприяти кращому засвоєнню математичних концепцій. При використанні спеціальних інтерактивних сервісів, приклади яких були наведені у цій статті, вчитель може одночасно, і в рівних умовах, опитувати як дітей, що знаходяться в класі, так і тих, хто займається дистанційно, перевіряючи роботи одночасно і приділяючи увагу обом групам. Застосування дидактичних ігор з використанням засобів ІКТ створює стимулюючу та захопливу атмосферу, де учні можуть вчитися та розвиватися з задоволенням.

Література

1. Глазова, В. (2022). Підготовка майбутніх учителів математики до роботи в Новій українській школі. *Технології електронного навчання*, *6*, 17–22. https://doi.org/10.31865/2709-840062022270259
2. Клімішина А. Я. Створення та використання електронних дидактичних ігор під час вивчення математики в закладах загальної середньої освіти. Педагогіка формування творчої особистості у вищій і загальноосвітній школах: зб. наук. пр. / [редкол.:А. В. Сущенко (голов. ред.) та ін.]. Запоріжжя: КПУ, 2021. Вип. 77. Т. 1. С. 85-91.
3. Розпорядження Кабінету Міністрів України (988-2016-р від 22.08.2018) «Про схвалення Концепції реалізації державної політики у сфері реформування загальної середньої освіти «Нова українська школа» на період до 2029 року».
   URL: https://zakon.rada.gov.ua/laws/show/988-2016-%D1%80#Text
4. Хворостіна Ю.В., Удовиченко О.М., Юрченко А.О. Особливості використання дидактичних ігор на уроках математики. Інноваційна педагогіка, 2019. Вип. 19. Том 3. С. 141-146.

5. Юрченко А.О. Особливості когнітивно-візуального підходу під час візуалізації навчального матеріалу з математики. Інноваційна педагогіка, 2019. Вип. 11. Том 3. С. 62-67.

Vira V. Hlazova, Marriia V. Borodachenko
Donbas State Pedagogical University, Slovijans'k, Ukraine.

The Methods of Using Didactic Games in Lessons of Mathematics by Means of ICT

The article discusses the use of didactic games during mathematics lessons. The possibility of using didactic games in distance learning is analyzed. The resources for the gamification of teaching mathematics by means of ICT are proposed. The examples of using the Kahoot, Mathific and Plickers services for 5th grade students are given.

Keywords: *game, didactic game, mathematics lesson, distance learning, web services.*

УДК 373.5.091.3:004

Глазова В.В., Секлецов А.А.

[1] *кандидат педагогічних наук, доцент кафедри МНМ та МНІ, ДВНЗ «ДДПУ»*
e-mail: vvglazova@gmail.com, ORCID 0000-0003-0124-3760
[2] *здобувач магістерського РВО фізико-математичного факультету, ДВНЗ «ДДПУ»*
e-mail: sulfir009@gmail.com, ORCID 0000-0002-2394-7729

ОРГАНІЗАЦІЯ ПРОЄКТНОЇ ДІЯЛЬНОСТІ ПІД ЧАС УРОКІВ ІНФОРМАТИКИ

У статті розкрито особливості організації проєктної діяльності під час уроків інформатики. Розглянуто методологічну основу навчальних проєктів та охарактеризовано переваги їх використання під час освітнього процесу. Надано поради вчителям щодо організації проєктної діяльності на під час уроків інформатики.

Ключові слова: *проєктна діяльність, метод проєктів, інноваційні технології, інформатика*.

Вступ

Постановка проблеми. У сучасній педагогіці проєктна діяльність набуває особливої значущості, оскільки в освітній діяльності вона стимулює інтерес учнів завдяки нестандартності підходу до вивчення матеріалу та мотивує учнів не тільки до отримання нової інформації, а й до розвитку творчих здібностей шляхом створення продукту проєкту.

Процес навчання у школі зазвичай представляється складним явищем. Для досягнення більш високих результатів в освіті необхідно створити середовище, в якому навчання стало б більш простим, осмисленим і результативним. Одним із інструментів вирішення цієї проблеми є використання методу проєктів.

Метою статті є висвітлення можливостей застосування проєктної діяльності під час навчання інформатики.

Основна частина

Впровадження компетентнісного підходу у діяльність закладів освіти передбачає організацію процесу, метою якого є формування компетентної особистості, готової та здатної до активної й успішної життєдіяльності в суспільстві. Це певною мірою залежить від педагогічних технологій, які використовуються для формування та розвитку особистості учнів, оскільки освітній процес повинен виконувати як мінімум дві функції: функцію підготовки учнів до самостійного опанування знаннями (уміння вчитися) та функцію формування у них здатності самостійно трансформувати набуті знання у важливу життєву компетентність [2, с.52].

Сучасне суспільство зацікавлене в тому, щоб його громадяни були здатні самостійно, активно діяти, приймати рішення, гнучко адаптуватися до умов життя, що змінюються, вміти працювати в команді, планувати свою діяльність. Реформування освітнього простору передбачає оптимізацію змісту та форм педагогічної діяльності учасників освітнього процесу, освоєння сучасних технологій та форм роботи, які забезпечують профільне навчання. На сьогодні проєктна діяльність – невід'ємна частина освітнього процесу, яка мотивує учнів на розвиток творчих здібностей, самостійну роботу, пошук інформації та отримання остаточного продукту.

Проєкти завжди орієнтовані на самостійну роботу учнів – індивідуальну, парну, групову, яку вони виконують протягом певного відрізку часу. Результатом виконаних проєктів є матеріал, готовий до використання під час уроків, у школі чи реальному житті. Метод проєктів передбачає сукупність дослідницьких, пошукових, проблемних методів, які потребують творчого підходу [5, с.142].

Доцільно застосовувати метод проєктів під час навчання інформатики. Проєктна діяльність із застосуванням інформаційних технологій та методів інформатики дозволяє пов'язати знання, отримані з різних шкільних предметів, підвищити зацікавленість учня у вирішенні поставленої проблеми та стимулювати створення інформаційного продукту в естетичному, зручному для перегляду та логічному вигляді.

Наявність сучасної комп'ютерної техніки, підключення до Інтернету розширює можливості та робить застосування методу проєктів набагато цікавішим та простішим. Використовуючи комп'ютер, учень може працювати над проєктом у домашніх умовах, а Інтернет дозволяє брати участь і у глобальних проєктах.

Під час організації проєктної діяльності учнів слід пам'ятати про наявність двох основних складових: наявність достатнього обсягу вихідної аналітичної інформації та реалізацію власної моделі інформаційного завдання [3,с.76].

Використання інноваційних технологій спрямоване на розвиток учнів. Під час організації освітнього процесу варто не допускати перевтоми, необхідно намагатися створювати сприятливу психологічну атмосферу, і, навіть формувати культуру здорового життя. Освітній процес потрібно націлювати на витіснення інтересів учнів щодо комп'ютерних ігор і заміну їх на інший вид діяльності. Слід демонструвати різні програмні продукти, розповідати про новації в програмному та апаратному забезпеченні. Розуміння ролі комп'ютера, як засобу обробки інформації, поступово може зняти психологічну залежність від ігор, що є дуже актуальною проблемою.

Під час уроків інформатики проєктна діяльність вирішує важливу проблему, адже у результаті виконання проєкту у школярів автоматично формується ставлення до комп'ютера (і програм), як до виконавця, тобто інструмента, за допомогою якого, можна вирішити поставлене завдання.

DOI: https://doi.org/...

Якщо застосовувати метод проєктів під час уроків інформатики сплановано, то будуть створені умови для:

- формування та розвитку внутрішньої мотивації учнів до якіснішого опанування загальною комп’ютерною грамотністю;
- підвищення розумової активності учнів та набуття навичок логічного мислення з проблем, пов’язаних з реальним життям;
- мовленнєвого розвитку учнів, удосконалення комунікативної компетенції загалом;
- розвитку індивідуальних особливостей учнів, їх самостійності, потреби у самоосвіті [3, с.77].

Методологічною основою використання методу проєктів в освіті школярів є загальнопедагогічні та дидактичні принципи:

1) зв’язок теорії з практикою;
2) науковість, свідомість та активність засвоєння знань;
3) доступність, систематичність та наступність навчання;
4) наочність та міцність засвоєння знань [1].

На всіх етапах створення проєкту: від зародження ідеї до втілення їх у матеріалі, вчителем проводяться практичні заняття з класом. Під час виконання проєкту приділяється увага кожному учневі чи групі учнів (від 3 до 5). Працюючи в малих групах, учні набувають важливих вмінь з культури людських стосунків. Кожен школяр, розпочинаючи проєктну діяльність, вибирає тему проєкту індивідуально. У виборі теми учні іноді мають труднощі. Тоді їм на допомогу приходить складений заздалегідь приблизний перелік тематики творчих проєктів, що складається з реальних завдань.

Варто зазначити, що при підборі об’єктів проєктної діяльності потрібно враховувати основні вимоги:

- підготовленість учнів до цього виду діяльності;
- інтерес школярів до проблеми;
- практична спрямованість та значимість проєкту;
- творчу постановку задачі;
- практичну здійсненність проєкту [2, с.53].

Проєктна діяльність викликає певні труднощі, як у вчителя, так і в учнів. Труднощами виконання проєктів є: необхідність витрат учителем великої кількості часу на індивідуальну роботу з кожним учнем, необхідність докладно визначати основні та додаткові цілі та етапи роботи, щоб сформувати навички творчої діяльності, не пригнічуючи ініціативи школяра. Успішність виконання навчального проєкту остаточно з’ясовується під час його захисту. Учні роблять повідомлення про хід виконання проєкту, подають наочний матеріал (стендовий матеріал, брошура, комп’ютерна презентація тощо). Автор проєкту робить самоаналіз своєї роботи, вислуховує думку інших учнів, учителя. Підбивається підсумок і проєкт оцінюється.

Критеріями оцінки результатів роботи є опанування способами пізнавальної діяльності: вмінням використовувати різноманітні джерела інформації, методи дослідження, вміння працювати у команді, приймати чужу думку, протистояти труднощам, вміння ставити мету, складати та реалізувати план, проводити рефлексію, зіставляти мету та дію. Але необхідно також відзначити, що метод проєктів може принести користь тільки при правильному його застосуванні, добре продуманій структурі проєктів, особистій зацікавленості всіх учасників проєкту в його здійсненні [4].

Проєкти під час уроків інформатики спрямовані на опанування учнями методами та засобами інформаційної технології для вирішення завдань, формування навичок свідомого та раціонального використання комп'ютера у своїй освітній, а потім професійній діяльності. Проєктна діяльність учня не може вийти за межі наявних у нього знань, і, перед початком роботи, він повинен ці знання отримати.

Навчання школярів методу проєктів, як способу навчальної діяльності може, бути досягнуто повною мірою під час вивчення програми створення презентацій Microsoft PowerPoint.

Наприклад, для учнів 5–6 класів проєкти можуть бути невеликими (мініпроєкти). Для учнів 7-9 класів проєкти більш тривалі, розраховані на розширення освітньої діяльності у вигляді самоосвіти в межах самостійної роботи вдома чи позаурочної діяльності.

Прийоми організації проєктної діяльності у старших класах залишаються незмінними. Але, в порівнянні з базовим курсом, для вчителя та учнів з'являються додаткові можливості використання методу проєктів. А саме:
- більшість учнів вже мають навички роботи на персональному комп'ютері;
- вивчення предметів стає більш цілеспрямованим, нерідко набуваючи елементів передпрофесійної діяльності (формується коло учнів, які передбачають пов'язати своє подальше навчання з інформатикою);
- через свої вікові особливості, учні старших класів більш схильні до дослідницької та самостійної діяльності. Їм хочеться довести свою індивідуальність, незалежність та багатогранність [3, с.78].

Доцільно навести приклади учнівських проєктів з певних тем інформатики:
- В графічному редакторі – для опрацювання навичок копіювання, вставлення, виділення, а також розвитку творчої уяви проєкти «Створи ребус», «Створи пазл», «Розшифруй малюнок за допомогою коду».
- В текстовому редакторі – «Кросворд», «Вітальна листівка», «Важливе оголошення».
- В електронних таблицях – для відпрацювання теми «Макроси» – проєкт «Тестовий продукт».
- Створення баз даних.
- Створення веб-сторінок.

DOI: https://doi.org/...

- Створення різноманітних презентацій.

З метою посилення ефективності навчання на основі методу проєктів вчитель може:

1) Використовувати додаткову інформацію з теми, що вивчається, познайомити з нею кожного окремого учня або групу, перед початком уроку або у вигляді самостійного ознайомлення. А також користуватися записами випусків новин, документальними, науковими фільмами, журналами та іншими періодичними виданнями, ресурсами Інтернету.

2) Надавати учням інформацію, яка б дозволила їм продовжити навчання вдома. Наприклад, можна попросити учнів розпитати своїх батьків або членів сім'ї про якусь людину чи подію, пов'язану з проєктом. Можливо, вони зможуть розповісти, де вони були під час якихось подій чи як вони відреагували на них. Іноді батьки можуть бути дійсно зацікавлені у темі проєкту та можуть дати дітям додаткові ресурси, поділитися своїми знаннями та запропонувати нові цікаві варіанти роботи.

3) Зв'язати цей проєкт із попередніми або з іншими подібними проєктами та завданнями. Вирішити, які можна організувати зв'язки, що дають змогу учням вийти за межі проєктної діяльності, подивитися на це з іншого боку.

4) Найкращі проєкти доцільно порекомендувати для участі у науково-практичних конференціях, розмістити на шкільному сайті. Це буде ще більше заохочувати учнів до проєктної діяльності.

Висновки

Проведення уроків інформатики у нетрадиційній формі із застосуванням сучасних педагогічних технологій, зокрема проєктно-дослідницьких, є потужним інструментом підвищення пізнавальної активності учнів, що привчає їх до самостійної пізнавальної діяльності. Працюючи над проєктом під час уроків інформатики в школярів розвиваються особисті якості, такі як: вміння працювати в команді або ж самостійно, планувати свою діяльність, дискутувати, представляти результат своєї діяльності, публічно виступати.

Метод проєктів може принести користь тільки при правильному його застосуванні, добре продуманій структурі проєктів й особистій зацікавленості всіх учнів в його здійсненні.

Література

1. Мірошник С. І. Теоретичні основи навчальної проектної діяльності учнів. *Народна освіта : електронне наукове фахове видання*. 2014. Вип. №2(23). URL: https://www.narodnaosvita.kiev.ua/?page_id=2383
2. Проектна діяльність як засіб формування ІКТ-компетентності учнів / Морзе Н.В., Барна О.В., Вембер В.П., Кузьмінська О.Г. *Інформатика та інформаційні технології в навчальних закладах*. 2014. №3. С.52–59. URL: https://core.ac.uk/download/pdf/33688455.pdf

3. Самойленко Н., Семко Л. Методичні підходи до вивчення інформатики в основнійшколі. *Наукові записки. Серія: Проблеми методики фізико-математичної і технологічної освіти.* Кіровоград: КДПУ імені Володимира Винниченка. 2015. Вип. 7. Ч. 2. С. 76–82. URL: https://phm.cuspu.edu.ua/ojs/index.php/NZ-PMFMTO/article/viewFile/538/51
4. Сікора Я. Б., Карплюк С. О., Грінчук І. В. Використання методу проектів на уроках інформатики в закладах загальної середньої освіти як одна із ефективних педагогічних технологій. *Перспективи та інновації науки Серія «Педагогіка».* 2022. URL: http://eprints.zu.edu.ua/34341/1/2022.pdf
5. Тадеуш О. М. Метод проектів як форма продуктивного навчання. *Науковий часопис НПУ імені М. П. Драгоманова. Серія 16 : Творча особистість учителя: проблеми теорії і практики.* 2017. Вип. 29. С. 142–146. URL: http://nbuv.gov.ua/UJRN/Nchnpu_016_2017_29_33.

Vira V. Hlazova, Andrii A. Sekletsov
Donbas State Pedagogical University, Slovijans’k, Ukraine.

The organization of project activities during computer science lessons

The article reveals the specifics of the organization of project activities during computer science lessons. The methodological basis of educational projects is discussed and the advantages of their use in the educational process are characterized. The article provides recommendations for teachers on how to organize project activities during computer science lessons.

Keywords: *project activity, project method, innovative technologies, computer science.*

УДК 372.8

Кайдан Н.В., Тараненко Г.І.

[1] *кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри МНМ та МНІ, ДВНЗ «ДДПУ»; доцент кафедри природничо-наукових та загальноінженерних дисциплін, ТОВ «ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «МЕТІНВЕСТ ПОЛІТЕХНІКА»*

e-mail: kaydannv@gmail.com, ORCID 0000-0002-4184-8230

[2] *здобувач магістерського РВО фізико-математичного факультету, ДВНЗ «ДДПУ»*

e-mail: taranex7@gmail.com, ORCID 0009-0007-7316-4793

МОТИВАЦІЯ ОСВІТНЬОГО ПРОЦЕСУ ЗАСОБАМИ ГЕЙМІФІКАЦІЇ

Стаття присвячена засобам залучення учнів до освітнього процесу, підвищенню мотивації до навчання та досягнення кращих результатів, шляхом впровадження гейміфікації на уроках інформатики у закладі загальної середньої освіти. Виокремлено головні кроки, що можуть допомогти процесу впровадження гейміфікації в освітній процес.

Ключові слова: *гейміфікація, мотивація, інформатика, освітній процес, загальна середня освіта.*

Вступ

Постановка проблеми. Сучасна освітня парадигма невпинно еволюціонує, ставлячи перед собою завдання підвищення якості навчання та залучення учнів до активної пізнавальної діяльності. Водночас, існуюча система освіти в Україні знаходиться на початку впровадження новітніх освітніх технологій. Однією з ключових проблем, яка потребує невідкладного вирішення, є недостатня мотивація учнів до навчання, особливо під час дистанційного та змішаного навчання.

Українська освітня система стикається зі складнощами утримання високого рівня інтересу та залученості учнів до освітнього процесу. Традиційні методи лекційного навчання та запам'ятовування фактів часто не відповідають сучасним вимогам до креативного мислення, аналітичної компетентності та практичних навичок, які вимагає сучасний ринок праці.

У зв'язку з цим, виникає необхідність у впровадженні інноваційних підходів, які здатні зробити навчання більш цікавим та змінити ставлення учнів до нього. Одним із таких підходів є гейміфікація освітнього процесу – використання елементів та механік із світу ігор для стимулювання активності, залученості та конкурентної діяльності в освітніх завданнях.

Проте, наразі в Україні гейміфікація ще не отримала широкого розповсюдження в освіті, існують перешкоди на шляху її ефективної інтеграції. До цих перешкод відносяться відсутність належного розуміння педагогічних аспектів гейміфікації, брак належних навчальних матеріалів та платформ для реалізації гейміфікованих навчальних завдань, а також суперечливість у поглядах на доцільність використання ігрових елементів у серйозному навчанні.

Аналіз наукових праць з проблеми застосування ігрових технологій в освітньому просторі визначив актуалізацію науковцями нового напряму, що може бути представленим як сучасний спосіб збагачення освітнього процесу. К. Вербах, Д. Хантер, Ю. Чоу, Г. Зіхерманн, А. Клег у своїх працях говорять про так звану гейміфікацію.

Мімі Іто, культурний антрополог з Каліфорнійського університету в Ірвіні, зазначає, що діти, заглиблюючись в технічну складову гри, часто приходять за порадою на форуми і майданчики, де знайомляться з дорослими гравцями: програмістами, дизайнерами, сисадмінами. Ці знайомства приводять до того, що діти отримують уявлення про професійний шлях, який не завжди висвітлюють їх шкільні заняття. [2]

Отже, потреба у дослідженні та розробці ефективних стратегій гейміфікації освітнього процесу в Україні є актуальною. Вирішення цієї проблеми може сприяти покращенню мотивації учнів, підвищенню якості освіти та підготовці конкурентоспроможної молоді, яка вміє адаптуватися до сучасних викликів суспільства.

Метою статті є висвітлення питання використання засобів гейміфікації для мотивації учнів у освітньому процесі на уроках інформатики у закладах загальної середньої освіти.

Основна частина

На сьогоднішній день, навчання інформатики є важливою складовою освіти, оскільки комп'ютерні технології використовуються в більшості сфер людської діяльності. Застосування гейміфікації може допомогти зробити процес навчання більш цікавим та захоплюючим для учнів, а також дати їм можливість більш ефективно навчатися інформатики, розвивати свої навички програмування та вирішувати завдання більш впевнено та швидко.

Гейміфікація – це застосування елементів гри та ігрової механіки в освітньому процесі з метою підвищення мотивації до навчання та досягнення більшого рівня залучення до освітнього процесу. Застосування гейміфікації на уроках інформатики може значно підвищити інтерес до цього предмету та зробити навчання більш цікавим та захопливим для учнів. [1]

Елементи гейміфікації, такі як створення системи нагород та відзнак, логічні ігри та вікторини, використання інтерактивних дошок та розробка ігрових аплікацій можуть зробити освітній процес більш цікавим та привабливим для учнів, забезпечуючи їх активну участь та зацікавленість у навчанні.

До елементів гейміфікації на уроках інформатики можна віднести створення графічних зображень, використання логічних ігор та вікторин, створення графічних інтерфейсів, розробку персонажів, розробку ігрових аплікацій та робота з інтерактивними дошками. Ці елементи можуть включатися в процес навчання і відповідати навчальній програмі.

Важливим аспектом гейміфікації на уроках інформатики є створення системи нагород та відзнак за досягнення певних результатів завдань. Наприклад, учні можуть отримувати віртуальні медалі за успішне виконання завдань, або за досягнення певного рівня знань та вмінь. Також можна використовувати систему балів та рівнів, адаптованих до сучасних комп'ютерних ігор, які підтримують інтерес до навчання та дозволяють відслідковувати прогрес учнів. [4]

Гейміфікація може також допомогти вирішити проблему зі збереженням уваги учнів під час навчання. За допомогою елементів гейміфікації, учні можуть бути заохочені до збереження уваги та зосередженості на завданні, що сприятиме підвищенню їх продуктивності та результативності. [5]

На сьогоднішній день існує багато платформ, які використовують гейміфікацію для навчання інформатики. Деякі з них:

1. Codecademy – платформа для навчання програмування, яка використовує інтерактивні вправи та досягнення, щоб стимулювати учнів.
2. Scratch – інтерактивна платформа, розроблена Массачусетським технологічним інститутом, яка дозволяє учням створювати ігри та анімації за допомогою блоків програмування.
3. Khan Academy – платформа з безкоштовними онлайн-уроками, які включають у себе гейміфіковані елементи для навчання інформатики.
4. Codewars – платформа для навчання програмування, яка пропонує викликів у вигляді завдань, які треба вирішити, щоб отримати бали та досягнення.
5. Blockly Games – платформа, яка використовує графічний інтерфейс для навчання програмування, де учні можуть створювати свої власні ігри та інші проекти за допомогою блоків програмування.
6. Blooket – це навчальна платформа, яка дозволяє вчителям та учням створювати та використовувати інтерактивні навчальні ігри для підвищення зацікавленості та залученості учнів до навчання.

Ці платформи є лише деякими з багатьох інструментів, які використовують гейміфікацію для навчання інформатики. Важливо зазначити, що кожна з них має свої особливості та переваги, і вибір платформи залежить від потреб учнів та навчальної мети. [3]

Наступними кроками для вчителів є впровадження гейміфікації в освітній процес. Першим кроком може бути вивчення та аналіз технічних можливостей та переваг гейміфікації, а також створення плану її застосування на уроках інформатики. Важливо враховувати особливості кожного класу та кожного учня, а також використовувати різноманітні інструменти та методи гейміфікації.

Виокремимо головні кроки, які можуть допомогти впровадити гейміфікацію в освітній процес:

1. Визначення цілей та завдання: визначення цілей, які намагаються досягти за допомогою гейміфікації. Це може бути підвищення інтересу до предмета, підтримка високих навчальних результатів чи розвиток певних навичок.
2. Вибір гейміфікованих елементів: визначення елементів гейміфікації, такі як бали, досягнення, рівні складності, лідерські дошки тощо.
3. Створення ігрової структури: розробка системи, в якій учні можуть заробляти бали або досягнення за виконання різних завдань. Встановлення різних рівнів складності, які можна пройти, визначення способів інформування учнів про їх прогрес.
4. Розробка гейміфікованих завдань: створення завдань, які мають елементи гри: кросворди, головоломки, інтерактивні вправи чи проекти, які вимагають співпраці і розв'язання завдань для отримання балів чи нагород.
5. Використання технології: додавання технологічних аспектів до гейміфікації, наприклад, використання платформ або додатків для відстеження балів та досягнень.
6. Створення стимулюючої атмосфери: використання графічних елементів, символіки та ігрової тематики, щоб створити атмосферу гри. Розробка власного персонажу за допомогою штучного інтелекту. Це допоможе учням відчувати, що навчання - це захоплива пригода.
7. Врахування індивідуальності: створення можливості учням обирати завдання або шлях до досягнення мети, що забезпечить більшу індивідуалізацію та відчуття контролю.
8. Створення конкурсів та змагань: організація конкурсів, де учні змагатимуться один з одним або працюватимуть в командах над завданнями.
9. Оцінювання та нагороди: встановлення системи оцінювання, яка враховуватиме зароблені бали або досягнення. Вибір засобу нагородження учнів за досягнення.
10. Впровадження має бути поетапним: поступове впровадження гейміфікації на уроках, починаючи з простіших елементів та поступово розширюючи їх.

Головна мета – це зростання мотивації та інтересу учнів до навчання. Педагог має бути готовим до змін та адаптування підходів відповідно до реакції класу або окремого учня/учениці.

Висновки

Отже, використання гейміфікації на уроках інформатики може позитивно впливати на мотивацію учнів та покращувати їхні результати в навчанні. Застосування цього методу може зробити процес навчання цікавішим та більш захопливим для учнів, що стимулює їх до активної участі в уроці та досягненню кращих результатів.

Однак, для досягнення максимальної ефективності використання гейміфікації на уроках інформатики, необхідно правильно підібрати гру або іншу форму взаємодії, забезпечити належний рівень складності завдань, уникнути перенасичення візуальними ефектами та надмірними стимулами.

Крім того, важливо враховувати, що гейміфікація є лише одним із засобів підвищення мотивації учнів на уроках інформатики, вона повинна доповнюватися іншими методами та стратегіями, такими як особистісно-орієнтоване навчання, педагогічний дизайн тощо.

Література

1. Dicheva D., Dichev C., Agre G., & Angelova G.. Gamification in education: A systematic mapping study. Journal of Educational Technology & Society. 18(3), 2015. P.75-88.
2. Mimi Ito (2016) [Електронний ресурс] URL: https://cutt.ly/Ywx4JlLq
3. Velychko V., Kaidan N., Fedorenko E., Soloviev V. Gamification in the process of studying logical operators on the Minecraft EDU platform. Proceedings of the 4rd International Workshop on Augmented Reality in Education (AREdu 2021). Kryvyi Rih, 2021. P.107-118. URL: http://ceur-ws.org/Vol-2898/paper05.pdf
4. Бугаєва В.Ю. Гейміфікація як спосіб формування активної професійної поведінки майбутніх фахівців IT галузі /В.Ю. Бугаєва // Педагогіка та психологія: зб. наук. пр. / Харків. нац. пед. ун-т ім. Г.С. Сковороди. Харків, 2017. Вип. 56. С. 129–135.
5. Топ 10 прикладів гейміфікації (перетворення у гру) в освіті, які змінять наше майбутнє [Електронний ресурс] // Освіта Нова. Україна, 2018. – URL: https://cutt.ly/kwx4Ktsb

Nataliia V. Kaidan, Hanna I. Taranenko
Donbas State Pedagogical University, Sloviansk, Ukraine;
«Technical University «METINVEST POLYTECHNIC», METINVEST HOLDING LLC, Zaporizhzhia, Ukraine.

Motivation of the educational process by means of gamification

The article is focused on the means of involving students in the educational process, increasing their motivation to learn and achieving better results through the introduction of gamification in computer science lessons in a general secondary education institution. The main steps that can help the process of introducing gamification into the educational process are highlighted.

Keywords: *gamification, motivation, computer science, educational process, general secondary education.*

УДК 372.8

Кайдан Н.В., Ходика Х.В.
[1] *кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри МНМ та МНІ, ДВНЗ «ДДПУ»; доцент кафедри природничо-наукових та загальноінженерних дисциплін, ТОВ «ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «МЕТІНВЕСТ ПОЛІТЕХНІКА»*
e-mail: kaydannv@gmail.com, ORCID 0000-0002-4184-8230
[2] *здобувач магістерського РВО фізико-математичного факультету, ДВНЗ «ДДПУ»*
e-mail: kristinakhodyka@gmail.com, ORCID 0009-0004-3626-3985

ПРОЄКТНА ДІЯЛЬНІСТЬ ЯК ЗАСІБ РЕАЛІЗАЦІЇ STEAM ОСВІТИ В СТАРШІЙ ШКОЛІ

Статтю присвячено полідисциплінарному підходу до вивчення природничо-математичних дисциплін – STEAM-освіті, впровадження якої, на даний момент, є однією з актуальних проблем в системі освіти Україні. Увагу зосереджено на проєктному методі – одному з найбільш перспективних засобів реалізації STEAM-освіти у сучасній школі. Зокрема, висвітлено практичні питання реалізації STEAM-освіти у старшій школі, на прикладі STEAM-проєкту «Козацькі клейноди – святині українського народу». Виокремлено основні значущі елементи проєкту та описано етапи його реалізації.

Ключові слова: *STEM-освіта, проєкт, проєктна діяльність, старша школа.*

Вступ

Постановка проблеми. Така насиченість інформаційного простору та вільний доступ до світових інформаційних ресурсів які ми спостерігаємо на даний час докорінно змінюють роль та місце людини в інформатизованому суспільстві. Це, в свою чергу, логічно віддзеркалюється на вимогах до освіти сучасної молоді. Крім того «Концептуальні засади реформування середньої освіти» підкреслюють необхідність наскрізного застосування ІКТ в освіті, як інструменту забезпечення успіху нової української школи. [3,4]

Сучасний погляд на освіту передбачає, що природничі науки, техніка, інженерія, мистецтво та математика є досить важливими дисциплінами, які розширюють можливості членів сучасного суспільства в їх роботі і повсякденному житті. І тому, одним із шляхів у розв’язанні розглянутої проблеми є поширення STEM-освіти. [2]

Зарубіжний досвід упровадження STEM-освіти описано у дослідженнях Georgette Yakman, George Lucas, Jonathan W. Gerlach. та інші. Вітчизняний досвід описують такі дослідники як В. Величко, С .Галата, О. Данилова, О. Коршунова, О. Лозова, Н. Морзе, О. Патрикеєва та інші. Видатні науковці досліджують проблеми і перспективи STEM-освіти, розкривають особливості використання ігрових технологій в STEM, висвітлюють проблеми STEM-підготовки вчителів тощо.

У роботі В. Пікалової [5] розглянуто актуальну проблему вдосконалення системи освіти, а саме застосування концепції STEAM, як інноваційного підходу та розкрито можливості реалізації трьох основних шляхів впровадження STEAM-освіти у шкільний процес.

STEAM-проєкт, який ґрунтується на певній реальній проблемі, шляхи розв'язання якої потребують інтеграції знань з різних навчальних дисциплін. Результати проведеної роботи оприлюднюються в мережі Інтернет або на конкурсах чи турнірах. Це є найбільш розповсюдженою формою реалізації STEAM-освіти у зарубіжній шкільній практиці.

STEAM-урок, який є, по суті, зменшеною версією STEAM-проєкту. Певними особливостями STEAM-уроку є те, що кожна частина відповідного уроку чітко структурована і має часовий регламент, окрім цього, кількість навчальних дисциплін, які можна залучити для вирішення поставленої задачі, є обмеженою.

Мейкер-простір, який є творчим простором дитини, де вона розкриває власні здібності, проявляє талант або обдарованість у певній специфічній діяльності, реалізує власний творчий потенціал, випробує особистісні можливості й відтворює власні задуми в діяльності, не переймаючись тим, що наступний крок може стати хибним, спілкується з однодумцями.

Метою статті є висвітлення практичних питань реалізації проєктної діяльності як засобу реалізації STEAM освіти в старшій школі.

Основна частина

Використання провідного принципу STEM-освіти – інтеграції, дозволяє здійснювати модернізацію методологічних засад, змісту, обсягу навчального матеріалу предметів природничо-математичного циклу, технологізацію процесу навчання та сформувати: навички розв'язання складних (комплексних) практичних проблем, критичного мислення, креативних якостей та когнітивної гнучкості, організаційних та комунікаційних здібностей, вміння оцінювати проблеми та приймати рішення, готовності до свідомого вибору та оволодіння майбутньою професією, фінансової грамотності, цілісного наукового світогляду, ціннісних орієнтирів, загальнокультурної, технологічної, комунікативної і соціальної компетентностей, математичної та природничої грамотності; всебічний розвиток особистості шляхом виявлення її нахилів і здібностей; навички оволодіння засобами пізнавальної, дослідної та практичної діяльності; виховання особистості, яка прагне до здобуття освіти впродовж життя, формування умінь практичного і творчого застосування здобутих знань. Істотна роль в інтегративному підході реалізації STEM-освіти приділяється математиці: послідовному, ґрунтовному, якісному її викладанню. [1]

Проєктна діяльність є важливим і ефективним засобом реалізації STEAM-освіти (Science, Technology, Engineering, Arts, Mathematics) в старшій школі. STEAM-освіта спрямована на інтеграцію різних дисциплін з метою навчання учнів критичному мисленню, проблемному розв'язанню та творчості, що розкриває значущість проєктної діяльності. Проєктна діяльність може сприяти реалізації STEAM-освіти в старшій школі наступним чином:

Інтеграція дисциплін: проєктна діяльність дає можливість інтегрувати різні дисципліни, такі як наука, технології, інженерія, мистецтво та математика. Учні можуть працювати над проєктами, які об'єднують елементи цих галузей, сприяючи більш глибокому розумінню взаємозв'язків між ними.

Активне навчання: проєктна діяльність включає учнів у активний навчальний процес. Вони вивчають новий матеріал, досліджують питання, розв'язують реальні проблеми та створюють продукти. Цей підхід сприяє глибокому розумінню концепцій та набуттю практичних навичок.

Творчість та інновації: проєктна діяльність надає учням можливість розкрити свою творчість та інноваційний потенціал. Вони можуть працювати над власними ідеями, вирішувати нетривіальні завдання та шукати нові способи розв'язання проблем.

Комунікація та співпраця: проєктна діяльність часто передбачає співпрацю учнів у групах. Це сприяє розвитку навичок комунікації, співпраці, лідерства та розподілу обов'язків, які є важливими як в навчанні, так і в реальному житті.

Реальність і контекст: проєкти можуть базуватися на реальних проблемах або завданнях, що дає учням можливість застосувати свої знання та навички у конкретному контексті. Це робить навчання більш значущим та призначеним для реального світу.

Оцінка засвоєння: проєктна діяльність дозволяє вчителям оцінювати знання та навички учнів у контексті реальних завдань. Оцінка може враховувати як змістові аспекти, так і процес вирішення завдань.

Розвиток критичного мислення: учні, працюючи над проєктами, вчаться аналізувати інформацію, здійснювати критичну оцінку рішень та приймати обґрунтовані рішення.

Проєктна діяльність відображає ключові аспекти STEAM-освіти, сприяючи комплексному розвитку учнів. Вона надає можливість поглибити знання, розвинути навички та підготувати учнів до викликів сучасного світу. Як приклад, розглянемо STEAM-проєкт *«Козацькі клейноди – святині українського народу»* у якому здійснюється інтеграція історії, української літератури, математики, інформатики, мистецтва та трудового навчання. Учні навчаються шукати, збирати, опрацьовувати дані, користуючись різними джерелами, і представляти здобутки засобами інформаційно-комунікаційних технологій.

Опис проєкту наведено в таблиці 1.

DOI: https://doi.org/...

Проєкт «Козацькі клейноди – святині українського народу»

Таблиця 1

Предмет	Тема	Завдання за предметами
Історія	«Військо Запорозьке. Козацькі клейноди»	Сприяти розвитку національно-патріотичного виховання в школі – справі, що за своїм значенням є стратегічним завданням. Виховувати почуття гордості за свій народ, його героїчне минуле. Вчити пам’ятати і усвідомлювати, що без знання і розуміння немає майбутнього.
Українська література	«Символи козацької влади в культурі українського народу»	Сфокусувати увагу учнів на проблемі проєкту й викликати інтерес до обговорюваної теми. Ознайомити учнів з жанром історичної пісні, її особливостями; розвивати вміння аналізувати пісні, байки, вірші. Висловлювати власні враження від прочитаного; виховувати любов до рідного дому, народу, Батьківщини.
Математика	«Властивості площ»	Працювати з навчальною математичною літературою. Забезпечити оволодіння математичними вміннями і навичками раціональних обчислень, оцінки результатів, вимірювання, побудови, обчислювальними і вимірювальними приладами. Послідовно, лаконічно, доказово вести математичні міркування.
Інформатика	«Робота в програмі «3D-MAX Studio»	Дати елементарні відомості про основні способи зображення просторових об’єктів на площині. Навчити учнів свідомо читати графічні матеріали, відтворювати образи предметів та аналізувати їх форму і конструкцію. Сформувати в учнів систему знань та вмінь, необхідних для створення графічних креслень. Забезпечити умови для ознайомлення учнів зі структурою і технологією сучасного виробництва, шляхом їх моделювання та конструювання. Сприяти розвитку технічного мислення, пізнавальної діяльності та просторової уяви учнів. Сприяти організації самостійної роботи учня.
Образотворче мистецтво	«Історична спадщина козаків засобами мистецтва» (позакласна робота)	Перевірка теоретичних знань з образотворчого мистецтва. Закріплення загальних знань з образотворчого мистецтва. Закріплення знань про козацтво шляхом візуалізації. Розвивати увагу і зорову пам'ять.

Обслуговуюча праця	«Конструювання і моделювання виробів з текстилю і деревини»	Формування в учнів культури праці, навичок раціонального ведення домашнього господарства, культури побуту, відповідальності за результати власної діяльності, комплексу особистих якостей, потрібних людині як суб'єкту сучасного виробництва і культурного розвитку суспільства. Уміння самостійно інтегрувати раніше отримані знання з різних навчальних предметів для розв'язування пізнавальних задач, які містяться в STEM-проєкті.

Навчальною метою проєкту є сприяння розвитку національно-патріотичного виховання в школі; виховання почуття гордості за свій народ, його героїчне минуле; сприяння формуванню навичок роботи учнів з інформаційними технологіями XXI століття; розвиток творчості, критичного та креативного мислення, комунікативних навичок та навичок співробітництва між учнями; формування медіа- та ІКТ грамотності; розвиток навичок самоконтролю, творчого підходу, естетичного смаку, вміння узагальнювати і систематизувати інформацію.

Висновки

STEM-проєкти, на відміну від звичної нам традиційної організації навчального процесу, дають змогу учням наблизитись до практичної діяльності. Це, в свою чергу, усуває розрив між теоретичним розв’язанням проблеми та подальшим практичним втіленням отриманих результатів. Міцному засвоєнню нового матеріалу під час роботи над проектом допомагає використання інформації з різних галузей знань та дисциплін. Виконання дослідницької діяльності забезпечує формуванню більш високого рівня навиків роботи у групах, комунікації, врахування ідей інших виконавців проєкту, що допомагає прийняти правильне рішення. В свою чергу, така діяльність може стати певним кроком до свідомого вибору майбутньої професії.

Література

1. STEM-освіта. URL: https://imzo.gov.ua/stem-osvita/
2. Андрієвська В.М. Проект як засіб реалізації STEAM-освіти у початковій школі / В. М. Андрієвська // Науковий вісник Ужгородського університету. Серія: Педагогіка. Соціальна робота. Вип. 2, 2017. С. 11-14. URL: http://nbuv.gov.ua/UJRN/Nvuuped_2017_2_3
3. Концепція «Нова українська школа». Інформаційний збірник МОН України. 2016. URL: http://mon.gov.ua
4. Накази МОН України. URL: https://imzo.gov.ua/stem-osvita/normativno-pravove-zabezpechennya/nakazi-monukrayini/
5. Пікалова В.В. Реалізація STEAM-освіти в проєктній діяльності майбутнього вчителя математики. Електронне наукове фахове видання «Відкрите освітнє Е-середовище сучасного університету», вип. 9, Листопад 2020. С. 95-103, doi:10.28925/2414-0325.2020.9.8.

Nataliia V. Kaidan, Khrystyna V. Khodyka
Donbas State Pedagogical University, Sloviansk, Ukraine;
«Technical University «METINVEST POLYTECHNIC», METINVEST HOLDING LLC, Zaporizhzhia, Ukraine.

Project activity as a mean of implementing STEAM education in high school

The article is devoted to a multidisciplinary approach to the study of natural and mathematical disciplines called STEAM education, the implementation of which is currently one of the most relevant problems in the Ukrainian education system. The attention is focused on the project method which is one of the most promising means of implementing STEAM education in a modern school. In particular, the practical issues of implementing STEAM education in high school are highlighted, using the example of the STEAM project "Cossack Kleinodes - the sacred objects of the Ukrainian people". The main significant elements of the project are highlighted and the stages of its implementation are described.

Keywords: *STEM education, project, project activity, high school.*

УДК 519.7

Стьопкін А.В., Кіт М.Ю.
[1] *кандидат фіз.-мат. н., доцент кафедри математики та інформатики, ДВНЗ «ДДПУ»*
e-mail: stepkin.andrey@ukr.net, ORCID 0000-0002-6130-9920
[2] *здобувач магістерського РВО фізико-математичного факультету, ДВНЗ «ДДПУ»*
e-mail: kitm07@meta.ua, ORCID 0009-0004-8325-3544

АЛГОРИТМИ РОЗПІЗНАВАННЯ ГРАФІВ КОЛЕКТИВОМ АГЕНТІВ

В роботі проведено огляд та проаналізовано сучасний стан наукових досліджень, пов'язаних з розпізнаванням графів колективом агентів. Також проаналізовано можливість та необхідність ознайомлення учнів старших класів закладів загальної середньої освіти з задачею розпізнавання графів та поглиблення її вивчення до колективного розпізнавання.

Ключові слова: *розпізнавання графів, алгоритми обходу графа, колектив агентів.*

Вступ

В наш час задача розпізнавання графів використовується в багатьох сферах науки, таких як комп'ютерна наука, машинне навчання, соціологія, біологія та багато інших [1-3].

Тому активно розроблюються нові алгоритми розпізнавання графів [4]. Ця задача полягає у тому, щоб агент, який розпізнає граф побудував карту досліджуваного графу.

Також задача може бути розширена до визначення деяких додаткових характеристик графу, наприклад, таких як розмірність, тип, властивості вершин та ребер і т.д.

Так як в наш час досить популярними є паралельні обчислення, то цей тренд не оминув і задачу розпізнавання графів. Активно розвиваються дослідження щодо розпізнавання графів колективами агентів [5-9].

Застосування алгоритмів розпізнавання графів колективом агентів має великий потенціал розвитку. Наприклад, в машинному навчанні це може оптимізувати процес розпізнавання зображень, зокрема в області розпізнавання облич, об'єктів або символів; в біології розпізнавання графів колективом агентів може прискорити вивчення молекулярних структур та генетичних кодів; в області рекомендаційних систем ці алгоритми можуть допомогти у побудові більш ефективних та точних моделей рекомендацій для користувачів на основі аналізу графів соціальних мереж.

Отже, задача розпізнавання графів колективом агентів є актуальною та має великий потенціал у багатьох сферах науки, тому розв'язання цієї задачі є важливим напрямком дослідження.

Основна частина

Одним з напрямів науки, де широкого розповсюдження зазнало вивчення проблеми розпізнавання графів є робототехніка. Одним з напрямів розвитку робототехніки є необхідність заміни людей при виконанні небезпечних робіт, до яких можна віднести наприклад, побудову карти небезпечних чи поганодоступних об'єктів [1]. Звісно, що використання колективів роботів для виконання зазначеної задачі може значно підвищити вірогідність її вирішення, значно спростити процес, а то і зменшити час роботи [4-6].

Розглянемо більш детально дослідження останніх років, які проводилися з даної тематики. Початком наукових досліджень прийнято вважати роботу 1951 року К. Шеннона, в якій розглядалась задача пошуку автоматом цілі в лабіринті [10].

У 2009-2010 роках запропоновано дослідження роботи так званих роїв агентів. Алгоритм роботи такого рою полягає в наступному. Всі агенти, домовившись про час наступної зустрічі, починають роботу з однієї вершини. Розходяться по різним ребрам та обходять деяку частину графу, будуючи його карту. Потім в зазначений час повертаються до початкової вершини для об'єднання побудованих карт. Потім знову домовляються та розходяться. Таким чином відбувається до повного розпізнавання графу. Звісно, що для роботи даного алгоритму необхідно щоб кожен агент мав пам'ять, яка зможе вмістити карту всього графу [11,12].

У 2015 році запропоновано роботу, в якій розглядається задача розпізнавання неорієнтованих графів колективом агентів. В цій роботі використовується всього два типи агентів: агент-дослідник (рухається графом та передає інформацію про вершини та ребра, які він відвідав), агент-експериментатор (по отриманій від агентів-дослідників інформації будує в своїй пам'яті карту графу). Робота відбувається наступним чином: два агента-дослідника одночасно рухаються графом, зчитують та змінюють помітки елементів графа, передають необхідну інформацію агенту-експериментатору, який будує уявлення про досліджуваний граф. Для розпізнавання два агенти, що рухаються графом, використовують по дві різні фарби (усього три фарби). Метод базується на методі обходу графа в глибину. Для роботи алгоритму агент-експериментатор повинен мати пам'ять, яка може вмістити всю карту графу. Агенти-дослідники можуть мати меншу пам'ять, але вона також залежить від розмірності графу.

У 2016 році було запропоновано децентралізований підхід до дослідження графів колективом агентів [5]. Цей алгоритм допомагає уникнути зустрічей агентів у одній вершині. Агенти не мають прямого зв'язку, але можуть спілкуватися за допомогою спеціальних маячків, які вони залишають у вершинах. Агентами ніхто не керує і вони приймають рішення самостійно, без врахування дій інших агентів. Даний алгоритм гарантує побудову карти середовища за скінчену кількість кроків. Звісно, що алгоритм вимагає від агентів кількість пам'яті достатню для збереження всієї карти середовища.

У 2018 році з'являється робота [7], в якій агенти обмінюються інформацією з базовою станцією через спеціальну мережу, яка формується агентами на початку роботи. Тобто для передачі даних в якийсь момент агенти повинні зайняти певні вершини графу, які були визначенні при побудові мережі на початку роботи. Особливістю статті є асинхронність комунікації. Тобто реалізовано можливість передачі інструкцій агентам, які в конкретний проміжок часу готові їх сприйняти.

У статті 2020 року [5] зроблено спробу розробити загальні концепції і вимоги до дослідження графів колективами агентів. Робота була направлена на надання загальних умов для оголошення закінчення процесу дослідження графу та завершення такого дослідження за скінчену кількість кроків. В роботі запропоновані модифікації матриці інцидентності для оптимізації процесу обміну інформацією між агентами.

У 2021 році запропоновано роботу [13], в якій запропоновано новий метод і відповідний алгоритм розпізнавання графу колективом агентів, запропонованим у роботі 2015 року. Основною перевагою даного дослідження є оптимізація роботи агентів та процесу обміну інформацією таким чином, що стало можливим використання агентів-дослідників зі скінченою пам'яттю, яка не залежить від розмірності графу, що робить можливим використання одних і тих же агентів дослідників для графів різної розмірності. Звісно, що агент-експериментатор маю ту ж пам'ять, що і у роботі 2015 року. Для роботи алгоритму як і раніше необхідно 3 краски.

У 2022 році в роботі [14] автори розробили алгоритм оцінки параметрів декількох агентів зі спільною дослідницькою поведінкою, зберігаючи при цьому простоту декомпозиції. Основна ідея полягає в тому, щоб апроксимувати спільний простір станів графом Кронекера на основі якого можна оцінити вектор Фідлера, використовуючи Лапласівський спектр графів переходів окремих агентів. Окрім того, враховуючи, що пряме обчислення спектра Лапласа неможливе для задач з нескінченими просторами станів, авторами було запропоновано використання апроксимації глибокої нейронної мережі для вивчення цих спектрів. Тим самим їх метод було адаптовано і для задач з нескінченими просторами станів.

На початку 2023 року було запропоновано метод дослідження [15] для багатоагентного навчання з підкріпленням (MARL) з комунікацією між агентами на основі графу. Було зроблено припущення, що індивідуальні винагороди, що отримуються агентами, не залежать від дій інших агентів, а їхні політики пов'язані. В запропонованій структурі сусідні агенти співпрацюють, щоб оцінити невизначеність простору стану-дії, щоб мати більш ефективну дослідницьку поведінку. На відміну від вже існуючих робіт, запропонований алгоритм не потребує механізмів підрахунку та може використовуватись в середовищах з неперервними станами, не потребуючи складних методів перетворення. Також запропонована схема дозволяє агентам спілкуватися повністю децентралізовано з мінімальним обміном інформацією. Працездатність алгоритму перевірена з теоретичними результатами для дискретних сценаріїв і з експериментами для неперервних.

Як можна бачити, дослідження всякого роду багатоагентних систем досить цікавий та актуальний напрямок у науці.

Аналізуючи програми з інформатики для закладів загальної середньої освіти, можна побачити, що з основними поняттями теорії графів учнів знайомлять тільки в 11 класі і то лише за профільною програмою. В програмі рівня стандарт вивчення теорії графів не передбачено зовсім. Але задачі з теорії графів можна зустріти як в учнівських так и в студентських олімпіадах. Звісно з основами теорії графів учні можуть розібратися самостійно, але алгоритми на графах зовсім нетривіальні і для їх опанування потрібна допомога вчителя. На наш погляд, вивчення алгоритмів розпізнавання краще всього проводити на кружках з інформатики, причому залучати до цієї роботи, можна учнів, починаючи з 9го класу, коли вже було вивчено поняття масиву. Звісно для них необхідно буде провести заняття з основ теорії графів. Але це буде стосуватися і учнів старших класів, які навчаються за стандартною програмою.

Звісно, що знайомство з алгоритмами розпізнавання графів краще починати з роботи одного агента з нескінченою пам'яттю, що рухається графом. Це найпростіший випадок, але він дозволяє зрозуміти особливості обходу графа та побудову його карти у пам'яті агента, не навантажуючи задачу необхідністю обміну інформацією між агентами. Наступним етапом краще розглянути задачі з двома агентами, що рухаються графом та одним, який будує карту графу. І вже після опанування цього матеріалу буде можливим розгляд задач з різноманітними типами колективів.

Висновки

В роботі детально розглянуто сучасні дослідження щодо розпізнавання графів колективом агентів. Проаналізовано програми вивчення інформатики в закладах загальної середньої освіти та можливість ознайомлення учнів з задачею розпізнавання графів. А також більш складного варіанту цієї задачі з використанням колективів агентів.

Література

1. Albers S., Henzinger M.R. Exploring unknown environments // SIAM Journal on Computing. – 2000. – №29(4). – P. 1164-1188.
2. R. Fleischer, G. Trippen Exploring an unknown graph efficiently G.S. Brodal, S. Leonardi (Eds.), Proceedings of the 13th Annual European Symposium on Algorithms, Lecture Notes in Computer Science, vol. 3669, ESA 2005, Palma de Mallorca, Spain, October 3–6, 2005, Springer (2005), pp. 11-22
3. Thrun S., et al., Robotic mapping: a survey. – 2003. – pp. 1–35.
4. Zhang C. Parallelizing Depth-First Search for Robotic Graph Exploration // Harvard College, Cambridge, Massachusetts. – 2010.

5. Nagavarapu S.C., Vachhani L., Sinha A. et al. Generalizing Multi-agent Graph Exploration Techniques // International Journal of Control, Automation and Systems (2020). https://doi.org/10.1007/s12555-019-0067-8
6. Stepkin A. Using a Collective of Agents for Exploration of Undirected Graphs / A. Stepkin // Cybernetics and Systems Analysis. – 2015. – V.51, №2. – PP. 223-233.
7. Banfi J., Quattrini Li.A., Rekleitis I. et al. Strategies for coordinated multirobot exploration with recurrent connectivity constraints. // Autonomous Robots 42, 875-894 (2018). https://doi.org/10.1007/s10514-017-9652-y
8. Стёпкин А.В. Возможность и сложность распознавания графов тремя агентами / А.В. Стёпкин // Таврический вестник информатики и математики. – 2012. – №1 (20). – С. 88-98.
9. Стёпкин А.В. Распознавание конечных графов тремя агентами / А.В. Стёпкин // Искусственный интеллект. – 2011. – №2. – С. 84-93.
10. Shannon C.E. Presentation of a maze-solving machine // Cybernetics Trans, of the 8 th Conf. of the JosiahMacy Jr. Found / Editor: H. Foerster. – 1951. – P. 173-180.
11. Wang H., Jenkin M., Dymond P. It can be beneficial to be 'lazy' when exploring graph-like worlds with multiple robots // In Proceedings of the IASTED International Conference on Advances in Computer Science and Engineering (ACSE). – 2009. – P. 55-60.
12. Zhang C. Parallelizing Depth-First Search for Robotic Graph Exploration // Harvard College, Cambridge, Massachusetts. – 2010.
13. Стёпкин А.В., Стёпкина А.С. Алгоритм распознавания простых графов коллективом агентов. Компьютерные исследования и моделирование. 2021. Т.13, №1. С. 33-45.
14. Jiayu Chen, Jingdi Chen, Tian Lan, Vaneet Aggarwal. Scalable Multi-agent Covering Option Discovery based on Kronecker Graphs / Jiayu Chen, Jingdi Chen, Tian Lan, Vaneet Aggarwal // Advances in Neural Information Processing Systems, 2022.
15. Ainur Zhaikhan, Ali H. Sayed. Graph Exploration for Effective Multi-agent Q-Learning. arXiv:2304.09547, 2023.

A. V. Stepkin, M. Yu. Kit
Donbas State Pedagogical University, Sloviansk, Ukraine;

Algorithms of graph exploration by a collective of agents

In this paper reviews and analyzes the current state of scientific research related to graph exploration by a collective of agents. The possibility and necessity of familiarizing students of senior classes of general secondary education institutions with the task of graph exploration and deepening its study to exploration graph by a collective of agents is also analyzed.

Keywords: *graph exploration, graph traversal, collective of agents.*

УДК 378.018.43:004

Федоренко О.Г., Мадунцева К.Е.
[1] *кандидат пед. н., доцент кафедри математики та інформатики, ДВНЗ «ДДПУ»*
e-mail: fedorenko.elena1209@gmail.com, ORCID 0000-0002-1897-874X
[2] *здобувач магістерського РВО фізико-математичного факультету, ДВНЗ «ДДПУ»*
e-mail: user@domain.zona, ORCID 0009-0007-6228-9187

ОСОБЛИВОСТІ ВИКОРИСТАННЯ СУЧАСНИХ ТЕСТОВИХ ТЕХНОЛОГІЙ ДЛЯ ПЕРЕВІРКИ ЗНАНЬ УЧНІВ НА УРОКАХ ІНФОРМАТИКИ

Статтю присвячено проблемі організації проведення поточного та підсумкового контролю під час викладання інформатики. Електронне навчання, що займає все більш активну позицію в навчальному процесі, потребує нових підходів не лише в організації подання навчального матеріалу а й у частині визначення рівня оволодіння навчальним матеріалом, сформованих навичок їх використання. Не має принципової різниці у тому, яку форму організації використовують у навчальному процесі – дистанційну, змішану чи очну; використання електронного навчання повинно мати у своєму арсеналі механізми та засоби визначення рівня сформованих компетентностей.

Ключові слова: *електронне навчання, вивчення інформатики, тестування.*

Вступ

Широке використання електронного навчання пов'язано не лише з необхідністю застосування дистанційної форми навчання в Україні, а також із його новими дидактичними можливостями. Електронне навчання має як свої переваги, так і недоліки. До переваг дослідники відносять потужні можливості обчислювальної техніки з демонстрації навчального матеріалу та його постійну доступність. Сервіси працюють цілодобово, а тому переглядати лекційний матеріал, у тому числі й у вигляді відео та аудіо записів, виконувати тренувальні вправи, відпрацьовувати свої навички на тренажерах, досліджувати об'єкти на симуляторах, виконувати завдання різноманітного виду на обчислення, створення нового контенту тощо можна у будь-який сприятливий для користувача час. Для електронного навчання не має кордонів, учні можуть навчатись у кращих педагогів, обирати навчальний матеріал за своїми уподобаннями. До переваг також відносять сучасність навчального матеріалу. В інформаційному суспільстві нові знання створюються в електронному вигляді, все нове стає доступним миттєво. До недоліків електронного навчання відносять обмеженість спілкування віч на віч, коли учитель може приймати рішення щодо процесу навчання в залежності від поточних успіхів. Ще однією з проблем електронного навчання є оцінка рівня засвоєння знань, умінь та навичок.

Основна частина

Оцінка рівня засвоєння знань є багатогранною проблемою, комплексне вирішення якої потребує цілої низки дій. Перша проблема полягає у ідентифікації. Для того, щоб впевнитись у тому що контрольний захід виконує саме той учень застосовують різні методи, від запису на камеру власне учня до запису екрану комп'ютера на якому виконується завдання. Є приклади, коли вимагають запис сторонньою камерою і кімнати, де виконується завдання. У будь-якому разі ці відео необхідно переглядати для того, щоб впевнитись у дотриманні вимог самостійного виконання завдання.

Друге проблема полягає у переліку завдань, що необхідно виконати для всебічного визначення рівня набутих знань. В залежності від специфіки галузі знань завдання можуть докорінно відрізнятись одне від одного. Найпростіший варіант завдань це тести, і якщо використовують тест із закритою формою, то можливим стає автоматична перевірка результатів, але присутній принцип "вгадав/не вгадав". Тести з відкритою формою передбачають необхідність перевірки їх результатів у ручному режимі, а це збільшує затрати людських ресурсів. Масові відкриті онлайн курси використовують метод взаємоперевірки робіт коли кожен учасник перевіряє принаймні п'ять робіт і його роботу перевіряє принаймні троє. Але такий метод не буде мати відповідного ефекту у шкільній освіті, бо учні знають один одного і на оцінку буде впливати суб'єктивне ставлення до автора роботи, що потрібно перевірити. Ще одна проблема полягає у тому, що згенерувати для кожного унікальні питання важко, а інколи не можливо. При комп'ютерному тестуванні зазвичай використовують опцію зміни порядку питань тесту та зміну порядку запропонованих відповідей. Такий підхід ускладнює створення переліку правильних відповідей, але не унеможливлює його існування. Для більшої різноманітності інколи використовують опцію випадкового вибору питань для тесту з надлишкової кількості розроблених питань.

Таким чином, проблема тестування в електронному навчанні стоїть доволі гостро і необхідно її вирішувати пропонуючи не тільки нові методи перевірки знань, а й нові засоби перевірки. Метою дослідження є аналіз особливостей використання сучасних тестових технологій для перевірки знань учнів на уроках інформатики.

Розвиток електронного навчання, дидактичні можливості електронного навчання, принципи та методи електронного навчання досліджували багато науковців, які при цьому отримали гарні результати. Так, Величко В., Глазова В., Кайдан Н. та Федоренко О. дійшли висновку, що "у традиційних формах навчання, таких як лекції, практичні і лабораторні заняття, використання електронних освітніх ресурсів істотно розширюють можливості не лише викладача як організатора навчання, а й різноплановість представлення навчального матеріалу, побудови власної освітньої траєкторії тощо" [1].

Досліджуючи стан, технології та перспективи дистанційного навчання у вищій школі України С.О. Сисоєва та К.П. Осадча впевнені, що застосування дистанційних технологій у ЗВО найбільш перспективні під час застосування для “технології адаптивного навчання, мобільне навчання, віртуальна, доповнена та гібридна реальності, «Інтернет речей», системи управління навчанням наступного покоління, штучний інтелект та природні користувацькі інтерфейси” [2].

Наукова доповідь «Науково-методичне забезпечення цифровізації освіти України: стан, проблеми, перспективи» авторського колективу Кремень В.Г., Биков В.Ю., Ляшенко О.І. та ін. висвітлює багато аспектів електронного навчання [3]. Зокрема автори приділяють увагу і процесу поточного та підсумкового контролю, які є методи та засоби тестування. У висновках зокрема йдеться про докорінне поліпшення якості фахової підготовки учителів у закладах вищої освіти до ефективної професійної діяльності в цифровому освітньому середовищі.

Підготовка майбутніх учителів інформатики є важливим етапом інформатизації освіти. В. Глазова у своєму дослідженні доходить висновку, що підготовка майбутніх педагогів до ефективного використання дистанційних технологій дозволяє раціоналізувати процеси викладання та навчання, удосконалити засоби моніторингу, діагностики освітньої діяльності, значно розширити дидактичні, інформаційні, методичні та технологічні можливості освітнього процесу [4].

Багато цікавих хоча і дещо спірних думок висловлено на сторінках колективної монографії під загальною редакцією В.М. Кухаренка та В.В. Бондаренка [5]. У поле зору одного з авторів монографії І. Гарко потрапили онлайн сервіси Майстер-Тест (https://master-test.net/) та Online Test Pad (https://onlinetestpad.com/). Автор провів опитування зібравши враження студентів після вивчення дистанційного курсу і зробив висновок, що «сподобалися саме практичні тестові завдання, адже вони дозволяли застосувати вивчений теоретичний матеріал і таким чином закріпити знання – зрозуміти, а не завчити» [5, с. 158]. Деякі співавтори даної колективної монографії використовували для тестування Google Forms, вбудовані системи тестування в платформи дистанційного навчання, Ю. Олійник, Н. Лопіна та В. Нестеренко вважать платформу Socrative (https://www.socrative.com/) найкращою для тестування посилаючись на дослідження колег [5, с. 278]. Чітку систему проведення тестування у СумДУ описали у своїй частині колективної монографії О. Шовкопляс та О. Базиль, з відеофіксацією того, хто виконує тест, з можливістю відмови у проходженні тесту через порушення Кодексу академічної доброчесності. Цікавим результатом виконаного О. Шовкопляс та О. Базиль опитування є надвисокий результат ефективності дистанційного навчання через листи на особисту електронну пошту при задекларованих СумДУ платформах та засобах організації та проведення дистанційного навчання.

Оцінювання, особливо в когнітивній сфері, є центральним у процесі навчання і має проводитися точно та відповідно до предмета, який оцінюється або вимірюється. Когнітивні навички учнів у процесі навчання, відповідно до розвитку теорії таксономії Блума, можна розділити на навички мислення нижчого рівня LOTS (Lower-Order Thinking Skills) і навички мислення вищого порядку HOTS (Higher-Order Thinking Skills). LOTS включає запам'ятовування, розуміння та застосування; HOTS, з іншого боку, складається з аналізу, оцінювання та створення. HOTS – це конфігурації мислення, що вимагають не лише навичок запам'ятовування, але й інших вищих навичок. Дослідники Sri Wahyu Widyaningsih, Irfan Yusuf, Zuhdan Kun Prasetyo та Edi Istiyono опублікували дослідження побудови тесту з фізики, що базується саме на перевірці навичок вищого порядку (HOTS) [6]. Автори за результатами проведеного експерименту дійшли висновку про високу надійність отриманих результатів тестування порівнюючи їх з іншими методами оцінки отриманих знань, умінь та навичок.

Питання визначення рівня засвоєння навчального матеріалу під час електронного навчання дослідили у своїй роботі Ami Hibatul Jameel, Abd Gafur та Andy Sapta [7]. Запитання для поточного та підсумкового контролю під час електронного навчання повинні розвивати критичне та творче мислення тих, хто навчається. Головне питання, що ставлять дослідники полягає в тому, чи ведуть наявні навчальні завдання до навичок мислення вищого порядку (HOTS) чи вони все ще на рівні нижчих навичок мислення? Дослідження проводилось на факультеті педагогічної підготовки та педагогічних наук університету Тербука, Індонезія, з використанням змішаного методу навчання. Проведений аналіз результатів дозволив авторам прийти до висновку, що навчальні завдання під час електронного навчання ще не призвели до розвитку конфігурацій (навичок) мислення вищого порядку (HOTS) і не можуть бути оціненими. Відповідно до цього автори рекомендують приділити увагу важливості створення умов, при яких учні відчувають особисту відповідальність за своє власне навчання і мають більшу зацікавленість в активному навчанні та виконанні завдань.

Навички мислення низького рівня передбачають здатність запам'ятовувати (C1), розуміти (C2) і застосовувати (C3), тоді як навички мислення високого рівня передбачають аналіз і синтез (C4), оцінювання (C5) і творчість (C6).). Аналіз цієї переглянутої таксономії Блума також включає в себе можливість організації та зв'язку між частинами, щоб отримати більш вичерпне значення. Коли здатність аналізувати веде до процесу критичного мислення, щоб людина могла приймати правильні рішення, ця людина досягла рівня оцінювального мислення. З оціночної діяльності можна знайти сильні та слабкі сторони. На основі цих сильних і слабких сторін зрештою генеруються нові ідеї або вони відрізняються від існуючих. Коли людина здатна генерувати нові чи інші ідеї, це рівень мислення, який називається рівнем «творчого мислення» [7].

DOI: https://doi.org/...

Можна розглянути наступну структуру виміру когнітивного процесу, що надасть можливість розробки та реалізації тестування на різних рівнях.

Таблиця 1. Структура виміру когнітивного процесу переглянутої таксономії

Навички мислення низького рівня	
(C1) Запам’ятовувати (отримання відповідних знань із довготривалої пам’яті)	• Розпізнавання • Відтворення
(C2) Розуміти (визначення значення навчальних повідомлень, включаючи усну, письмову та графічну комунікацію)	• Усний переклад • Наведення прикладів • Класифікація • Підведення підсумків • Висновок • Порівняння • Пояснення
(C3) Застосувати (Виконання або використання процедури в певній ситуації)	• Виконання • Впровадження
Навички мислення високого рівня	
(C4) Аналіз і синтез (розділення матеріалу на складові частини та визначення того, як частини пов’язані одна з одною та загальною структурою чи призначенням)	• Диференціація • Структурування • Пояснення
(C5) Оцінювання (робити судження на основі критеріїв і стандартів)	• Перевірка відповідності • Критика
(C6) Створення (об’єднання елементів, щоб сформувати нове, узгоджене ціле або створити оригінальний продукт)	• Створення • Планування • Виготовлення

Таким чином, ми доходимо висновку, що для того, щоб перевірити уміння на рівні C5 необхідно давати завдання щодо критичного аналізу того чи іншого явища, процесу, твердження. Для найвищого рівня C6 необхідним є створення цифрового продукту в залежності від предметною спеціалізації. Тестові запитання, на кшталт «виберіть правильне твердження», є перевіркою на найнижчому рівні C1.

На сьогодні існує доволі широкий набір інструментів для створення тестових завдань. Це і спеціальні системи, що працюють у вигляді застосунків на різних платформах і спеціальні системи, що працюють на основі хмарних сервісів. Окрім того системи організації навчання (LMS) містять вбудовані засоби створення тестів, до речі, з доволі широким інструментарієм. Всі ці системи мають вбудовані засоби аналізу відповіді, і за можливості, порівняння їх з «еталонним зразком» відповіді. Окрім того, учителі інформатики використовують будь-які програмні засоби що здатні збирати інформацію учнів, для її подальшого аналізу.

Необхідно враховувати і вікові особливості учнів. Навчальний предмет інформатика викладається з початкової школи і до профільної, а тому, необхідно обирати і відповідні засоби створення. Для початкової та середньої школи обирають засоби в ігровій формі (див. рис.1), хоча як показує досвід – учням профільної школи ігрові методи також до вподоби.

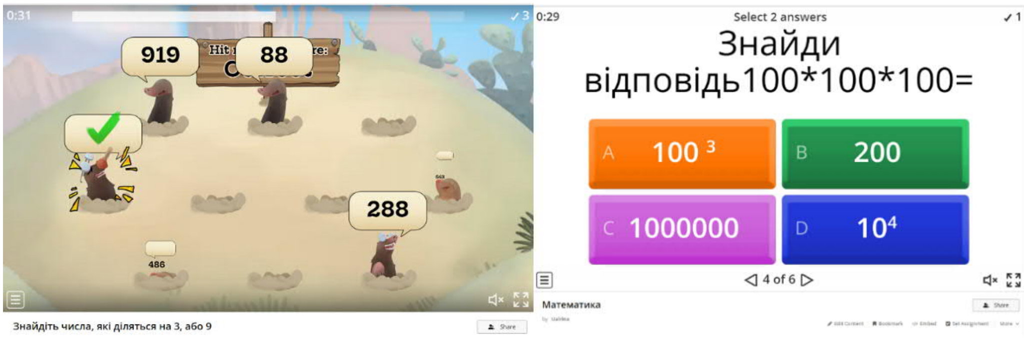


Рис. 1: приклади створення систем тестування в ігровій формі на платформі Wordwall

Цікавим та корисним варіантом електронного навчання є використання електронних інтерактивних робочих аркушів (як приклад – Wizer.me). Учитель створює завдання, до яких можуть бути додані правильні відповіді, при наявності яких оцінювання відбувається автоматично (див. Рис.2). Якщо завдання не має варіантів відповідей, то їх перевіряє безпосередньо вчитель. При цьому, як перевірка, так і коментарі можуть бути записані рукописним вводом. Якщо під час виконання завдання учнем на системі присутній і вчитель, то результати перевірки відображаються моментально. Окрім того, учень може попросити допомоги з того, чи іншого завдання. В панелі керування вчитель бачить не лише поточний стан виконання завдання, а й загальний прогрес виконання. Учнів можна розбити по групах. Цікавою є можливість додати розроблений інтерактивний робочий аркуш як завдання на платформі Google Classroom.

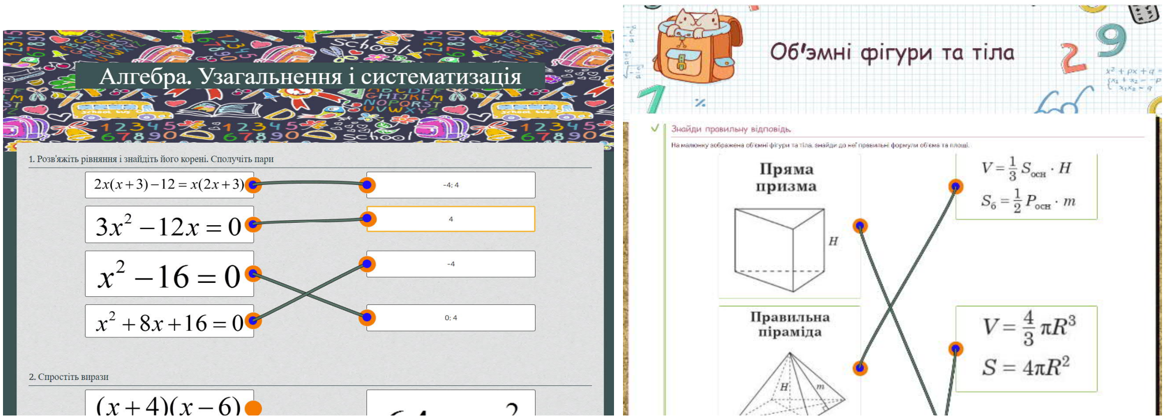


Рис. 2: приклад створення інтерактивних робочих аркушів на платформі Wizer.me

Для вчителів інформатики під час електронного навчання необхідним є використання навчальних платформ із спеціалізованим контентом. Якщо мова йде про початкову та середню школу, то яскравим прикладом такої платформи є Code.org, для профільної школи можливе використання платформи codecademy.com, udacity.com, pluralsight.com, eolymp.com тощо. На цих платформах не тільки є навчальні матеріали з різних напрямів інформатики, а й тренувальні та тестові завдання тощо. Проходження певного курсу надає можливість учителю інформатики прийняти його результати як результати неформального навчання і зарахувати їх як результат оволодіння знаннями з конкретного розділу шкільного курсу інформатики.

Висновки

Для електронного навчання питання поточного та підсумкового контролю є надзвичайно важливим. Можливість використання електронного навчання під час асинхронного навчання потребує актуалізації теорії тестування. Перероблена таксономія Блума надає можливість наукового підходу до розробки та реалізації процесу тестування перевіряючи як навички мислення низького рівня, так і навички мислення високого рівня. Саме така позиція надає можливість повноцінної та достатньо достовірної оцінки сформованих компетентностей без участі вчителя. Засоби створення тестових завдань надзвичайно різноманітні і можуть, на сьогоднішній день, реалізовувати різноманітні ідеї створення тестових завдань.

Література

1. Величко В., Глазова В., Кайдан Н., Федоренко О. Стан та перспективи електронного навчання в університетській освіті. *Професіоналізм педагога: теоретичні й методичні аспекти*. 15. Слов'янськ, 2021. С. 47-61. https://doi.org/10.31865/2414-9292.15.2021.242937
2. Сисоєва С.О., Осадча К.П. Стан, технології та перспективи дистанційного навчання у вищій освіті України. *Інформаційні технології і засоби навчання*, 70 (2). 2019. с. 271-284. https://doi.org/10.33407/itlt.v70i2.2907
3. Кремень В.Г., Биков В.Ю., Ляшенко О.І. та ін. Науково-методичне забезпечення цифровізації освіти України: стан, проблеми, перспективи, Вісник НАПН України, 2022, 4(2), https://doi.org/10.37472/v.naes.2022.4223
4. Глазова В. Підготовка майбутніх учителів інформатики до роботи в умовах режиму дистанційного навчання. *Технології електронного навчання*, 5, 2021, с. 3-7. https://doi.org/10.31865/2709-840052021246128
5. Кухаренко В.М., Бондаренко В.В. Екстрене дистанційне навчання в Україні : монографія / за ред. В. М. Кухаренка, В. В. Бондаренка. Харків, 2020. 409 с.

6. Widyaningsih S. W., Yusuf I., Prasetyo Z. K., Istiyono E. The development of the HOTS test of physics based on modern test theory: Question Modeling through e-learning of moodle LMS. *International Journal of Instruction*, 14(4), 2021, 51-68. https://doi.org/10.29333/iji.2021.1444a
7. Москаленко В.В. Особливості когнітивного компоненту творчого мислення в процесі розв'язання суб'єктом надситуативної проблемності. *Актуальні проблеми психології. Збірник наукових праць Інституту психології імені ГС Костюка НАПН України*. Том VI: Психологія обдарованості.- Випуск, 15, 2019, 107-113.

O. G. Fedorenko, K. E. Maduntseva
Donbas State Pedagogical University, Sloviansk, Ukraine

Features of the use of modern test technologies for checking the knowledge of students in computer lessons

The article is devoted to the problem of organizing current and final control during the teaching of computer science. E-learning, which takes an increasingly active position in the educational process, requires new approaches not only in the organization of the presentation of educational material, but also in terms of determining the level of mastery of the educational material, the formed skills of their use. There is no fundamental difference in what form of organization is used in the educational process - distance, mixed or face-to-face; the use of e-learning should have in its arsenal mechanisms and means of determining the level of formed competences.

Keywords: *e-learning, study of informatics, testing.*

Методика навчання математики в закладах загальної середньої та вищої освіти

УДК 372.881:51

Беседін Б.Б., Бондар Д.С.
[1] *кандидат педагогічних наук, доцент кафедри МНМ та МНІ, ДВНЗ «ДДПУ»*
e-mail: besedin_boris@ukr.net, ORCID 0000-0003-2157-5252
[2] *студентка 4 курсу фізико-математичного факультету, ДВНЗ «ДДПУ»*
e-mail: bndrdiana@gmail.com, ORCID 0000-0003-1814-2325

ВИКОРИСТАННЯ ЗАСОБІВ НАОЧНОСТІ НА УРОКАХ МАТЕМАТИКИ

Стаття присвячена дослідженню переваги та недоліки використання наочних засобів у навчанні математики, категорії наочних посібників, які можна використовувати. Візуальні посібники, такі як діаграми, графіки та маніпуляції, вже давно визнані цінними інструментами для покращення розуміння учнями математичних понять і залучення до них. У статті також надаються рекомендації для педагогів, які прагнуть покращити свою навчальну практику.

Ключові слова: *наочні посібники, математична освіта, стратегії навчання, залучення учнів, концептуальне розуміння.*

Вступ

Наочні засоби вже давно визнані цінними інструментами для покращення навчання в різних освітніх контекстах. У математичній освіті використання наочних посібників може допомогти учням розвинути глибше розуміння абстрактних понять, покращити навички вирішення проблем і підвищити загальну участь у навчальному процесі.

Використання наочності є однією з фундаментальних педагогічних ідей у навчанні. Діти спочатку формують уявлення, а потім поняття, спираючись на безпосереднє сприйняття та міркування, підкріплені візуальними сигналами. Ефективність засвоєння цих фундаментальних принципів впливає на те, наскільки добре дитина вивчає математику в подальшому. Дитина може зрозуміти все, що є простим, зрозумілим і відчутним. Хоча вона може запам'ятати певні абстрактні твердження, але якщо вони не підкріплені наочністю, вони залишаться порожніми словами в її голові.

Метою статті є продемонструвати цінність використання наочних засобів навчання для закріплення матеріалу, що вивчається, та забезпечення активної участі учнів у його засвоєнні.

Основна частина

Ефективне викладання передбачає більше, ніж просто передачу інформації від вчителя до учнів. Воно вимагає створення ексклюзивного та цікавого навчального середовища, яке сприяє активній участі, критичному мисленню та глибокому розумінню змісту. Одним із ключових аспектів ефективного викладання, якому останніми роками приділяється все більше уваги, є принцип наочності, який підкреслює важливість того, щоб навчальний контент був видимим і доступним для всіх учнів у класі.

Принцип наочності у навчанні ґрунтується на кількох теоретичних засадах, які висвітлюють когнітивні, соціальні та культурні аспекти навчання. Однією з ключових теоретичних основ наочності є конструктивізм, який стверджує, що учні активно конструюють власні знання, беручи участь у значущому та автентичному навчальному досвіді[1]. Згідно з конструктивістськими теоріями, навчання - це активний і динамічний процес, який залучає учнів до формування свого розуміння світу через взаємодію з навколишнім середовищем, соціальну взаємодію та попередні знання. Наочність і доступність навчального контенту дозволяє учням долучитися до цього процесу формування сенсу і поглиблення розуміння змісту.

Іншим теоретичним підґрунтям принципу наочності є теорія когнітивного навантаження, яка підкреслює важливість управління когнітивним навантаженням, що накладається на робочу пам'ять здобувачів освіти під час навчання. Коли учням подають інформацію, яку важко опрацювати або яка перевищує обсяг їхньої робочої пам'яті, це може призвести до когнітивного перевантаження і перешкоджання їхній здатності засвоювати і запам'ятовувати інформацію. Зробивши навчальний контент наочним і структурувавши його у значущий спосіб, вчителі можуть зменшити когнітивне навантаження і полегшити учням здатність обробляти і запам'ятовувати інформацію.

Розрізняють п'ять категорій наочних засобів: засоби для подання інформації (такі як дошка і крейда, плакати, проекційні пристрої з відповідними носіями, кінопроектори, телевізійне обладнання, звукозаписувальна апаратура, графічний матеріал, підручники і посібники); засоби для контролю знань; навчальні машини і тренажери; лекційні демонстрації і демонстрації реальних об'єктів; допоміжні засоби, що використовуються в навчальному процесі (такі як комп'ютери, статистичні накопичувачі тощо). [2].

Наочні засоби мають багато переваг у навчанні математики школярів.

Сприяння концептуальному розумінню: Наочні засоби допомагають учням візуалізувати та осмислити абстрактні математичні поняття[3].

Підвищення зацікавленості: Наочні засоби можуть створити динамічне та інтерактивне навчальне середовище, яке сприяє активному залученню учнів.

Сприяння осмисленому навчанню: Візуальні засоби можуть допомогти учням встановити зв'язок між математичними поняттями та їх застосуваннями в реальному світі. [4]

Незважаючи на численні переваги, використання наочних посібників у навчанні математики може також створювати проблеми, які необхідно вирішити для ефективного впровадження.

Однією з проблем використання візуальних засобів у навчанні математики є обмежений доступ до ресурсів. Деякі школи чи класи можуть не мати необхідних матеріалів, маніпуляторів чи технологічних інструментів для підтримки візуального навчання математики.

Обмеження в часі: Ще однією проблемою використання наочних посібників у навчанні математики є брак часу. Вчителі можуть відчувати тиск з боку необхідності охопити широкий спектр математичних понять за обмежений проміжок часу, що може залишати мало часу для використання наочних посібників.

Брак підготовки вчителів: Багатьом вчителям може бракувати належної підготовки та професійного розвитку для ефективного використання наочних посібників у навчанні математики.

Потенційна надмірна залежність від наочних засобів: Хоча наочні посібники можуть бути ефективними інструментами для викладання математики, існує ризик надмірного покладання на них, що може призвести до того, що учні стануть залежними від наочних посібників, а не розвиватимуть власне концептуальне розуміння.

Щоб ефективно використовувати наочні посібники на уроках математики, варто враховувати наступні найкращі практики:

Узгоджувати наочність з навчальними цілями: Наочні посібники мають бути ретельно відібрані та узгоджені з навчальними цілями уроку математики. Наочні посібники також повинні відповідати рівню розвитку учнів, їхньому культурному досвіду та попереднім знанням [5].

Надавати чіткі пояснення: Вчителю варто надавати чіткі пояснення щодо наочних посібників, зокрема, як вони представляють математичні поняття чи взаємозв'язки, і як учні повинні їх інтерпретувати та використовувати [6].

Заохочувати активну участь учнів: Наочні посібники слід використовувати як інструменти для залучення учнів до активної участі та вивчення математичних понять. Учнів слід заохочувати взаємодіяти з наочними посібниками, маніпулювати ними та обговорювати свої висновки й інтерпретації з однолітками.

Використовувати наочні посібники за потреби: Наочні посібники повинні відповідати рівню розуміння учнями математики та їхньому прогресу в навчанні. Варто починати з конкретних наочних посібників, таких як маніпулятори або діаграми, щоб побудувати міцний фундамент розуміння, перш ніж переходити до більш абстрактних наочних посібників, таких як графіки або діаграми.

Інтегрувати різні види наочності: Рекомендовано використовувати різноманітні наочні посібники, щоб задовольнити різноманітні стилі навчання та вподобання учнів. Інтеграція різних типів наочних посібників може забезпечити множинне представлення математичних концепцій, що може покращити розуміння та запам'ятовування матеріалу учнями .

DOI: https://doi.org/...

Існує безліч прикладів наочних посібників, які можна використовувати на уроках математики, щоб покращити навчальний досвід учнів. Наведемо деякі приклади:

1. Плитки з дробами: Плитки з дробами - це маніпулятори, які учні можуть використовувати для візуалізації та маніпуляцій з дробами. Зазвичай вони складаються з різнокольорових плиток, що представляють різні дроби, наприклад, половини, третини, четверті тощо. Учні можуть використовувати плитки дробів для додавання, віднімання, множення та ділення дробів, а також для порівняння та впорядкування дробів.
2. Координатна площина: Координатна площина - це сітка з горизонтальними та вертикальними осями, яка використовується для представлення та побудови графіків математичних залежностей. Її можна використовувати для навчання учнів декартових координат, побудови точок, складання графіків лінійних рівнянь та візуалізації геометричних фігур.
3. Стовпчасті діаграми: Стовпчасті діаграми - це графічне представлення даних за допомогою прямокутних стовпчиків для відображення величин. Їх можна використовувати для навчання учнів представленню даних, аналізу та інтерпретації даних. Гістограми особливо корисні для порівняння і зіставлення даних, виявлення закономірностей і тенденцій, а також для прогнозування на основі даних.
4. Геометричні тіла: Геометричні тіла – це тривимірні об'єкти, які можна використовувати для навчання учнів геометрії, просторових відношень та вимірювань. Прикладами геометричних тіл є куби, сфери, конуси, циліндри та піраміди.

Наочні посібники відіграють вирішальну роль у покращенні навчального досвіду учнів на уроках математики. Вони надають учням конкретні та наочні уявлення про математичні поняття, допомагаючи їм розвивати глибше розуміння та встановлювати зв'язки між різними уявленнями.

Висновки

Застосування засобів наочності на уроках математики є ефективним методом підвищення якості навчання учнів, а також сприяє підвищенню зацікавленості учнів до математики. Використання різноманітних засобів наочності, таких як ілюстрації, діаграми, таблиці, графіки та інші, допомагає учням зрозуміти математичні концепції та відношення між ними, а також виробляти навички самостійного розв'язання завдань.

Однак, ефективність використання засобів наочності на уроках математики залежить від їх правильного підбору та застосування. Необхідно враховувати особливості учнів, їх пізнавальні можливості та інтереси. Під час використання засобів наочності на уроках математики вчителі мають забезпечувати правильне розуміння матеріалу та сприяти активній участі учнів у процесі навчання.

Отже, можна вважати, що використання засобів наочності є ефективним інструментом для навчання математики. Він допомагає учням краще розуміти матеріал, розвивати математичні навички та креативність, а також може бути використаний для створення сприятливої навчальної середовища. Вчителі повинні забезпечувати правильне використання засобів наочності та стимулювати активну участь учнів у процесі навчання, щоб забезпечити якісну освіту та розвиток учнів.

Література

1. Виготський Л. С. Розум у суспільстві: Розвиток вищих психічних процесів / Л. С. Виготський. – Кембридж: Видавництво Гарвардського університету, 1978. – 176 с.
2. Гнедко Н. М. Методика використання засобів віртуальної наочності у навчальному процесі : навч.-метод. посіб. / Наталя Гнедко, Ігор Войтович. – Рівне : О. Зень [вид.], – 2014. – №303. – С. 3.
3. Беседін Б.Б., Смоляков О.В. Використання наочності на уроках математики. Збірник наукових праць фізико-математичного факультету ДДПУ. 2017. №7. С. 103–109.
4. Акарсу, Р. (2017). Вплив навчальних матеріалів на успішність з математики учнів. / Р. Акарсу // Універсальний журнал освітніх досліджень. – 2017. – №5(4). – С. 590–600.
5. Банністер, Н. А. Допомога учням з різним рівнем знань математики за допомогою використання маніпуляторів: Огляд. /Гіффорд, С., Маклеллан, Е. // Канадський журнал природничо-математичної та технологічної освіти. –2016. – №16. – С. 391–411.
6. Мойєр-Пакенхем П. Використання віртуальних маніпуляторів для навчання математики: Що ми знаємо? / Р.Мойєр-Пакенхем // Дослідження та розробка освітніх технологій. – 2019. – №67(5). – С. 1115–1137.

Besedin Boris B., Bondar Diana S.
Donbas State Pedagogical University, Sloviansk, Ukraine

Use of visual aids in mathematics lessons

This article explores the advantages and disadvantages of using visual aids in mathematics teaching and the categories of visual aids that can be used. Visual aids, such as charts, graphs, and manipulatives, have long been recognized as valuable tools for improving students' understanding of and engagement with mathematical concepts. The article also provides recommendations for educators looking to improve their teaching practices.

Keywords: *visual aids, mathematics education, teaching strategies, student engagement, conceptual understanding.*

УДК 373.5.018.43:004:51

Вертипорох Т.О., Пащенко З.Д.
[1] *студентка 4 курсу фізико-математичного факультету, ДВНЗ «ДДПУ»*
e-mail: taisiavertiporoh@gmail.com, ORCID 0009-0006-8704-0348
[2] *кандидат фіз.-мат. н., доцент кафедри математики та інформатики, ДВНЗ «ДДПУ»*
e-mail: pashchenko_zd@i.ua, ORCID 0000-0003-4544-9242

ВИКОРИСТАННЯ ІНФОРМАЦІЙНО-КОМУНІКАЦІЙНИХ ТЕХНОЛОГІЙ ПІД ЧАС ОРГАНІЗАЦІЇ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

Стаття присвячена використанню інформаційно-комунікаційних технологій під час організації самостійної роботи, виокремленню деяких форм самостійної роботи. Розглядаються цифрові інструменти, які зручно використовувати для організації різних форм самостійної роботи учнів. Результати статті отримані з досвіду викладання в школі.

Ключові слова: *інформаційно-комунікаційні технології, цифрові інструменти самостійна робота***,** *учні, дистанційне навчання.*

Вступ

Постановка проблеми. Останнім часом масштабна реформація освіти в Україні набуває поширення, тому одним із пунктів даної реформи є забезпечення відкритої, цікавої та сучасної української школи. Сучасна система освіти в Україні є орієнтованою на активну комбінацію знань, умінь та навичок, а також на способи мислення та особистісні якості, що дозволяють особі соціалізуватися та провадити подальшу навчальну діяльність.

Результати дослідження останніх років довели зниження інтересу до навчання, а також негативне ставлення до самостійних та контрольних робіт. Переважно, це пов’язано з потерпанням негативних емоцій, неврахуванням навчальних здібностей школярів та недостатньою обізнаністю вчителів в освітніх інтересах учнів.

Дослідженнями організації самостійної роботи в школі займались В. Буряк, Т. Пащенко, І. Підласий, К. Ушинський, а також інші дослідники та педагоги.

Нині стрімко розвиваються інформаційно-комунікаційні технології, що дають можливість в умовах дистанційного навчання результативно організувати самостійну роботу. Оскільки самостійна робота є невід’ємною частиною навчального процесу в школі, то вона вимагає сучасних підходів до її організації та контролю доброчесності.

Метою статті є аналіз цифрових інструментів, які найчастіше використовуються при організації самостійної роботи.

Основна частина

Сучасна освіта в Україні зазнала численних змін, тому шкільна реформа передбачає уміння учнів орієнтуватися в постійному потоці інформації, готовність школяра до нових знань, самостійний пошук правильних рішень та ін.

Самостійна робота – це поняття, яке не має єдиного та однозначного визначення. Тому існує безліч визначень «самостійної роботи», які в свій час характеризували відомі вчені та педагоги.

Спираючись на роботи І.П. Підласого, можна стверджувати, що самостійна робота – це навчальна діяльність учнів, що передбачає засвоєння й застосування знань, вмінь та навичок на практиці. Самостійна робота передбачає розвиток активності учнів, вимагає роздумів та відсутність вчительської допомоги [4].

Дослідник В. Буряк схильний до думки, що самостійною роботою слід вважати організовану учнем діяльність, яка залежить від мотивації, пізнання, виконується у зручний для нього час і, відповідно, контролюється самим учнем [2].

Отже, самостійна робота – це пізнавальна діяльність, що сприяє формуванню дисциплінованості, відповідальності, самоконтролю, а також передбачає застосування набутих знань, вмінь та навичок на практиці.

Самостійна робота в педагогіці відіграє важливе значення контролю та засвоєння матеріалу, адже цей вид діяльності допомагає виявити рівень підготовки учнів з предметної компетентності. Також самостійну роботу поділяють за типами робіт: евристичні, творчі, репродуктивні та реконструктивно-варіативні [3].

Для планування будь-якої самостійної роботи вчителі складають план методів та форм її організації, за допомогою яких досягається засвоєння знань, вмінь та навичок, а також розвиваються освітні здібності учнів. Спираючись на дослідження А.В. Бугра та О.А. Коновалова, можна виділити основні методи самостійної роботи: словесні, наочні, практичні [0].

Зараз є досить потужним аспектом те, що учні мають не тільки здобувати знання, але й володіти способами їх отримання. Вчитель має допомогти учням засвоїти навички самостійного пошуку інформації шляхом використання посібників, статей, інтернет-ресурсів для подальшої освітньої діяльності.

У зв’язку із повномасштабним воєнним вторгненням в Україну, частина навчальних закладів працює дистанційно, тому самостійна робота вимагає більше сучасних методів роботи, а також використання інформаційно-комунікаційних технологій.

Для організації навчального процесу дистанційно, Петрівський заклад загальної середньої освіти І-ІІ ступенів вже 3 роки використовує середовище G Suite for Education, в складі якого є різні додатки, серед яких Gmail, Google Drive, Google Classroom, Google Meet та інші. Тому для ефективності роботи закладу під час дистанційного навчання вчителі на платформі Google Classroom створюють класи з назвою предмету та номером класу, в якому вони викладають.

Отже, для організації самостійної роботи з курсу геометрії 7 класу було обрано тему «Трикутники. Ознаки рівності трикутників». Під час створення та планування уроку можна обрати, у якому форматі буде подане завдання: лише письмовий, тестовий чи усний. *Наприклад:*

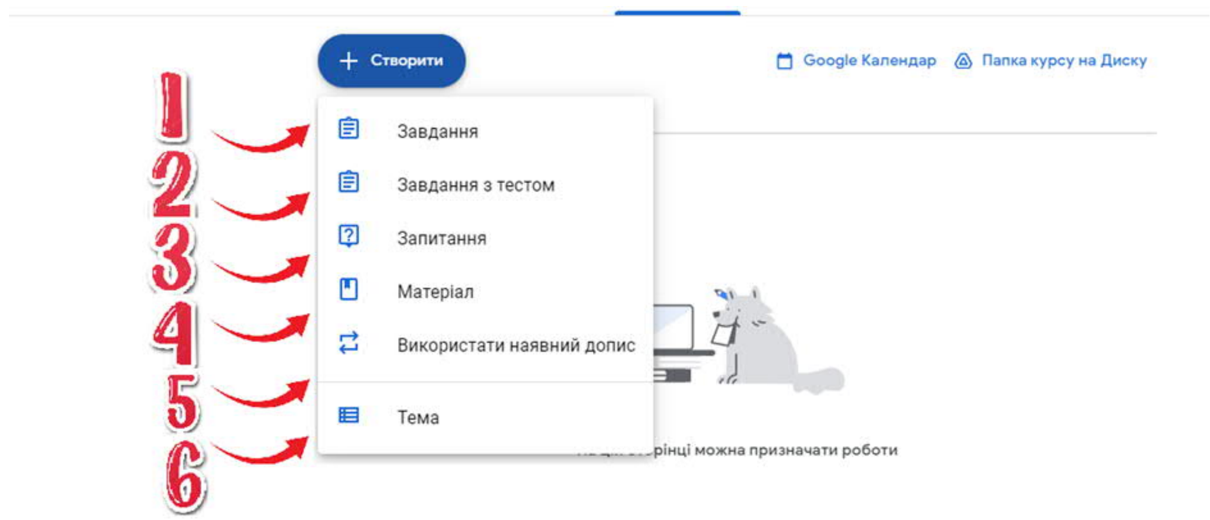


Рис. 1:

1 – завдання з файлом, фото, посиланням, відео і т.д.; 2 – завдання з автоматичним створенням тесту в Google Forms; 3 – запитання для учнів, на які вони можуть відповідати; 4 – викладення усного матеріалу (найчастіше прикріплюють електронний підручник); 5 – автоматичне перенесення матеріалу з одного курсу до іншого; 6 – створення теми, за допомогою якої можна структурувати уроки в загальні теми.

При створенні уроку завдання можна: призначити, запланувати, зберегти як чернетку або відхилити чернетку.

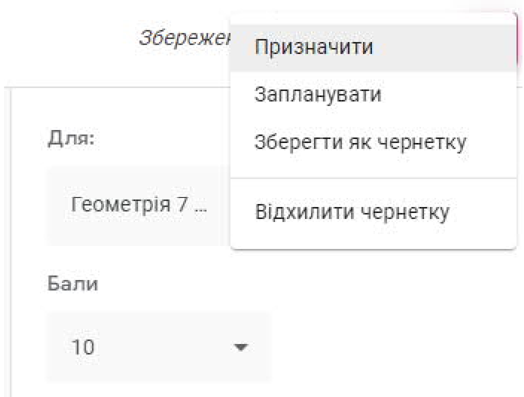


Рис. 2:

1 – призначити (завдання викладається миттєво); 2 – запланувати (завдання опублікується в обрані дату та час); 3 – зберегти як чернетку (завдання не опублікується, доки не буде обраним або 1 або 2 пункти); 4 – відхилити чернетку (завдання, яке не опублікувалось, буде видаленим).

При створенні уроку самостійної роботи було заплановано завдання з тестом. Під час самостійної роботи у більшості школярів може виникнути паніка щодо виконання завдань, тому, щоб уникнути даної ситуації, треба запланувати онлайн-урок з використанням додатку Google Meet.

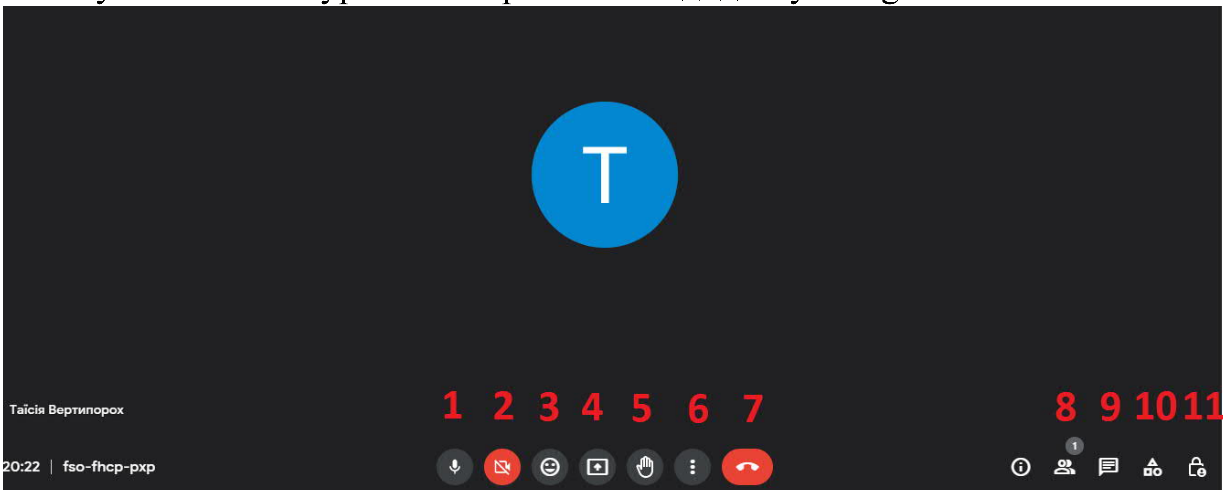


Рис. 3:

1 – мікрофон; 2 – відеокамера; 3 – функція, за допомогою якої можна надіслати реакцію; 4 – демонстрація екрану; 5 – функція «піднятої руки»; 6 – додаткові опції; 7 – завершення зустрічі; 8 – відображення кількості учасників; 9 – чат для учасників зустрічі; 10 – створення дошки Jamboard; 11 – керування зустріччю.

Для того, щоб учні налаштувались на роботу, можна запропонувати невеличку вправу на повторення з використанням дошки Jamboard, адже актуалізація опорних знань є невід'ємною, цікавою та пізнавальною частиною будь-якого уроку, оскільки учні згадують вивчений матеріал, який вони зможуть використовувати під час самостійної роботи. При публікації завдання в Google Classroom можна вибрати функцію «Копія кожному» і відповідно учням надійде файл для виконання з їх прізвищем та ім'ям.

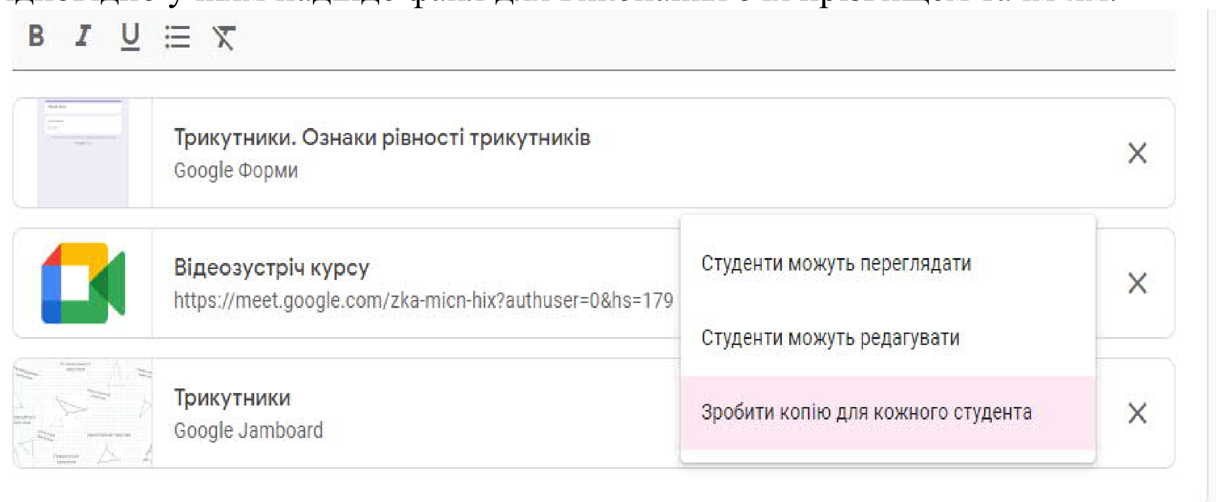


Рис. 4

ISSN 24132667 (Print), ISSN 24153079 (Online)

Приклад вправи, яку учні зможуть виконати індивідуально протягом 5 хвилин з використання дошки Jamboard (рис. 5).

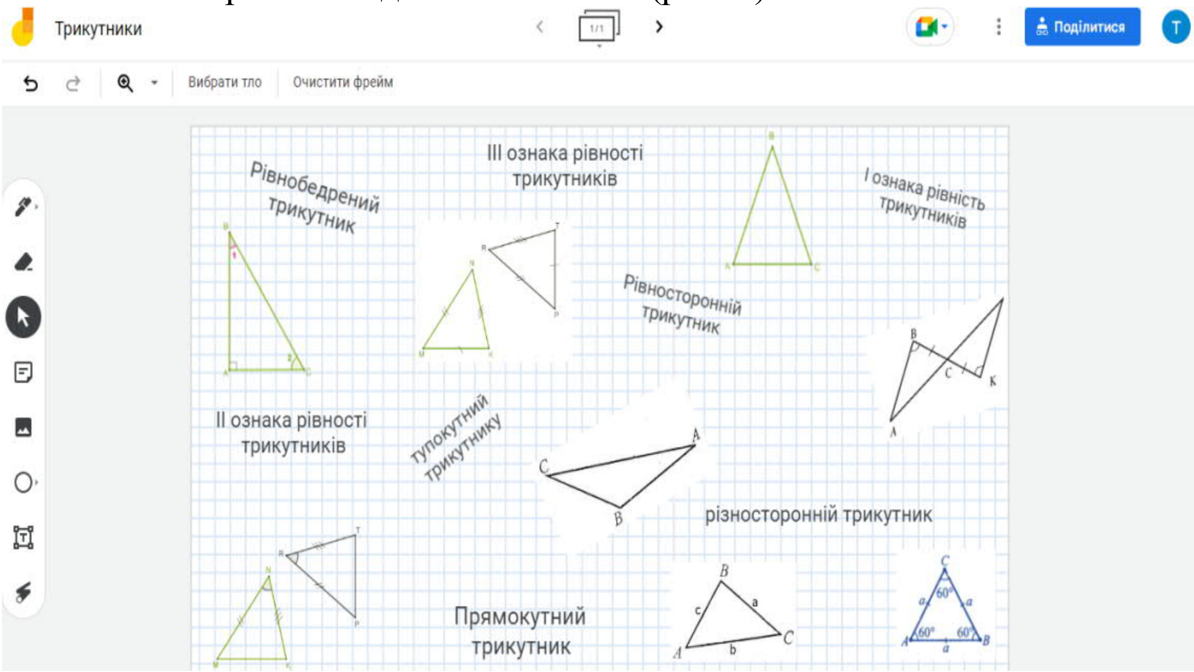


Рис. 5

Дане завдання на з'єднання правильних відповідей виконують за допомогою маркера різних кольорів або функції «вибрати» та переставити місцями.

Наступний етап – це безпосередньо письмова самостійна робота. Таку роботу можна задати за допомогою Google Документу, оскільки в даний час учні навчаються дистанційно і за кордоном, вони зможуть редагувати цей файл онлайн, якщо при створенні завдання натиснути «Копію кожному».

Для того, щоб сильно не навантажувати учнів, можна їм запропонувати письмову самостійну роботу, яка складається з 5 задач (рис. 6).

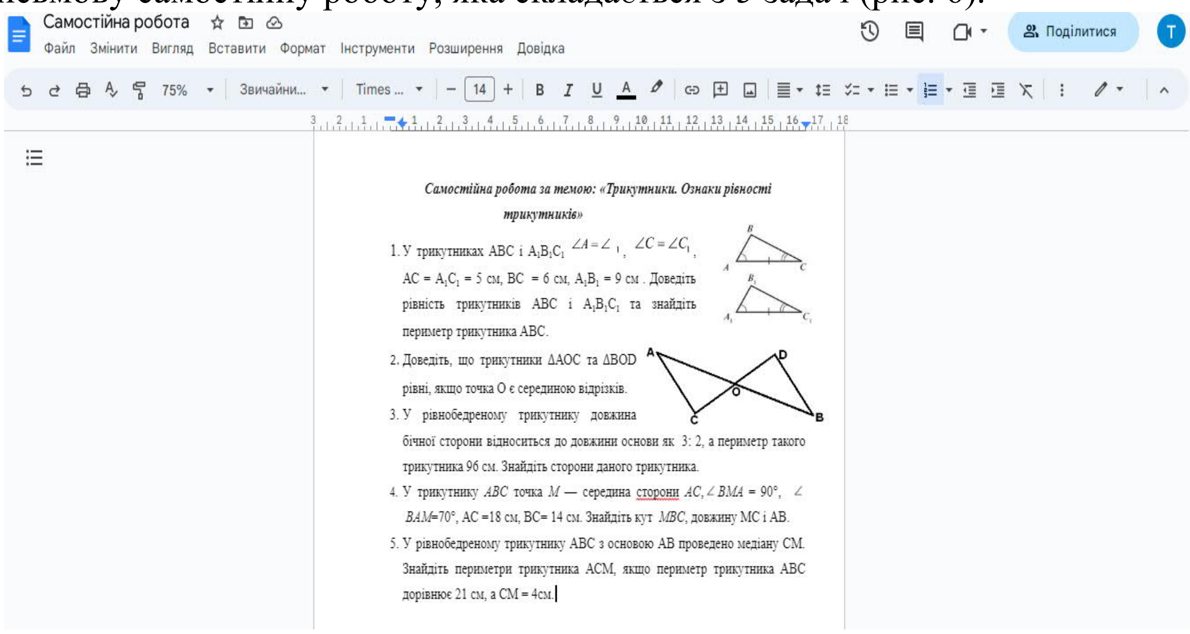


Рис. 6

Дані задачі є подібні до тих, які були запропоновані на попередніх уроках. Вони охоплюють ознаки рівності трикутників та рівнобедрені трикутники. Також, за бажанням вчителя, можна надіслати учням зразок оформлення розв’язку даних задач на прикладі подібної.

Для організації тестової частини уроку досить зручно використовувати Google Forms. В арсеналі цього додатку є такі способи відповідей на запитання, як: вибрати одну відповідь, вибрати декілька відповідей, абзац (розширена відповідь), на відповідність і т.д. Для автоматичної перевірки робіт необхідно при створенні запитань вказати правильні відповіді та бали, а також обмежити кількість спроб.

Приклад завдання для перевірки знань, які засновані на тестових вправах (рис. 7):

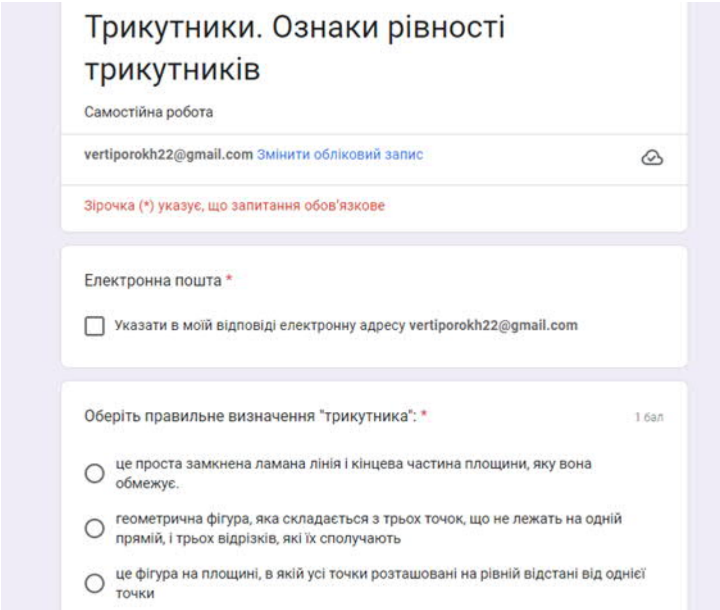


Рис. 7

Урок в дистанційному форматі, який організований за допомогою додатків Google Classroom, має такий остаточний вигляд:

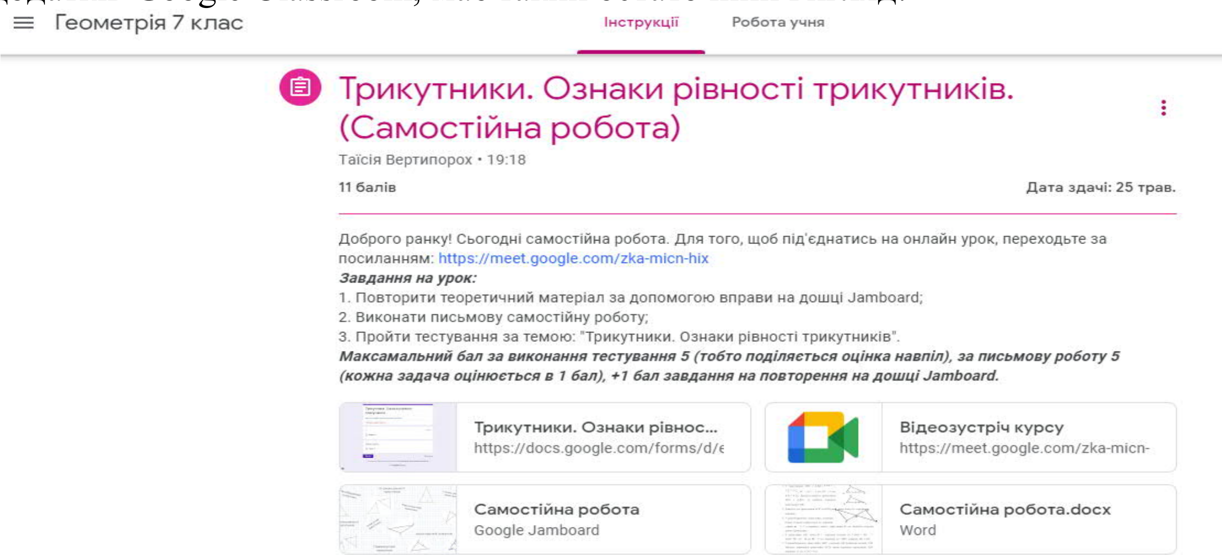


Рис. 8

Для організації уроку під час дистанційного навчання вчитель прагне зробити комфортне та цікаве навчання для учнів. У цьому допомагає використання згаданих хмарних технологій. І взагалі, використання різних хмарних сервісів вже є невід'ємною частиною уроку. Тому вчитель повинен мати про них інформацію та мати навички роботи з ними. Звичайно, досвід їх використання можна набути в результаті самоосвіти. Але в час, коли хмарні технології стрімко впроваджуються в навчальному процесі в школі, досить затребуваними стають курси, що мають на меті познайомити слухачів з різними видами хмарних технологій, які зручно використовувати в освіті, та навчити слухачів ними користуватися.

Виходячи з досвіду спілкування з колегами-вчителями, найважче застосування хмарних технологій відбувається у вчителів гуманітарних предметів, тому засвоєння хмарних технологій під час навчання для майбутніх вчителів гуманітарних спеціальностей є найбільш актуальним.

Висновки

Зараз є досить потужним аспектом те, що учні мають не тільки здобувати знання, але й володіти засобами їх отримання. Вчитель має навчити учнів самостійно здобувати інформацію шляхом використання посібників, статей, інтернет-ресурсів для майбутнього навчання.

Оскільки три роки в Україні більшість навчальних закладів працюють дистанційно, використання інформаційно-цифрових технологій в освітньому процесі під час навчання є, беззаперечно, необхідним. Самостійна робота учнів є невід'ємною складовою навчання та має різні форми. Для організації самостійної роботи під час дистанційного навчання найчастіше використовуються хмарні сервіси Google. Головними цифровими інструментами для цього є Google Meet, Google Презентації, Google Документи, Google Forms та Jamboard. У роботі представлено авторський погляд на використання різних цифрових інструментів до різних форм організації самостійної роботи.

Література

1. Бугра А.В., Коновал О.А. Методика самостійної роботи студентів: навчально-методичний посібник. Кривий Ріг : КПІ ДВНЗ «КНУ», 2014. 124 с. (7-12). Режим доступу до ресурсу: http://surl.li/hdpcn;
2. Буряк В. Самостійна робота як вид навчальної діяльності школяра: Рідна школа. 2001. № 9. С. 49 – 52. Режим доступу до ресурсу: http://surl.li/hdpcs
3. Деркач Ю. О. Рекомендації щодо організації самостійної роботи учнів в умовах дистанційного навчання. *Концепції, реалії та нові стратегії у сфері викладання історико-правознавчих дисциплін:* матеріали Всеукраїнська наук.-практ. конф., м. Луцьк, 10 черв. 2020 р. Режим доступу до ресурсу: http://surl.li/hdpcx

4. Підласий І. П. Педагогіка початкової школи: підручник [Електронний ресурс] 2010. Режим доступу до ресурсу: http://surl.li/hdpdg;

Taisia O. Vertypokh, Z. D. Paschenko
Donbas State Pedagogical University, Sloviansk, Ukraine.

Use of information and communication technologies in organizing independent work

The article is devoted to the use of information and communication technologies in the organization of independent work, the allocation of some forms of independent work. We consider digital tools that are convenient to use to organize various forms of independent work of students. The results of the article are obtained from the experience of teaching at school.

Keywords: *information and communication technologies, digital tools, independent work, students, distance learning*.

УДК 373.5.018.43:004.77

Загуба Л.П., Турка Т.В.
[1] *студентка 1 курсу фізико-математичного факультету, ДВНЗ «ДДПУ»*
e-mail: pervushina1983@gmail.com, ORCID 0009-0004-8738-8710
[2] *кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри МНМ та МНІ, ДВНЗ «ДДПУ»*
e-mail: tvturka@gmail.com, ORCID 0000-0001-6445-2223

ВИКОРИСТАННЯ ХМАРНИХ СЕРВІСІВ У РОБОТІ ВЧИТЕЛЯ

Стаття присвячена використанню дистанційних технологій у навчальному процесі. Розглянуто засоби дистанційного навчання, висвітлено досвід використання хмарних сервісів у професійній діяльності вчителя інформатики. Дослідження проводилось з використанням теоретичних та практичних методів. Стаття написана з досвіду роботи.

Ключові слова: *інтернет, хмарні сервіси, інтерактивна дошка, Google класи, дистанційна освіта.*

Вступ

Сучасна система освіти має створювати умови для розвитку інтелектуальної та духовної особистості, здатної знаходити та здобувати нові знання, опановувати нові навички та організовувати навчальний процес.

Сучасна освіта спрямована на розвиток особистості, а також на освоєння новітніх знань і інформаційних технологій. Дистанційна освіта не є альтернативою очній освіті. Звичайно, учні мають ходити до школи, вчитися, розвиватися, спілкуватися, соціалізуватися тощо. Проте пандемія короновірусу, а потім війна скорегувала навчальний процес учнів та вчителів та змусили перейти на дистанційну освіту.

Дистанційна освіта потребує постійного спілкування та зворотного зв’язку з усіма учасниками освітнього процесу.

Як організувати роботу всього класу під час дистанційного навчання? Вирішенням цієї проблеми є платформа дистанційного навчання, яка дозволяє легко організувати роботу цілого класу або кількох класів, вести записи, призначати завдання, переглядати та створювати новий вміст.

Однією з таких платформ є Google Workspace For Education. Вона містить усе, що потрібно сучасному навчальному закладу: обліковий запис Gmail у шкільному домені, платформу дистанційної освіти, додаток для відеоконференцій, хмарний накопичувач і ряд програм для редагування файлів.

Творчі педагоги завжди в пошуку нових форм роботи, нових методів, ефективності навчально-виховного процесу, новітніх засобів і технологій, які можуть значно покращити процес навчання, пізнавальну та самостійну діяльність учнів.

Сучасний світ відзначається непередбачуваністю та швидкими змінами в різних сферах таких, як технології, освіта, наука та культура. Така динаміка вимагає від людей гнучкості, адаптивності та навичок швидкого прийняття рішень. Здобувачам освіти вже недостатньо читати підручники. Комп'ютеризація суспільства вимагає широкого використання ІКТ у навчальному процесі. Відмінним вирішенням цих проблем є впровадження хмарних технологій у навчальний процес.

Аналіз фундаментальних досліджень і публікацій.

Розвиток техніки та програмного забезпечення, загальні принципи та інструменти дистанційного навчання досліджуються в роботах Алевтини Лотоцької, Оксани Пасічник та Антоніни Букач [1], [2], [4].

Сучасний етап розвитку освіти характеризується стійкою тенденцією до розширення використання ІКТ у навчальному процесі. Якщо раніше ІКТ були здебільшого прерогативою вчителів інформатики, поступово впроваджуючись у діяльність вчителів природничо-математичного циклу та іноземних мов, то вимогою сьогодення є гармонійне та педагогічно збалансоване використання ІКТ у викладанні всіх без винятку предметів.

Мета статті – аналіз досвіду використання хмарних сервісів у професійній діяльності вчителя інформатики.

Виклад основного матеріалу.

Дистанційне навчання – це можливість сформувати такі якості, як активність, самостійність, самовдосконалення, самоорганізація, самоконтроль та креативність. Онлайн-заняття дозволяють продовжувати навчання в зонах бойових дій та тимчасової окупації. А мільйони українських біженців можуть продовжити навчання в будь-якій точці світу. В інтернеті можна знайти багато сервісів для організації освітніх процесів у дистанційному форматі, але для зручності організації освітньої діяльності в закладах освіти створюють єдиний інформаційний простір для всієї школи.

Серед різноманітних соціальних мереж особливу увагу варто приділити додаткам Google. Зрештою, Google є однією з найпопулярніших компаній у світі, яка надає користувачам інтернету безліч продуктів і послуг, більшість з яких можна використовувати для організації навчальних курсів.

Компанія Google розробила близько 30 навчальних програм. Тому інтегроване освітнє інформаційне середовище здобувачів освіти можна поширювати за допомогою додатків Google, які можуть запроваджувати нову форму проведення навчання, безпечно зберігати інформацію, дають можливість обмінюватися даними, організовувати спільну діяльність учнів та молоді [3].

Google Classroom – це інструмент, який допомагає вчителям створювати та впорядковувати завдання, виставляти оцінки, писати коментарі та організовувати ефективне спілкування зі здобувачами освіти в режимі реального часу чи дистанційного навчання [6].

DOI: https://doi.org/...

Google Classroom об'єднує в собі: Google Drive для створення і обміну завданнями, Google Docs, Sheets and Slides для написання текстів і створення презентацій, Gmail для спілкування і Google Calendar для розкладу (наприклад, ви можете спланувати конференцію в Meet, який дозволяє автоматично додавати заплановані зустрічі в календар) [8].

Учні можуть приєднатися до класу за допомогою унікального коду класу або за запрошенням вчителя.

Google Classroom працює в тісній співпраці з Google Drive. (рис.1)

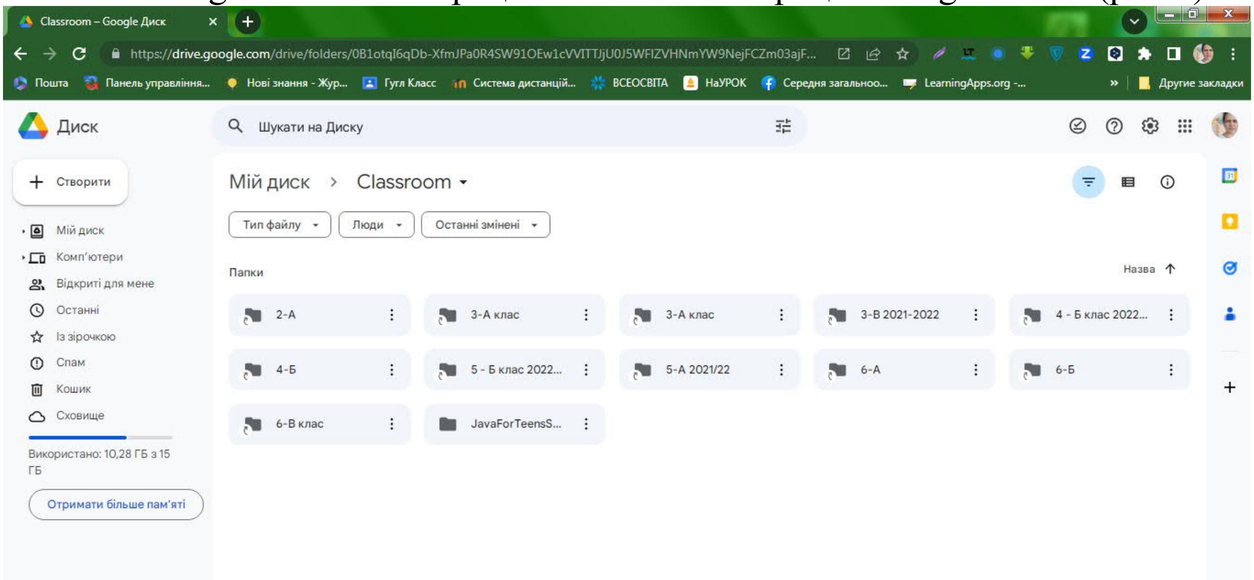


Рис. 1: Google Drive

Google Drive є хмарним сховищем, де вчителі можуть зберігати та систематизувати свої навчальні матеріали, а учні можуть долучатися до цих матеріалів для виконання завдань.

Одним зі способів використання Google Drive в Google Classroom є додавання файлів зі свого Google Drive до завдань або матеріалів, які вчителі публікують у класі. Вчителі можуть легко вибрати файли зі свого Google Drive та додати їх до завдання або опублікувати як матеріали для учнів.

Учні також можуть використовувати Google Drive для зберігання та здавання своїх завдань. Коли вчителі створюють завдання, вони можуть встановити налаштування, щоб учні могли надсилати свої відповіді через Google Drive. Учні можуть створити свої файли в Google Drive, заповнити їх відповідями та надіслати вчителеві для перевірки.

Крім того, коли вчителі оцінюють та надають зворотний зв'язок щодо завдань, вони можуть використовувати Google Drive для цього. Вчителі можуть анотувати та коментувати файли учнів безпосередньо в Google Drive, щоб надати детальний зворотний зв'язок.

Таким чином, Google Classroom і Google Drive працюють разом, дозволяючи вчителям та учням зручно обмінюватися та працювати з навчальними матеріалами, завданнями та зворотним зв'язком.

Мобільні додатки доступні для iOS та Android.

Переваги додатків Google Classroom для вчителів:

– Проведення відеоконференцій зі здобувачами освіти.

– Створення курсів, керування завданнями для виконання здобувачами, оцінювання результатів їх діяльності в режимі онлайн.

– Можливість додавання до завдання різних матеріалів (YouTube, Google форми, Google слайди та інші об’єкти Google Drive).

– Можливість надавання коментарів та відгуків про роботу здобувачів у режимі реального часу.

– Публікування презентацій, відео та завдання в курсі.

– Планування завдань у будь-який час.

– Створення різних типів завдань, використання наявних публікацій, копіювання створених класів.

– Можливість самостійно запрошувати або видаляти учасників курсу.

Classroom дозволяє вчителям архівувати курси в кінці семестру або року. Коли курс архівується, він видаляється з головної сторінки та розміщується в області Архівованих класів. Це дозволяє аналізувати наданий курс і вдосконалювати його для наступних користувачів. Коли курс заархівовано, викладачі та здобувачі можуть переглядати його, але не можуть вносити зміни, доки його не буде відновлено.

Використання дистанційних сервісів, як інтерактивного методу навчання, сприяє активному та продуктивному засвоєнню навчального матеріалу та активізує потребу учнів в експериментальній діяльності.

Як показують заняття, проведені під час карантину, інтерес здобувачів до цих технологій продовжує зростати, тому Google Classroom активно впроваджується у навчально-виховному процесі школи.

Google Jamboard – це цифрова інтерактивна віртуальна дошка, яка дозволяє вчителям представляти ключову інформацію під час занять у Zoom або Google Meet. (рис.2, опрацьовувати матеріал з усім класом або окремими групами учнів одночасно в реальному часі [7].

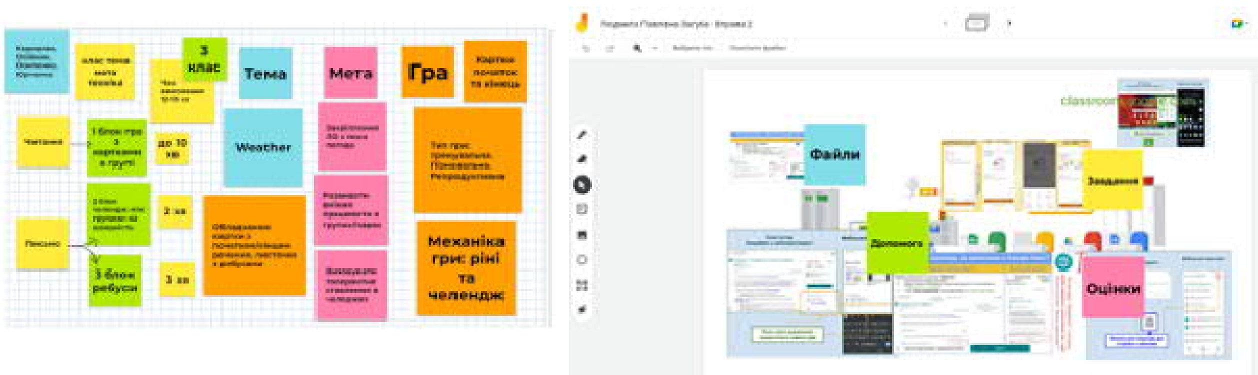


Рис. 2: Google Jamboard

За допомогою Google Jamboard користувачі можуть вести презентації, проводити мозкові штурми, збирати ідеї, співпрацювати над проєктами та візуалізувати свої думки (рис.3).

Для заповнення слайдів можна використовувати такі інструменти.

- ☐ пензлі (чотири види – ручки, фломастери, пензлики, маркери);
- ☐ ластик (очищення поверхні від зайвих елементів);
- ☐ курсор (може переміщувати елементи);
- ☐ різнокольорові стікери (для розміщення текстових заміток);
- ☐ форми (додайте різні форми та заповніть їх кольорами);
- ☐ текст (можна використовувати різні типи тексту за розміром);
- ☐ вставити зображення;
- ☐ лазерна указка (дозволяє фіксувати увагу учнів на окремих елементах).

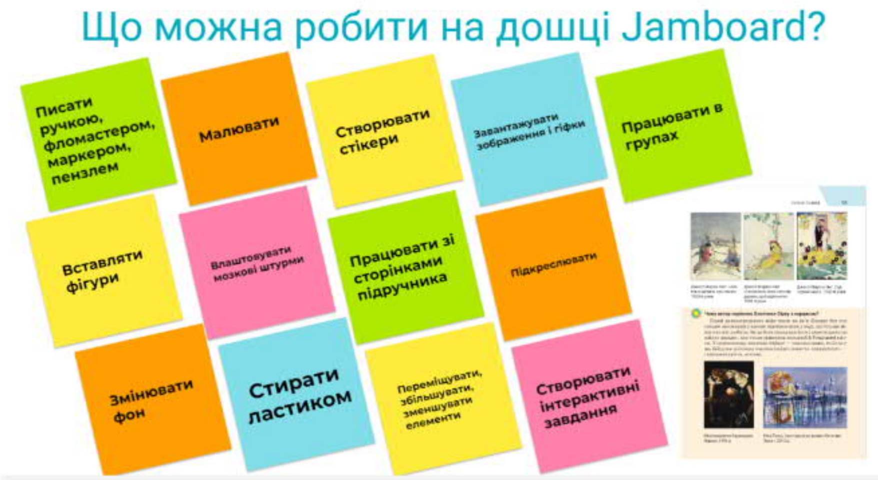


Рис. 3: Можливості дошки Google Jamboard

Google Jamboard доступний як веб-додаток, а також є спеціальні пристрої Jamboard, які мають фізичну дошку з сенсорним екраном для ще більш зручного використання. Він інтегрований з іншими інструментами Google такими, як Google Drive, Google Meet та Google Classroom, що полегшує спільну роботу та обмін інформацією.

Miro – це платформа для спільної роботи над проєктами, яка надає можливість командам співпрацювати, проводити мозкові штурми та візуально зображати свої ідеї. Ми можемо запросити учасників за посиланням та електронною поштою.

Інтерфейс дошки реалізовано англійською мовою, але інтуїтивно зрозумілий. Управління зручне. Переміщувати можна шаблони та інші елементи за допомогою миші. Цю дошку можна використовувати на комп'ютері чи смартфоні.

Сильними сторонами Miro є його універсальність інструментів. Ми можемо створити нескінченні дошки. Маємо можливість завантажувати документи, таблиці та зображення, малювати діаграми та графіки, створювати фотографії тощо.

Вводимо текст, пишучи ручкою або змінюючи шрифт, розмір і колір.

Можна малювати різні геометричні фігури. І змінювати товщину лінії (пряма, ламана, дуга, пунктирна лінія тощо) і колір через контекстне меню. Ми також можемо зберегти створені дошки як зображення, постери у форматі pdf, завантажити як резервну копію та зберегти на Google Drive. Також реалізована можливість збереження дошки у форматі презентації.(рис.4)

Можемо додати наліпки на свою дошку. Важливі ідеї зберігаються на сайті, користувачі можуть реєструвати ідеї та коментарі, а також сприяти співпраці та зворотному зв'язку.

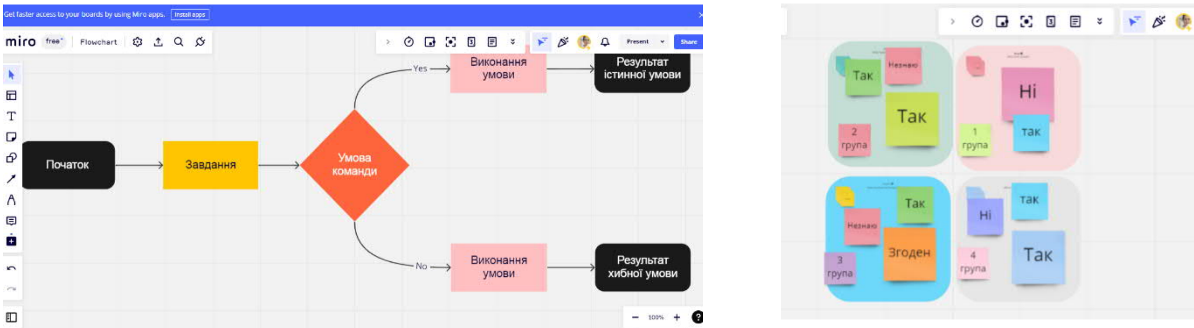


Рис. 4: Дошка Miro

Для моніторингу навчальних досягнень учнів використовуємо програми Google Форма, Kahoot [4], [5].

Kahoot – це ігрова навчальна платформа, яка дозволяє легко створювати, ділитися та грати в навчальні ігри чи вікторини за лічені хвилини [5].(рис.5)

Платформа https://kahoot.it/ – безкоштовний сайт для створення вікторин та ігор. Звичайно, на сайті є платні варіанти, але сьогодні ми поговоримо про той, який є безкоштовним.

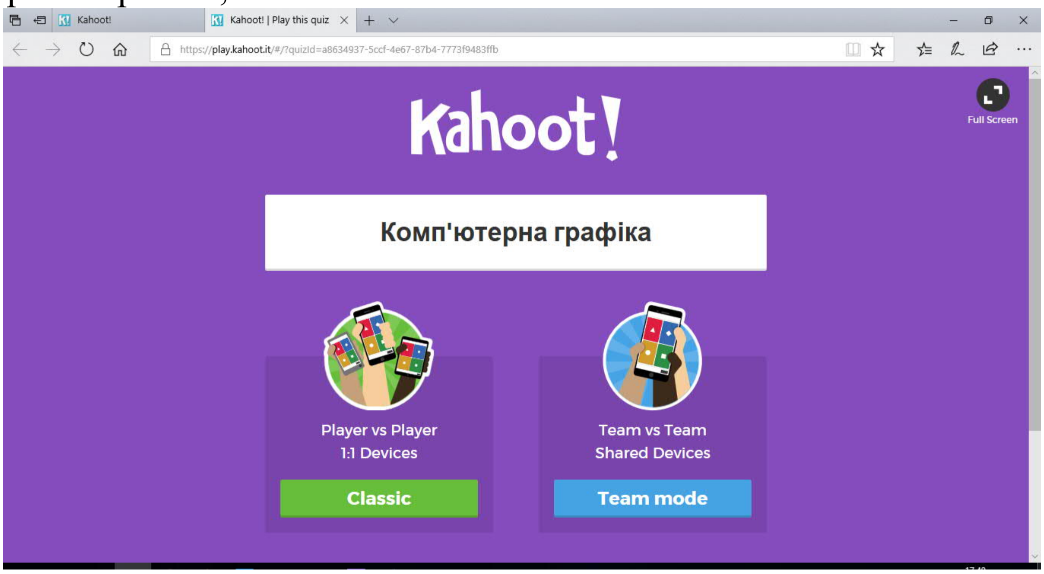


Рис. 5: Ігрова навчальна платформа Kahoot

Вікно редактора створення дуже схоже на PowerPoint. Усе, що нам потрібно зробити, – це заповнити текст питання, варіанти відповідей, позначити правильну і встановити час. Варіанти запитань і відповідей відображаються на екрані монітора, а на смартфоні потрібно вибрати правильний. Отже, Kahoot! розроблено для соціального навчання, коли здобувачі збираються навколо спільного екрана такого, як інтерактивна дошка, проєктор або комп'ютерний монітор.

Важливою частиною навчального процесу є контроль знань, умінь і навичок. Результати навчання багато в чому залежать від організації. У процесі контролю виявляються проблеми зі знаннями та вміннями здобувачів, які можуть керувати навчальним процесом та вдосконалювати форму і методи навчання. Однією з форм контролю, яка дозволяє школам швидко та ефективно перевірити результати вивчення математики, є тест, який можна створити за допомогою додатку Google Forms [4] для формування та аналізу результатів тестування.

Сервіс дозволяє створювати запитання в різних форматах і додавати зображення та відео з YouTube. Ми можемо створювати, редагувати та заповнювати форми з будь-якого пристрою. Крім того, що відповіді респондентів автоматично зберігаються у формі, ми також можемо переглядати статистику відповідей у графічному вигляді (діаграми) або імпортувати статистику в Google Таблиці [6].

Висновки

Хмарні технології відіграють значну роль у поліпшенні дистанційного навчання у школі. Завдяки цим технологіям, учні та вчителі можуть ефективно працювати разом навіть на віддаленій основі і забезпечувати неперервність навчання незалежно від географічного розташування.

Важливою перевагою хмарних технологій, звичайно, є їх широка доступність та простота використання. Враховуючи швидкий розвиток дистанційного навчання, використання хмарних технологій сприяє покращенню якості освіти і забезпечує учням та вчителям зручні умови для ефективного навчання і співпраці.

Література

1. Букач А. Сайт Google як платформа для організації дистанційного навчання. https://sites.google.com/site/edugservis/google-sites (дата звернення 26 березня 2023 р.).
2. Загальні принципи та засоби дистанційного навчання Автори: Алевтина Лотоцька, Оксана Пасічник. https://mon.gov.ua/storage/app/media/zagalna%20serednya/metodichni%20recomendazii/2020/metodichni%20recomendazii-dustanciyna%20osvita-2020.pdf
3. Продукт Google [електронні ресурси] // – режим доступу : http://www.google.com.ua/intl/ru/about/products/ (дата звернення 26.03.2023).

4. Коренівська В. Короткий посібник: усі можливості Google форма . URL: https://webpromo.ua/ua/blog/kratkij-gajd-vse-vozmozhnosti-google-forms/
5. Що таке Kahoot !? URL: https://kahoot.com/what-is-kahoot/ (дата звернення 26.03.2023).
6. Про сервіси Google . URL: https://sites.google.com/site/edugservis/google-drive (дата звернення 26 березня 2023).
7. Як користуватися Jamboard ? https://support.google.com/meet/answer/10071448?hl=uk (дата звернення 26.03.2023).
8. Zoom – що це таке, як працює та де завантажити програму. URL: https://www.unian.ua/science/zoom-shcho-ce-yak-zavantazhiti-zum-i-yak-koristuvatisyanovini-10974719.html (дата звернення 26.03.2023).

Ludmila P. Zaguba, Tatiana V. Turka
Donbas State Pedagogical University, Sloviansk, Ukraine

Using cloud services in the work of the teacher

The article is devoted to the use of distance technologies in the educational process. The distance learning tools are considered, the experience of using cloud services in the professional activity of a teacher of computer science is highlighted. The study was conducted using theoretical and practical methods. The article is written from work experience.

Keywords: *Internet, cloud services, interactive whiteboard, Google classes, distance education.*

УДК 37.091.26-021.4-047.37

Сілін Є.С., Чапни К.Е.
[1] *кандидат фіз.-мат. н., доцент кафедри математики та інформатики, ДВНЗ «ДДПУ»*
e-mail: silin-evgen@meta.ua, ORCID 0000-0003-2470-2704
[2] *здобувач магістерського РВО фізико-математичного факультету, ДВНЗ «ДДПУ»*
e-mail: ksushachapny@gmail.com, ORCID 0009-0001-9836-8473

СТАТИСТИЧНІ ДОСЛІДЖЕННЯ ЯКОСТІ ТЕСТУ

У роботі викладено результати дослідження критеріїв якості – валідності та надійності тестів фахового вступного випробування з математики для вступу абітурієнтів до фізико-математичного факультету Донбаського державного педагогічного університету. Встановлені відповідні числові характеристики (коефіцієнт валідності й коефіцієнт надійності), надана їх якісна оцінка та доведена статистична значущість.

Ключові слова: *педагогічне вимірювання, тестування, тестові завдання, валідність тесту, надійність тесту, кореляційний зв'язок, коефіцієнт рангової кореляції Спірмена, коефіцієнт рангової кореляції Кендала.*

Вступ

Постановка проблеми. В останнє десятиліття зростає значущість використання різних методів та інструментів оцінювання знань, навичок і вмінь у професійних та наукових сферах, зокрема, в освітній. Один із ключових аспектів такого оцінювання – використання процедури тестування, яка дозволяє об'єктивно, швидко та систематизовано оцінити рівень компетентності здобувачів освіти.

Тестування є актуальним й корисним інструментом у сучасному освітньому, науковому та професійному середовищі. Завдяки тестуванню ми отримуємо можливість об'єктивно оцінити знання, навички та компетенції здобувачів, що дозволяє адаптувати навчальні плани, вдосконалювати методи навчання та відповідати потребам ринку праці. Крім того, тестування створює можливість для здійснення об'єктивних порівнянь, аналізу розвитку та рівня володіння компетенціями в часі. Відчутний попит на тестові інструменти відображає те, як вони сприяють підвищенню якості освіти, ефективності навчання та відбору кращих кандидатів у професійних галузях.

Добре відомо, що досягнення точних та надійних результатів педагогічних вимірювань часто ускладнюється дією різноманітних факторів, які можуть суттєво впливати на процес й результати оцінювання. Отже, природним чином, постає вимога щодо забезпечення розробки та впровадження якісних інструментів тестування, починаючи з постановки цілей педагогічного вимірювання, створення специфікації тесту та тестових завдань, шкалювання, дотримання процедури проведення тестування, аналізу й статистичної обробки результатів.

Одним із суттєвих чинників забезпечення високої якості тестових інструментів є оцінка й аналіз валідності та надійності тесту в цілому, показників диференційної здатності окремих тестових завдань та інших критеріїв якості. У цьому контексті зазвичай використовують методи математичної статистики, які дозволяють об’єктивно та достовірною оцінити результати педагогічного вимірювання. Проведення аналізу якості тестування підвищує точність й довіру до отриманих результатів педагогічного вимірювання.

Метою дослідження є проведення аналізу та оцінки якості тестів вступного фахового випробування для абітурієнтів за бакалаврським рівнем вищої освіти зі скороченим терміном навчання, спеціальність 014 Середня освіта (Математика), зокрема його валідності та надійності:

1. Встановлення коефіцієнтів рангової кореляції (за Спірменом та Кендалом);
2. Перевірка статистичної значущості коефіцієнтів рангової кореляції;
3. Надання якісної інтерпретації числових значень коефіцієнтів кореляції.

1. Основні поняття та попередні відомості

Валідність методу – це комплексна оцінка, яка заснована на характеристиках інструментів і процедур вимірювання, а також на властивостях властивостей явища, що досліджується. Таким чином, валідність методу відображає відповідність того, що вимірюється за допомогою даного методу, тому, що він повинен вимірювати. Ця характеристика встановлює межі діапазону, для якого метод забезпечує статистично ймовірні результати. [1].

Відповідно до П. Клайна [2] валідність тесту можна поділити на наступні типи:

очевидна валідність – тест вважається валідним, якщо у опитуваних виникає враження, що він дійсно вимірює те, що має виміряти;

конкурентна валідність – оцінюється через кореляцію результатів даного тесту з результатами інших тестів, які вимірюють ту саму характеристику;

прогностична валідність – вивчаються кореляції між показниками тесту та певним критерієм, що характеризує вимірювану властивість, але це відбувається через певний проміжок часу;

змістовна валідність – тест вважається змістовно валідним, якщо можна довести, що завдання тесту відображають всі аспекти області, що досліджується, і при цьому інструкції до завдань чітко сформульовані;

конструктивна валідність – цей підхід включає всі аспекти визначення валідності, перераховані вище.

У контексті проведення вступних випробувань до університету, особливо корисною є критеріальна валідність, яка дозволяє співставити результати тестування абітурієнтів із успішністю вже студентів під час навчання у ЗВО.

DOI: https://doi.org/...

Забезпечення надійності педагогічних вимірювань є критично важливим для отримання точних та надійних результатів, на основі яких можна приймати об'єктивні рішення в освіті. Це сприяє вдосконаленню навчальних програм, визначенню успішності здобувачів.

Надійність методу вимірювання визначається ступенем стійкості результатів [3]. Перевірка надійності методу стосується насамперед співставлення результатів при повторних вимірах. Надійність методу залежить від: об’єктивності методу (об’єктивності процедур тестування); параметрів інструменту вимірювання (якості тесту); стабільності характеристики, що вимірюється. Надійність тесту також залежить від кількості тестових завдань.

За визначенням П. Клайна, тест вважається надійним, якщо він є внутрішньо узгодженим, тобто, різні частини тесту вимірюють одну і ту ж характеристику. Також тест вважається надійним, якщо результати залишаються стійкими для одного і того ж випробуваного під час повторного тестування (за умови, що стан випробуваного залишився незмінним). [4].

Найбільш поширеними методами перевірки надійності тесту є наступні.

Метод поділу на половини – тест розділяється на дві рівні половини, результати відповідей на обидві половини порівнюються між собою за допомогою коефіцієнта кореляції.

Метод повторного тестування (метод ретесту) – порівнюються результати тесту, який проводиться двічі через деякий проміжок часу, зі збереженням ідентичних умов.

Метод альтернативних форм – створюються дві альтернативні форми тесту, які мають ідентичні рівні складності та вимірюють ті ж самі концепції або навички. Учасники випробування виконують обидві форми тесту в різний час.

2. Основна частина

У 2018 — 2021 роках правила прийому на навчання в ДДПУ за ОКР «Бакалавр» передбачали вступ до університету на основі раніше здобутого освітньо-кваліфікаційного рівня молодшого спеціаліста, освітньо-професійного ступеня фахового молодшого бакалавра, освітнього ступеня молодшого бакалавра шляхом складання фахового вступного випробування.

В якості інструменту такого випробування для абітурієнтів фізико-математичного факультету було обрано тестування. Ці тести відносяться до гетерогенних, оскільки охоплювали основні розділи алгебри, аналітичної геометрії, математичного аналізу, теорії ймовірностей та математичної статистики. Кожен варіант тесту містить 25 завдань формату А (закритого типу, з вибором однієї правильної відповіді), серед яких 8 теоретичних та 17 практичних завдань; перші двадцять завдань оцінюються по 2 бали, а п’ять останніх, підвищеної складності – по 4 бали. Максимальний бал, який можна отримати за тест – 60 балів. За 4 роки використання тесту, участь у тестуванні прийняв 31 абітурієнт.

Первинні дані дослідження – результати фахового вступного випробування абітурієнтів до ДДПУ та семестрові оцінки за 100-бальною шкалою з окремих навчальних дисциплін отримано шляхом опрацювання особових справ студентів фізико-математичного факультету, які навчалися за скороченим терміном (джерело – архів та відділ кадрів), документації деканату фізико-математичного факультету.

2.1. Для знаходження критеріальної валідності скористаємося результатами подальшого навчання вступників на фізико-математичному факультеті за навчальними дисциплінами, які відповідають тематиці вступного тесту: елементарна математика (5 семестр), проективна геометрія (6 семестр), теорія ймовірностей та математична статистика (8 семестр), диференціальна геометрія і топологія (6 семестр), комплексний аналіз (8 семестр). Індивідуальні семестрові бали кожного здобувача за названими курсами підсумовуємо та проводимо ранжування. Також визначаємо ранги учасників фахового випробування за результатами виконання тестових завдань.

Спочатку використаємо формулу рангової кореляції Спірмена, у випадку наявності зв'язаних рангів [5]:

$$r_S = \frac{\sum x^2 + \sum y^2 - \sum d_i^2}{2 \times \sqrt{\sum x^2 \times \sum y^2}},$$

де $\sum x^2 = \frac{n^3 - n}{12} - T_x$; $\sum y^2 = \frac{n^3 - n}{12} - T_y$; $T_x = \frac{\sum\left(a^3 - a\right)}{12}$; $T_y = \frac{\sum\left(b^3 - b\right)}{12}$; d – різниця рангів; n – обсяг вибірки, $n = 31$; a – обсяг кожної групи однакових рангів у першому ранговому ряду X; b – обсяг кожної групи однакових рангів у другому ранговому ряду Y.

Провівши відповідні розрахунки, ми отримали значення коефіцієнту Спірмена $r_S = 0,73$.

Перевіримо його статистичну значущість. Задамо ймовірність помилки першого роду $\alpha = 0,05$ та сформулюємо нульову й конкуруючу гіпотези: H_0 – тестові бали та сумарні семестрові бали з визначених дисциплін математичного циклу статистично не взаємозв'язані ($r_S = 0$); H_1 – тестові бали та сумарні семестрові бали значущо взаємозв'язані ($r_S \neq 0$). Далі обчислимо критичну точку за формулою:

$$T_{кр} = t_{кр}\sqrt{\frac{1 - p_в^2}{n - 2}},$$

де n – об'єм вибірки, $p_в$ – вибірковий коефіцієнт рангової кореляції Спірмена, $t_{кр}\left(\alpha; k\right)$ – критична точка двосторонньої критичної області розподілу Стьюдента. За допомогою таблиці критичних точок розподілу Стьюдента знаходимо, що $t_{кр}(0,05;29)=2,05$, отже, $T_{кр}=0,26$. Оскільки $\left|r_s\right|>T_{кр}$ $(0,73>0,26)$, то нульову гіпотезу відкидаємо.

Надамо якісну оцінку сили кореляційного зв'язку. Для цього скористаємося відомою шкалою Чедока [6]. Сила кореляційного зв'язку згідно класифікації Чедока – сильна ($r_S=0,73$). Розмір стандартизованого ефекту згідно класифікації Коена [7] – великий.

Далі оцінимо валідність за допомогою рангової кореляції Кендала, у випадку наявності зв'язаних рангів [5]:

$$\tau=\frac{P-Q}{\left(\sqrt{\frac{n\times(n-1)}{2}}-T_x\right)\times\left(\sqrt{\frac{n\times(n-1)}{2}}-T_y\right)},$$

де $T_x=\frac{\sum\left(a_x-1\right)}{2}$; $T_y=\frac{\sum\left(b_y-1\right)}{2}$; P – кількість збігів (погоджені пари); Q – кількість інверсій (непогоджені пари); n – обсяг вибірки досліджуваних або кількість ознак; a_x – обсяг кожної групи однакових рангів у першому ранговому ряду X; b_y – обсяг кожної групи однакових рангів у другому ранговому ряду Y. Після виконання відповідних обчислень, маємо: $\tau=0,49$.

Перевіримо статистичну значущість отриманого значення коефіцієнта рангової кореляції Кендала. Критичну точку знаходимо за формулою:

$$T_{кр}=z_{кр}\sqrt{\frac{2(2n+5)}{9n(n-1)}},$$

де n – об'єм вибірки; $z_{кр}$ – критична точка двосторонньої критичної області, яку знаходять за таблицею значень функції Лапласа. Як і раніше, рівень значущості встановимо 0,05. Враховуючи, що $z_{кр}=1,96$ і $n=31$, отримаємо $T_{кр}=0,25$. Оскільки $\left|\tau\right|>T_{кр}$ $(0,49>0,25)$, то ранговий кореляційний зв'язок Кендала є статистично значущим.

Сила цього кореляційного зв'язку згідно класифікації за Чедоком – помірна ($\tau=0,49$). Розмір стандартизованого ефекту згідно Коена – середній.

2.2. Для перевірки тесту на надійність, скористаємося методом розщеплення. Розділимо усі завдання тесту на парні та непарні номери й визначимо відповідні ранги щодо кожного абітурієнту.

Знову проведемо розрахунки коефіцієнту рангової кореляції Спірмена r_S (зв'язані ранги) й отримаємо, що $r_S=0,93$. Це значення свідчить про наявність тісної прямої кореляції між балами за парні й непарні тестові завдання.

Перевіримо статистичну значущість отриманого результату для $\alpha = 0{,}05$. Зрозуміло, що $t_{кр}(0{,}05;29) = 2{,}05$, відповідно, $T_{кр} = 0{,}14$. Оскільки $|r_s| > T_{кр}$ $(0{,}93 > 0{,}14)$, то коефіцієнт рангової кореляції Спірмена є значущим.

За шкалою Чедока сила кореляційного зв'язку є дуже сильна; розмір стандартизованого ефекту згідно класифікації Коена – великий.

Використовуючи формулу рангової кореляції Кендала у випадку наявності зв'язаних рангів, маємо: $\tau = 0{,}62$. Для рівня значущості 0,05 перевіримо нульову гіпотезу про рівність нулю генерального коефіцієнта рангової кореляції Кендала при конкуруючий гіпотезі $\mathrm{H}_1 : \tau_г \neq 0$. Оскільки $T_{кр} = 0{,}25$, то $|\tau| > T_{кр}$ $(0{,}62 > 0{,}25)$ й нульову гіпотезу відкидаємо.

Сила кореляційного зв'язку згідно класифікації за шкалою Чедока – помірна ($\tau = 0{,}62$). Розмір стандартизованого ефекту згідно Коена – середній.

Висновки

За результатами проведеного аналізу тесту з вищої математики для проведення фахового вступного випробування можемо констатувати, що цей метод педагогічних вимірювань є валідним та надійним й може використовуватися в подальшому. Коефіцієнти валідності й надійності, в основу яких покладено коефіцієнт рангової кореляції, мають сильний (кореляція за Спірменом) та середній (кореляція за Кендалом) рівні. Отримані результати є статистично значущими на рівні 0,05.

Перспективним є продовження дослідження окремих тестових завдань для перевірки їх дискримінативної здатності, складності та інших показників якості.

Література

1. Ландар І. П. Валідність результатів вимірювання. *Інформаційно-комуніуаційні технології в освіті*. 2014. № 1. URL: https://e-journals.npu.edu.ua/index.php/ikt/article/view/35/pdf_24 (20.07.23)
2. Ковальчук А. Тестові технології оцінювання якості. *Відкритий урок: розробки, технології, досвід*. 2009. № 3. URL: https://osvita.ua/school/method/5919/ (05.08.23)
3. Булах І. Є., Мруга М. Р. Створюємо якісний тест: *Навчальний посібник*. К.: Майстер-клас. 2006. С. 15
4. Дяченко О. Ф. Організація тестового контролю знань студентів з курсу «Компютерні мережі». *Науковий часопис НПУ ім. М. П. Драгоманова. Сер. 2 : Комп'ютерно-орієнтовані системи навчання.* 2011. №. 11. С. 2.
5. Авраменко В. І. Теорія ймовірностей і математична статистика : *навчальний посібник* / В. І. Авраменко, І. К. Карімов. *2-ге вид., перероб. і доп. Дніпродзержинськ : ДДТУ*. 2013. С. 167

6. Боснюк В. Ф. Математичні методи в психології: курс лекцій. Харків. : НУЦЗУ, 2020. С. 52. URL: http://repositsc.nuczu.edu.ua/bitstream/123456789/11329/1/Математичні методи в психології (Боснюк).pdf
7. Боснюк В. Ф. Математичні методи в психології: курс лекцій. Харків. : НУЦЗУ, 2020. С. 54. URL: http://repositsc.nuczu.edu.ua/bitstream/123456789/11329/1/Математичні методи в психології (Боснюк).pdf

E.S. Silin, K.E. Chapny
Donbas State Pedagogical University, Sloviansk, Ukraine;

Statistical studies of test quality

The article presents the results of a study of quality criteria - the validity and reliability of the tests of the professional entrance examination in mathematics for the admission of applicants to the Donbas State Pedagogical University at the bachelor's level of higher education with a shortened period of study, specialty 014 Secondary education (Mathematics). Appropriate numerical characteristics (validity coefficient and reliability coefficient) were established, their qualitative assessment was provided, and statistical significance was proven.

Keywords: *pedagogical measurement, testing, test tasks, test validity, test reliability, correlation, the Spearman rank correlation coefficient, the Kendall rank correlation coefficient.*

УДК 51(075.3)

Федорченко А.О., Рижкова Г.О., Кадубовський О.А.

[1] *здобувач магістерського РВО фізико-математичного факультету, ДВНЗ «ДДПУ»*
e-mail: nastyaf201474@gmail.com, ORCID 0009-0004-1789-8803

[2] *вчитель математики, Слов'янський ЗЗСО I-II ступенів №7*
e-mail: rijkowa@gmail.com, ORCID 0009-0003-6168-2770

[3] *кандидат фіз.-мат. н., доцент кафедри математики та інформатики, ДВНЗ «ДДПУ»*
e-mail: kadubovs@ukr.net, ORCID 0000-0003-2045-810X

ПРО ГЕОМЕТРИЧНІ МІСЦЯ ТОЧОК ПЛОЩИНИ ТА СУМІЖНІ ПИТАННЯ

Стаття присвячена методичним та дидактичним аспектам вивчення в шкільному курсі геометрії найпростіших геометричних місць точок та методу ГМТ для знаходження нових ГМТ і розв’язування геометричних задач. Наведено приклади можливого застосування зазначеного методу для доведення тверджень на встановлення властивостей геометричних фігур. Крім того, в статі наведено авторський підхід до вивчення ГМТ площини в межах відповідного змістового модуля певної освітньої компоненти освітніх програм підготовки здобувачів вищої освіти за предметною спеціальністю 014.04 Середня освіта (Математика) галузі знань 01 Освіта / Педагогіка.

Ключові слова: *геометричне місце точок, рівновіддаленість, метод ГМТ, застосування методу ГМТ, шкільний курс геометрії, навчання, підготовка вчителів.*

> «Поняття про геометричне місце точок – одне з найважливіших в геометрії. Воно відіграє роль не лише в таких питаннях, як геометричні задачі на побудову. Не менше значення воно має в аналітичній геометрії, де застосування цього питання дозволяє простим й доступним способом одержати наочне уявлення про різні криві»
>
> *Д.І. Перепьолкін.*

Вступ

Добре відомо, що геометричні місця точок (надалі – ГМТ) та метод геометричних місць точок (метод ГМТ) знаходять своє застосування у:

– ***механіці*** (для визначення траєкторій руху тіл та часток у механічних системах; аналізу динаміки механічних систем, зокрема визначення стабільних точок рівноваги; розрахунку довжин і кутів для рухомих деталей механізмів);

– ***оптиці*** (для аналізу властивостей світлових променів у лінзах, дзеркалах, призмах та інших оптичних системах; для визначення шляхів променів та їх поведінки у складних оптичних системах);

– ***електростатиці та магнетизмі*** (для визначення розподілу зарядів або магнітних полів у просторі; знаходження ліній електричного або магнітного поля, що спрощує аналіз цих явищ);

– ***електротехніці*** (для прокладання шляхів та керування рухом роботів, визначення місць розміщення заземлюючих електродів в електричній мережі;

визначення оптимального розташування антен та антенних систем; для розрахунків параметрів фільтрів, резонаторів та інших мікрохвильових пристроїв);

– ***квантовій механіці*** (для визначення допустимих енергетичних станів квантово-механічних систем; вивчення енергетичних рівнів атомів, молекул та інших квантових систем);

– **медицині** (для аналізу рухів людського тіла; статичних і динамічних позицій тіла під час діагностики і лікування захворювань; в плануванні хірургічних втручань; в техніці для визначення характеристик медичних пристроїв, при розробці медичних імплантатів тощо);

– **комп'ютерній графіці та анімації** (для моделювання тривимірних об'єктів; створення рухомих персонажів у комп'ютерних іграх та анімаціях, реалістичних та емоційно насичених візуальних ефектів тощо);

– **картографії** (для побудови карт географічних регіонів; визначення топографічних рис ґрунту; при вивченні розташувань об'єктів та їх зв'язків);

– **геодезії** (для визначення відстаней між географічними об'єктами; координат географічних об'єктів на поверхні Землі; при встановленні геодезичних параметрів, які дозволяють зрозуміти геометричну структуру планет);

– **архітектурі** (для визначення оптимальних розмірів та форм будівель; створення пропорційних композицій; визначення розташувань елементів будівлі, враховуючи їх функціональне призначення та стилістичні вимоги).

Геометричні місця точок широко використовуються у конструюванні геометричних фігур та поверхонь. Більше того, досить часто нові фігури у математиці визначають (вводять) саме як ГМТ, наприклад: коло – в шкільному курсі геометрії; еліпс, гіпербола і парабола – в курсі аналітичної геометрії. Так, наприклад:

коло – одна з найпоширеніших геометричних фігур, яка може бути описана як ГМТ площини, рівновіддалених від центра кола; властивості кола дозволяють нам з легкістю конструювати його, а також застосовувати в астрономії, географії та інженерії;

еліпс – це ГМТ на площині, сума відстаней від яких до двох фіксованих точок є сталою; їх застосовують в географії для моделювання траєкторій планет, в астрономії для опису орбіт комет, а також у медицині для моделювання руху пульсу в артеріях;

гіпербола – це ГМТ на площині, сума відстаней від яких до двох фіксованих точок має сталу різницю; гіперболи знаходять застосування в астрономії для моделювання галактик, а також в техніці для дослідження радіохвиль;

парабола – це ГМТ на площині, що рівновіддалені від фіксованої точки (фокусу) та фіксованої прямої (директриси); параболи широко застосовують у фізиці для моделювання траєкторій руху тіл, а також у техніці для побудови супутників;

сфера – це ГМТ в просторі, що рівновіддалені від центра сфери; сфери використовуються в геодезії для визначення відстаней між точками на Землі та у фізиці для моделювання гравітаційного поля;

циліндр – це ГМТ в просторі, що рівновіддалені від осі циліндра; циліндри застосовують в інженерії для побудови трубопроводів і баків та у геометрії для вивчення об'ємів та поверхонь обертання.

Отже, ГМТ є потужним інструментом, який знаходить своє застосування в багатьох галузях науки і техніки. Вони допомагають аналізувати і розуміти різноманітні геометричні структури (які оточують нас у повсякденному житті) та рухи об'єктів, що дозволяє розв'язувати різноманітні задачі практичного характеру. Застосування ГМТ допомагає знаходити розв’язки та приймати рішення у різних сферах людської діяльності, що робить їх невід'ємною частиною нашого життя. А знання про ГМТ є важливими не лише в математиці, а й для розвитку інженерних, наукових, медичних та багатьох інших дисциплін.

Загально визнано, що якість знань учнів тісно пов’язана з якістю їх самостійної розумової діяльності. Тому вкрай важливо навчити учнів визначати та виявляти нові для них властивості та ознаки геометричних об’єктів, робити на основі вивченого нові умовиводи, знаходити доведення теорем та розв’язувати задачі. У зв’язку з цим виникає необхідність формування в учнів не лише навичок логічних міркувань, а також навичок евристичного мислення. Цьому, як відомо, сприяють задачі на дослідження. Під задачами на дослідження слід розуміти такі задачі, при розв’язуванні яких учні мають можливість зробити посильне для них відкриття. В геометричних задачах на дослідження, зокрема на знаходження ГМТ, учні мають змогу виокремлювати властивості та ознаки геометричних об’єктів.

При знаходженні / виведенні рівнянь ліній (кривих) в аналітичній геометрії їх розглядають саме як ГМТ. А різноманітність прикладів ГМТ виникає в наслідок застосування методу координат. Якщо в просторі / на площині зафіксовано декартову систему координат, то кожне рівняння з трьома (2 або навіть 1) змінними визначає у просторі / на площині певну сукупність точок – ГМТ, координати яких задовольняють цьому рівнянню.

Таким чином задачі на знаходження ГМТ відіграють важливу роль в геометрії, зокрема шкільному курсі. «Вони дають змогу краще засвоїти геометричний матеріал, допомагають розвивати логічне мислення учнів, конструктивні здібності, сприяють формуванню графічних навичок» [7, С. 3].

Найбільш повно комплекс питань, пов’язаних із задачами на ГМТ, висвітлено у книзі [26], в якій автором крім методичних вказівок, наведено велику кількість задач на ГМТ (переважно) площини. Найбільшу кількість задач на ГМТ простору наведено у книзі [21], в якій автор наводить й загальні вказівки про способи їх розв’язання.

Серед статей, присвячених методичним аспектам вивчення ГМТ у шкільному курсі геометрії, слід виділити роботи [19], [20] та [28].

Серед посібників для учнів ЗЗСО – [3], [6]; серед посібників для студентів педагогічних ЗВО та вчителів математики – [1], [2], [5], [7], [22].

Не зважаючи на рясність навчально-методичної літератури та наявність цілої низки задач на ГМТ в діючих підручниках з геометрії (напр. [8–17]), слід констатувати, що вивчення ГМТ дається учням з труднощами. На підставі досвіду проведення учнівських математичних олімпіад, слід також відзначити, що навіть сильні учні мають проблеми із типовими задачами на знаходження ГМТ ([23, С. 33-34], [24, С. 32-33], [25, С. 78-80]). Можливо це пов'язано із необхідністю доведення прямого і оберненого тверджень під час їх знаходження, та нерозвиненістю навичок за допомогою рівнянь, нерівностей та/або їх систем задавати геометричні фігури і, навпаки, за властивостями фігур складати їх рівняння тощо. Не можна не погодитися із думкою автора [27, С. 3] про те, що задачі на відшукання ГМТ традиційно розглядаються виключно в контексті їх застосувань до розв'язання задач на побудову, тобто, виключно зі службовою метою. Цінність розв'язування задач на побудову, яким, нажаль, все менше приділяється уваги в шкільному курсі геометрії, не викликає жодних сумнівів; проте, як наголошується автором в [27], слід також розуміти, що і задачі на відшукання ГМТ самі по собі є задачами, які мають не менше освітнє та виховне значення.

Спробі систематизувати задачі-твердження про ГМТ площини та принципово уможливити рівномірне вивчення (шляхом запропонованих у статті способів їх доведення) задач на знаходження ГМТ площини у 7, 8 та 9 класах й присвячено дану статтю.

1. Основні поняття та попередні відомості

Якщо фігуру задано шляхом вказівки властивості, яку мають всі точки цієї фігури і лише фони, то таку фігуру називають *геометричним місцем точок* (ГМТ), що мають зазначену властивість. Тобто, ГМТ площини, що мають вказану властивість, називають фігуру (зазвичай – непорожню сукупність точок площини), яка складається з усіх тих і лише тих точок площини, які мають цю властивість. В дусі сучасної математики поняття ГМТ за своїм змістом не відрізняється від поняття множини точок.

Взагалі фігура може складатися з точок, які мають певну властивість, але не містити всіх точок площини з цією властивістю. Така фігура не є геометричним місцем точок. Отже, коли у визначенні певного ГМТ сказано, що фігура складається з усіх точок площини, які мають певну властивість, то це означає:

– по-перше, що кожна точка фігури має цю властивість;

– по-друге, кожна точка площини, яка має цю властивість, належить даній фігурі.

Властивість (або декілька властивостей), за допомогою якої характеризується те чи інше ГМТ, називають *характеристичною властивістю* точок цього ГМТ.

ГМТ може бути не лише лінією або сукупністю декількох ліній, воно може бути скінченною сукупністю точок, областю площини і т.ін. Може навіть виявитися, що ГМТ, які мають вказану властивість, зовсім не існує (порожня множина точок).

Зауваження 1. Під час знаходження ГМТ, яке визначається певною характеристичною властивістю, необхідно чітко усвідомлювати «універсальну» множину, на якій відбувається пошук. Так, наприклад, «*ГМТ, рівновіддалених від кінців даного відрізка* AB» на прямій, яка містить відрізок AB, шукане ГМТ є точкою (середина відрізка AB) – рис. 1 a); на площині, яка містить відрізок AB, – пряма (серединний перпендикуляр до відрізка AB) – рис. 1 b); у просторі – площина (яка проходить через середину відрізка AB перпендикулярно до нього) – рис. 1 c).

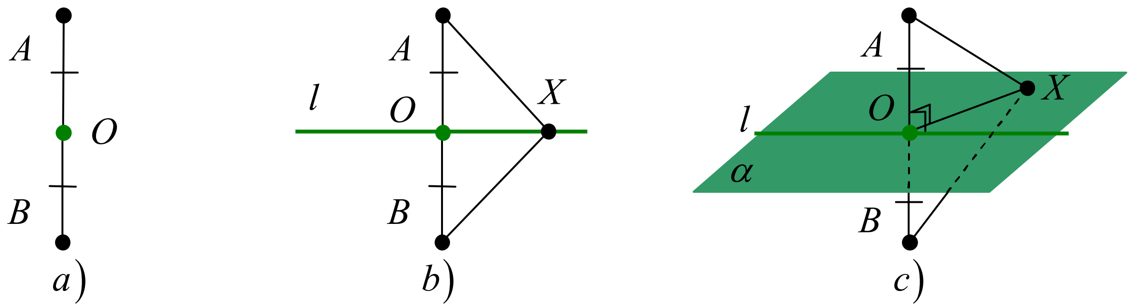


Рис. 1.: до ГМТ, рівновіддалених від двох даних точок.

Основним методом знаходження ГМТ є метод геометричних місць.

Зміст задач про знаходження геометричного місця точок, які мають певну / характеристичну властивість, полягає в тому, щоб вказати, яку саме елементарну фігуру являє собою шукане ГМТ.

Розв'язування задач на знаходження ГМТ (зазвичай) складається з ***аналізу***, ***доведення*** та ***дослідження***.

Мета **аналізу** – висунути гіпотезу відносно того, чим є шукане ГМТ.

Етап ***аналізу*** (зазвичай) починають з того, що на рисунку зображають дану фігуру та розглядають певну точку, яка (за припущенням) належить шуканому ГМТ. Далі встановлюють зв'язки цієї точки з даними елементами, що є наслідками саме з визначення даного / шуканого ГМТ, та які допомагають визначити його форму і розташування. Інколи аналізу допомагає розгляд певного частинного випадку або ж безпосередня побудова (визначення) декількох інших точок, які «гарантовано» належать шуканому ГМТ. Результатом аналізу є висунення гіпотези щодо форми та розташування шуканого ГМТ – *фігура* Φ.

На етапі ***доведення*** (зазвичай) встановлюють справедливість двох взаємно обернених тверджень:

Твердження I. Довільна точка, що належить знайденій (на етапі аналізу) фігурі Φ, має характеристичну властивість точок шуканого ГМТ;

Твердження II. Кожна точка, яка має характеристичну властивість точок шуканого ГМТ, належить фігурі Φ.

Корисно також пам'ятати, що доведення другого твердження можна замінити доведенням наступного

Твердження ІІ*. Якщо певна точка (площини / простору залежно від умови) не належить «знайденій» (на етапі аналізу) фігурі, то вона не має характеристич- ну/ні властив- ість/ості точок шуканого ГМТ.

Не варто забувати, що інколи, під час доведення висунута гіпотеза спростовується. І тому слід повернутися до більш детального аналізу та висунення нової гіпотези.

Етап ***дослідження*** полягає у вивченні різних випадків, які можуть вплинути на форму і розташування шуканого ГМТ, в залежності від даних (за умовою задачі) геометричних об'єктів та їх взаємного розташування.

На підставі рекомендацій, викладених в [29, С. 11], учням можна запропонувати **план до розв'язування задач на відшукання ГМТ**:

1) побудова низки окремих точок шуканого ГМТ на підставі умови;
2) побудова робочого ескізу, зручного для обґрунтування задачі;
3) обґрунтування розв'язання (встановлення закономірностей щодо розташування точок шуканого ГМТ);
4) уточнення виду фігури, знайденої у пункті 3);
5) дослідження розв'язку задачі в залежності від зміни вихідних даних;
6) знаходження найбільш зручного способу побудови знайденого ГМТ.

Зауваження 2. Слід розрізняти задачі *на знаходження ГМТ* та задачі *на побудову ГМТ*. Бо перша з них не передбачає другу, а друга, зазвичай, – передбачає першу. Крім того, іноді, знайдене ГМТ за допомогою заданого умовою задачі набору креслярських інструментів не може бути побудованим.

Аналіз дидактичного забезпечення теми «Геометричні місця точок площини» за підручниками з геометрії [8–17, 27] дозволяє виокремити найбільш типові та суттєво різні задачі, які в них пропонуються.

У 7 класі ([8], [11], [13], [15], [27]):

- ГМТ, рівновіддалених від кінців відрізка.
- Знайдіть ГМТ, рівновіддалених від усіх вершин трикутника.
- Знайдіть ГМ центрів кіл даного радіуса, які проходять через дану точку.
- Знайдіть ГМ центрів кіл, які проходять через дві дані точки.
- Знайдіть ГМТ, рівновіддалених від двох прямих, які перетинаються. (Якою фігурою є ГМ центрів кіл, що дотикаються до двох прямих, які перетинаються?)
- Знайдіть ГМ вершин рівнобедрених трикутників, які мають спільну основу.
- Знайдіть ГМТ, рівновіддалених від двох паралельних прямих. (Якою фігурою є ГМ центрів кіл, що дотикаються двох паралельних прямих?)
- Знайдіть ГМТ, віддалених від даної прямої на задану відстань.
- Відрізок AB – діаметр кола, M – довільна точка кола, яка не співпадає з жодною з точок A і B. Доведіть, що $\angle AMB = 90^0$.

- Дано точки A і B. Знайдіть ГМТ X таких, що $AX > BX$.
- Дано точки A і B. Знайдіть ГМТ X таких, що $AX > AB$.
- Знайдіть ГМТ, рівновіддалених від усіх сторін трикутника.
- Знайдіть ГМ центрів кіл, які дотикаються до даної прямої в даній на ній точці.
- Знайдіть ГМ центрів кіл, які дотикаються до обох сторін даного кута.
- Знайдіть ГМ центрів кіл радіуса R, які дотикаються до даної прямої.
- Якою фігурою є геометричне місце вершин трикутників, що мають спільну сторону AB і однакову висоту h, проведену до цієї сторони?
- Знайти геометричне місце вершин трикутників зі спільною основою AB та бічною стороною, довжина якої дорівнює a.
- Дано два рівних кола, що лежать одне поза одним. Знайти геометричне місце центрів кіл, які дотикаються до цих кіл.
- Дано кут ABC та дві точки M і N у його внутрішні області. На сторонах кута знайдіть точки, рівновіддалені від точок M і N. Скільки розв'язків має задача?
- Знайдіть ГМ центрів кіл радіуса R, які відтинають на даній прямій хорду даної довжини a.

У 8 класі ([9], [14], [16], [27])**:**

- Дано відрізок AB. Знайдіть ГМТ X таких, що трикутник AXB прямокутний.
- Знайдіть ГМ вершин прямих кутів, сторони яких проходять через дві дані точки.
- Дано відрізок AB і кут α. Знайдіть ГМТ X таких, що $\angle AXB = \alpha$.
- Знайдіть ГМ вершин паралелограмів зі спільною стороною, у яких площа дорівнює площі даного паралелограма.
- Доведіть, що ГМТ, сума квадратів відстаней від яких до двох даних точок стала, є колом з центром у середині відрізка з кінцями у цих точках.

У 9 класі ([10], [12], [17], [27])**:**

- Складіть рівняння ГМТ, віддалених на дану відстань від точки, заданої своїми координатами.
- Знайдіть ГМ початків (кінців) одиничних векторів, кінці (початки) яких містяться в даній точці.
- Складіть рівняння ГМТ, рівновіддалених від двох точок, заданих своїми координатами (Складіть рівняння ГМ центрів кіл, які проходять через дві точки, що задані своїми координатами).
- Знайдіть ГМ кінців колінеарних одиничних векторів, початки яких містяться на даній прямій.
- Складіть рівняння ГМ центрів кіл радіуса R, які відтинають на даній прямій хорду сталої довжини a ($a < 2R$).
- Дано дві точки A і B. Знайдіть ГМТ X таких, що $AB + BX = AB$.
- Дано точки A і B. Знайдіть ГМТ X таких, що $AB + BX = BX$.

- Дано точки A і B. Знайдіть ГМТ X таких, що $|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BX}|=|\overrightarrow{AB}|$.
- Дано точки A і B. Знайдіть ГМТ X таких, що $|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BX}|=|\overrightarrow{BX}|$.
- Точка A належить колу. Знайдіть геометричне місце точок, які є серединами хорд даного кола, одним із кінців яких є точка A.
- Відрізок AB – хорда даного кола, точка C – довільна точка цього кола. Знайдіть геометричне місце точок, які є точками перетину медіан трикутників ABC.
- Дано дві точки A і B та пряму l. Знайдіть геометричне місце точок, які є точками перетину медіан $\triangle ABC$, де C – довільна точка прямої l.
- Відстань між точками A і B дорівнює 4. Знайдіть геометричне місце точок M площини, для яких: 1) $MA^2+MB^2=24$; 2) $MA^2-MB^2=4$.
- Знайдіть ГМТ, модуль різниці квадратів відстаней від яких до двох даних точок A і B дорівнює a^2, де a – довжина даного відрізка.
- Доведіть, що ГМТ, відношення відстаней від яких до двох даних точок стале (не дорівнює одиниці), є коло.

Звісно, що крім наведених, авторами підручників пропонуються й інші ГМТП, які, зазвичай, подано як задачі з числовими даними.

Слід також зауважити, що задачу на знаходження ГМТ, які мають певну властивість, можна подати / сформулювати у два способи:

1) у формі теореми, де відповідь на поставлене питання вже надана повністю або частково та потребує зробити лише відповідні обґрунтування;

2) у формі задачі, де за певними вихідними даними треба знайти ГМТ, які мають вказану властивість, не знаючи заздалегідь відповіді. В цьому випадку необхідно знайти саму фігуру (яка є шуканим ГМТ) з усіма відповідними обґрунтуваннями розв’язання.

Не можна не погодитися з автором [29, С. 6], що формулювання задач на знаходження ГМТ у перший спосіб, де вид / форма фігури – шуканого ГМТ (повністю або частково) зазначена в умові, значно знижує цінність досліджень при доведенні. Тоді як невідомість фігури (при формулюванні у другий спосіб) потребує від учня більшої відповідальності під час обґрунтування своїх висновків; бо необхідно здійснити ретельну перевірку всіх своїх міркувань, перш ніж зробити остаточний умовивід-вердикт.

З урахуванням зазначеного, формулювання задач у другий спосіб слід вважати найбільш доцільним. *Проте, на переконання авторів, задачі, сформульовані у перший спосіб, більш ніж доцільно використовувати як засіб досягнення мети – навчити розв’язувати задачі, сформульовані у другий спосіб (перш ніж навчитися знаходити добуток чисел, ми все ж таки вивчили-«визубрили» табличку множення) А для реалізації зазначеного, зокрема успішного застосування методу ГМТ, велике значення має знання «основних» ГМТ як основа для навичок відшукання ГМТ за певними умовами. Саме цим питанням й присвячено наступну частину представленої статті*.

2. Основна частина

Нижче наведено авторський підхід до вивчення ГМТ площини, який протягом декількох років було апробовано на фізико-математичному факультету ДВНЗ «Донбаський державний педагогічний університет» в межах вивчення відповідних змістових модулів освітніх компонент «Елементарна геометрія» та «Вибрані питання математики» освітніх програм підготовки здобувачів вищої освіти за предметною спеціальністю 014.04 Середня освіта (Математика) галузі знань 01 Освіта / Педагогіка.

Вивчення ГМТ площини доцільно розпочати з певної низки базових задач, наприклад, наступних

Базова задача №1. Дано відрізок AB. Доведіть, що на прямій AB існує єдина точка X, яка є внутрішньою точкою відрізка AB та для якої виконується рівність $AX : XB = m : n$, де $m > 0$, $n > 0$.

Базова задача №2. Дано відрізок AB. Доведіть, що на прямій AB існує єдина точка X, яка є зовнішньою точкою для відрізка AB та для якої виконується рівність $AX : XB = m : n$, де $m > 0$, $n > 0$, $m \neq n$.

Для доведення зазначених вище базових задач необхідно показати існування та довести єдиність такої точки. Міркування можна провести у спосіб, аналогічний наведеним у роботах [4, С. 13], [24, С. 32-33].

Базова задача №3. Дано відрізок AB. Доведіть, що на прямій AB існує єдина точка X, для якої справджується рівність $XA^2 - XB^2 = a^2$, де $a > 0$.

Доведення. Нехай X та X' – такі точки на прямій AB, які задовольняють умови $XA^2 - XB^2 = a^2$ та $X'A^2 - X'B^2 = a^2$ відповідно. Тоді маємо рівність $XA^2 - XB^2 = X'A^2 - X'B^2$. Подамо останню у векторній формі $\overrightarrow{XA}^2 - \overrightarrow{XB}^2 = \overrightarrow{X'A}^2 - \overrightarrow{X'B}^2$. Тоді $\left(\overrightarrow{XA} - \overrightarrow{XB}\right)\left(\overrightarrow{XA} + \overrightarrow{XB}\right) = \left(\overrightarrow{X'A} - \overrightarrow{X'B}\right)\left(\overrightarrow{X'A} + \overrightarrow{X'B}\right)$, $\overrightarrow{BA} \cdot \left(\overrightarrow{XA} + \overrightarrow{XB}\right) = \overrightarrow{BA} \cdot \left(\overrightarrow{X'A} + \overrightarrow{X'B}\right)$, $\overrightarrow{BA} \cdot \left(\overrightarrow{XA} + \overrightarrow{XB} - \overrightarrow{X'A} - \overrightarrow{X'B}\right) = 0$. Звідки $\overrightarrow{BA} \cdot \left(\overrightarrow{XX'} + \overrightarrow{XX'}\right) = 0$, $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{XX'} = 0$. Оскільки точки A і B є різними, а вектори $\overrightarrow{BA}$ і $\overrightarrow{XX'}$ не можуть бути перпендикулярними, то рівність $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{XX'} = 0$ можлива лише за умов, коли $\overrightarrow{XX'} = \vec{0} \Leftrightarrow X \equiv X'$. З останнього й випливає справедливість доводжуваного твердження.

Зауваження 3. Кожне з наведених нижче ГМТП (за винятком першого) є теоремою. Якщо стверджується, що «Геометричним місцем …, що мають властивості $f_1, f_2, ..., f_n$, є фігура F», то доведення цього твердження складається з двох (обов'язкових) частин (які можуть мінятися місцями):

1) доводиться, що кожна точка M фігури F має всі перелічені в умові властивості $f_1, f_2, ..., f_n$, тобто, належить шуканому ГМТП;
2) доводиться, що кожна точка N (основної) площини, яка має всі властивості $f_1, f_2, ..., f_n$, належить фігурі F.

Як правило: першу частину доводять шляхом безпосередньої перевірки;
другу частину – методом від супротивного.

Твердження 1 (ГМТП №1) *ГМТП, що знаходяться від даної точки* O *на даній відстані* $d>0$, *є (за визначенням) коло* $\omega(O,R)$ *з центром у даній точці* O *та радіусом* $R=d$ (рис. 2).

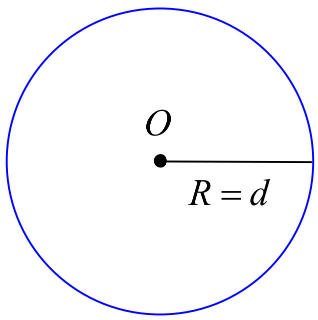


Рис. 2.: до ГМТП №1.

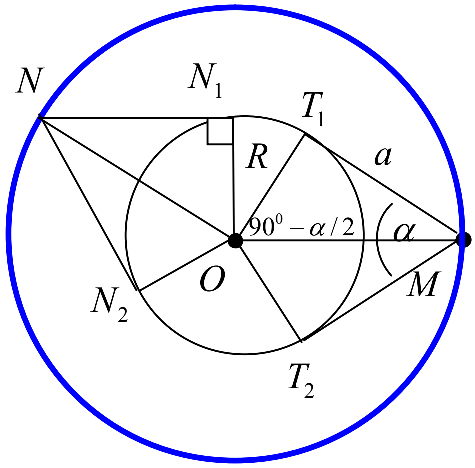


Рис. 3.: до ГМТП №2.

Наслідок 1.1. (ГМТП №2) *ГМТП, з яких дане коло* $\omega(O,R)$ *видно під даним нерозгорнутим кутом* α *(тобто, точки, з яких дотичні до даного кола утворюють між собою кут* α*), є коло концентричне даному, (яке проходить через одну з таких точок) радіус якого дорівнює* $R'=\dfrac{R}{\sin(\alpha/2)}$.

Доведення.

1) Нехай M – довільна (але фіксована) точка шуканого ГМТП, а MT_1 і MT_2 – відрізки дотичних до даного кола $\omega(O,R)$ (рис. 3). Тоді за умовою $\angle T_1MT_2=\alpha$. З рівності прямокутних трикутників MOT_1 і MOT_2 (наприклад, за катетом та спільною гіпотенузою) маємо що $\angle T_1OM=\angle T_2OM=90^\circ-\alpha/2$. Тому $OM\cdot\sin(\alpha/2)=R$. Звідки $OM=\dfrac{R}{\sin(\alpha/2)}=R'$ – стала величина.

Отже кожна точка M шуканого ГМТП відстоїть від даної точки O на фіксованій (сталій) відстані R', і тому належить колу $\omega(O,R')$.

2) Тепер покажемо, що довільна точка N кола $\omega(O,R')$ належить шуканому ГМТП. Отже, нехай $N\in\omega(O,R')$, а NN_1 і NN_2 ($N_1,N_2\in\omega(O,R)$) – дотичні до кола $\omega(O,R)$ в точках N_1 та N_2 відповідно. Оскільки $ON=R'$, $ON_1=ON_2=R$, то $\triangle NN_1O=\triangle NN_2O=\triangle MT_1O$ (за катетом і гіпотенузою). Тому $\angle ONN_1=\angle ONN_2=\angle OMT_1=\alpha/2$. Звідки $\angle N_1NN_2=\alpha$.

Наслідок 1.2. (ГМТП №3) *ГМТП, відрізки дотичних з яких до даного кола* $\omega(O,R)$ *дорівнюють довжині* a *даного відрізка, є коло концентричне даному, (яке проходить через одну з таких точок) радіус якого дорівнює* $R'=\sqrt{R^2+a^2}$.

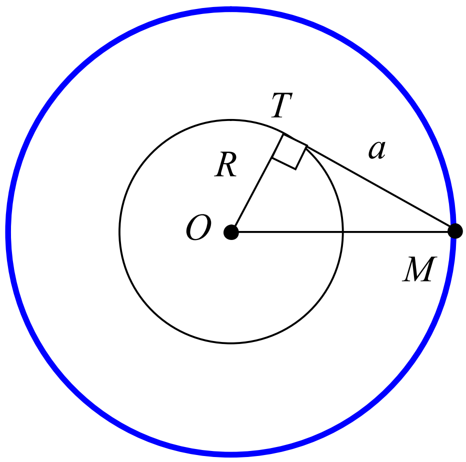


Рис. 4.: до ГМТП №3.

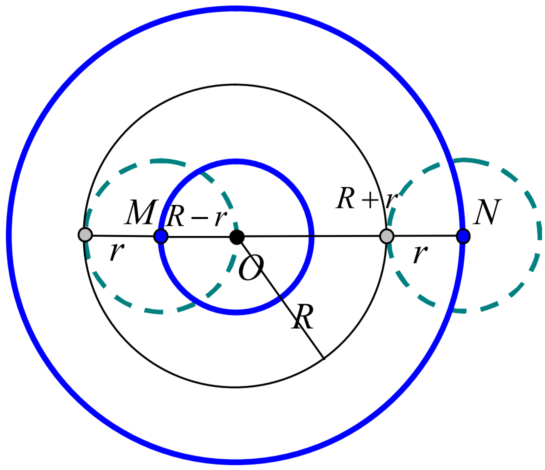


Рис. 5.: до ГМТП №4.

Доведення.

1) Нехай M – довільна (але фіксована) точка шуканого ГМТП, а MT – відрізок дотичної до даного кола $\omega(O,R)$. Тоді за умовою $MT = a$ (рис. 4).

З прямокутного трикутника MTO за теоремою Піфагора маємо, що $OM^2 = OT^2 + MT^2 = R^2 + a^2$. Звідки $OM = R'$ – стала величина.

Отже, довільна точка шуканого ГМТП відстоїть від даної точки O на сталій відстані $R' = \sqrt{R^2 + a^2}$, і тому належить колу $\omega(O,R')$.

2) Приналежність довільної точки кола $\omega(O,R')$ шуканому ГМТП доводиться аналогічно доведенню другої частини ГМТП 2.

Наслідок 1.3. (ГМТП №4) *ГМ центрів кіл даного радіусу r, які дотикаються до даного кола $\omega(O,R)$, складається з двох кіл, концентричних даному, радіуси яких дорівнюють сумі $(R+r)$ та різниці $(R-r)$ даних радіусів відповідно.*

Доведення пропонуємо читачам провести самостійно (рис. 5).

Для засвоєння зазначених вище ГМТП доцільно запропонувати наступну низку задач:

Задача 1.1. Знайти ГМ центрів кіл (площини) даного радіуса R, які проходять через дану точку Q.

Задача 1.2. Знайти ГМТП, відділених від даної точки O на відстань, не меншу за довжину m даного відрізка.

Задача 1.3. Знайти ГМТП, віддалених від даного кола $\omega(O,R)$ на відстань, що дорівнює даному відрізку a.

Задача 1.4. Знайти ГМ вершин трикутників із спільною основою AB та бічною стороною, що дорівнює довжині m даного відрізка.

Твердження 2 (ГМТП №5) *ГМТП, що знаходяться на даній відстані $h > 0$ від даної прямої l, складається з двох паралельних прямих l_1 та l_2, кожна з яких відстоїть (віддалена) від даної прямої l на даній відстані h.*

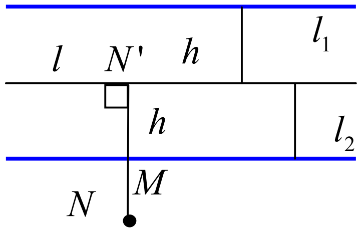


Рис. 6.: до ГМТП №5.

Доведення. Нехай $F = l_1 \bigcup l_2$, де l_1 і l_2 – прямі, що паралельні даній прямій l та які відстоять від неї на даній відстані h (рис. 6).

1) За припущенням $\rho(l,l_1) = \rho(l,l_2) = h$, тому для кожної точки M, що належить прямій l_1 (або l_2), маємо $\rho(F,M) = h$. Отже, кожна точка фігури F належить шуканому ГМТП.

2) Нехай N – довільна (але фіксована) точка шуканого ГМТП. Оскільки $h \neq 0$, то без втрати загальності можна вважати, що точка N належить тій півплощині відносно прямої l, якій належить пряма l_2. Припустимо, що $N \notin F$. Тоді $N \notin l_2$. Опустимо перпендикуляр NN' на пряму l, і нехай пряма NN' перетинає l_2 в точці M. Тоді: з одного боку $NN' = h$ (за припущенням), з іншого боку – $MN' = h$ (за першою частиною доведення). Таким чином на промені $\left[N'N\right)$ відкладено два різні відрізки $\left[N'N\right]$ та $\left[N'M\right]$ однакової довжини h, чого бути не може за аксіомою відкладання відрізків. Прийшли до протиріччя, і тому наше припущенням про те, що $N \notin F$ є неправильним. Отже, кожна точка шуканого ГМТП належить фігурі $F = l_1 \bigcup l_2$.

Наслідок 2.1. (ГМТП №5*) *Геометричним місцем вершин трикутників, що є рівновеликими до даного $\triangle ABC$ та мають з ним спільну основу AC, є дві прямі, що є паралельними до прямої AC та відстоять від неї на відстані, яка дорівнює довжині висоти BB' $\triangle ABC$.*

Зауваження 4. Перед вивченням ГМТП №5 доцільно розглянути та довести наступні твердження

Теорема 1. *Якщо пряма b паралельна до прямої a, то дві довільні точки A' і B' прямої b відстоять на однаковій відстані від прямої a.*

Теорема 2. *Якщо точки A' і B' прямої b відстоять на однаковій відстані від прямої a та належать одній півплощині відносно неї, то пряма b паралельна до прямої a.*

Для засвоєння ГМТП №5 доцільно запропонувати наступні задачі

Задача 2.1. В площині даного кута знайти точку, яка відстоїть на даних відстанях $a > 0$ і $b > 0$ від його сторін. *Якою буде відповідь, якщо в умові задачі сторони кута замінити на прямі, що їх містять?*

Задача 2.2. Знайти ГМТП, віддалених від даної прямої l на відстань, більшу (не меншу) за довжину m даного відрізка.

Задача 2.3. Знайти ГМТП, віддалених від даної прямої l на відстань, меншу (не більшу) за довжину m даного відрізка.

Задача 2.4. Знайти ГМ центрів кіл однакового радіусу, що дотикаються даної прямої.

Задача 2.5. Знайти ГМТП, які відстоять від точок даного відрізка AB на відстані $h > 0$.

Твердження 3 (ГМТП №6) *ГМТП, рівновіддалених від кінців даного відрізка AB, є пряма, що проходить через середину відрізка AB перпендикулярно до нього («серединний перпендикуляр до відрізка AB»).*

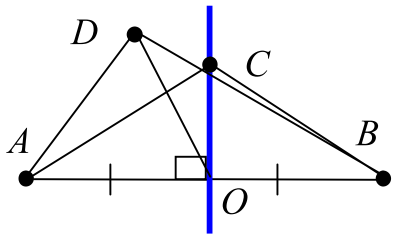


Рис. 7.: до ГМТП №6.

Доведення. Нехай AB – даний відрізок, a – пряма, що проходить через середину O відрізка AB перпендикулярно до нього (рис. 7).

1) Покажемо, що кожна точка $C \in a$ є рівновіддаленою від точок A і B.

Для цього достатньо розглянути прямокутні трикутники AOC і BOC. Вони рівні (наприклад, за II ознакою рівності трикутників). Звідки маємо, що $CA = CB$ для будь-якої точки $C \in a$.

2) Покажемо тепер, що кожна точка D, яка рівновіддалена від точок A і B, належить прямій a. Припустимо обернене, а саме, що $DA = DB$ але $D \notin a$. Тоді $\triangle ADB$ рівнобедрений, а медіана DO є висотою цього трикутника. Таким чином, через точку O прямої AB проходить дві різні прямі a і DO перпендикулярні до неї, чого не може бути за відомою теоремою шкільного курсу геометрії. Отже, прийшли до протиріччя, і тому наше припущення про те, що $D \notin a$ є неправильним. Отже, кожна точка шуканого ГМТП належить прямій a.

Для засвоєння ГМТП №6 доцільно запропонувати наступні задачі

Задача 3.1. Знайдіть ГМ вершин рівнобедрених трикутників, для яких даний відрізок AB є спільною основою.

Задача 3.2. Знайдіть ГМ вершин ромбів, для яких даний відрізок AC є спільною діагоналлю.

Задача 3.3. Знайдіть ГМ центрів кіл (площини), для яких даний відрізок AB (площини) є спільною хордою.

Задача 3.4. Доведіть, що пряма, яка проходить через центри двох кіл, які перетинаються у двох точках, є серединним перпендикуляром до відрізка з кінцями у зазначених точках перетину кіл.

Задача 3.5. Доведіть, що центр кола, описаного навколо трикутника ABC, є точкою перетину серединних перпендикулярів до його сторін.

Задача 3.6. Доведіть, що навколо опуклого многокутника можна описати коло тоді і лише тоді, коли серединні перпендикуляри до його сторін перетинаються в одній точці.

DOI: https://doi.org/...

Твердження 4 (ГМТП №7) *ГМТП, рівновіддалених від двох даних паралельних прямих* l_1 *і* l_2*, є пряма, що паралельна до даних прямих та яка містить одну з таких точок.*

Зауважимо, що для побудови шуканої прямої достатньо побудувати точку M, яка є серединою довільного відрізка з кінцями на даних прямих та через неї провести пряму паралельно до даних (рис. 8).

Наслідок 4.1. *ГМ середин паралельних відрізків з кінцями на даних паралельних прямих* l_1 *і* l_2 *є пряма, що паралельна до даних прямих та яка містить одну з таких точок.*

Наслідок 4.2. Пряма, яка містить середню лінію трапеції, ділить навпіл будь-який відрізок з кінцями на різних її основах.

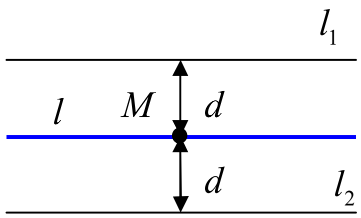


Рис. 8.: до ГМТП №7.

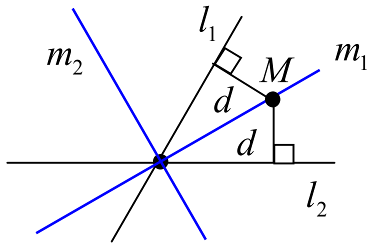


Рис. 9.: до ГМТП №8.

Твердження 5 (ГМТП №8) *ГМТП, рівновіддалених від двох даних прямих* l_1 *і* l_2*, що перетинаються, є дві (взаємно перпендикулярні) прямі, що є бісектрисами кутів, які утворені прямими* l_1 *та* l_2.

Ідея доведення. Розглянемо одну з двох пар вертикальних кутів, які утворюють дані прямі та пряму m_1, що містить бісектрису одного з них (рис. 9). Тоді за властивістю бісектриси довільного кута, кожна її точка M є рівновіддаленою від даних прямих l_1 і l_2. Будь-яка інша точка M', що є рівновіддаленою від прямих l_1 і l_2, або належить прямій m_1 (бісектрисі кута або бісектрисі вертикального до нього кута), або ж прямій m_2, що містить бісектриси суміжних кутів.

Наслідок 5.1. Бісектриса («з виколотим початком») довільного кута є геометричним місцем центрів кіл, які дотикаються до сторін цього кута.

Наслідок 5.2. Бісектриса довільного кута є ГМТП, що рівновіддалені від сторін цього кута.

Для засвоєння ГМТП №8 доцільно запропонувати наступні задачі

Задача 5.1. Знайти точку, рівновіддалену від сторін даного трикутника.

Задача 5.2. Доведіть, що центр кола, вписаного в трикутник, є точкою перетину бісектрис його внутрішніх кутів.

Задача 5.3. Доведіть, що відрізки дотичних, проведених з однієї точки до даного кола, мають однакову довжину.

Задача 5.4. Доведіть, що в опуклий многокутник можна вписати коло тоді і лише тоді, коли бісектриси його внутрішніх кутів перетинаються в одній точці.

Твердження 6 (ГМТП №9) *ГМТП, які внутрішнім чином ділять паралельні відрізки з кінцями на даних прямих l_1 і l_2, що перетинаються, у даному відношенні ($m:n=\lambda>0$), є пряма (з виколотою точкою), що проходить через одну з таких точок та точку перетину даних прямих.*

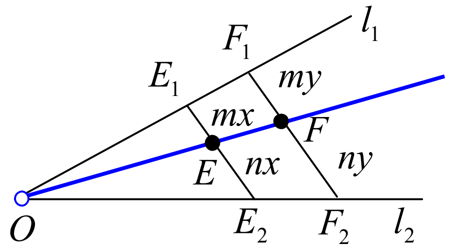


Рис. 10.: до ГМТП №9.

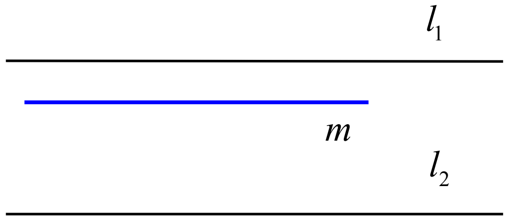


Рис. 11.: до ГМТП №10.

Доведення. Нехай прямі l_1 та l_2 перетинаються у точці O, а E_1E_2 – один з паралельних відрізків з кінцями на сторонах кута (рис. 10). Нехай $E_1 \in l_1$, $E_2 \in l_2$, а E – така точка відрізка E_1E_2, що $E_1E : EE_2 = m:n$.

1) *Покажемо, що довільна точка F прямої (OE) належить шуканому ГМТП*. Проведемо через довільну точку $F \in (OE)$ ($F \neq E$) пряму паралельно до E_1E_2, і нехай вона перетинає пряму l_1 в точці F_1 а пряму l_2 в точці F_2. Доведемо, що має місце рівність $F_1F : FF_2 = m:n$.

З подібності $\triangle OE_1E$ і $\triangle OF_1F$ маємо рівність $OE:OF = E_1E:F_1F$; а з подібності $\triangle OE_2E$ і $\triangle OF_2F$ маємо рівність $OE:OF = EE_2:FF_2$. Оскільки $E_1E:F_1F = EE_2:FF_2$, то $E_1E:EE_2 = F_1F:FF_2 = m:n$.

2) *Покажемо, що довільна точка шуканого ГМТП належить променю* (OE). Нехай D' – така внутрішня точка відрізка D_1D_2 (з кінцями на сторонах даного кута), який є паралельним до відрізка D_1D_2, для якої має місце рівність $\overrightarrow{D_1D'} : \overrightarrow{D'D_2} = m:n$. Нехай далі $(OE) \cap D_1D_2 = D$. Покажемо, що $D' = D$. За 1)-им пунктом доведення $\overrightarrow{D_1D} : \overrightarrow{DD_2} = m:n$. Тому має місце векторна рівність $\frac{\overrightarrow{D_1D'}}{\overrightarrow{D'D_2}} = \frac{\overrightarrow{D_1D}}{\overrightarrow{DD_2}}$ або ж $\frac{\overrightarrow{D_1D_2}}{\overrightarrow{D'D_2}} = \frac{\overrightarrow{D_1D_2}}{\overrightarrow{DD_2}}$. Звідки $\overrightarrow{D'D_2} = \overrightarrow{DD_2}$, або ж $\overrightarrow{D'D} = \vec{0}$. Звідки й випливає, що $D' \equiv D$ і тому належить прямій (OE).

Наслідок 6.1. ГМ середин паралельних відрізків з кінцями на сторонах даного кута є промінь (з виколотим початком), що проходить через вершину цього кута та одну з таких точок.

Твердження 7 (ГМТП №10) *ГМТП, які внутрішнім чином ділять паралельні відрізки з кінцями на даних паралельних прямих l_1 і l_2 у даному відношенні ($m:n=\lambda>0$), є пряма, що проходить через одну з таких точок та паралельна даним прямим.*

Доведення останнього твердження доцільно запропонувати для самостійного опрацювання (рис. 11).

Задача 7.1. Доведіть, що (три точки –) середини основ довільної трапеції та точка перетину прямих, які містять її бічні сторони, належать одній прямій.

Задача 7.2. Доведіть, що основи бісектрис спільного кута усіх трикутників з паралельними протилежними сторонами належать одній прямій.

Твердження 8 (ГМТП №11) *ГМТП, для кожної з яких відношення відстаней до двох даних паралельних прямих (l_1 і l_2) є сталою величиною ($m:n \neq 1$), є сукупність двох прямих m_1 та m_2, кожна з яких проходить через одну з таких точок і паралельна даним прямим.*

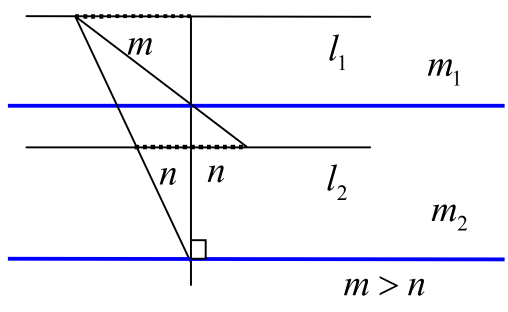


Рис. 12.: до ГМТП №11.

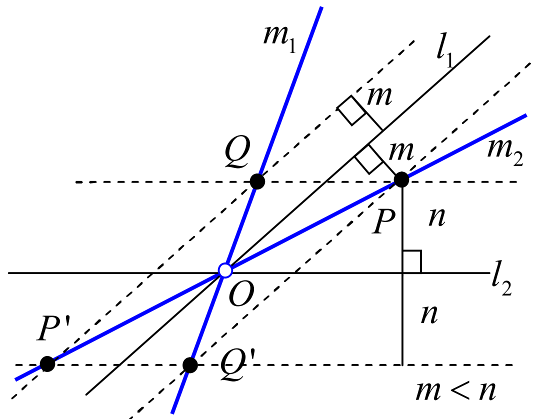


Рис. 13.: до ГМТП №12.

Твердження 9 (ГМТП №12) *ГМТП, для кожної з яких відношення відстаней до двох даних прямих (l_1 і l_2), які перетинаються, є сталою величиною ($m:n = \lambda > 0$), є сукупність двох прямих m_1 та m_2 без їх спільної точки, кожна з яких проходить через одну з таких точок і точку перетину прямих.*

Зауваження 5. *Твердження 9 (ГМТП №12) є узагальненням Твердження 5 (ГМТП №8) коли $m = n$.*

Твердження 10 (ГМТП №13) *ГМТП, з яких даний відрізок AB видно під нерозгорнутим кутом α, є дві дуги (без кінцевих точок), що є симетричними відносно даного відрізка та одна з яких вміщує кут, рівний даному.*

Доведення.

1) Нехай $\overset{\frown}{BMA}$ – дуга кола ω_1, яке вміщує кут $\angle AMB = \alpha$ (рис. 14).

Відомо, що всі кути, які є вписаними у коло ω_1, вершини яких лежать в одній півплощині відносно прямої (AB) та спираються на відрізок AB, рівні між собою. Тому $\angle AKB = \alpha$ для довільної точки K відкритої дуги $\overset{\frown}{BMA}$.

Нехай O_1 – центр кола ω_1, а точка O – середина відрізка AB. Тоді $\angle AO_1B = 2\alpha$ (як центральний кут, що стягує хорду AB). Звідки $\angle O_1AB = 90^\circ - \alpha$. Таким чином, центр O_1 кола ω_1: з одного боку – рівновіддалений від точок A і B; з іншого боку – належить променю AQ кута $\angle QAB = 90^\circ - \alpha$.

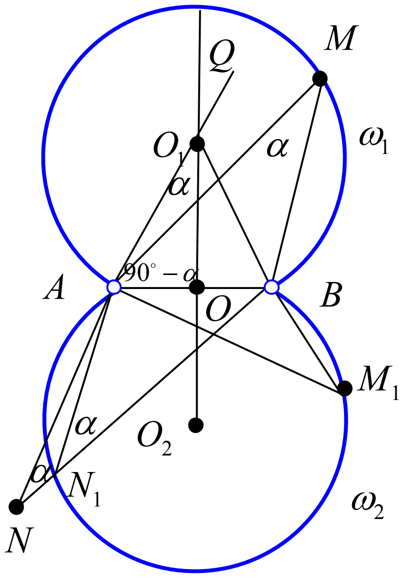


Рис. 14.: до ГМТП №13.

Отже, кожна точка відкритої дуги $\overset{\frown}{BMA}$ (без кінцевих точок A і B) кола $\omega_1 = \omega(O_1, O_1A)$ задовольняє умовам задачі. Проте вказаним умовам задовольняють і всі точки відкритої дуги $\overset{\frown}{AM_1B}$, симетричної дузі $\overset{\frown}{BMA}$ відносно AB. **Таким чином, кожна точка фігури** $F = \overset{\frown}{BMA} \cup \overset{\frown}{AM_1B}$ **(«вісімки») належить шуканому ГМТП.**

2) Покажемо, що довільна (але фіксована) точка N шуканого ГМТП належить фігурі $F = \overset{\frown}{BMA} \cup \overset{\frown}{AM_1B}$**.** Оскільки $0^0 < \alpha < 180^0$, то без втрати загальності можна вважати, що точка N належить тій півплощині відносно прямої (AB), якій належить точка M_1.

Припустимо, що $N \notin \overset{\frown}{AM_1B} \subset \omega_2$. Тоді N належить або внутрішній, або зовнішній частині площини відносно кола ω_2. Нехай, заради визначеності, $O_2N > O_2N_1$, де $N_1 = [BN) \cap \omega_2$. Тоді точки A, N, N_1 не належать одній прямій і тому є вершинами трикутника. За припущенням $\angle ANB = \alpha$, а $\angle AN_1B = \alpha$ за доведеним вище. Тому (за наслідком з властивості зовнішнього кута $\triangle ANN_1$ при вершині N_1) $\angle NAN_1 = 0^0$, чого бути не може, бо ANN_1 є трикутником. Прийшли до протиріччя і тому наше припущення про те що $N \notin \overset{\frown}{AM_1B} \subset \omega_2$ є неправильним. Отже, довільна точка N шуканого ГМТП належить фігурі $F = \overset{\frown}{BMA} \cup \overset{\frown}{AM_1B}$**.**

Зауваження 6. *Якщо $\alpha = 90^\circ$, то точки O_1 і O_2 співпадають з точкою O (серединою відрізка AB). Тому вершинами прямих кутів, що спираються на даний відрізок, є виключно точки кола (крім точок A і B), побудованого на відрізку AB, як на діаметрі.*

Наслідок 10.1. (ГМТП №14) *ГМ вершин прямокутних трикутників із спільною гіпотенузою AB є коло без точок A і B, побудоване на відрізку AB, як на діаметрі.*

Задача 10.1. Знайти ГМ основ перпендикулярів, опущених з даної точки A на прямі, які проходять через другу дану точку B.

З урахуванням результатів задачі №2 [23, С. 33-34], знайдіть наступні ГМТП

Задача 10.2. Знайти ГМ вершин (C) прямокутних трикутників (ABC) зі спільною стороною AB.

Задача 10.3. Знайти ГМ вершин (C) гострокутних трикутників (ABC) зі спільною стороною AB.

Задача 10.4. Знайти ГМ вершин (C) тупокутних трикутників (ABC) зі спільною стороною AB.

Твердження 11 (ГМТП №15) *ГМТП, що є серединами хорд сталої довжини а даного кола $\omega(O,R)$, є коло, концентричне даному та радіус якого дорівнює $R' = \sqrt{R^2 - (a/2)^2}$.*

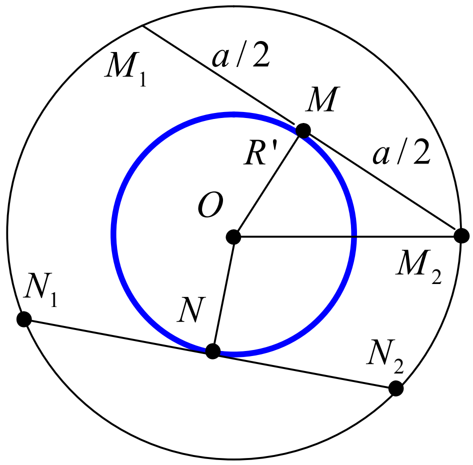


Рис. 15.: до ГМТП №15.

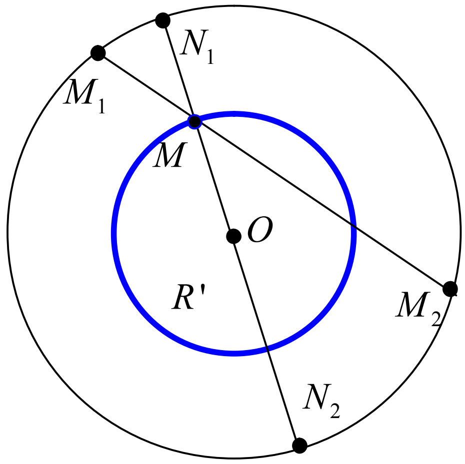


Рис. 16.: до ГМТП №16.

Доведення.

1) Нехай M_1M_2 – довільна хорда довжини a даного кола $\omega(O,R)$. З точки O опустимо перпендикуляр OM на M_1M_2. Тоді M – середина хорди M_1M_2 і тому належить шуканому ГМТП.

З прямокутного трикутника OMM_2 за теоремою Піфагора маємо, що $OM^2 = OM_2^2 - MM_2^2 = R^2 - (a/2)^2 = const$. Звідки OM – стала величина.

Отже, довільна точка шуканого ГМТП відстоїть від даної точки O на сталій відстані $R' = \sqrt{R^2 - (a/2)^2}$ і тому належить колу $\omega(O,R')$.

2) *Покажемо, що довільна (але фіксована) точка N кола $\omega(O,R')$ належить шуканому ГМТП.*

Для цього достатньо показати, що існує хорда кола $\omega(O,R)$ довжини a, для якої точка N є серединою. Проведемо через точку N дотичну до кола $\omega(O,R')$ і нехай вона перетинає коло $\omega(O,R)$ у точках N_1 та N_2. Оскільки $\triangle ONN_2$ є прямокутним, то за теоремою Піфагора маємо, що $NN_2=\sqrt{R^2-R'^2}=a/2$. Оскільки $\triangle ONN_1=\triangle ONN_2$ (за гіпотенузою та спільним катетом), то $N_1N=NN_2$. Звідки $N_1N_2=a$.

Таким чином, кожна точка кола $\omega(O,R')$ належить шуканому ГМТП.

Твердження 12 (ГМТП №16 – узагальнення ГМТП №15) *ГМТП, що ділять у певному відношенні $m:n=\lambda>0$ хорди сталої довжини a даного кола $\omega(O,R)$, є коло концентричне даному та радіус якого дорівнює віддалі від центра даного кола до однієї з таких точок.*

Доведення. Нехай M_1M_2 – хорда довжини a даного кола $\omega(O,R)$, а точка M ділить (направлений відрізок) M_1M_2 у відношенні $m:n$ (рис. 16). Тоді очевидно, що $M_1M=\dfrac{m}{m+n}a$, а $MM_2=\dfrac{n}{m+n}a$.

Через точку M проведемо діаметр N_1N_2. Тоді маємо рівність $N_2M\cdot MN_1=M_1M\cdot MM_2$. Звідки

$$(R+OM)(R-OM)=\frac{m}{m+n}a\cdot\frac{n}{m+n}a\text{, або ж } R^2-OM^2=mn\cdot\left(\frac{a}{m+n}\right)^2.$$

Тому $OM=\sqrt{R^2-mn\cdot\left(\dfrac{a}{m+n}\right)^2}=R'$ – стала величина.

Отже, довільна точка шуканого ГМТП відстоїть від даної точки O на сталій відстані R' і тому належить колу $\omega(O,R')$.

Доведення 2)-ої частини пропонуємо провести самостійно.

Твердження 13 (ГМТП №17) *ГМ середин хорд даного кола $\omega(O,R)$, які проходять через дану внутрішню його точку M, є коло, для якого центр O даного кола та дана точка M є діаметрально протилежними.*

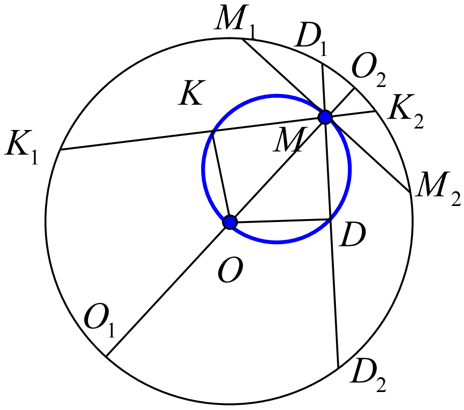


Рис. 17.: до ГМТП №17.

DOI: https://doi.org/...

Доведення.

Очевидно, що точка O належить шуканому ГМТП (як середина хорди, що є діаметром). Проведемо через точку M хорду M_1M_2 перпендикулярно до діаметра O_1O_2, який містить точку M. Тоді M також належить шуканому ГМТП, бо $M_1M = MM_2$. Побудуємо коло ω_0 на відрізку OM, як на діаметрі.

1) *Покажемо, що довільна точка шуканого ГМТП належить колу* ω_0.

Нехай точка D є серединою хорди D_1D_2 даного кола, яка проходить через дану точку M. Оскільки $D_1D = DD_2$, то $OD \perp DM$. І тому $\angle ODM = 90^\circ$. Отже, $D \in \omega_0$.

2) *Покажемо, що кожна точка кола* ω_0 *є серединою певної хорди даного кола, яка проходить через дану точку* M.

Нехай K – точка кола ω_0. Проведемо пряму MK і нехай вона перетинає дане коло $\omega(O,R)$ у точках K_1 і K_2. Оскільки $\angle OKM = 90^0$, то $K_1K = KK_2$. Тому довільна точка кола ω_0 належить шуканому ГМТП.

Задача 13.1. Дано коло $\omega(O,R)$ і така точка M, що $OM = R$. Знайти ГМ середин хорд даного кола, які проходять через точку M.

Задача 13.2. Дано коло $\omega(O,R)$ і така точка M, що $OM > R$. Знайти ГМ середин хорд даного кола, продовження яких проходять через точку M.

Задача 13.3. Дано коло $\omega(O,R)$ та його діаметр AB. На кожному з радіусів кола ω відкладають від центра O відрізок, довжина якого дорівнює відстані від кінця радіуса до діаметра AB. Знайдіть ГМ кінців побудованих у такий спосіб відрізків (зі спільним кінцем O).

Твердження 13 (ГМТП №18) *ГМТП, відстані* (ρ_1 *і* ρ_2) *яких до двох даних точок* (A *і* B *відповідно*) *перебувають у даному відношенні* ($\rho_1 : \rho_2 = m : n$) *є* ***коло («Аполлонія») з певним центром та певного радіусу.***

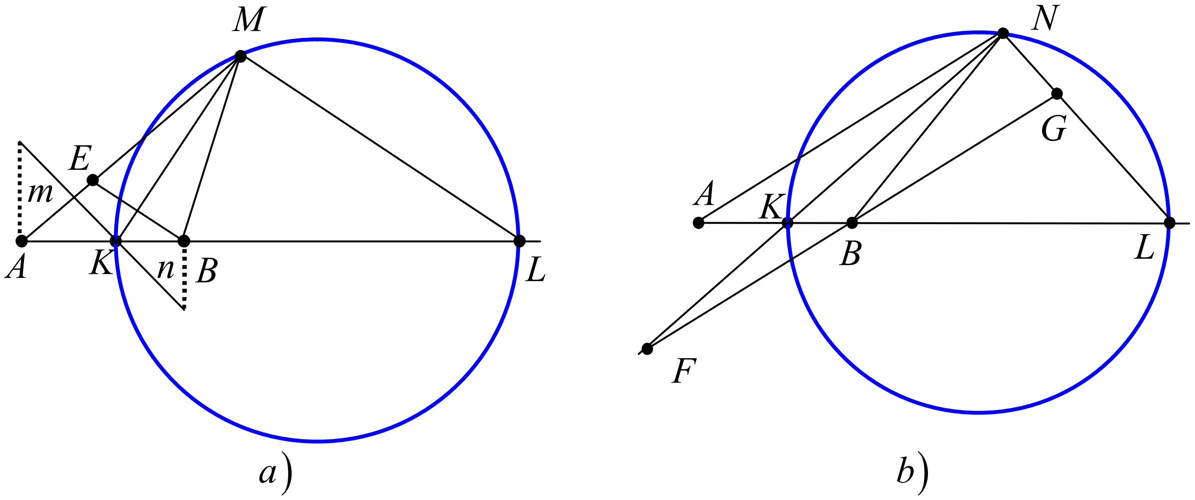


Рис. 18.: до ГМТП №18.

Доведення.

1) Нехай M – довільна (але фіксована) точка шуканого ГМТП (рис. 18). Тоді має місце рівність $MA : MB = m : n$. Заради визначеності будемо вважати, що $m > n$. Побудуємо далі точку K, яка ділить (направлений) відрізок AB внутрішнім чином у відношенні $m : n$. Зауважимо, що для фіксованого відрізка AB і сталих m, n точка K визначається однозначно.

Розглянемо $\triangle AMB$. В ньому $AK : KB = MA : MB$. Звідки випливає, що MK – бісектриса $\angle AMB$. *Покажемо справедливість останньої тези.*

Нехай K' – основа бісектриси $\angle AMB$ трикутника AMB. Тоді за властивістю бісектриси кута трикутника маємо рівність $AK' : K'B = MA : MB$. Оскільки $AK : KB = MA : MB$, то $AK' : K'B = AK : KB$. Звідки $AB : K'B = AB : KB$, або ж $BK' = BK$. Оскільки K і K' належать одному променю $[BA)$, то за аксіомою відкладання відрізків точки K і K' співпадають. Тому MK бісектриса $\angle AMB$.

Далі через точку M проведемо пряму перпендикулярну до MK. І нехай вона перетинає пряму (AB) у точці L.

Проведемо через точку B пряму паралельну до (ML). І нехай вона перетинає пряму (AM) у точці E. За властивістю паралельних $BE \perp MK$, за побудовою – MK є бісектрисою $\angle AMB$. Тому $ME = MB$.

За теор. Фалеса має місце рівність $\frac{LA}{LB} = \frac{MA}{ME}$. Звідки $\frac{LA}{LB} = \frac{MA}{MB} = \frac{m}{n}$. Отже, точка L ділить відрізок AB зовнішнім чином у відношенні $m : n$. А тому визначається однозначно.

Оскільки для довільної точки M шуканого ГМТП $\angle KML = 90^0$, то точка M належить колу ω_{18}, побудованому на відрізку KL, як на діаметрі.

Отже, кожна точка шуканого ГМТП належить колу ω_{18}, діаметр якого визначається точками K і L, що ділять даний відрізок AB внутрішнім та зовнішнім чином у даному відношенні $m : n$.

2) *Тепер покажемо, що довільна точка N кола ω_{18} належить шуканому ГМТП.* Для цього досить показати справедливість рівності $NA : NB = m : n$. Проведемо через точку B пряму паралельно до прямої (NA). І нехай вона перетинає пряму (NK) у точці F, а пряму (NL) – у точці G.

З подібності трикутників AKN і BKF маємо рівність

$$NA : BF = AK : KB = m : n. \qquad (13.1)$$

З подібності трикутників ANL і BGL маємо рівність

$$AN : BG = LA : LB = m : n. \qquad (13.2)$$

З (13.1) і (13.2) випливає, що $FB = BG$. Оскільки трикутник FNG є прямокутним, то $NB = FB = BG$. Тому з рівності (13.1) маємо, що $NA : NB = m : n$.

Отже, кожна точка кола ω_{18} належить шуканому ГМТП.

Твердження 14 (ГМТП №19) *ГМТП, сума квадратів відстаней яких до двох даних точок (A і B) є величина стала (a^2, де a – довжина даного відрізка), є коло з певним центром та певного радіуса.*

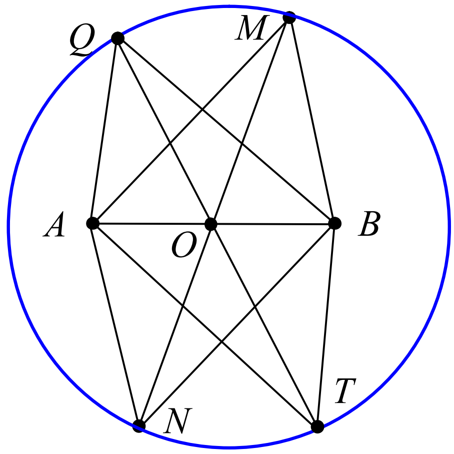


Рис. 19.: до ГМТП №19.

Доведення.

1) Нехай M – довільна (але фіксована) точка шуканого ГМТП (рис. 19). Тоді має місце рівність $MA^2 + MB^2 = a^2$. Нехай далі O – середина відрізка AB, а N є такою точкою площини, що O – середина відрізка MN. Тоді за ознакою чотирикутник $AMBN$ є паралелограмом. Тому за властивістю паралелограма має місце рівність $AM^2 + MB^2 + BN^2 + NA^2 = AB^2 + MN^2$ або ж

$$2a^2 = AB^2 + MN^2.$$

Звідки, позначивши довжину заданого відрізка AB через b, маємо рівність $MN = \sqrt{2a^2 - b^2}$. Оскільки O є серединою MN, то $OM = \dfrac{\sqrt{2a^2 - b^2}}{2} = R'$ – стала величина.

Таким чином довільна точка M шуканого ГМТП належить колу $\omega_{19} = \omega(O, R')$.

2) *Нехай Q – довільна точка кола $\omega_{19} = \omega(O, R')$. Покажемо, що справджується рівність $QA^2 + QB^2 = a^2$.*

Нехай пряма QO вдруге перетинає коло $\omega_{19} = \omega(O, R')$ у точці T. Оскільки $AO = OB$ (за припущенням), $QO = OT$ (як радіуси кола ω_{19}), то за ознакою чотирикутник $AQBT$ є паралелограмом. А тому справджується рівність $AQ^2 + QB^2 + BT^2 + TA^2 = AB^2 + QT^2$ або ж

$2\left(AQ^2 + QB^2\right) = AB^2 + \left(2 \cdot QO\right)^2$. Звідки

$$2\left(AQ^2 + QB^2\right) = b^2 + \left(\sqrt{2a^2 - b^2}\right)^2 = b^2 + 2a^2 - b^2 = 2a^2.$$

Отже, $QA^2 + QB^2 = a^2$ і тому довільна точка кола ω_{19} належить шуканому ГМТП.

Твердження 15 (ГМТП №20) *ГМТП, різниця квадратів відстаней яких до двох даних точок* (A і B) *є величина стала* (a^2*, де* a *– довжина даного відрізка*)*, є пряма* (l_{20})*, що перпендикулярна заданій прямій* (AB) *і перетинає його у певній точці* (X *, яка визначається рівністю* $XA^2 - XB^2 = a^2$).

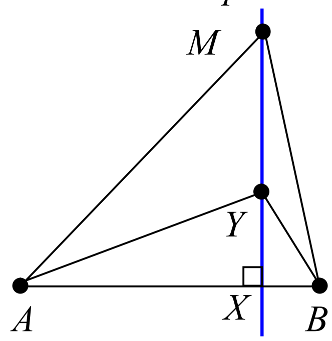


Рис. 20.: до ГМТП №20.

Доведення.

1) Нехай M – довільна (але фіксована) точка шуканого ГМТП (рис. 20). Тоді, без втрати загальності, можна вважати, що саме $MA^2 - MB^2 = a^2$, звідки $MA > MB$. Опустимо з точки M перпендикуляр MX на пряму AB. Тоді з прямокутного $\triangle AXM$ за теоремою Піфагора маємо рівність

$$MA^2 = XA^2 + XM^2. \tag{15.1}$$

З прямокутного $\triangle BXM$ за теоремою Піфагора маємо рівність

$$MB^2 = XB^2 + XM^2. \tag{15.2}$$

З (15.1) і (15.2) маємо, що $$XA^2 - XB^2 = a^2. \tag{15.3}$$

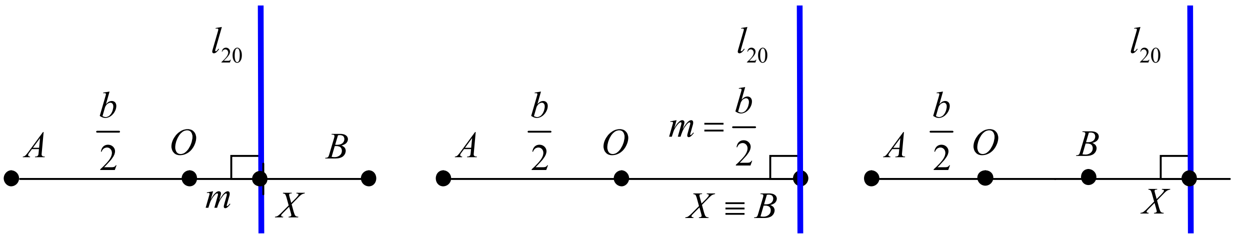
Повторюючи аналогічні міркування не важко показати, що для довільної точки Y прямої MX (яку можна розглядати як пряму l_{20}, що проходить через точку X перпендикулярно до прямої AB), справджується рівність $YA^2 - YB^2 = a^2$, *звідки й випливає, що довільна точка прямої* l_{20} *належить шуканому ГМТП.*

2) За **базовою задачею №3** на прямій AB існує єдина точка X, що задовольняє умову (15.3). Звідки маємо, що для даних точок A і B та даного відрізка довжини a точка X є фіксованою точкою прямої AB. І тому, з урахуванням 1)-ої частини доведення, основа перпендикуляра, опущеного з довільної точки шуканого ГМТП, співпадає із точкою X прямої AB. Тобто, довільна точка шуканого ГМТП (ортогонально) проектується саме у точку X прямої AB. *Звідки й випливає (це не важко показати, наприклад, методом від супротивного), що довільна точка шуканого ГМТП належить прямій* l_{20}.

Зауваження 7. Для побудови прямої l_{20} (та зазначеної точки X на прямій AB), достатньо побудувати (на допоміжному рисунку) довільний прямокутний $\triangle MNP$, у якого $\angle N = 90^0$, $NP = a$. Тоді матиме місце рівність $NP^2 = MP^2 - MN^2 = a^2$. Далі з центрів A і B опишемо дуги радіусами MP та MN (відповідно) до перетину їх у точці K. Точка K належить шуканій прямій l_{20} ($l_{20} \perp AB$), а $X = l_{20} \cap AB$.

Зауваження 8. (*Альтернативний спосіб розв'язання базової задачі 3 та побудови точки X прямої AB, яка задовольняє умову $XA^2 - XB^2 = a^2 > 0$*).

Отже, нехай X – така точка на прямій AB, яка задовольняє умову $XA^2 - XB^2 = a^2$ ($a > 0$). Оскільки $XA^2 - XB^2 > 0$, то $AX > XB$. Це означає, що точка X належить променю OB, де O – середина відрізка AB. Нехай b – довжина відрізка AB. Тоді $AX = \frac{b}{2} + m$, де $m > 0$. Крім того, можливими є лише наступні три суттєво різні випадки: 1) $0 < m < \frac{b}{2}$; 2) $m = \frac{b}{2}$; 3) $m > \frac{b}{2}$.



$a)$ $0 < m < \frac{b}{2} \Leftrightarrow a < b$ $\quad$ $b)$ $m = \frac{b}{2} \Leftrightarrow a = b$ $\quad$ $c)$ $m > \frac{b}{2} \Leftrightarrow a > b$

Рис. 21.: до ГМТП №20.

Розглянемо кожен з них окремо.

1) Якщо $0 < m < \frac{b}{2}$, то $XB = \frac{b}{2} - m$, $a^2 = AX^2 - XB^2 = \left(\frac{b}{2} + m\right)^2 - \left(\frac{b}{2} - m\right)^2 = $ $= 2bm$, звідки $m = \frac{a^2}{2b}$, $AX = \frac{b}{2} + \frac{a^2}{2b} = \frac{a^2+b^2}{2b} = const$;
   крім того, оскільки $0 < m < \frac{b}{2}$, то $\frac{a^2}{2b} < \frac{b}{2}$, звідки $a < b$.

2) Якщо $m = \frac{b}{2}$, то $AX = b$, $X \equiv B \Rightarrow XB = 0$, $a^2 = b^2 - 0^2$, звідки $a = b$.

3) Якщо $m > \frac{b}{2}$, то $XB = m - \frac{b}{2}$, $a^2 = AX^2 - XB^2 = \left(\frac{b}{2} + m\right)^2 - \left(m - \frac{b}{2}\right)^2 = $ $= 2bm$, звідки $m = \frac{a^2}{2b}$, $AX = \frac{b}{2} + \frac{a^2}{2b} = \frac{a^2+b^2}{2b} = const$;
   крім того, оскільки $m > \frac{b}{2}$, то $\frac{a^2}{2b} > \frac{b}{2}$, звідки $a > b$.

Ну і навпаки, методом від супротивного не важко переконатися в тому, що для точки X прямої AB, яка задовольняє умову $XA^2 - XB^2 = a^2 > 0$, мають місце й обернені твердження, а саме:

1*) якщо $a < b$, то $0 < m < \frac{b}{2}$, звідки точка X є внутрішньою точкою відрізка OB;

2*) якщо $a = b$, то $m = \frac{b}{2}$, звідки точка X співпадає із точкою B;

3*) якщо $a > b$, то $m > \frac{b}{2}$, звідки точка X належить продовженню відрізка AB за точку B.

Крім того, за аксіомою відкладання відрізків положення точки X на промені AB визначається однозначно, бо $AX = \frac{a^2+b^2}{2b} = const$.

З останнього й випливає, що на прямій AB існує єдина точка X, яка задовольняє умову $XA^2 - XB^2 = a^2 > 0$. Більше того, наведено спосіб побудови зазначеної точки X за допомогою побудови відрізка AX, як «четвертого пропорційного», бо $AX = \frac{a^2+b^2}{2b} = \frac{c^2}{m}$, де c – гіпотенуза прямокутного трикутника з катетами a і b, $n = 2b$.

2.2. Наслідки та прикінцеві зауваження

З альтернативними способами доведення наведених вище тверджень можна ознайомитися, наприклад, в [1–3, 5–7, 22, 26, 29].

Слід також відзначити, що, запропоновані у статті способи доведення тверджень, авторами свідомо проведено без використання методу координат, проте максимально спираючись на твердження саме шкільного курсу геометрії, що принципово дозволяє «рівномірно» знайомити учнів з ГМТП у 7-9 класах. Метод координат доцільно пропонувати в якості одного з альтернативних способів для «передоведення» тверджень або ж під час висунення гіпотез та при вивченні теми «Декартові координати на площині».

На підставі аналізу наявного у діючих підручниках теоретичного матеріалу та дидактичного забезпечення, автори вважають, що є всі ознаки присутності (хоча, і неявно) **в шкільному курсі геометрії наскрізної лінії «Геометричні місця точок»**. Одним із підтверджень останньої тези є те, що при вивчені теми «Декартові координати на площині» поняття ГМТ є основним, бо фігура (ГМТ) може бути задана або характеристичною властивістю, або рівнянням. А сам метод координат і полягає у вивченні властивостей фігур (ГМТ) за їх рівняннями. Крім того, більшість із пропонованих у підручниках задач на відшукання ГМТП досить просто зводяться до одного з наступних **основних ГМТП**, а саме:

* ГМТП, рівновіддалених від даної точки («коло»);
* ГМТП, рівновіддалених від даної прямої («пара паралельних прямих»);
* ГМТП, рівновіддалених від двох даних точок («пряма – серединний перпендикуляр до відрізка з кінцями у даних точках»);
* ГМТП, кожна з яких лежить усередині даного кута і рівновіддалена від його сторін («бісектриса кута»);
* ГМТП, рівновіддалених від двох даних прямих, що перетинаються («пара перпендикулярних прямих»);
* ГМТП, рівновіддалених від двох даних паралельних прямих («рівновіддалена пряма»);
* ГМТП, з яких даний відрізок видно: під прямим кутом («коло, побудоване на даному відрізку як на діаметрі»); під даним гострим / тупим кутом («дві дуги, що мають своїми кінцями кінці даного відрізка та одна з яких вміщує даний кут»).

«Загальноприйняті» **основні ГМТП** доцільно доповнити й «більш складними» геометричними місцями точок, такими як:

* ГМТП, відношення відстаней яких до двох даних точок є величина стала («коло Аполлонія»).
* ГМТП, сума квадратів відстаней яких до двох даних точок є величина стала («коло з центром у середині заданого відрізка»).
* ГМТП, різниця квадратів відстаней яких до двох даних точок є величина стала («пряма лінія»).

У діючих підручниках з геометрії, крім основних, пропонуються й інші ГМТП, які, зазвичай, подано у вигляді задач з числовими даними.

Маємо своїм обов'язком також відзначити, що ціла низка важливих, не менш цікавих ГМТП (які знаходять широкі застосування в геометрії кіл), пов'язана з такими поняттями як: *степінь точки відносно кола; радикальна вісь двох кіл; діаметральна вісь двох кіл* (див., напр., [1, 2, 5, 18, 22, 29, 30]).

Нижче розглянемо приклади на доведення властивостей геометричних фігур за допомогою наведених вище ГМТП.

Приклад 1. *Нехай MT_1 та MT_2 – відрізки дотичних, проведених з точки M до кола $\omega(O;r)$. Доведіть, що: MO – бісектриса кута T_1MT_2; $MT_1 = MT_2$.*

Доведення. За властивістю дотичної до кола $\angle MT_1O = \angle MT_2O = 90^0$, тому точка O, яка лежить усередині $\angle T_1MT_2$, є рівновіддаленою від його сторін (бо $OT_1 = OT_2 = r$). А тому (за наслідком 5.2) належить відповідному ГМТП, яке є бісектрисою $\angle T_1MT_2$. Оскільки MO – бісектриса $\angle T_1MT_2$, то $\triangle MT_1O = \triangle MT_2O$ (за катетом та протилежним кутом), звідки $MT_1 = MT_2$.

Приклад 2. *Доведіть, що для довільної трапеції $ABCD$ ($BC \parallel AD$) середини основ та точка перетину продовжень бічних сторін належать одній прямій.*

Доведення. За визначенням трапеції її бічні сторони не є паралельними, і тому їх продовження перетинаються в одній точці S. Точки M і N можна розглядати як точки, що (внутрішнім чином) ділять в однаковому відношенні (1:1) паралельні відрізки BC та AD з кінцями на прямих SA та SD. Звідки й випливає (за ГМТП9), що точки M і N належать одній прямій, яка проходить через точку перетину прямих SA та SD – точку S.

Приклад 3. *Доведіть, що пряма, яка містить середини M і N протилежних сторін (AB і CD відповідно) паралелограма $ABCD$ ділить навпіл довільний відрізок EF з кінцями на сторонах BC та AD (відповідно).*

Доведення. Проведемо через точку M спільний перпендикуляр M_1M_2 до паралельних прямих AD та BC. Тоді з рівності прямокутних трикутників MM_1A та MM_2B (за гіпотенузою та гострим кутом) матимемо, що точка M є рівновіддаленою від паралельних прямих BC та AD. Аналогічне має місце і для точки N. Тому за ГМТП 7, пряма MN є ГМТП, що рівновіддалені від прямих BC та AD. А тому і точка $Q = MN \cap EF$ є рівновіддаленою від прямих BC та AD. Проведемо через точку Q спільний перпендикуляр Q_1Q_2 до паралельних прямих AD та BC. Тоді з рівності прямокутних трикутників QQ_2E та QQ_1F (за катетом та гострим кутом) матимемо, що $BQ = QF$.

З урахуванням наведених прикладів, автори переконані, що при наданні «основним ГМТ» та «базовим задачам на ГМТ» в шкільному курсі геометрії статусу теорем, з'явиться принципова можливість говорити про метод ГМТ, як самодостатній метод розв'язування геометричних задач без традиційної «прив'язки» методу ГМТ виключно до задач на побудову.

Висновки

Таким чином, в представленій статті наведено один з можливих підходів до вивчення здобувачами вищої освіти, майбутніми вчителями математики, найбільш поширених геометричних місць точок площини. З дотриманням належного рівня математичної строгості авторами наведено доведення (спираючись виключно на твердження шкільного курсу геометрії) 19 тверджень про найбільш важливі ГМТ площини та запропоновано більше 30 задач на їх застосування.

Автори переконані, що зміст запропонованого матеріалу, має бути обов’язковим змістовим модулем відповідної обов’язкової компоненти усіх освітньо-професійних програм підготовки здобувачів вищої освіти за предметною спеціальністю 014.04 Середня освіта (Математика). Крім того, автори щиро сподіваються, що існуючий стан справ можна виправити за рахунок використання запропонованого матеріалу під час курсів підвищення кваліфікації вчителів математики.

Наступним очевидним кроком у даному напрямку є проведення аналогічних досліджень щодо систематизації геометричних місць точок простору та їх вивчення у шкільному курсі геометрії, зокрема як пропедевтики вивчення поверхонь в курсі аналітичної геометрії.

З урахуванням наведених у заключній частині статті прикладів, не менш цікавим здаються дослідження щодо застосування методу ГМТ для розв’язування не задач на побудову, а як самостійного методу доведення геометричних тверджень.

Література

1. Аргунов Б.И. Геометрические построения на плоскости: [Пособие для студентов педагогических институтов] / Б.И. Аргунов, М.Б. Балк. [2-е изд.]. М.: Учпедгиз, **1957**. 264 с.
2. Астряб О.М., Смогоржевський О.С. та інші Методика розв'язування задач на побудову. К. : «Радянська школа», **1960**. 387 с.
3. Балан В.Г. Геометричні задачі на побудову на вступних іспитах / В.Г. Балан, В.І. Лавренюк, Л.І. Шарова. К. : Альфа, **2005**. 86 с.
4. Бондар Д.С., Кадубовський О.А. Про дві «очевидні» задачі шкільного курсу геометрії та суміжні питання. ІІІ Всеукраїнська науково-методична інтернет-конференція студентів, аспірантів та молодих вчених «Розвиток інтелектуальних умінь і творчих здібностей учнів та студентів у процесі навчання дисциплін природничо-математичного циклу «ІТМ*плюс-2022». Форум молодих дослідників». 18 листопада 2022 р. Суми : СумДПУ імені А.С. Макаренка, **2022**. С. 13 – 14. 152 с.
5. Боровик В.Н. Геометричні перетворення площини. Навч. посіб. для студ. фіз.-мат. фак. вищ. пед. навч. закл. // В.Н. Боровик, І.В. Зайченко, М.М. Мурач, В.П. Яковець. Книга для студентів ВНЗ. Університетська книга, **2003**. 706 с.

6. Бурда М. І. Розв’язування задач на побудову в 6 – 8 класах: Метод. пос. К. : Рад. шк., **1986**. 112 с.
7. Возняк О. Геометричні місця точок на площині : навч. посібн. / О.Г. Возняк, Г.М. Возняк. Тернопіль : Підручники і посібн., **2021**. 80 с.
8. Геометрія : підруч. для 7-го кл. загальноосвіт. навч. закл. / М.І. Бурда, Н.А. Тарасенкова. – К. : Видавничий дім «Освіта», **2015**. – 208 с.
9. Геометрія : підруч. для 8 кл. закладів заг. серед. освіти / М.І. Бурда, Н.А. Тарасенкова. – К. : УОВЦ «Оріон», **2021**. – 224 с.
10. Геометрія : підруч. для 9 кл. загальноосвіт. навч. закл. / М.І. Бурда, Н.А. Тарасенкова. – К. : УОВЦ «Оріон», **2017**. – 224 с.
11. Геометрія : Підруч. для 7-го кл. загальноосвіт. навч. закл. / Г.П. Бевз, В.Г. Бевз, Н.Г. Владімірова. – К. : Вид.-во «Відродження», **2015**. - 192 с.
12. Геометрія : підруч. для 9 кл. загальноосвіт. навч. закл. / Г. П. Бевз, В. Г. Бевз, Н. Г. Владімірова. – К. : Видавничий дім «Освіта», **2017**. – 272 с.
13. Геометрія : підруч. для 7-го кл. загальноосвіт. навч. закл. / О.С. Істер. – Київ : Генеза, **2015**. – 184 с.
14. Геометрія : підруч. для 8 кл. закладів заг. серед. освіти / О.С. Істер. 2-ге видання, переробл. К. : Генеза, **2021**. 240 с.
15. Геометрія : підруч. для 7 кл. закладів заг. серед. освіти / А. Г. Мерзляк, В. Б. Полонський, М. С. Якір. 2-ге вид., перер. Х. : Гімназія, **2020**. 240 с.
16. Геометрія : підруч. для 8 кл. закладів заг. серед. освіти / А.Г. Мерзляк, В.Б. Полонський, М.С. Якір. 2-ге вид., перер. Х. : Гімназія, **2021**. 208 с.
17. Геометрія для загальноосвітніх навчальних закладів з поглибленим вивченням математики : підруч. для 9 кл. загальноосвіт. навч. закладів / А.Г. Мерзляк, В.Б. Полонський, М.С. Якір. Х. : Гімназія, **2017**. 304 с.
18. Кадубовський О.А., Бунакова А.С. Про деякі застосування кіл нульового радіусу. Збірник наукових праць фізико-математичного факультету СДПУ. **2011**. № 1. С. 150–161.
19. Ленчук І.Г. До методики відшукання геометричних місць точок. Математика в рідній школі. **2015** (1-2): 10-5.
20. Ленчук І.Г. Метод геометричних місць точок: типізація задач. Науково-методичний журнал «Математика в рідній школі». **2016** (2): 26-31.
21. Лоповок Л.М. Сборник стереометрических задач на построение. – М.: Учпедгиз, 1950. – 72 с.
22. Моторный Л.Т. Методические указания к решению задач на построение. Славянск: СГПИ, **1989**. 44 с.
23. ОЛІМПІАДНІ ЗАДАЧІ: розв'язання задач ІІ етапу Всеукраїнської олімпіади з математики – 2011 / Б.Б. Беседін, О.А. Кадубовський, В.М. Кадубовська, В.С. Сьомкін, Н.І. Труш, О.В. Чуйко, М.М. Рубан // Випуск 10, СЕРІЯ: Викладачі СДПУ – учням, студентам, вчителям: Навчальний посібник. Слов'янськ, **2012**. 84 с
24. ОЛІМПІАДНІ ЗАДАЧІ: розв’язання задач ІІ етапу Всеукраїнської олімпіади з математики – 2018 / О.А. Кадубовський, Б.Б. Беседін,

В.С. Сьомкін. Слов'янськ : видавничий центр «Маторін», **2019**. 100 с. (Викладачі ДДПУ – учням, студентам, вчителям, вип. 21).
25. ОЛІМПІАДНІ ЗАДАЧІ: розв'язання задач ІІ етапу Всеукраїнської учнівської олімпіади з математики – 2020 : навчальний посібник / О.А. Кадубовський, Б.Б. Беседін. Слов'янськ : вид. центр «Маторін», **2021**. 94 с. (Викладачі ДДПУ – учням, студентам, вчителям, вип. 27).
26. Перепелкин Д.И. Геометрические построения в средней школе. Москва-Ленинград: Издательсво АПН РСФСР, **1947**. 84 с.
27 Погорєлов О.В. Геометрія: Планіметрія. 7-9 клас. Підручник. 7-ме вид. К.: Школяр, **2004**. 240 с.
28. Семенець С.П. Геометричні місця точок площини: постановка та розв'язування навчальних задач. Математика в школі. **2008**. № 9. С. 28-31.
29. Стражевский А.А. Задачи на геометрические места точек в курсе геометрии средней школы. М. : Учпедгиз, **1954**. 160 с.
30. Федорченко А.О., Кадубовський О.А. Про маловідому властивість радикальної осі та центри кіл, що дотикаються двох даних кіл. XV Всеукраїнська студентська наукова конференція «Перспективи розвитку точних наук, економіки та методики їх викладання». 4 – 5 грудня 2019 р., Ніжин, Україна : Тези доповідей. – Ніжин : Навчально-науковий інститут точних наук і економіки Ніжинського державного університету імені Миколи Гоголя, **2019**. С. 86-89. 123 с.

An. O. Fedorchenko, H. O. Ryzhkova, Oleksandr A. Kadubovs'kyi
Donbas State Pedagogical University, Sloviansk, Ukraine;

Geometric locus of points, equidistance

The article is dedicated to methodological and didactic aspects of studying the simplest geometric loci of points and the Method of Geometric Transformations for finding new geometric loci and solving geometric problems in the school course of geometry. Examples of possible application of the mentioned method for proving statements on establishing properties of geometric figures are provided. Additionally, the article presents an author's approach to studying the Geometric Locus of a Plane within the framework of the relevant content module of a certain educational component of educational programs for preparing higher education candidates in the subject specialization 014.04 Secondary Education (Mathematics) of the knowledge field 01 Education / Pedagogy.

Keywords: *geometric locus of points, equidistance, Method of Geometric Transformations, application of the Method of Geometric Transformations, school course of geometry, teaching, teachers' training.*

Методика навчання фізики та астрономії в закладах загальної середньої та вищої освіти

УДК 372.853

Лимарєва Ю.М., Турка В.М., Боцанюк І.А.
[1.] *кандидат педагогічних наук, доцент кафедри фізики, ДВНЗ «ДДПУ»*
e-mail: ulialymareva23@gmail.com, ORCID 0000-0002-5828-0231
[2.] *вчитель фізики вищої категорії, Слов'янський енергобудівний фаховий коледж*
e-mail: turkavn@gmail.com, ORCID 0000-0001-5833-1097
[3.] *здобувач магістерського РВО фізико-математичного факультету, ДВНЗ «ДДПУ»*
e-mail: Vanabocanuk@gmail.com, ORCID 0009-0001-5293-7386

АЛГОРИТМИ У СУЧАСНІЙ ФІЗИКО-МАТЕМАТИЧНІЙ ОСВІТІ

У статті розглянуто проблему доцільності використання алгоритмів у навчальному процесі з фізики у закладах загальної середньої освіти. Висвітлено загальну цілісність організації освітнього процесу на алгоритмічній основі та очевидність її супровідної діяльності впродовж навчання. Увагу акцентовано на їх дидактичній вазі з метою спрощення навчальної діяльності, економії часу та цілісного розуміння процесу набуття знань особистістю.

Ключові слова: *алгоритм, навчальний процес, послідовність, логічність, усвідомлення.*

Вступ

Поняття «алгоритму» в аспекті його дидактичного значення сьогодні визначається фахівцями фізико-математичної освіти досить протирічно. Між педагогами останнім часом різко постає суперечка щодо доцільності використання алгоритмів у навчальному процесі. Одні з них визначають алгоритмізацію як базу навчання, але натомість на думку інших вона виглядає як приведення навчання до шаблону і повністю віддаляється від творчості та особистості з її індивідуальними особливостями та здатністю винайдення та використання різних підходів та способів вирішення навчальних задач.

Тому, за **мету** дослідження ставимо визначення меж використання алгоритмів у навчанні фізиці та вагомості зазначеної суперечки, а також різнобічний розгляд використання алгоритмів у навчальному процесі фізико-математичним дисциплінам на предмет доцільності в аспекті реалізації сучасних вимог до продуктивного функціонування в освітньому просторі.

Основна частина

Досвід роботи педагогів-практиків у галузі фізики та математики переконує, що чітко визначені етапи навчання на яких використання алгоритмів вкрай необхідне, а отже, не лише виправдовує себе, але й переконує у необхідності та доцільності застосування такої опори. Будь-яка діяльність (навчальна не є виключенням) передбачає попереднє формування практичних вмінь та навичок. Необхідність у створення бази (фундаменту) на якій будуть в подальшому формуватися певні навички та вміння не вимагає доведень та обґрунтувань. Деякою мірою алгоритмізація у дидактиці може бути порівняною з використанням аксіоматичних понять у математиці або з абеткою під час навчання читанню.

Визначаючи математику як базу для кількісного вивчення та характеристики певного фізичного процесу чи явища, ніхто не зважає уваги що такі дії як:

- скорочення дробів,
- ділення та додавання у стовпчик,
- винесення спільного множника за дужки,
- розкриття виразів, що містять дужки,
- послідовне додавання векторів,
- паралельний перенос та ін.

є значно раніше засвоєними (доведеними до автоматизму у навичках використання) алгоритмами проведення математичних операцій, які знаходять своє призначення у фізиці.

Організація навчального процесу в будь-якому закладі навчання базується на таких основних етапах:

- вивчення навчального матеріалу (лекції, самостійна робота з джерелами, обмін інформацією, участь у форумах, конференціях в якості слухачів і т. ін.);
- формування вмінь та навичок (застосування знань у практичних ситуація різних рівнів складності);
- контроль та оцінка рівня сформованості знань, вмінь та навичок.

Зазначена послідовність етапів є також алгоритмом. При цьому жоден адекватний педагог не намагається змінити на власний розсуд послідовність реалізації зазначених кроків і, тим більше, аргументувати при цьому дидактичну та методичну доцільність проведення таких змін.

У процесі навчання фізики в основу навчально-пізнавальної діяльності здобувачів освіти покладено **плани узагальнюючого характеру**, що визначають саме алгоритми:

- вивчення змісту ***наукового факту*** **(*фундаментального досліду*)**;
- пояснення ***фізичного явища****;*
- *визначення с*утності поняття конкретної ***фізичної величини****;*
- вивчення ***закону;***
- вивчення ***моделі;***
- вивчення загальної характеристики ***фізичної теорії****;*
- знайомство з ***фізичним приладом***.

Під час навчання вирішенню задач в більшості випадків дотримуються наступних кроків:

- знайомство з умовою задачі;
- визначення відомих характеристик фізичного процесу чи явища;
- встановлення невідомих (шуканих) величин;
- запис скороченої умови задачі (в т. ч. встановлення, пошук та фіксація додаткових даних);
- приведення одиниці вимірювання у систему СІ;
- створення фізичної моделі задачі;
- створення математичної моделі задачі;
- проведення математичних дій з фізичними величинами з метою отримання кінцевої загальної формули для обчислення шуканої величини;
- перевірка одиниць вимірювання;
- чисельний розрахунок шуканої величини (невідомої характеристики);
- проведення логічного аналізу отриманого результату на достовірність.

Важко навіть уявити як можна змінити послідовність дій з метою досягнення конкретної мети з вирішення задачі. Отже, знову маємо справу з алгоритмом. Окрім того, не важко зрозуміти, що саме така послідовність дій засвоєна здобувачем освіти здатна забезпечити успішність у навчання вирішенню фізичних задач. Знову ж, алгоритм виступає як необхідність, що не може бути поставленою під сумнів.

Процес залучення здобувачів освіти до науково-дослідної роботи також передбачає виконання певного, раніше визначеного алгоритму:

- залучення до спостереження (на різних етапах);
- залучення до діяльності:
- у плануванні (з урахуванням висунутої гіпотези та поставленої мети);
- у підготовці;
- у проведенні (в т. ч. фіксації результатів у зручній формі);
- в обробці результатів проведеного дослідження (відповідальність за окремі етапи);
- у перевірці результату на достовірність та проведення аналізу проведеного експерименту з подальшим формулюванням висновків;
- самостійне проведення експерименту (спочатку окремих етапів, а потім вцілому);
- самостійна інтерпретація результатів експерименту та формулювання висновків.

На такому прикладі наочно висвітлено, що використовувані у навчальному процесі закладів загальної середньої освіти алгоритми мають

DOI: https://doi.org/...

різний рівень складності, можуть бути вкладеними один в одний та мати певні розгалуження.

Окрім того, інструкція до виконання лабораторної роботи (реальної чи віртуальної) також є алгоритмом. Неможливо собі уявити результат виконання такої роботи, якщо послідовність виконання необхідних дій буде змішаною.

Формування узагальненого експериментального вміння – процес довготривалий, який вимагає планомірної роботи вчителя й учнів протягом усього часу навчання фізики в ЗЗСО.

Варто також зазначити, що важко буде знайти фахівця що довів би доречність докорінної зміни у наведених прикладах послідовність запропонованих етапів. Отже, саме дотримання визначеної послідовності (алгоритму) є одним із факторів, що забезпечують результативність формування вмінь та навичок за для досягнення поставленої мети.

Висновки

Аналізуючи вимоги діючої освітньої програми спроектовані на реальний навчальний процес у ЗЗСО приходимо висновку що в більшості випадків вчитель керується виконанням короткочасних або довготривалих алгоритмів з формування загально розвиненої особистості засобами дисципліни, що викладає. Можна впевнено говорити що алгоритми є невід'ємною частиною освітнього процесу.

Аналіз програм та проектів програм з фізики, бесід з викладачами, вивчення досвіду роботи педагогів-практиків, а також моніторингу успішності учнів старших класів дозволив зробити висновки про те, що алгоритми знаходяться в основі організації будь-чого взагалі.

Освітній процес, починаючи від створення навчального середовища та організації процесу навчання і приходячи до окремих етапів вивчення конкретних тем - це є ніщо інше як система лінійно-, циклічно- або комплексно пов'язаних алгоритмів.

Засвоєння певних алгоритмів значною мірою скорочує час, витрачений на здобуття вмінь, розширює спектр розглядуваних практичних завдань та надає ширші можливості для вирішення завдань підвищеної складності, а також нестандартних та творчих завдань, що сприяють формування свідомих навичок здійснення подальшої самоосвітньої діяльності особистості.

При цьому всі суперечки з цього приводу є недоречними бо відсутні підстави для їх існування, окрім випадків коли відсутність усвідомлення виконуваних дій блокує розвиток особистості. Виходячи із зазначеної теми можна говорити лише про доцільність чи недоцільність використання алгоритмів під час вивчення якихось окремих конкретних питань фізики. Саме цей аспект алгоритмізації навчання буде доречним для подальшого вивчення.

Література

1. Гопко З.Г. Лабораторні та практичні роботи з фізики. 10 клас: Рівень стандарту, академічний та профільний рівні [Текст] / З.Г. Гопко. – Харків: Видавнича група «Основа», 2012. – 127, [1] с. – (Бібліотека журналу «Фізика в школах України». Вип. 4 (100)).
2. Кабановський О.В. Фізика: Астрономія: Початкові відомості. Частина I [Текст] / О.В. Кабановський. – Харків: Видавнича група «Основа», 2011. – 128 с. – (Бібліотека журналу «Фізика в школах України». Вип. 11 (95)).
3. Кабановський О.В. Фізика: Астрономія: Початкові відомості. Частина II [Текст] / О.В. Кабановський. – Харків: Видавнича група «Основа», 2011. – 128 с. – (Бібліотека журналу «Фізика в школах України». Вип. 12(96)).
4. Лимарєва Ю. М., Скворцова Н. В., Пукас Т. М. Використання алгоритмів при розвязанні графічних задач з молекулярної фізики та термодинаміки / Ю. М. Лимарєва, Н. В. Скворцова, Т. М. Пукас // Zbiór arttykulów naukowych z Konferencji Miedzynarodowej Naukowo-Praktycznej "Science, research, development" №11, v. 2 (29.11.2018 – 30.11.2018) – Warszawa: Wydawca : Sp. z o.o. "Diamond trading tour", 2018. – str. 18 – 19.
5. Методи розв'язування фізичних задач [Текст] / Ю.М. Галатюк, В.Я Левшенюк, Я.Ф. Левшенюк, В.І. Тищук, А.Б. Трофімчук. – Харків: Видавнича група «Основа», 2010. – 224 с. – (Бібліотека журналу «Фізика в школах України». Вип. 4 (76)).

Yuliya M. Lymareva, Viktor M. Turka, Ivan A. Botsaniuk
Donbas State Pedagogical University, Sloviansk, Ukraine
Sloviansk Power-Building Applied College, Ukraine

Algorithms in modern physical and mathematical education

The article examines the problem of the feasibility of using algorithms in the educational process of physics in institutions of general secondary education. The general integrity of the organization of the educational process on an algorithmic basis and the obviousness of its accompanying activities during education are highlighted. Attention is focused on their didactic value with the aim of simplifying educational activities, saving time and holistic understanding of the process of acquiring knowledge by an individual.

Keywords: *algorithm, educational process, sequence, logic, awareness.*

УДК 372.853

Масич В.В., Лимарєва Ю.М., Литвинова Л.О.

[1.] *доктор педагогічних наук, професор, завідувач кафедри фізики і хімії, ХНПУ імені Г. С. Сковороди*

e-mail: antineutrino9@gmail.com, ORCID 0000-0002-8943-7756

[2.] *кандидат педагогічних наук, доцент, в. о. завідувача кафедри фізики, ДВНЗ «ДДПУ»,*

e-mail: ulialymareva23@gmail.com, ORCID 0000-0002-5828-0231

[3.] *здобувач магістерського РВО фізико-математичного факультету, ДВНЗ «ДДПУ»*

e-mail: larusa.litvinova@gmail.com, ORCID 0009-0003-7274-7568

СИМВОЛЬНО-ГРАФІЧНЕ ПОДАННЯ ФІЗИЧНИХ ПРОЦЕСІВ

У статті розглянуто проблему доцільності здійснення потужної математичної підготовки як фундаменту успішного набуття знань з природничих дисциплін, в тому числі фізики у закладах загальної середньої освіти. Наявність математичної бази має створювати абсолютний комфорт під час її практичного застосування при вивченні фізики. Математичні теми пропоновані освітніми програмами мають однозначно передувати їх застосуванню у фізиці або інших природничих науках.

Ключові слова: *навчальна дисципліна, рівень засвоєння, усвідомлення, математичний апарат, навчальний процес, послідовність, логічність.*

Вступ

Спостереження, дослідження та пояснення явищ навколишнього світу відбувається на основі фізичних процесів, що забезпечують таку можливість. Натомість, фіксація результатів з метою їх збереження, обробки та подальшого використання здійснюється у символьно-графічній формі та за умови використання математичного апарату певного рівня складності. Іншими словами, можна сказати, що таке подання явища у алгебраїчній або геометричній формі є нічим іншим як алгебраїчним або геометричним моделюванням. Виходячи з цього, важливо розуміти значущість набуття учнями математичних знань та формування вмінь свідомого їх застосування. Така проблема завжди є актуальною, виходячи навіть із того, що одним із етапів фізичного дослідження виступає вимірювання фізичної величини. Цей процес є надзвичайно важливим, бо саме від нього залежить результат конкретного експерименту, а відповідно, й наступних досліджень у яких будуть ці результати використовуватися.

Виходячи з цього, **метою** даного дослідження було поставлено розкриття важливості математичних навичок для проведення фізичних досліджень та набуття знань з природничих дисциплін взагалі.

Основна частина

Фізика – наука експериментальна. Спостереження та досліди виступають основними методами наукових досліджень у природничих науках. Разом із тим проведення експериментів не можна уявити без обробки отриманих результатів за допомогою математичного апарату. Так само, як і неможливо уявити фіксацію результатів через символічні позначення різних типів. Вільне володіння символьно-графічними навичками виступає основою фіксації результатів сучасних вимірювань.

Сучасне вимірювання – це справжнє мистецтво. За словами Майкельсона: «Ми повинні шукати наші майбутні відкриття в шостому десятковому знаці ... Кожний засіб, що сприяє точності спостережень, може стати засобом нового відкриття». Ці його пророчі слова неодноразово підтверджувалися.

Так, наприклад, у 1892 р. Релей помітив, що густина азоту, виділеного з атмосферного повітря, завжди трохи більша за густину штучно добутого з хімічних сполук. Виходило, що в атмосферному азоті присутня якась важка домішка. Нею виявився аргон.

Якщо порівнювати, то у англійського вченого Кавендіша на початку XIX ст., який теж досліджував склад повітря, не було таких чутливих терезів, які могли б зафіксувати тисячні частини грама, як у Релея, тому Кавендіш не помітив такої домішки, бо не мав підстав для висунення такого припущення. Відкриття аргону було перемогою у точності вимірювання маси.

У 1932 р., ретельно вимірюючи густину води, вчені помітили важкий ізотоп водню – дейтерій, мізерний вміст якого в звичайній воді збільшує її густину.

Отже, вимірювання роблять властивості фізичних об'єктів такими, що до них можна застосовувати кількісні методи. Властивості при цьому стають фізичними величинами.

Фізична величина – це кількісна міра певної властивості фізичного об'єкту, а отже її треба вимірювати, тобто: *порівняти її з однорідною їй фізичною величиною, що прийнята за одиницю (з еталоном).Наприклад, еталон маси – платіно-ірідієвий циліндр, що зберігається в м. Севрі поблизу Парижу.*

Є багато властивостей, які в наш час ми ще не вміємо оцінювати кількісно, наприклад колір, запах, смак. Поки ми їх не вміємо вимірювати, ми не називаємо їх величинами, а називаємо *властивостями.*

Для того щоб дати означення фізичної величини потрібно встановити:

а) яку реальну властивість фізичного об'єкта вона характеризує;

б) з якими раніше введеними величинами вона пов'язана і яка формула відображає цей зв'язок;

в) як виміряти величину.

Сутність поняття ***<u>фізичної величини</u>*** визначають:

- ✓ властивість, яку характеризує ця величина;

- ✓ її означення (дефініція) та формула, покладена в основу означення;
- ✓ зв’язок даної величини з іншими;
- ✓ одиниці фізичної величини;
- ✓ способи її вимірювання.

Дещо ширшим постає узагальнюючий план вивчення фізичної величини. А саме:

1) властивість фізичного об'єкта, що визначається величиною;
2) її наявність притаманність у інших об'єктів та їх характерні спільні особливості;
3) важливість даної властивості для дослідження фізичних об'єктів;
4) можливість порівняння властивостей (умови прояву, якісні відмінності);
5) визначення кількісної міри властивості через прийняту одиницю вимірювання;
6) зв'язок даної величини з іншими величинами;
7) основні методи вимірювання фізичної величини;
8) засоби вимірювання даної фізичної величини.

Варто зазначити, що для вимірювання фізичних величин використовуються вимірювальні прилади, що в основі принципу дії мають також фізичні процеси і результат перебігу цих процесів має бути зафіксований у символьно-графічній формі.

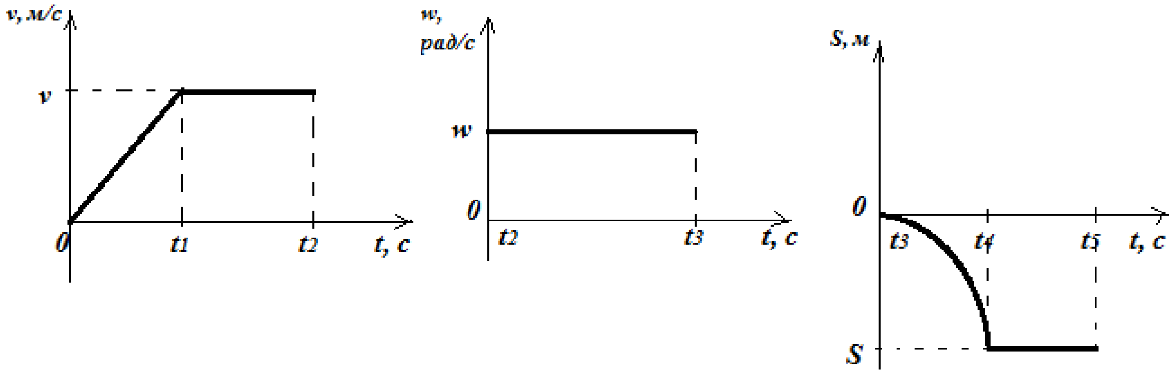
Таким чином для успішного проведення таких дій учні мають не лише володіти математичним апаратом, але й свідомо трансформувати його під час створення математичної моделі фізичного процесу. Тобто, змінні *Х* та *У* набувають у фізиці фізичного сенсу і можуть бути позначені у інший спосіб.

Відповідне опрацювання результатів вимірювання також засноване на математичних операціях, що найбільш зрозумілим для старшокласників, але не завжди легко здійснюваним. Причиною тому є часто надзвичайно великі або надалі чисельні значення фізичної величини. Окремої уваги вимагає математичний апарат для його застосування під час роботи з наближеними значеннями, заокругленнями та похибками.

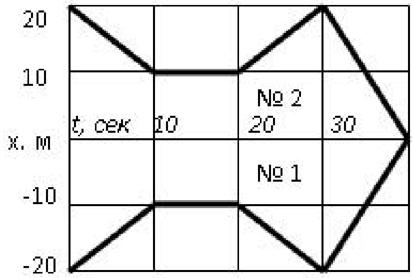
Надзвичайно зручним є графічне подання процесів та явищ.

Наприклад, щодо руху:

- зображення (опис):



- відносність:



- моделювання (унаочнення):

а) б) в) г)

- і т. ін.

Ці та багато інших прикладів наочно відображають що без знань основ математики, а саме: трикутників та їх властивостей кутів у них, розуміння фізичної суті основних тригонометричних функцій, вільного володіння навичками проектування та побудови симетричного відображення; абсолютно немає сенсу говорити про якісне та свідоме засвоєння учнями навчального матеріалу з фізики.

Висновки

Все вище зазначене переконливо дає підстави стверджувати що однозначною у розгляді питання формування стійких та свідомих знань з фізики є створення потужного математичного підґрунтя для вивчення природничих дисциплін з урахуванням повного комплексу можливостей проведення досліджень з них. А саме:

- своєчасне вільне володіння базовим математичним апаратом необхідним для вивчення тем фізики зазначених рекомендованими освітніми програмами;
- можливості трансформації через аналогії методів опрацювання даних з метою отримання проміжних та остаточних результатів;
- розуміння фізичного змісту обраних математичних операцій;
- швидка фіксація результатів спостережень та дослідів у зручній та доречній символьно-графічній формі;
- організація зручного та оперативного обміну символьно-графічною інформацією.

Тому навчання математиці має відбуватися з основою на:

- застосування матеріалу у фізиці,
- логічну послідовність вивчення тем математики в проекції на її використання під час вивчення фізики;
- проведення обов’язкового порівняння однойменних понять та їх позначень у фізиці та математиці з метою демонстрації їх аналогічності та, відповідно, практичності застосування математичних понять у фізиці.

Зазначене вище дає підстави для щільнішого вивчення рекомендованих освітніх програм та плідної взаємодії викладачів відповідних дисциплін з метою коригування та встановлення оптимальної послідовності вивчення тем математики з метою подальшого використання у фізиці. Доведення доцільності проведення такого кроку та одночасне покращення результатів успішності з математики становлять перспективу подальших досліджень.

Література

1. Intel Навчання для майбутнього. – К.: Видавнича група BHV. – 2004. – 416 с.
2. Іваницький О. І. Сучасні технології навчання фізики в середній школі. Запоріжжя: Прем'єр, 2001. – 266 с.
3. Лимарєва Ю. М., Коженцев А. А. Вибрані задачі геометричної оптики: збірка задач для самостійної роботи / Ю. М. Лимарєва, А. А. Коженцев – Слов’янськ, ДДПУ, 2019. – 67 с.
4. Лимарєва Ю. М., Мамонов В. В. Незвичайні задачі фізики: збірка задач / Ю. М. Лимарєва, В. В. Мамонов – Слов’янськ, ДДПУ, 2019. – 71 с.
5. Лимарєва Ю. М., Масич В. В., Єкімов Є. О. Графічне моделювання як важливий етап вирішення фізичної задачі / Ю. М. Лимарєва., В. В. Масич, Є. О. Єкімов / – Збірник наукових праць фізико-математичного факультету ДДПУ. – Слов’янськ: ДДПУ, 2022. – Випуск № 12 – С. 120 – 126.
6. Лимарєва Ю. М., Плєшань Д. В. Графічні задачі з фізики: навчальний посібник / Ю. М. Лимарєва, Д. В. Плєшань – Слов’янськ, ДДПУ, 2019. – 138 с.
7. Пометун О. І., Пироженко Л. В. Сучасний урок. Інтерактивні технології навчання: наук.-методичний посібник / За ред. О. І. Пометун. – К.: Видавництво А.С.К., 2003. – 38 с.
8. Шаромова В., Дубас З. Нетрадиційні уроки з фізики. Ч.1. – Тернопіль: Підручники і посібники, 2003. – 160 с.

Vitalii V. Masych, Yuliya M. Lymareva, Larisa O. Litvinova
Donbas State Pedagogical University, Sloviansk, Ukraine
H. S. Skovoroda Kharkiv National Pedagogical University, Ukraine

Symbolic and graphic representation of physical processes

The article considers the problem of the expediency of powerful mathematical training as a foundation for successful acquisition of knowledge in natural sciences, including physics, in institutions of general secondary education. The presence of a mathematical base should create absolute comfort during its practical application in the study of physics. Mathematical topics offered by educational programs must clearly precede their application in physics or other natural sciences.

Keywords: *educational discipline, level of assimilation, awareness, mathematical apparatus, educational process, sequence, logic.*

УДК 372.853

Лимарєва Ю.М., Лойко С.О., Іванов С.Ю.
[1.] *кандидат педагогічних наук, доцент кафедри фізики, ДВНЗ «ДДПУ»*
e-mail: ulialymareva23@gmail.com, ORCID 0000-0002-5828-0231
[2.] *здобувач магістерського РВО фізико-математичного факультету, ДВНЗ «ДДПУ»*
e-mail: loiko.semen21@gmail.com, ORCID 0009-0006-2094-8714
[3.] *директор* КЗ *«Хрестищенський ЗЗСО І-ІІІ ступенів Святогірської міської ради Краматорського району Донецької області»*
e-mail: hresticheschool@gmail.com, ORCID 0009-0006-2044-8672

ВИКОРИСТАННЯ ЕЛЕМЕНТІВ STEM-ОСВІТИ НА УРОКАХ ФІЗИКИ В СТАРШІЙ ШКОЛІ

Стаття присвячена висвітленню застосування ідей щодо реалізації Концепції STEM-освіти під час викладання фізики в старшій школі, напрямлених на формування самостійності учнів, спроможності отримувати, аналізувати інформацію та приймати оптимальні рішення. Наведено приклади STEM-проєктів та доведено їх доцільність використання на уроках фізики в старшій школі.

Ключові слова: *STEM-освіта, STEM-проєкт, технічна симуляція, освітній процес, PhET, мета використання.*

Вступ

Фізика є однією з найбільш основних наук, яка займається вивченням законів природи. Вона знаходить своє застосування в різних галузях науки та технологій, і є ключовою для розвитку STEM-освіти.

Під час викладання фізики в старшій школі важливо зосередитись на розумінні здобувачами освіти основних законів та принципів природи, які вони вивчають. Це може бути складно, оскільки фізика є складною наукою, і вимагає від школярів певного рівня математичних знань.

Вибір теми даної статті обумовлений важливістю дати здобувачам освіти можливість самостійно досліджувати та вирішувати фізичні задачі. Це може бути корисним для їхнього розвитку та допоможе зберегти зацікавленість у вивченні фізики. Крім того вчитель ЗЗСО знаходить цікаві приклади та застосування фізичних законів у повсякденному житті.

Одним із напрямків інноваційного розвитку природничої освіти є система навчання STEM, завдяки якій здобувачі освіти розвивають логічне мислення та технічну грамотність, вчаться вирішувати поставлені задачі, стають новаторами, винахідниками. STEM-освіта дозволить зміцнити та вирішити найбільш актуальні проблеми майбутнього.

Відповідно до концепції «Нової української школи» саме навчання з використанням елементів STEM-освіти забезпечує основні компетентності, до яких належать: спілкування державною (і рідною у разі відмінності) мовами, спілкування іноземними мовами, математична, інформаційно-цифрова, соціальна та громадянська, а також основні компетентності у природничих науках і технологіях, уміння вчитися впродовж життя, ініціативність і підприємливість, екологічна грамотність і здорове життя. Вищеназвані навички дадуть змогу майбутньому фахівцю успішно реалізуватися та інтегруватися в сучасні реалії життя, стати конкурентоспроможним як в Україні так і за її межами.

Виходячи із зазначеного вище, **метою** статті є висвітлення практичного використання та доведення доцільності елементів STEM-освіти під час викладання фізики в старшій школі.

Основна частина

Впровадження STEM-освіти в Україні здійснюється відповідно до Наказу Міністерства освіти і науки України від 17.05.2017.

STEM освіта (англ. Science, Technology, Engineering, and Mathematics education) - це навчання, яке охоплює дисципліни з наукових, технічних, інженерних та математичних галузей з метою розвитку компетентностей, які є необхідними для успішної роботи в сучасному світі.

STEM включає в себе не тільки традиційне навчання в аудиторії, але й практичну роботу, лабораторні роботи, проєкти та розв’язання задач, які виконуються в команді. Це дозволяє здобувачам освіти розвивати креативність, логічне мислення та роботу в команді - навички, які є ключовими для успіху в сучасному світі.

STEM освіта є важливою для розвитку наукових досліджень та інновацій, оскільки вона допомагає розвивати кваліфіковану робочу силу в сферах науки, технологій, інженерії та математики. Це дозволяє підвищувати конкурентоспроможність країн у світі та стимулювати економічний розвиток.

На сьогоднішній день в Україні діє низка організацій, що сприяють розвитку STEM освіти, зокрема Центр STEM-освіти, Асоціація STEM-освіти України, різноманітні STEM-лабораторії та клуби для дітей та молоді.

Мета використання STEM освіти може бути різноманітною та включати наступне:

- підготовка кваліфікованих фахівців;
- розвиток критичного мислення та проблемного мислення;
- залучення різних груп учнів;
- розвиток технічних навичок;
- формування науково-дослідницької культури.

Тематика курсу фізики старшої школи така, що буквально в кожній темі може використовуватись STEM-проєкт. Розглянемо приклади запропонованих робіт з використанням елементів STEM при вивченні певних тем курсу фізики старшої школи:

1) Основи кінематики - «Нестандартне вимірювання швидкості руху тіла за допомогою пульсометра»;
2) Основи динаміки – «Прості механізми. Похила площина: відома та невідома»;
3) Закони збереження – «Фізичні іграшки»;
4) Основи МКТ – « Тренажер для вивчення ізопроцесів в газах засобами PhET»;
5) Термодинаміка – «Створення альтернативної моделі теплових двигунів»;
6) Основи електродинаміки – «Альтернативні джерела електричного струму», «Двигун Стірлінга»;
7) Електромагнітні коливання та хвилі – «Створення радіоприймача», та інші.

Розглянемо один із прикладів STEM-проєкту «Альтернативні джерела електричного струму»:

Учням було запропоновано обрати з переліку тем ту, яка на їх думку є більш цікавою для них. Наступним кроком здобувачі освіти займалися пошуком інформації щодо конструкції майбутнього джерела струму спираючись на попередньо опрацьовані інтернет-джерела та добірку відповідної літератури, яку вони обрали. Після цього засобами симуляцій «PhET Interactive Simulations» (колекція досліджень, які основані на інтерактивному комп'ютерному моделюванні, ефективні для вивчення і викладання фізики та інших природничих наук) було розроблено інтерактивну модель цього джерела та вивчено її особливості, а також переваги та недоліки. Виходячи з отриманих результатів симуляції були зроблені попередні висновки щодо того: яке джерело альтернативного струму є більш ефективним. Основним критерієм вибору було вимірювання ЕРС джерела.

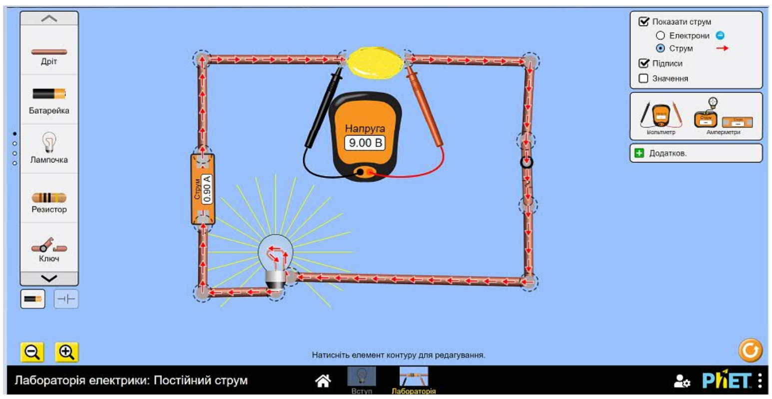


Рис.1.
Використання симуляцій
«PhET Interactive Simulations»

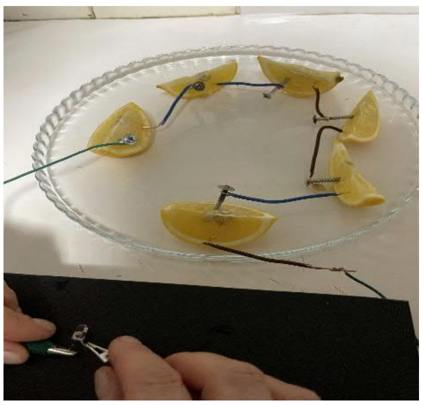


Рис. 2.
Створення за симуляцією
моделі джерела струму

DOI: https://doi.org/...

Наступним етапом даного проєкту були математичні обчислення показників електричного струму та вибір найбільш ефективного. Це дозволило перейти до створення конструкції цього джерела.

В ході виконання роботи здобувачі освіти розвивали своє критичне мислення, вчилися працювати в команді та самостійно.

В результаті проєкт набув не тільки фізичної цікавості, а й знайшов практичне застосовування за межами уроку.

Висновки

На основі вищезазначених практичних прикладів застосування елементів STEM-освіти на уроках фізики в старшій школі можна констатувати що:

- проєктна діяльність у вигляді дослідів та експериментів викликає зацікавленість в здобувачів освіти до предмету, а відповідно бажання до подальшого набуття знань;
- під час STEM-навчання розуміння природи приходить на практиці, що робить непотрібним запам'ятовування теоретичних фактів;
- спостерігається поєднання наступних дисциплін: математики, природничих наук, інженерії та технології в єдину систему;
- в ігровій формі здійснюється практична частину проєкту;
- в майбутньому навички отримані під час STEM-навчання допоможуть стати самому здобувачеві освіти конкурентоспроможним, а країні доєднатися до високорозвинених держав світу.

Також в ході педагогічного дослідження було встановлено, що здобувачі освіти стають більш самостійними, вчаться працювати в команді та намагаються отримати правильний шлях до виконання завдання під час спільного розв'язання проблеми, що в подальшому допоможе стати творчим та креативним членом суспільства.

Дана робота підтверджує ще раз те, що викладання фізики та природничих дисциплін в старшій школі в подальшому буде ґрунтуватися саме на проєктній діяльності. За STEM-освітою майбутнє.

Література

1. Закон України «Про загальну середню освіту» https://zakon.rada.gov.ua/go/651-14 (дата 27.05.2023)
2. Концепція «Нової Української Школи» https://mon.gov.ua/storage/app/media/zagalna%20serednya/nova-ukrainska-shkola-compressed.pdf (дата 27.05.2023)
3. ДНУ Інститут Модернізації Освіти. STEM-освіта https://imzo.gov.ua/stem-osvita/ (дата 27.05.2023)
4. Коваленко О. STEM- освіта: досвід упровадження в країнах ЄС та США. /О.Коваленко, О.Сапрунова.//Рідна школа.-2016-№4-с.46-49.

5. Camilli, G., & Hira, R. (2019). Introduction to special issue—STEM workforce: STEM education and the post-scientific society. Journal of Science Education and Technology, 28(1), 1–8.
6. STEM-освіта як перспективна форма інноваційної освіти в Україні // Матеріали обласної науково-практичної інтернет-конференції. / Авторупорядник Ю. М. Зоря. – Черкаси : ЧОІПОПП, 2018. – 117 с.

Yuliya M. Lymareva, Semen O. Loiko, Sergiy Yu. Ivanov
Donbas State Pedagogical University, Sloviansk, Ukraine
Khrestishchensk secondary school of grades I-III of the Slavyansk district council of the Donetsk region, Ukraine

Use of elements of STEM education in physics lessons in high school

The article examines the problem of the expediency of using STEM elements in the educational process. The advantages of using STEM projects during the study of natural sciences, in particular, the high school physics course, are highlighted. Attention is focused on the development of independent activities of education seekers while working in a team and further becoming a competitive specialist for the high-tech development of Ukraine.

Keywords: *STEM education, STEM project, engineering simulation, educational process, PhET, purpose of use.*

УДК 372.853

Масич В.В., Лимарєва Ю.М., Олійник В.І.

[1.] *доктор педагогічних наук, професор, завідувач кафедри фізики і хімії ХНПУ імені Г. С. Сковороди*
e-mail: antineutrino9@gmail.com, ORCID 0000-0002-8943-7756
[2.] *кандидат педагогічних наук, доцент, в. о. завідувача кафедри фізики, ДВНЗ «ДДПУ»*
e-mail: ulialymareva23@gmail.com, ORCID 0000-0002-5828-0231
[3.] *здобувач магістерського РВО фізико-математичного факультету, ДВНЗ «ДДПУ»*
e-mail: Olijbcdghxgjj@gmail.com, ORCID 0009-0008-8229-9830

ЕКСПЕРИМЕНТ ЯК ЗАСІБ ПІДВИЩЕННЯ АКТИВНОСТІ УЧНІВ ПРИ ВИВЧЕННІ ФІЗИКИ

У статті висвітлено результати педагогічного експерименту проведеного з метою виявлення ступеня залежності рівня навчальних досягнень старшокласників з фізики від рівня їх зацікавленості практичністю отриманих знань. Навчання на основі експериментальної діяльності забезпечує підвищення загального рівня успішності з дисципліни.

Ключові слова: *експеримент, навчальний процес, зацікавленість, вмотивованість, ініціативність, логічність, свідомість.*

Вступ

Аналіз результатів моніторингу успішності старшокласників з фізики для не профільних закладів загальної середньої освіти переконливо говорять про те, що загальний рівень успішності з вказаної дисципліни має тенденцію до спадання. Специфіка предмету, відсутність мотивації та зниження навчальної активності учнів інтегруючись створюють негативну тенденцію у динаміці загального показника успішності з дисципліни. Ситуація виявляється складнішою для учнів з високими показниками успішності, що зазвичай є «одинаками» в класі. До того ж варто звернути увагу що для учнів із сільської місцевості ситуація ще гірша.

Тому, за **мету** дослідження було поставлено виявлення залежності ступеня активності учнів від роду навчальної діяльності, що запропонована для здобувача освіти.

Основна частина

Усвідомлення здобувачами освіти практичної значущості навчального матеріалу відіграє вирішальну роль у досягненні максимально можливого (з урахуванням особистих здібностей) результату його засвоєння.

В свою чергу практична значущість може бути висвітлена індивідуально для кожної особистості виходячи з її уподобань, подальшої професійної орієнтації, рівня загальної зацікавленості навколишнім світом та, відповідно, вмотивованості щодо пошуку та отримання відповідей на запитання, що виникли.

В той же час виникнення запитань також, в більшості випадків, не відбувається само собою. Навичкам формування та формулювання запитань також треба вчити. Дуже незначна частина здобувачів освіти ставить запитання без мотивації вчителя до того. Для більшості учнів найзручніший метод отримання запитань – це натяк або «уточнююче» запитання, що часто засновані на хибній думці з предмету обговорення. У такий спосіб активізується розумова діяльність.

Досвід роботи та спілкування з колегами дає підстави стверджувати, що найефективнішим способом покращення рівня успішності старшокласників з фізики є унаочнення практичної цінності та значущості пропонованого матеріалу, а отже, зміна типу активності здобувачів.

Активізація практичної діяльності у позаурочний час відбувається завдяки використанню різних види експерименту, таких як:

- Додатковий навчальний;
- Домашній;
- Віртуальний.

Кожний з них дозволяє значною мірою економити час на уроці і, разом з тим, забезпечувати підтримку активності з предмету в позанавчальний час.

З метою підтвердження сказаного вище та отримання кількісних показників зміни рівня успішності навчальних досягнень було проведено експеримент, що описаний нижче.

У навчальному колективі із загальним рівнем успішності, що є на межі достатнього та середнього, було запропоновано додаткові практичні домашні завдання для добровільного виконання. А саме:

При вивченні ***прямолінійного поширення світла*** було запропоновано такий перелік експериментів:

1. Встановити залежність розмірів тіні та півтіні залежно від відстані точкового (малого) освітлювача до предмета.
2. Встановити залежність розмірів тіні та півтіні залежно від розміру освітлювача,
3. Перевірити як змінюються розміри вашої тіні залежно від часу доби,
4. Дослідити, як має рухатися людина відносно плаского дзеркала, щоб відстань між нею та її зображенням залишалася незмінною,
5. Перевірити чи існує зображення людини у дзеркалі, якщо сама вона не бачить себе у ньому,
6. Визначити які друковані літери не змінюються при відображенні у дзеркалі, встановити спільні їх характеристики та довести, що відповідь є однозначною або неоднозначною,

DOI: https://doi.org/...

7. З'ясувати в якому випадку зображення предмета не відрізняється від предмета,
8. Дослідити в якому випадку при дзеркальному відображенні ліве та праве не міняються місцями в той час, коли верх і низ міняються,
9. Провести моделювання спостережуваного явища та довести правильність чи хибність висновків, зроблених при виконанні попереднього завдання,

За результатами перевірки виконання (спроб виконання) запропонованих домашніх дослідницьких маємо наступні результати (див. табл.):

Таблиця

Завдання / **Харак-теристика**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**Середнє значення за х-кою**
Не зацікавились	6	8	2	5	13	7	10	11	19	**9**
Спробували зробити, але не мали успіху	3	3	0	6	4	0	3	6	1	**3**
Частково зробили	8	8	0	0	2	10	6	3	1	**4**
Повністю виконали	4	2	19	10	2	4	2	1	0	**5**
Задали додаткові запитання	1	2	1	3	2	3	3	2	1	**2**
Активність, %	71,4	61,9	90,5	76,2	38,1	66,7	52,4	47,6	9,5	**57,1**
Успішність, %	57,1	47,6	90,5	47,6	19,0	66,7	38,1	19,0	4,8	**38,9**
Всього учнів 21										

Висновки

На основі даних таблиці можна стверджувати, що за даною темою практичні завдання, залежно від їх рівня складності, зацікавлюють понад 50 % учнів, та понад 35 % досягають успішності у їх виконанні. Додатково варто акцентувати увагу, що виконання завдань було добровільним. Зважаючи на це можна стверджувати, що такий підхід введений як систематичний у вивченні фізики значно сприятиме покращенню рівня активності здобувачів освіти та, відповідно, рівня навчальних досягнень учнів.

Результати демонструють, що незначна кількість учнів самостійно ініціює постановку запитань. Але треба пригадати, що це клас з рівнем навчальних досягнень на межі середнього та достатнього. Тому, узагальнюючи, можемо стверджувати, що використовуючи додатковий експериментальні завдання для домашнього самостійного добровільного виконання ми маємо добрі результати щодо успішності учнів.

Додатково є сенс звернути увагу, що незначна кількість учнів самостійно ініціює постановку запитань. У таблиці показано саме цю кількість. Зазначені дані говорять про низький рівень сформованості у старшокласників формулювання запитань. Більшість із них, як свідчить практика, не знаходять бази для постановки запитання, а це означає, що їм важко комплексно сприймати матеріал, звертаючи увагу, перш за все, на фізичну суть явища.

Література

1. Гопко З.Г. Лабораторні та практичні роботи з фізики. 10 клас: Рівень стандарту, академічний та профільний рівні [Текст] / З.Г. Гопко. – Харків: Видавнича група «Основа», 2012. – 127, [1] с. – (Бібліотека журналу «Фізика в школах України». Вип. 4 (100)).
2. Лимарєва Ю. М., Масич В. В., Удовиченко В. В. Самостійний фізичний експеримент як засіб формування загальних компетентностей особистості / Ю. М. Лимарєва., В. В. Масич, В. В. Удовиченко / – Збірник наукових праць фізико-математичного факультету ДДПУ. – Слов'янськ: ДДПУ, 2022. – Випуск № 12 – С. 120 – 126.
3. Лимарєва Ю. М., Кекін М. О. Дистанційний експеримент як засіб свідомого засвоєння навчального матеріалу старшокласниками / Ю. М. Лимарєва, М. О. Кекін / – Збірник наукових праць фізико-математичного факультету ДДПУ. – Слов'янськ : ДДПУ, 2018. – Випуск № 8 – С. 176 – 180.
4. Лимарєва Ю. М., Турка В. М., Рябко А. Е. Формування освітньої компетентності старшокласників засобами фізичного експерименту / Ю. М. Лимарєва, В. М. Турка, А. Е. Рябко / Духовність особистості: методологія, теорія і практика: збірник наукових праць / Гол. редактор Г.П. Шевченко. – Вип. 1(82). – Сєвєродонецьк: вид-во СНУ ім. В. Даля, 2018. – С. 123 – 130.

Yuliya M. Lymareva, Vitalii V. Masych, Viktor Iv. Oliinyk
Donbas State Pedagogical University, Sloviansk, Ukraine
H. S. Skovoroda Kharkiv National Pedagogical University, Ukraine

Experiment as a means of increasing the activity of students in studying physics

The article highlights the results of a pedagogical experiment conducted in order to identify the degree of dependence of the level of educational achievements of high school students in physics on the level of their interest in the practicality of the acquired knowledge. Learning based on experimental activity ensures an increase in the overall level of success in the discipline.

Keywords: *experiment, educational process, interest, motivation, initiative, logic, consciousness.*

ЗМІСТ

CONTENTS

Наукове видання

Збірник наукових праць фізико-математичного факультету ДДПУ

Випуск 13

Для студентів, аспірантів та науковців в галузі фізико-математичних наук; вчителів та викладачів фізико-математичних дисциплін в ЗЗС та ВО.

Комп'ютерна верстка та підготовка оригінал-макету О.А. Кадубовський

Відповідальні за випуск О.А. Кадубовський, В.Є. Величко

ISSN 2413-2667

Підписано до друку 19.10.2023 р.
Формат 60×84 1/16. Ум. др. арк. 11,25.
Тираж 100 прим.

Підприємець Маторін Б.І.
84116, м. Слов'янськ, вул. Г. Батюка, 19.
Тел./факс +38 06262 3-20-99. Email: matorinb@ukr.net

Свідоцтво про внесення суб'єкта видавничої справи до Державного реєстру видавців, виготівників і розповсюджувачів видавничої продукції ДК №3141, видане Державним комітетом телебачення та радіомовлення України від 24.03.2008 р.