МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ДЕРЖАВНИЙ ВИЩИЙ НАВЧАЛЬНИЙ ЗАКЛАД
«ДОНБАСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ ПЕДАГОГІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ»

ISSN 2413-2667 (Print)
ISSN 2415-3079 (Online)

ЗБІРНИК НАУКОВИХ ПРАЦЬ **фізико-математичного факультету ДДПУ**

Заснований у 2010 році

Випуск №7

Рекомендовано вченою радою
Донбаського державного педагогічного університету
в якості наукового видання

Слов'янськ – 2017

УДК 51+53+37.016:[51+53+004].
ББК 22.1+22.3+74.262.21+74.262.22.

З – 414

Збірник наукових праць фізико-математичного факультету ДДПУ. — Слов'янськ : ДДПУ, 2017. — Випуск № 7 — 180 с.

Для студентів, аспірантів та науковців в галузі фізико-математичних наук; вчителів та викладачів фізико-математичних дисциплін в ЗОШ та ВНЗ.

РЕЦЕНЗЕНТИ

АВРАМЕНКО О.В. — доктор фізико-математичних наук, професор; завідувач кафедри прикладної математики, статистики та економіки Кіровоградського державного педагогічного університету ім. В. Винниченка

ТУЛУПЕНКО В.М. — доктор фізико-математичних наук, професор; завідувач каф. фізики Донбаської державної машинобудівної академії.

РЕКОМЕНДОВАНО ДО ДРУКУ

вченою радою державного вищого навчального закладу «Донбаський державний педагогічний університет», протокол № **9** від **27.04.2017** р.

За достовірність посилань, цитат і результатів експериментів відповідальність несуть автори.

Від редакційної колегії

Шановні читачі!

Ви тримаєте в руках *сьомий* випуск «Збірника наукових праць фізико-математичного факультету ДДПУ» державного вищого навчального закладу «Донбаський державний педагогічний університет». Видання наукових праць викладачів, студентів та молодих науковців фізико-математичного факультету ДДПУ започатковано у 2010 році, коли результати наукових досліджень було опубліковано окремою серією «Фізико-математичні науки» в збірнику наукових праць «Пошуки і знахідки» за матеріалами науково-практичної конференції «Актуальні питання науки і освіти» (Слов'янськ, СДПУ, 20-22 квітня 2010 р.)

Метою збірника є підтримка наукової активності як серед студентів, так і серед молодих викладачів ДДПУ та інших ВНЗ.

Основу *сьомого* випуску збірника складають оригінальні повнотекстові статті (в авторській редакції) переважно із числа доповідей, запланованих для участі у цьогорічній Всеукраїнській науково-практичній конференції «Перспективні напрямки сучасної науки та освіти», Слов'янськ, ДДПУ, 17-19 травня 2017 р.).

Засновники збірника мають намір зробити його максимально відкритим як для авторів, так і для читачів. Він виходить один раз на рік у друкованому та електронному вигляді. Електронна версія журналу та інформація щодо співпраці з авторами є доступною на офіційному сайті збірника за адресою `http://ddpu.edu.ua/fizmatzbirnyk/begin.htm`.

Запрошуємо до співпраці. Наснаги та творчих успіхів!
Члени редакційної колегії.

Пам'яті
Олександра Івановича Степанця

Степанець Олександр Іванович
видатний український учений, доктор фізико-математичних наук, професор, член-кореспондент НАН України, Заслужений діяч науки і техніки України
(1942–2007)

24 травня мало виповнитися 75 років видатному вченому, педагогу, наставнику – Олександру Івановичу Степанцю. З сумом усвідомлюємо, що майже 10 років, як перестало битися його серце, і відчуваємо, яку величезну роль в нашому житті зіграла приналежність до кругу цієї видатної особистості. Ми знову і знову висловлюємо шану видатному вченому, педагогу, людині.

Олександр Іванович народився на Чернігівщині у родині сільського вчителя. Закінчивши з медаллю Комарівську середню школу, Олександр Іванович вступив на механіко-математичний факультет Київського державного університету імені Тараса Шевченка.

Вже під час навчання в університеті під керівництвом видатного вченого Владислава Кириловича Дзядика він робив перші кроки у велику науку і невдовзі під його ж керівництвом блискуче захистив дисертацію на здобуття наукового ступеня кандидата, а згодом і доктора фізико-математичних наук. Його чудові організаторські та педагогічні здібності створювали умови для його успішної діяльності з підготовки та виховання висококваліфікованих молодих вчених. Він створив відому далеко за межами України, наукову школу з теорії наближення функцій, яка має осередки у різних регіонах України. Лише офіційно Олександр Іванович підготував і виховав 7 докторів і 32 кандидати наук. У своїх спогадах академік Сергій Миколайович Нікольський, колега і товариш Олександра Івановича, відмічає високий рівень його монографій, які дійсно є в той же час гарними навчальними посібниками для молодих вчених і містять у доступній формі багато корисного для досліджень матеріалу. Він є автором 7 монографій, які видавалися в Україні і перевидавалися за кордоном англійською мовою. Основні наукові результати Олександра Івановича також опубліковані в 190 наукових статтях. Впродовж багатьох років він очолював спеціалізовану вчену раду із захисту дисертацій, керував регулярними семінарами з теорії функцій в Інституті математики НАН України, був організатором ряду міжнародних конференцій з теорії наближень та її застосувань.

Олександр Степанець був головою видавничої ради Інституту математики НАН України, відповідальним редактором збірників праць Інституту математики НАН України з теорії наближення функцій, членом редакційних колегій «Українського математичного журналу» та «Українського математичного вісника».

Далі, ми пропонуємо згадати основні важливі дати наукового шляху видатного українського вченого, доктора фізико-математичних наук, професора, члена-кореспондента НАН України, Заслуженого діяча науки і техніки України Олександра Івановича Степанця.

1965 р. — закінчення механіко-математичного факультету Київського державного університету імені Тараса Шевченка;

1969 р. — захист кандидатської дисертації «О некоторых линейных процессах приближения функций»;

1974 р. — захист докторської дисертації «Исследования по экстремальным задачам теории суммирования рядов Фурье»;

1981 р. — початок роботи на посаді завідувача лабораторії гармонічного аналізу відділу теорії функцій Інституту математики НАН України;

1981 р. — вихід з друку монографії «Равномерные приближения тригонометрическими полиномами»;

1982 р. — присвоєння вченого звання професора;

1983 р. — запровадження нової більш загальної класифікації періодичних функцій, яка єдиним чином дозволяє ранжувати широкий спектр на основі поняття узагальненої (ψ, β)–похідної;

1987 р. — вихід з друку монографії «Классификация и приближение периодических функций»;

1990 р. — початок роботи на посаді завідувача відділу теорії функцій Інституту математики НАН України;

1996 р. — призначення на посаду заступника директора з наукової роботи Інституту математики НАН України;

1993 р. — обрання членом бюро Відділення математики Національної академії наук України;

1997 р. — обрання членом-кореспондентом НАН України;

2002 р. — вихід з друку монографії «Методы теории приближений»;

2007 р. — обрання Почесним професором Слов'янського державного педагогічного університету.

2012 р. — в пам'ять про О. І. Степанця проведено Міжнародну конференцію «Теорія наближення функцій та її застосування» у м. Кам'янець-Подільський (28 травня – 3 червня 2012 року);

2017 р. — в пам'ять про О. І. Степанця буде проведено Міжнародну конференцію «Теорія наближення функцій та її застосування» у м. Слов'янск (28 травня – 3 червня).

С.О. Чайченко, С.М. Чуйко, В.О. Надточій, О.О. Новіков,
Є.С. Сілін, В.І. Бодра, О.В. Чуйко,
О.А. Кадубовський, В.Є. Величко, Т.В. Турка

МАТЕМАТИКА

УДК 517.5

Новіков О.О., Ровенська О.Г., Кадубовський О.А., Шулик Т.В., Козаченко Ю.О.

[1] *кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри математики, ДВНЗ «ДДПУ»*

[2] *кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри вищої математики, ДДМА*

[3] *кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри геометрії та МВМ, ДВНЗ «ДДПУ»*

[4] *студент фізико-математичного факультету, ДВНЗ «ДДПУ»*

e-mail: sgpi@slav.dn.ua

БІНОМІАЛЬНІ КОЕФІЦІЄНТИ В ЕКСТРЕМАЛЬНИХ ЗАДАЧАХ ТЕОРІЇ НАБЛИЖЕННЯ ФУНКЦІЙ

Методом математичної індукції доведені деякі допоміжні формули для величин, які задаються за допомогою біноміальних коефіцієнтів. Обчислене значення інтегралу у головному члені розв'язку екстремальної задачі у вигляді суми квадратів біноміальних коефіцієнтів.

Ключові слова: *біноміальні коефіцієнти, метод математичної індукції.*

В роботі розглянуті задачі, які у своїх формулюваннях містять біноміальні коефіцієнти, розв'язуються методом математичної індукції, що виникли під час розв'язання однієї з екстремальних задач теорії наближення періодичних функцій.

1. Отримання компонент уявлень величин кратного підсумовування

Теорема 1. *Нехай,* $q \in (0;1)$, $\Lambda_{\bar{r}} = \{\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_r\}$, *– множина натуральних чисел таких, що* $\sum\limits_{k=1}^{r} \lambda_k \leqslant n + r$,

$$\Lambda_{\overline{r-1}} = \{\lambda_2, \lambda_3, ..., \lambda_r\}; \Lambda_{\overline{r-2}} = \{\lambda_3, \lambda_4, ..., \lambda_r\}; ...\Lambda_{\bar{1}} = \{\lambda_r\}$$

величини

$$G^{(1)}_{n,\Lambda_{\bar{1}}}(t), G^{(2)}_{n,\Lambda_{\bar{2}}}(t), ..., G^{(r)}_{n,\Lambda_{\bar{r}}}(t)$$

задовольняють рекурентній умові

$$G^{(r)}_{n,\Lambda_{\bar{r}}}(t) = \frac{1}{\lambda_1} \sum_{k_1=n-\lambda_1}^{n-1} G^{(r-1)}_{n,\Lambda_{\overline{r-1}}}(t) = \frac{1}{\lambda_1} \sum_{k_1=n-\lambda_1}^{n-1} \frac{1}{\lambda_2} \sum_{k_2=k_1-\lambda_2}^{k_1} G^{(r-2)}_{n,\Lambda_{\overline{r-2}}}(t), \qquad (1)$$

де

$$G^{(1)}_{n,\Lambda_{\overline{1}}}(t)=\frac{q^{n+1}}{\lambda_1}\left(\left[-\cos(n+1)t+2q\cos nt-q^2\cos(n-1)t\right]+\right.$$

$$\left.+q^{n-\lambda_1+1}\left[\cos(n-\lambda_1+1)t-2q\cos(n-\lambda_1)t+q^2\cos(n-\lambda_1-1)t\right]\right). \qquad (2)$$

Тоді для будь-якого $r\in\mathbb{N}$ *виконується рівність*

$$G^{(r)}_{n,\Lambda_{\overline{r}}}(t)=\frac{Z_q^{2(r-1)}(t)}{\prod_{i=1}^{r}\lambda_i}\sum_{\alpha\subset\overline{r}}\sum_{\nu=0}^{r+1}(-1)^{r-|\alpha|+\nu}C_{r+1}^{\nu}q^{n-\Sigma^{\alpha}_{\Lambda_{\overline{r}}}+r+\nu}\cos(n-\Sigma^{\alpha}_{\Lambda_{\overline{r}}}+r-\nu)t, \qquad (3)$$

де $\Sigma^{\alpha}_{\Lambda_{\overline{r}}}=\sum\limits_{j\in\alpha}\lambda_j$, $|\alpha|$ *– кількість елементів множини* $\alpha\subset\overline{r}$,

$$Z_q(x)=\frac{1}{\sqrt{1-2q\cos x+q^2}},$$

$C_n^k=\frac{n!}{k!(n-k)!}$ *– коефіцієнти біноміального розвинення.*

Доведення. Для доведення застосуємо метод математичної індукції. Зауважимо, що за формулою (2)

$$G^{(1)}_{n,\Lambda_{\overline{1}}}(t)=\frac{(t)q^{n+1}}{\lambda_1}\left(\left[-\cos(n+1)t+2q\cos nt-q^2\cos(n-1)t\right]+q^{n-\lambda_1+1}\times+\right.$$

$$\left.\times\left[\cos(n-\lambda_1+1)t-2q\cos(n-\lambda_1)t+q^2\cos(n-\lambda_1-1)t\right]\right)=\frac{Z_q^{2(1-1)}(t)}{\prod_{i=1}^{1}\lambda_i}\times$$

$$\times\sum_{\alpha\subset\overline{1}}\sum_{\nu=0}^{1+1}(-1)^{1-|\alpha|+\nu}C_{1+1}^{\nu}q^{n-\Sigma^{\alpha}_{\Lambda_{\overline{r}}}+1+\nu}\cos(n-\Sigma^{\alpha}_{\Lambda_{\overline{r}}}+1-\nu)t=G^{(r)}_{n,\Lambda_{\overline{r}}}(t)\Bigg|_{r=1},$$

тобто за умовою теореми для $r=1$ формула (3) виконується. Нехай $r\in\mathbb{N}$. Припустимо, що для довільного набору натуральних чисел $\Lambda_{\overline{r'}}=\{\lambda_2,\lambda_3,...,\lambda_{r+1}\}$ таких, що $\sum\limits_{i=2}^{r+1}\lambda_i<k_1+r$ і $\overline{r'}=\{2,3,...,r+1\}$, справедливою є формула (3). Відшукаємо вирази для величини $G^{(r+1)}_{k_0+1,\Lambda_{\overline{r+1}}}(t)$ з набором чисел $\Lambda_{\overline{r+1}}=\{\lambda_1\}\cup\Lambda_{\overline{r'}}$, для яких, окрім вище зазначених, виконані такі умови $\lambda_1\in\mathbb{N}$, $\sum\limits_{i=1}^{r+1}\lambda_i<k_0+r$. В силу співвідношення (1) маємо

$$G^{(r+1)}_{k_0+1,\Lambda_{\overline{r+1}}}(t)=\frac{1}{\lambda_1}\sum_{k_1=k_0-\lambda_1+1}^{k_0}G^{(r)}_{k_1+1,\Lambda_{\overline{r'}}}(t)=\frac{Z_q^{2(r-1)}(t)}{\lambda_1\prod_{i=2}^{r+1}\lambda_i}\times$$

$$\times \sum_{k_1=k_0-\lambda_1+1}^{k_0} \sum_{\alpha\subset\overline{r}} \sum_{\nu=0}^{r+1} (-1)^{r-|\alpha|+\nu} C_{r+1}^{\nu} q^{k_1-\Sigma^{\alpha}_{\Lambda_{\overline{r'}}}+r+\nu} \cos(k_1-\Sigma^{\alpha}_{\Lambda_{\overline{r'}}}+r-\nu)t =$$

$$= \frac{Z_q^{2(r-1)}(t)}{2\prod_{i=1}^{r+1}\lambda_i} \sum_{\alpha\subset\overline{r}} \sum_{\nu=0}^{r+1} ((-1)^{r-|\alpha|+\nu} C_{r+1}^{\nu} q^{2\nu} \times$$

$$\times \sum_{k=k_0-\lambda_1+1}^{k_0} \left(\left(qe^{it}\right)^{k-\Sigma^{\alpha}_{\Lambda_{\overline{r'}}}+r-\nu} + \left(qe^{-it}\right)^{k-\Sigma^{\alpha}_{\Lambda_{\overline{r'}}}+r-\nu} \right).$$

Застосовуючи формулу суми елементів нескінченої спадної геометричної прогресії, отримуємо

$$\sum_{k=k_0-\lambda_1+1}^{k_0} \left(qe^{it}\right)^{k-\sum\limits_{j\in\overline{\alpha}}\lambda_j+r-\nu} = \left(qe^{it}\right)^{k_0-\Sigma^{\alpha}_{\Lambda_r}+r+1-\nu} \frac{\left(qe^{-it}\right)^{\lambda_1}-1}{1-qe^{it}}.$$

Тоді, виконуючи елементарні перетворення, отримуємо

$$q^{2\nu} \sum_{k=k_0-\lambda_1+1}^{k_0} \left(\left(qe^{it}\right)^{k-\Sigma^{\alpha}_{\Lambda_{\overline{r'}}}+r-\nu} + \left(qe^{-it}\right)^{k-\Sigma^{\alpha}_{\Lambda_{\overline{r'}}}+r-\nu} \right) =$$

$$= \frac{q^{k_0-\Sigma^{\alpha}_{\Lambda_{\overline{r'}}}+r+1+\nu}}{1-2q\cos t+q^2} q^{k_0-\Sigma^{\alpha}_{\Lambda_{\overline{r'}}}+r+1-\nu} \Big\{ q^{-\lambda_1}\cos(k_0-\Sigma^{\alpha}_{\Lambda_{\overline{r'}}}+r+1-\lambda_1-\nu)t-$$

$$-q^{1-\lambda_1}\cos(k_0-\Sigma^{\alpha}_{\Lambda_{\overline{r'}}}+r-\lambda_1-\nu)t-\cos(k_0-\Sigma^{\alpha}_{\Lambda_{\overline{r'}}}+r+1-\nu)t+$$

$$+q\cos(k_0-\Sigma^{\alpha}_{\Lambda_{\overline{r'}}}+r-\nu)\Big\}.$$

Таким чином,

$$G^{(r+1)}_{k_0+1,\Lambda_{\overline{r+1}}}(t) = \frac{Z_q^{2r}(t)}{\prod_{i=1}^{r+1}\lambda_i} \sum_{\alpha\subset\overline{r}} (-1)^{r-|\alpha|} q^{k_0-\Sigma^{\alpha}_{\Lambda_{\overline{r'}}}+r+1} \left[\sum_{\nu=0}^{r+1} (-1)^{\nu} C_{r+1}^{\nu} \times \right.$$

$$\times q^{\nu-\lambda_1}\cos(k_0-\Sigma^{\alpha}_{\Lambda_{\overline{r'}}}+r+1-\lambda_1-\nu)t - \sum_{\nu=0}^{r+1}(-1)^{\nu}C_{r+1}^{\nu}q^{\nu+1-\lambda_1}\times$$

$$\times\cos(k_0-\Sigma^{\alpha}_{\Lambda_{\overline{r'}}}+r-\lambda_1-\nu)t - \sum_{\nu=0}^{r+1}(-1)^{\nu}C_{r+1}^{\nu}q^{\nu}\cos(k_0-\Sigma^{\alpha}_{\Lambda_{\overline{r'}}}+r+1-\nu)t+$$

$$\left. + \sum_{\nu=0}^{r+1}(-1)^{\nu}C_{r+1}^{\nu}q^{\nu+1}\cos(k_0-\Sigma^{\alpha}_{\Lambda_{\overline{r'}}}+r-\nu) \right].$$

Виконуючи перетворення з врахуванням очевидної рівності

$$C_{r+1}^{\nu}+C_{r+1}^{\nu-1}=C_{r+2}^{\nu}, \tag{4}$$

отримуємо

$$\sum_{\nu=0}^{r+1}(-1)^{\nu}C_{r+1}^{\nu}q^{\nu}\cos\left(k_0-\Sigma_{\Lambda_{\overline{r'}}}^{\alpha}+r+1-\lambda_1-\nu\right)t-\sum_{\nu=0}^{r+1}(-1)^{\nu}C_{r+1}^{\nu}q^{\nu+1}\times$$

$$\times\cos\left(k_0-\Sigma_{\Lambda_{\overline{r'}}}^{\alpha}+r-\lambda_1-\nu\right)t=C_{r+1}^{0}\cos\left(k_0-\Sigma_{\Lambda_{\overline{r'}}}^{\alpha}+r+1-\lambda_1\right)t+$$

$$+\sum_{\nu=1}^{r+1}[C_{r+1}^{\nu}+C_{r+1}^{\nu-1}](-1)^{\nu}q^{\nu}\cos\left(k_0-\Sigma_{\Lambda_{\overline{r'}}}^{\alpha}+r+1-\lambda_1-\nu\right)t+$$

$$+(-1)^{r+2}C_{r+1}^{r+1}q^{r+2}\cos\left(k_0-\Sigma_{\Lambda_{\overline{r'}}}^{\alpha}+r-\lambda_1-r-1\right)t=$$

$$=C_{r+2}^{0}\cos\left(k_0-\Sigma_{\Lambda_{\overline{r'}}}^{\alpha}+r+1-\lambda_1\right)t+$$

$$+\sum_{\nu=1}^{r+1}C_{r+2}^{\nu}(-1)^{\nu}q^{\nu}\cos\left(k_0-\Sigma_{\Lambda_{\overline{r'}}}^{\alpha}+r+1-\lambda_1-\nu\right)t+$$

$$+(-1)^{r+2}C_{r+2}^{r+2}q^{r+2}\cos\left(k_0-\Sigma_{\Lambda_{\overline{r'}}}^{\alpha}+r+1-\lambda_1-(r+2)\right)t=$$

$$=\sum_{\nu=0}^{r+2}C_{r+2}^{\nu}(-1)^{\nu}q^{\nu}\cos\left(k_0-\Sigma_{\Lambda_{\overline{r'}}}^{\alpha}+r+1-\lambda_1-\nu\right)t.$$

Аналогічно

$$\sum_{\nu=0}^{r+1}(-1)^{\nu}C_{r+1}^{\nu}q^{\nu}\cos\left(k_0-\Sigma_{\Lambda_{\overline{r'}}}^{\alpha}+r+1-\nu\right)t-$$

$$-\sum_{\nu=0}^{r+1}(-1)^{\nu}C_{r+1}^{\nu}q^{\nu+1}\cos\left(k_0-\Sigma_{\Lambda_{\overline{r'}}}^{\alpha}+r-\nu\right)t=$$

$$=\sum_{\nu=0}^{r+2}C_{r+2}^{\nu}(-1)^{\nu}q^{\nu}\cos\left(k_0-\Sigma_{\Lambda_{\overline{r'}}}^{\alpha}+r+1-\nu\right)t.$$

Таким чином, поклавши $\alpha'=\alpha\cup\{1\}$ і зауваживши, що $\overline{r+1}=\overline{r'}\cup\{1\}$, отримуємо

$$\sum_{\alpha\subset\overline{r'}}(-1)^{r-|\alpha|}q^{k_0-\Sigma_{\Lambda_r}^{\alpha}+r+1}\left[\sum_{\nu=0}^{r+2}C_{r+2}^{\nu}(-1)^{\nu}q^{\nu-\lambda_1}\cos\left(k_0-\Sigma_{\Lambda_r}^{\alpha}+r+1-\lambda_1-\nu\right)t-\right.$$

$$-\sum_{\nu=0}^{r+2} C_{r+2}^{\nu}(-1)^{\nu} q^{\nu} \cos\left(k_0 - \Sigma_{\Lambda_r}^{\alpha} + r + 1 - \nu\right)t\Bigg] = \sum_{\alpha\subset\overline{r'}} (-1)^{r-|\alpha|}\times$$

$$\times\left[\sum_{\nu=0}^{r+2} C_{r+2}^{\nu}(-1)^{\nu} q^{k_0 - \Sigma_{\Lambda_{\overline{r'}}}^{\alpha} + r + 1 - \lambda_1 + \nu} \cos\left(k_0 - \Sigma_{\Lambda_{\overline{r'}}}^{\alpha} + r + 2 - \lambda_1 - \nu\right)t - \right.$$

$$\left. -\sum_{\nu=0}^{r+2} C_{r+2}^{\nu}(-1)^{\nu} q^{k_0 - \Sigma_{\Lambda_{\overline{r'}}}^{\alpha} + r + 1 + \nu} \cos\left(k_0 - \Sigma_{\Lambda_{\overline{r'}}}^{\alpha} + r + 2 - \nu\right)t\right] =$$

$$= \sum_{\alpha'\subset\overline{r+1}} (-1)^{r+1-|\alpha'|} \sum_{\nu=0}^{r+2} C_{r+2}^{\nu}(-1)^{\nu} q^{k_0 - \Sigma_{\Lambda_{\overline{r+1}}}^{\alpha'} + (r+1) + \nu}\times$$

$$\times \cos\left(k_0 - \Sigma_{\Lambda_{\overline{r+1}}}^{\alpha\cup\{1\}} + (r+1) + 1 - \nu\right)t + \sum_{\alpha\subset\overline{r+1}, 1\notin\alpha} (-1)^{r+1-|\alpha|}\times$$

$$\times \sum_{\nu=0}^{r+2} C_{r+2}^{\nu}(-1)^{\nu} q^{k_0 - \Sigma_{\Lambda_{\overline{r'}}}^{\alpha} + r + 1 + \nu} \cos\left(k_0 - \Sigma_{\Lambda_{\overline{r'}}}^{\alpha} + 1 + (r+1) - \nu\right)t.$$

Оскільки, для множин $A = \{\lambda_i, i \in \alpha' \subset \overline{r+1}\}$, $C = \{\lambda_i, i \in \alpha \subset \overline{r+1}\}$ $B = \{\lambda_i, i \in \alpha \subset \overline{r+1}, 1 \notin \alpha\}$ виконується $A \cup B = C$, то нарешті отримуємо

$$G_{n,\Lambda_{\overline{r+1}}}^{(r+1)}(t) = \frac{Z_q^{2((r+1)-1)}(t)}{\prod_{i=1}^{r+1} \lambda_i} \sum_{\alpha\subset\overline{r+1}} \sum_{\nu=0}^{(r+1)+1} (-1)^{(r+1)-|\alpha|+\nu}\times$$

$$\times C_{(r+1)+1}^{\nu} q^{n - \Sigma_{\Lambda_{\overline{r+1}}}^{\alpha} + (r+1) + \nu} \cos(n - \Sigma_{\Lambda_{\overline{r+1}}}^{\alpha} + (r+1) - \nu)t.$$

Це означає, що із справедливості виразу (3) для величини $G_{k_0+1,\Lambda_{\overline{m}}}^{(m)}(t)$ для $m = r$ випливає його справедливість для $m = r+1$. Отже, за індукцією, для довільного $r \in \mathbb{N}$ справедливим є співвідношення (3). Теорема доведена.

2. Застосування полінома Лежандра для обчислення визначених інтегралів

Теорема 2. *Для будь-яких* $\nu \in \mathbb{N}$, $q \in (0;1)$

$$\int_0^{\pi} \frac{dx}{(1 + q^2 - 2q\cos x)^{\nu}} = \frac{\pi}{(1-q^2)^{2\nu-1}} \sum_{k=0}^{\nu-1} \left(C_{\nu-1}^k\right)^2 q^{2k},$$

де $C_m^n = \frac{n!}{(n-m)!m!}$ *– біноміальні коефіцієнти.*

Доведення. Поклавши для зручності $\frac{1+q^2}{2q}=\alpha^2$, отримуємо

$$\int \frac{dt}{(1+q^2-2q\cos t)^\nu}=\frac{1}{(2q)^\nu}\int \frac{dt}{(\frac{1+q^2}{2q}-\cos t)^\nu}=\frac{1}{(2q)^\nu}\int \frac{dt}{(\alpha^2-\cos t)^\nu}. \quad (5)$$

Застосовуючи універсальну тригонометричну підстановку

$$x=\mathrm{tg}\frac{t}{2}, \cos t=\frac{1-x^2}{1+x^2}, dt=\frac{2dx}{1+x^2},$$

маємо на основі співвідношення (5)

$$\int\limits_0^\pi \frac{dt}{(1+q^2-2q\cos t)^\nu}=\frac{1}{(2q)^\nu}\int\limits_0^\pi \frac{dt}{(\alpha^2-\cos t)^\nu}=$$

$$=\frac{1}{(2q)^\nu}\int\limits_0^\infty \frac{\frac{2dx}{1+x^2}}{(\alpha^2-\frac{1-x^2}{1+x^2})^\nu}=\frac{1}{(2q)^\nu}\int\limits_0^\infty \frac{\frac{2dx}{1+x^2}}{\frac{1}{(1+x^2)^\nu}(\alpha^2(1+x^2)-1+x^2)^\nu}=$$

$$=\frac{1}{(2q)^\nu}\int\limits_0^\infty \frac{2(1+x^2)^{\nu-1}dx}{(\alpha^2-1+(\alpha^2+1)x^2)^\nu}=\frac{1}{(2q)^\nu}\int\limits_0^\infty \frac{2(1+x^2)^{\nu-1}dx}{(\alpha^2+1)^\nu(\frac{\alpha^2-1}{\alpha^2+1}+x^2)^\nu}=$$

$$=\frac{1}{(2q)^\nu}\frac{2}{(\alpha^2+1)^\nu}\int\limits_0^\infty \frac{(1+x^2)^{\nu-1}dx}{(\frac{\alpha^2-1}{\alpha^2+1}+x^2)^\nu}.$$

Знову, застосовуючи для зручності позначення $a^2\equiv\frac{\alpha^2-1}{\alpha^2+1}$, отримуємо

$$\int\limits_0^\pi \frac{dt}{(1+q^2-2q\cos t)^\nu}=\frac{1}{(2q)^\nu}\frac{2}{(\alpha^2+1)^\nu}\int\limits_0^\infty \frac{(1+x^2)^{\nu-1}dx}{(\frac{\alpha^2-1}{\alpha^2+1}+x^2)^\nu}=$$

$$=\frac{2}{(2q)^\nu(\alpha^2+1)^\nu}\int\limits_0^\infty \frac{(1+x^2)^{\nu-1}dx}{(a^2+x^2)^\nu}=\frac{2}{(1+q)^{2\nu}}\int\limits_0^\infty \frac{(1+x^2)^{\nu-1}dx}{(a^2+x^2)^\nu}. \quad (6)$$

Таким чином, приходимо до вивчення інтегралів

$$J_\nu(x)=\int \frac{(1+x^2)^{\nu-1}dx}{(a^2+x^2)^\nu}, a^2<1.$$

Нехай $\nu\in N, \nu\geqslant 2, \nu=p+1, (p\geqslant 1)$. Тоді, застосовуючи формулу степеня бінома

$$(A+B)^n=\sum_{k=0}^n C_k^n A^{n-k}B^k; (1+x^2)^p=\sum_{k=0}^p C_k^p x^{2k},$$

маємо

$$J_{p+1} = \int \frac{(1+x^2)^p dx}{(a^2+x^2)^{p+1}} = \sum_{k=0}^{p} C_k^p \int \frac{x^{2k}dx}{(a^2+x^2)^{p+1}} =$$

$$= \int \frac{dx}{(a^2+x^2)^{p+1}} + \sum_{k=1}^{p} C_k^p \int \frac{x^{2k}dx}{(a^2+x^2)^{p+1}}. \qquad (7)$$

Щоб відшукати для обчислення останнього інтегралу рекурентну формулу для $k \geqslant 1$, виконаємо інтегрування частинами

$$\int \frac{x^{2k}dx}{(a^2+x^2)^{p+1}} =$$

$$= \left| u = \frac{1}{(a^2+x^2)^{p+1}}, dv = x^{2k}dx, du = \frac{-2(p+1)xdx}{(a^2+x^2)^{p+2}}, v = \frac{x^{2k+1}}{2k+1} \right| =$$

$$= \frac{x^{2k+1}}{2k+1} \frac{1}{(a^2+x^2)^{p+1}} - \int \frac{x^{2k+1}}{2k+1} \frac{[-2(p+1)x]dx}{(a^2+x^2)^{p+2}} =$$

$$= \frac{1}{2k+1} \frac{x^{2k+1}}{(a^2+x^2)^{p+1}} - \frac{-2(p+1)}{2k+1} \int \frac{x^{2(k+1)}dx}{(a^2+x^2)^{p+2}}.$$

Таким чином, для будь-якого $k \geqslant 1$, $p \geqslant 1$

$$\int \frac{x^{2(k+1)}dx}{(a^2+x^2)^{p+2}} = \frac{2k+1}{2(p+1)} \left(\int \frac{x^{2k}dx}{(a^2+x^2)^{p+1}} - \frac{1}{2k+1} \frac{x^{2k+1}}{(a^2+x^2)^{p+1}} \right) =$$

$$= \frac{2k+1}{2(p+1)} \int \frac{x^{2k}dx}{(a^2+x^2)^{p+1}} - \frac{1}{2(p+1)} \frac{x^{2k+1}}{(a^2+x^2)^{p+1}}.$$

Отже, для $k \geqslant 1$

$$\int \frac{x^{2k}dx}{(a^2+x^2)^{p+1}} = \frac{2k-1}{2p} \int \frac{x^{2(k-1)}dx}{(a^2+x^2)^{p}} - \frac{1}{2p} \frac{x^{2(k-1)+1}}{(a^2+x^2)^{p}}. \qquad (8)$$

Враховуючи співвідношення (8), знаходимо для $1 \leqslant k \leqslant p$

$$\int_0^\infty \frac{x^{2k}dx}{(a^2+x^2)^{p+1}} = \frac{2k-1}{2p} \int_0^\infty \frac{x^{2(k-1)}dx}{(a^2+x^2)^{p}} - \frac{1}{2p} \frac{x^{2k-1}}{(a^2+x^2)^{p}} \Bigg|_0^\infty =$$

$$= \frac{2k-1}{2p} \int_0^\infty \frac{x^{2(k-1)}dx}{(a^2+x^2)^{p}}. \qquad (9)$$

Отже, для $1 \leqslant m \leqslant n$

$$\int\limits_0^\infty \frac{x^{2m}dx}{(a^2+x^2)^n} = \frac{2m-1}{2(n-1)} \int\limits_0^\infty \frac{x^{2(m-1)}dx}{(a^2+x^2)^{n-1}}; \tag{10}$$

так само

$$\int\limits_0^\infty \frac{x^{2(k-1)}dx}{(a^2+x^2)^p} = \frac{2(k-1)-1}{2(p-1)} \int\limits_0^\infty \frac{x^{2((k-1)-1)}dx}{(a^2+x^2)^{p-1}} = \frac{2k-3}{2(p-1)} \int\limits_0^\infty \frac{x^{2(k-2)}dx}{(a^2+x^2)^{p-1}}.$$

Поєднуючи останню рівність з формулою (9), для $p \geqslant 2$ маємо

$$\int\limits_0^\infty \frac{x^{2k}dx}{(a^2+x^2)^{p+1}} = \frac{2k-1}{2p} \int\limits_0^\infty \frac{x^{2(k-1)}dx}{(a^2+x^2)^p} = \frac{2k-1}{2p}\frac{2k-3}{2(p-1)} \int\limits_0^\infty \frac{x^{2(k-2)}dx}{(a^2+x^2)^{p-1}} =$$

$$= \frac{(2k-1)(2k-3)}{2^2p(p-1)} \int\limits_0^\infty \frac{x^{2(k-2)}dx}{(a^2+x^2)^{p-1}}.$$

На підставі співвідношення (10) знаходимо

$$\int\limits_0^\infty \frac{x^{2(k-2)}dx}{(a^2+x^2)^{p-1}} = \frac{2(k-2)-1}{2(p-2)} \int\limits_0^\infty \frac{x^{2((k-2)-1)}dx}{(a^2+x^2)^{p-2}} = \frac{2k-5}{2(p-2)} \int\limits_0^\infty \frac{x^{2(k-3)}dx}{(a^2+x^2)^{p-2}}.$$

Поєднуючи останні рівності для $p \geqslant 3$, маємо

$$\int\limits_0^\infty \frac{x^{2k}dx}{(a^2+x^2)^{p+1}} = \frac{(2k-1)(2k-3)}{2^2p(p-1)} \int\limits_0^\infty \frac{x^{2(k-2)}dx}{(a^2+x^2)^{p-1}} =$$

$$= \frac{(2k-1)(2k-3)}{2^2p(p-1)}\frac{2k-5}{2(p-2)} \int\limits_0^\infty \frac{x^{2(k-3)}dx}{(a^2+x^2)^{p-2}} =$$

$$= \frac{(2k-1)(2k-3)(2k-5)}{2^3p(p-1)(p-2)} \int\limits_0^\infty \frac{x^{2(k-3)}dx}{(a^2+x^2)^{p-2}} =$$

$$= \frac{\prod_{i=1}^3(2k-(2i-1))}{2^3\prod_{i=1}^3(p-3+1)} \int\limits_0^\infty \frac{x^{2(k-3)}dx}{(a^2+x^2)^{p-3+1}}.$$

Продовжуючи за аналогією, для достатньо великих $p \geqslant k \geqslant m \geqslant 1$ отримуємо

$$\int\limits_0^\infty \frac{x^{2k}dx}{(a^2+x^2)^{p+1}} =$$

$$= \frac{(2k-1)(2k-3)(2k-5)...(2k-(2m-1))}{2^m p(p-1)(p-2)...(p-m+1)} \int\limits_0^\infty \frac{x^{2(k-m)}dx}{(a^2+x^2)^{p-m+1}} =$$

$$= \frac{\prod_{i=1}^m (2k-(2i-1))}{2^m \prod_{i=1}^m (p-i+1)} \int\limits_0^\infty \frac{x^{2(k-m)}dx}{(a^2+x^2)^{p-m+1}}. \tag{11}$$

Таким чином, на підставі (11) для $k=1,2,...,p-1$ маємо

$$\int\limits_0^\infty \frac{x^{2k}dx}{(a^2+x^2)^{p+1}} = \frac{\prod_{i=1}^k (2k-(2i-1))}{2^k \prod_{i=1}^k (p-i+1)} \int\limits_0^\infty \frac{dx}{(a^2+x^2)^{p-k+1}} =$$

$$= \frac{(2k-1)!!}{2^k \prod_{i=1}^k (p-i+1)} \int\limits_0^\infty \frac{dx}{(a^2+x^2)^{p-k+1}}, \tag{12}$$

де

$$(2k-1)!! = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot ... \cdot (2k-1)$$

добуток всіх непарних чисел до $(2k-1)$. Зокрема,

$$\int\limits_0^\infty \frac{x^{2p}dx}{(a^2+x^2)^{p+1}} = \frac{(2p-1)!!}{2^p \prod_{i=1}^p (p-i+1)} \int\limits_0^\infty \frac{dx}{(a^2+x^2)^{p-p+1}} =$$

$$= \frac{(2p-1)!!}{2^p p!} \int\limits_0^\infty \frac{dx}{(a^2+x^2)}. \tag{13}$$

Враховуючи, що

$$\int\limits_0^\infty \frac{dx}{(a^2+x^2)} = \frac{1}{a}\mathrm{arctg}\frac{x}{a}\bigg|_0^\infty = \frac{\pi}{2a}$$

та маючи на увазі співвідношення (7), (12) отримуємо

$$\int\limits_0^\infty \frac{x^{2k}dx}{(a^2+x^2)^{p+1}} = \frac{\prod_{i=1}^k (2k-(2i-1))}{2^k \prod_{i=1}^k (p-i+1)} \int\limits_0^\infty \frac{dx}{(a^2+x^2)^{p-k+1}} =$$

$$= \frac{(2k-1)!!}{2^k \prod_{i=1}^{k}(p-i+1)} \int\limits_0^{\infty} \frac{dx}{(a^2+x^2)^{p-k+1}};$$

$$\int\limits_0^{\infty} \frac{x^{2p}dx}{(a^2+x^2)^{p+1}} = \frac{(2p-1)!!}{2^p p!} \frac{\pi}{2a}.$$

Отже,

$$\int\limits_0^{\infty} \frac{(1+x^2)^p dx}{(a^2+x^2)^{p+1}} = \sum_{k=0}^{p} C_k^p \int\limits_0^{\infty} \frac{x^{2k}dx}{(a^2+x^2)^{p+1}} =$$

$$= \int\limits_0^{\infty} \frac{dx}{(a^2+x^2)^{p+1}} + \sum_{k=1}^{p-1} C_k^p \frac{\prod_{i=1}^{k}(2k-(2i-1))}{2^k \prod_{i=1}^{k}(p-i+1)} \int\limits_0^{\infty} \frac{dx}{(a^2+x^2)^{p-k+1}} +$$

$$+ \frac{(2p-1)!!}{2^p p!} \int\limits_0^{\infty} \frac{dx}{(a^2+x^2)} =$$

$$= \int\limits_0^{\infty} \frac{dx}{(a^2+x^2)^{p+1}} + \sum_{k=1}^{p-1} C_k^p \frac{(2k-1)!!}{2^k \prod_{i=1}^{k}(p-i+1)} \int\limits_0^{\infty} \frac{dx}{(a^2+x^2)^{p-k+1}} +$$

$$+ \frac{(2p-1)!!}{2^p p!} \frac{\pi}{2a}. \tag{14}$$

На підставі формули (120.9) роботи [2] для $k = 0, 1, 2, ..., p-1$ маємо

$$\int\limits_0^{\infty} \frac{dx}{(a^2+x^2)^{p-k+1}} = \frac{x}{2(p-k)(a^2+x^2)^{p-k}}\Bigg|_0^{\infty} + \frac{2(p-k)-1}{2(p-k)a^2} \int\limits_0^{\infty} \frac{dx}{(a^2+x^2)^{p-k}} =$$

$$= \frac{2(p-k)-1}{2(p-k)a^2} \int\limits_0^{\infty} \frac{dx}{(a^2+x^2)^{p-k}} = \frac{2(p-k)-1}{2(p-k)a^2} \times$$

$$\times \left[\frac{x}{2(p-k-1)(a^2+x^2)^{p-k-1}}\Bigg|_0^{\infty} + \frac{2(p-k-1)-1}{2(p-k-1)a^2} \int\limits_0^{\infty} \frac{dx}{(a^2+x^2)^{p-k-1}} \right] =$$

$$= \frac{2(p-k)-1}{2(p-k)a^2} \times \frac{2(p-k-1)-1}{2(p-k-1)a^2} \int\limits_0^{\infty} \frac{dx}{(a^2+x^2)^{p-k-1}} =$$

$$= \frac{2(p-k)-1}{2(p-k)a^2} \times \frac{2(p-k-1)-1}{2(p-k-1)a^2} \times \frac{2(p-k-2)-1}{2(p-k-2)a^2} \int\limits_0^\infty \frac{dx}{(a^2+x^2)^{p-k-2}} =$$

$$= \frac{2(p-k)-1}{2(p-k)a^2} \times ... \times \frac{2(p-k-(p-k-1))-1}{2(p-k-(p-k-1))a^2} \int\limits_0^\infty \frac{dx}{(a^2+x^2)^{p-k-(p-k-1)}} =$$

$$= \frac{\prod_{i=0}^{p-k-1} 2(p-k-i)-1}{\prod_{i=0}^{p-k-1} 2(p-k-i)a^2} \int\limits_0^\infty \frac{dx}{(a^2+x^2)} =$$

$$= \frac{\prod_{i=0}^{p-k-1}(2(p-k)-2i-1)}{(2a^2)^{p-k}(p-k)!} \frac{1}{a} \mathrm{arctg} \frac{x}{a}\bigg|_0^\infty = \frac{\pi}{2a} \frac{\prod_{i=0}^{p-k-1}(2(p-k)-2i-1)}{(2a^2)^{p-k}(p-k)!}.$$

Таким чином, для $k = 0, 1, 2, ..., p-1$

$$\int\limits_0^\infty \frac{dx}{(a^2+x^2)^{p-k+1}} = \frac{\pi}{2a} \frac{\prod_{i=0}^{p-k-1}(2(p-k)-2i-1)}{(2a^2)^{p-k}(p-k)!} = \frac{\pi}{2a} \frac{(2(p-k)-1)!!}{(2a^2)^{p-k}(p-k)!},$$

зокрема, для $k = 0$

$$\int\limits_0^\infty \frac{dx}{(a^2+x^2)^{p+1}} = \frac{\pi}{2a} \frac{\prod_{i=0}^{p-1}(2p-2i-1)}{(2a^2)^p p!} = \frac{\pi}{2a} \frac{(2p-1)!!}{(2a^2)^p p!}$$

і в силу (14), вважаючи, що $(-1)! = 0! = 1$

$$\int\limits_0^\infty \frac{(1+x^2)^p dx}{(a^2+x^2)^{p+1}} = \int\limits_0^\infty \frac{dx}{(a^2+x^2)^{p+1}} +$$

$$+ \sum_{k=1}^{p-1} C_k^p \frac{\prod_{i=1}^k (2k-(2i-1))}{2^k \prod_{i=1}^k (p-i+1)} \int\limits_0^\infty \frac{dx}{(a^2+x^2)^{p-k+1}} + \frac{(2p-1)!!}{2^p p!} \int\limits_0^\infty \frac{dx}{(a^2+x^2)} =$$

$$= \frac{\pi}{2a} \frac{(2p-1)!!}{(2a^2)^p p!} + \sum_{k=1}^{p-1} \frac{C_k^p (2k-1)!!}{2^k \prod_{i=1}^k (p-i+1)} \frac{\pi}{2a} \frac{(2(p-k)-1)!!}{(2a^2)^{p-k}(p-k)!} +$$

$$+ \frac{(2p-1)!!}{2^p p!} \frac{\pi}{2a} = \sum_{k=0}^{p} \frac{C_k^p (2k-1)!!}{2^k \prod_{i=1}^k (p-i+1)} \frac{\pi}{2a} \frac{(2(p-k)-1)!!}{(2a^2)^{p-k}(p-k)!} =$$

$$= \frac{\pi}{2a} \sum_{k=0}^{p} \frac{C_k^p (2k-1)!!(2(p-k)-1)!!}{2^k (2a^2)^{p-k}(p-k)! \prod_{i=1}^k (p-i+1)} =$$

$$= \frac{\pi}{2a} \sum_{k=0}^{p} \frac{C_k^p (2k-1)!!(2(p-k)-1)!!}{2^k (2a^2)^{p-k} (p-k)!(p-k+1)(p-k+2)...p} =$$

$$= \frac{\pi}{2a} \sum_{k=0}^{p} \frac{C_k^p (2k-1)!!(2(p-k)-1)!!}{2^k (2a^2)^{p-k} p!}.$$

Отже,

$$\int_0^\infty \frac{(1+x^2)^{\nu-1}dx}{(a^2+x^2)^\nu} = \frac{\pi}{2a(\nu-1)!} \sum_{k=0}^{\nu-1} \frac{C_k^{\nu-1}(2k-1)!!(2(\nu-1-k)-1)!!}{2^k (2a^2)^{\nu-1-k}}.$$

Тоді, на підставі (6)

$$\int_0^\pi \frac{dt}{(1+q^2-2q\cos t)^\nu} = \frac{2}{(1+q)^{2\nu}} \int_0^\infty \frac{(1+x^2)^{\nu-1}dx}{(a^2+x^2)^\nu} =$$

$$= \frac{2}{(1+q)^{2\nu}} \frac{\pi}{2a(\nu-1)!} \sum_{k=0}^{\nu-1} \frac{C_k^{\nu-1}(2k-1)!!(2(\nu-1-k)-1)!!}{2^k (2a^2)^{\nu-1-k}} =$$

$$= \frac{\pi}{(1+q)^{2\nu} a(\nu-1)!} \sum_{k=0}^{\nu-1} \frac{(\nu-1)!}{k!(\nu-1-k)!} \frac{(2k-1)!!(2(\nu-1-k)-1)!!}{2^k (2a^2)^{\nu-1-k}} =$$

$$= \frac{\pi}{(1+q)^{2\nu} a} \sum_{k=0}^{\nu-1} \frac{(2k-1)!!(2(\nu-1-k)-1)!!}{k!(\nu-1-k)! 2^k (2a^2)^{\nu-1-k}} =$$

$$= \frac{\pi}{(1+q)^{2\nu} a} \sum_{k=0}^{\nu-1} \frac{(2k-1)!!(2(\nu-1-k)-1)!!}{k!(\nu-1-k)! 2^k 2^{\nu-1-k} (a^2)^{\nu-1-k}} =$$

$$= \frac{\pi}{(1+q)^{2\nu} a} \sum_{k=0}^{\nu-1} \frac{(2k-1)!!(2(\nu-1-k)-1)!!}{2^k k! 2^{\nu-1-k} (\nu-1-k)! (a^2)^{\nu-1-k}}.$$

Оскільки

$$(2k-1)!! = \frac{(2k)!}{2^k k!}, (2(\nu-1-k)-1)!! = \frac{(2(\nu-1-k))!}{2^{\nu-1-k}(\nu-1-k)!},$$

то

$$\int_0^\pi \frac{dt}{(1+q^2-2q\cos t)^\nu} =$$

$$= \frac{\pi}{(1+q)^{2\nu}a}\sum_{k=0}^{\nu-1}\frac{(2k-1)!!(2(\nu-1-k)-1)!!}{2^k k! 2^{\nu-1-k}(\nu-1-k)!(a^2)^{\nu-1-k}} =$$

$$= \frac{\pi}{(1+q)^{2\nu}a}\sum_{k=0}^{\nu-1}\frac{(2k)!(2(\nu-1-k))!}{(2^k k! 2^{\nu-1-k}(\nu-1-k)!)^2(a^2)^{\nu-1-k}} =$$

$$= \frac{\pi}{(1+q)^{2\nu}a}\sum_{k=0}^{\nu-1}\frac{(2k)!(2(\nu-1-k))!}{(2^{\nu-1})^2(k!)^2((\nu-1-k)!)^2(a^2)^{\nu-1-k}} =$$

$$= \frac{\pi}{(2^{\nu-1})^2(1+q)^{2\nu}a}\sum_{k=0}^{\nu-1}\frac{(2k)!}{k!((\nu-1-k)!)}\frac{(2(\nu-1-k))!}{k!(\nu-1-k)!}\frac{1}{(a^2)^{\nu-1-k}}.$$

Оскільки $a = \frac{1-q}{1+q}$, то

$$\int_0^{\pi}\frac{dt}{(1+q^2-2q\cos t)^{\nu}} = \frac{\pi\frac{1+q}{1-q}}{2^{2(\nu-1)}(1+q)^{2\nu}}\sum_{k=0}^{\nu-1}C_{2k}^{k}C_{2(\nu-1-k)}^{\nu-1-k}\frac{1}{\left(\frac{(1-q)^2}{(1+q)^2}\right)^{\nu-1-k}} =$$

$$= \frac{\pi}{2^{2(\nu-1)}(1+q)^{2\nu-1}(1-q)}\sum_{k=0}^{\nu-1}C_{2k}^{k}C_{2(\nu-1-k)}^{\nu-1-k}\left(\frac{(1+q)^2}{(1-q)^2}\right)^{\nu-1-k} =$$

$$= \frac{\pi}{2^{2(\nu-1)}(1+q)^{2\nu-1}(1-q)}\left(\frac{1+q}{1-q}\right)^{2\nu-2}\sum_{k=0}^{\nu-1}C_{2k}^{k}C_{2(\nu-1-k)}^{\nu-1-k}\left(\frac{(1-q)^2}{(1+q)^2}\right)^{k} =$$

$$= \frac{\pi}{2^{2(\nu-1)}(1-q)^{2\nu-1}(1+q)}\sum_{k=0}^{\nu-1}\left[C_{2k}^{k}C_{2(\nu-k-1)}^{(\nu-k-1)}\left(\frac{1-q}{1+q}\right)^{2k}\right]. \qquad (15)$$

Далі застосуємо співвідношення (1.2.7.38) роботи [3, с. 627]

$$\sum_{k=0}^{n}C_{2k}^{k}C_{2(n-k)}^{(n-k)}x^{2k} = 2^{2n}x^nP_n\left(\frac{1}{2}(x+1/x)\right),$$

де $P_n(z)$ — поліном Лежандра. Тоді

$$\sum_{k=0}^{\nu-1}C_{2k}^{k}C_{2(\nu-1-k)}^{(\nu-1-k)}\left(\frac{1-q}{1+q}\right)^{2k} = 2^{2(\nu-1)}\left(\frac{1-q}{1+q}\right)^{\nu-1}P_{\nu-1}\left(\frac{1+q^2}{1-q^2}\right). \qquad (16)$$

На основі співвідношення (1.2.7.6) роботи [3, с. 625]

$$(1-y)^nP_n\left(\frac{1+y}{1-y}\right) = \sum_{k=0}^{n}(C_n^k)^2y^k.$$

Отже, для $y = q^2$, $n = \nu - 1$ маємо

$$P_{\nu-1}\left(\frac{1+q^2}{1-q^2}\right) = \frac{1}{(1-q^2)^{\nu-1}}\sum_{k=0}^{\nu-1}(C_{\nu-1}^k)^2 q^{2k}.$$

Тоді, на основі (16)

$$\sum_{k=0}^{\nu-1} C_{2k}^k C_{2(\nu-1-k)}^{(\nu-1-k)}\left(\frac{1-q}{1+q}\right)^{2k} = \frac{2^{2(\nu-1)}}{(1+q)^{2(\nu-1)}}\sum_{k=0}^{\nu-1}\left(C_{\nu-1}^k\right)^2 q^{2k}.$$

Поєднуючи останню рівність з (15), отримуємо

$$\int_0^\pi \frac{dt}{(1+q^2-2q\cos t)^\nu} =$$

$$= \frac{\pi}{2^{2(\nu-1)}(1-q)^{2\nu-1}(1+q)}\sum_{k=0}^{\nu-1}\left[C_{2k}^k C_{2(\nu-k-1)}^{(\nu-k-1)}\left(\frac{1-q}{1+q}\right)^{2k}\right] =$$

$$= \frac{\pi}{2^{2(\nu-1)}(1-q)^{2\nu-1}(1+q)}\cdot 2^{2(\nu-1)}\frac{1}{(1+q)^{2(\nu-1)}}\cdot\sum_{k=0}^{\nu-1}\left(C_{\nu-1}^k\right)^2 q^{2k} =$$

$$= \frac{\pi}{(1-q^2)^{2\nu-1}}\sum_{k=0}^{\nu-1}\left(C_{\nu-1}^k\right)^2 q^{2k}.$$

Теорема доведена.

3. Доведення інших рівностей для величин, які містять біноміальні коефіцієнти

Теорема 3. *Для будь-яких* $q \in (0;1)$, $r \in \mathbb{N}$

$$\left(\sum_{\nu=0}^{r}(-1)^\nu C_r^\nu q^\nu \cos\nu t\right)^2 + \left(\sum_{\nu=1}^{r}(-1)^\nu C_r^\nu q^\nu \sin\nu t\right)^2 =$$

$$= (1 - 2q\cos t + q^2)^r. \tag{17}$$

Доведення. Застосовуючи формули Ейлера, маємо

$$\left(\sum_{\nu=0}^{r} C_r^\nu(-1)^\nu q^\nu \cos\nu t\right)^2 + \left(\sum_{\nu=0}^{r} C_r^\nu(-1)^\nu q^\nu \sin\nu t\right)^2 =$$

$$= \left(\sum_{\nu=0}^{r}(-1)^{\nu}C_r^{\nu}q^{\nu}\left(\frac{e^{i\nu t}+e^{-i\nu t}}{2}\right)\right)^2 + \left(\sum_{\nu=0}^{r}(-1)^{\nu}C_r^{\nu}q^{\nu}\left(\frac{e^{i\nu t}+e^{-i\nu t}}{2i}\right)\right)^2 =$$

$$= \left[\left(\sum_{\nu=0}^{r}(-1)^{\nu}C_r^{\nu}q^{\nu}\frac{e^{i\nu t}}{2}\right) + \left(\sum_{\nu=0}^{r}(-1)^{\nu}C_r^{\nu}q^{\nu}\frac{e^{-i\nu t}}{2}\right)\right]^2 +$$

$$+ \left[\left(\sum_{\nu=0}^{r}(-1)^{\nu}C_r^{\nu}q^{\nu}\frac{e^{i\nu t}}{2}\right) - \left(\sum_{\nu=0}^{r}(-1)^{\nu}C_r^{\nu}q^{\nu}\frac{e^{-i\nu t}}{2}\right)\right]^2 =$$

$$= \left[\frac{1}{4}\left(\sum_{\nu=0}^{r}(-1)^{\nu}C_r^{\nu}(qe^{it})^{\nu}\right)^2 + \frac{1}{4}\left(\sum_{\nu=0}^{r}(-1)^{\nu}C_r^{\nu}(qe^{-it})^{\nu}\right)^2 +\right.$$

$$\left.+\frac{1}{2}\left(\sum_{\nu=0}^{r}(-1)^{\nu}C_r^{\nu}(qe^{it})^{\nu}\right)\cdot\left(\sum_{\nu=0}^{r}(-1)^{\nu}C_r^{\nu}(qe^{-it})^{\nu}\right)\right]+$$

$$+\left[\left(-\frac{1}{4}\right)\left(\sum_{\nu=0}^{r}(-1)^{\nu}C_r^{\nu}(qe^{it})^{\nu}\right)^2 + \left(-\frac{1}{4}\right)\left(\sum_{\nu=0}^{r}(-1)^{\nu}C_r^{\nu}(qe^{-it})^{\nu}\right)^2 -\right.$$

$$\left.-2\cdot\frac{1}{2i}\frac{1}{2i}\left(\sum_{\nu=0}^{r}(-1)^{\nu}C_r^{\nu}(qe^{it})^{\nu}\cdot\sum_{\nu=0}^{r}(-1)^{\nu}C_r^{\nu}(qe^{-it})^{\nu}\right)\right] =$$

$$= \left(\sum_{\nu=0}^{r}(-1)^{\nu}C_r^{\nu}(qe^{it})^{\nu}\right)\cdot\left(\sum_{\nu=0}^{r}(-1)^{\nu}C_r^{\nu}(qe^{-it})^{\nu}\right) =$$

$$= \left(\sum_{\nu=0}^{r}(-1)^{\nu}C_r^{\nu}(qe^{it})^{\nu}\right)\cdot\left(\sum_{\nu=0}^{r}(-1)^{\nu}C_r^{\nu}(qe^{-it})^{\nu}\right) =$$

$$= \left(1-qe^{it}\right)^r(1-qe^{-et})^r = \left((1-qe^{it})(1-qe^{-it})\right)^r =$$

$$= \left(1-qe^{it}-qe^{-it}+q^2e^{it}e^{-it}\right)^r = \left(1-2q\cos t+q^2\right)^r.$$

Таким чином, справедлива рівність (17). Теорема доведена.

Теорема 4. *Нехай* $q \in (0;1)$, *тоді для будь-якого* $n \in \mathbb{N}$

$$\operatorname{arctg}\left(\frac{-\sum_{\nu=1}^{n}(-1)^{\nu}C_n^{\nu}q^{\nu}\sin\nu t}{\sum_{\nu=0}^{n}(-1)^{\nu}C_n^{\nu}q^{\nu}\cos\nu t}\right) = n\operatorname{arctg}\frac{q\sin t}{1-q\cos t}. \tag{18}$$

Доведення. Застосуємо метод математичної індукції. Позначимо

$$\xi(t) = \frac{q\sin t}{1 - q\cos t}.$$

Оскільки

$$\operatorname{arctg}\left(\frac{-\sum_{\nu=1}^{1}(-1)^{\nu}C_1^{\nu}q^{\nu}\sin\nu t}{\sum_{\nu=0}^{1}(-1)^{\nu}C_1^{\nu}q^{\nu}\cos\nu t}\right) = \operatorname{arctg}\frac{q\sin t}{1 - q\cos t} = \operatorname{arctg}\xi(t),$$

то для $n = 1$ формула (18) є вірною.

Припустимо, що формула (18) є вірною для $n = r$. Тоді

$$\frac{-\sum_{k=1}^{r}(-1)^{k}C_r^{k}q^{k}\sin kt}{\sum_{k=0}^{r}(-1)^{k}C_r^{k}q^{k}\cos kt} = \operatorname{tg} r\xi(t).$$

Застосовуючи формулу тангенсу суми та виконуючи елементарні перетворення, отримуємо

$$\operatorname{tg}\left((r+1)\xi(t)\right) = \operatorname{tg}(r\xi(t) + \xi(t)) = \frac{\operatorname{tg} r\xi(t) + \operatorname{tg}\xi(t)}{1 - \operatorname{tg} r\xi(t)\operatorname{tg}\xi(t)} =$$

$$= \frac{\left[-\sum\limits_{k=1}^{r}(-q)^{k}C_r^{k}\sin kt\right](1 - q\cos t) + q\sin t\sum\limits_{k=0}^{r}(-1)^{k}C_r^{k}q^{k}\cos kt}{(1 - q\cos t)\sum\limits_{k=0}^{r}(-1)^{k}C_r^{k}q^{k}\cos kt + q\sin t\sum\limits_{k=1}^{r}(-1)^{k}C_r^{k}q^{k}\sin kt} =$$

$$= \frac{-\sum\limits_{k=1}^{r}(-q)^{k}C_r^{k}\sin kt - \sum\limits_{k=1}^{r}(-q)^{k+1}C_r^{k}\sin kt\cos t - \sum\limits_{k=0}^{r}(-q)^{k+1}C_r^{k}\cos kt\sin t}{\sum\limits_{k=0}^{r}(-q)^{k}C_r^{k}\cos kt + \sum\limits_{k=0}^{r}(-q)^{k+1}C_r^{k}\cos kt\cos t - \sum\limits_{k=1}^{r}(-q)^{k+1}C_r^{k}\sin kt\sin t} =$$

$$= \frac{-\sum\limits_{k=1}^{r}(-1)^{k}(C_r^{k} + C_r^{k-1})q^{k}\sin kt - C_{r+1}^{r+1}q^{r+1}\sin(r+1)t}{\sum\limits_{k=1}^{r}(-1)^{k}(C_r^{k} + C_r^{k-1})q^{k}\cos kt + C_{r+1}^{r+1}q^{r+1}\cos(r+1)t} =$$

$$= \frac{-\sum\limits_{k=1}^{r+1}(-1)^{k}C_{r+1}^{k}q^{k}\sin kt}{\sum\limits_{k=0}^{r+1}(-1)^{k}C_{r+1}^{k}q^{k}\cos kt}.$$

Таким чином, із припущення справедливості формули (18) для $n = r$ випливає, що вона є справедливою для $n = r+1$. Враховуючи, що вона справедлива для $n = 1$ робимо висновок, що формула (18) є справедливою для довільного $n \in \mathbb{N}$. Теорема доведена.

Література

1. *Новиков О.А.* Приближение классов интегралов Пуассона r-повторными суммами Валле Пуссена / О.А. Новиков, О.Г. Ровенская // Вісник Одеського національного університету. Математика і механіка. — 2014. — Т.19, вип. 3(23). — С. 14–26.
2. *Двайт Г.Б.* Таблицы интегралов и другие математические формулы : пер. с англ. / Г.Б. Двайт. — 5-е изд. — М. : Наука, 1977. — 228 с.
3. *Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И.* Интегралы и ряды: В 3-х томах. Том 1. Элементарные функции. — 2003. — 632 с.

Novikov O., Rovens'ka O., Kadubovs'kyi O., Shulik T., Kozachenko Yu.
Donbas State Teachers' Training University, Slovijans'k, Ukraine
Donbas State Engineering Academy, Kramators'k, Ukraine.

Binomial coefficients in extreme tasks of the theory of approximation of functions

With a help of method of mathematical induction some auxiliary formulas for values which are set by means of binominal coefficients are proved. The value of integral in the main member of the solution of an extreme task in the form of the sum of squares of binomial coefficients is calculated.

Keywords: *binomial coefficients, method of mathematical induction.*

УДК 517.5

Бодра В.І., Стьопкін А.В., Сипчук Є.Ю., Литвиненко О.В., Волік С.В.

[1] *асистент каф. вищої математики, Київський національний університет технологій і дизайну*

[2] *кандидат фізико-математичних наук, старший викладач кафедри алгебри, ДВНЗ «ДДПУ»*

[3−5] *студенти фізико-математичного факультету, ДВНЗ «ДДПУ»*

e-mail: sgpi@slav.dn.ua

АПРОКСИМАТИВНІ ВЛАСТИВОСТІ ПОВТОРНИХ ОПЕРАТОРІВ ФЕЙЄРА

Розглянуті питання наближення функцій, які можна подати у вигляді інтегралів Пуассона, 4-повторними операторами Фейєра. Для верхніх граней відхилень повторних операторів Фейєра на класі інтегралів Пуассона отримані асимптотичні формули, які за певних умов забезпечують розв'язок відповідної задачі Колмогорова-Нікольського.

Ключові слова: *ряд Фур'є, повторні оператори Фейєра, асимптотична формула*

Нехай

$$S_n(f;x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} (a_k(f)\cos kx + b_k(f)\sin kx)$$

— часткова сума ряду Фур'є сумовної 2π −періодичної функції $f \in L$. Суми Валле Пуссена функції $f \in L$ задаються співвідношенням

$$V_{n,p}(f,x) = \frac{1}{p} \sum_{k=n-p}^{n-1} S_k(f,x).$$

У випадку $p = n$ такий оператор називають методом Фейєра. Нехай p_1, p_2, p_3, p_4 — довільні натуральні числа такі, що $p_1 + p_2 + p_3 + p_4 = n + 3$. Тригонометричні поліноми, які задаються наступним співвідношенням

$$\sigma^{(4)}_{n,\overline{p}}(f;x) = \frac{1}{p_1} \sum_{k=n-p_1}^{n-1} \frac{1}{p_2} \sum_{m=k-p_2+1}^{k} \frac{1}{p_3} \sum_{j=m-p_3+1}^{m} \frac{1}{p_4} \sum_{r=j-p_4+1}^{j} S_r(f;x). \qquad (1)$$

будемо називати 4-повторними сумами Фейєра функції $f \in L$. У випадку $p_4 = 1$ суми $\sigma^{(4)}_{n,\overline{p}}(f;x)$ співпадають з потрійними сумами Фейєра $\sigma^{(3,-2)}_{n,\overline{p}}$, які вивчалися у роботі [1] та інших. У випадку $p_3 = 1$ потрійні оператори Фейєра співпадають з подвійними $\sigma^{(2,0)}_{n,\overline{p}}$, які вивчалися у роботі [2] та інших.

Наслідуючи О.І. Степанця [3], позначимо через S_M^0 множину функцій істотно обмежених і таких, що мають нульове середнє значення на періоді, а через $C_{\beta,\infty}^q$ – класи неперервних 2π –періодичних функцій $f(x)$, які можна подати у вигляді згортки

$$f(x) = A_0 + \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} \varphi(x+t) P_\beta^q(t)\, dt,$$

в якій $P_\beta^q(t) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} q^k \cos(kt + \frac{\beta\pi}{2})$ – ядро Пуассона, а функція $\varphi \in S_M^0$ називається $(\beta, q)-$ похідною функції $f(x)$ і позначається $\varphi(z) \equiv f_\beta^q(x)$.

Питанням наближення класів $C_{\beta,\infty}^q$ лінійними методами присвячено ряд робіт спеціалістів з теорії функцій. З бібліографією до цих питань можна ознайомитися у роботах [3]-[4]

В даній роботі отримані асимптотичні формули для верхніх граней відхилень тригонометричних поліномів $\sigma_{n,\overline{p}}^{(4)}$ на класах $C_{\beta,\infty}^q$ для $\beta = 1$

$$\mathcal{E}(C_{1,\infty}^q, \sigma_{n,\overline{p}}^{(4)}) \equiv \sup_{f\in C_{1,\infty}^q} ||f(x) - \sigma_{n,\overline{p}}^{(4)}(f,x)||_C.$$

Теорема 1. *Нехай* $q \in (0;1/4)$, $\Sigma_p \equiv \sum\limits_{j=1}^{4} p_j = n+3$, *тоді для* $n \to \infty$, $p_i \to \infty$, $i = 1,2,3,4$ *має місце асимптотична формула*

$$\mathcal{E}(C_{1,\infty}^q, \sigma_{n,\overline{p}}^{(4)}) = \frac{q[4+3q^2-q^4]}{\pi\prod_{i=1}^4 p_i(1-q^2)^4} + \frac{O(1)\sum_{i=1}^4 q^{p_i}}{\prod_{i=1}^4 p_i}, \tag{2}$$

де $O(1)$ *— величина, рівномірно обмежена за* n, q.

Доведення. Позначивши

$$\xi_\alpha(t;q) = (-1)^{(4-|\alpha|)} \sum_{j=0}^{5} (-1)^j C_5^j q^{n-\Sigma_p^\alpha+4+j} \sin(n-\Sigma_p^\alpha+4-j)t,$$

де $\Sigma_p^\alpha \equiv \sum\limits_{j\in\alpha} p_j$, $|\alpha|$ – кількість елементів множини $\alpha \subset \overline{4} \equiv \{1,2,3,4\}$, $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ – коефіцієнти біноміального розвинення, і наслідуючи [5], можемо записати

$$\delta_{n,\overline{p}}^{(4)}(f;x) \equiv f(x) - \sigma_n^{(4)}(f,x) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f_\beta^q(x+t)\frac{-Z_q^{10}(t)}{\prod_{i=1}^4 p_i}\sum_{\alpha\subset\overline{4}} \xi_\alpha(t;q)dt =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f_\beta^q(x+t)\frac{-Z_q^{10}(t)}{\prod_{i=1}^4 p_i}\ \xi_{\overline{4}}(t;q)dt + O(1)\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f_\beta^q(x+t)\frac{Z_q^{10}(t)}{\prod_{i=1}^4 p_i}\sum_{\alpha\subset\overline{4},\alpha\neq\overline{4}}\xi_\alpha(t;q)dt,$$

де

$$Z_q(x) = \frac{1}{\sqrt{1-2q\cos x+q^2}}.$$

Тоді, оскільки для $f\in S_M^0$ виконується $\operatorname{esssup}|f(x)|\leqslant 1$, то

$$\mathcal{E}(C_{1,\infty}^q;\sigma_{n,\overline{p}}^{(4)}) \leqslant \int\limits_{-\pi}^{\pi}\frac{\left|Z_q^{10}(t)\xi_{\overline{4}}(t;q)\right|}{\pi\prod_{i=1}^4 p_i}dt + \frac{O(1)}{\prod_{i=1}^4 p_i}\sum_{\alpha\subset\overline{4},\alpha\neq\overline{4}}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\left|Z_q^{10}(t)\xi_\alpha(t;q)\right|dt.$$

Відшукаємо функцію $\varphi(t)\in S_M^0$, для якої

$$\sup_{f\in C_{1,\infty}^q}\left\|\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f_1^q(x+t)\frac{-Z_q^{10}(t)}{\prod_{i=1}^4 p_i}\ \xi_{\overline{4}}(t;q)dt\right\|_C = \frac{1}{\pi\prod_{i=1}^4 p_i}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\varphi(t)Z_q^{10}(t)\xi_{\overline{4}}(t;q)dt.$$

Для цього вивчимо функцію $\xi_{\overline{4}}$. Виконавши елементарні перетворення, маємо

$$\xi_{\overline{4}}(t,q) = \frac{Z_q^{10}(t)}{\prod_{i=1}^4 p_i}(q\sin t - 10q^3\sin t + 10q^4\sin 2t - 5q^5\sin 3t + q^6\sin 4t) =$$

$$= \frac{Z_q^{10}(t)}{\prod_{i=1}^4 p_i}\zeta(\cos t,q)\sin t,$$

де

$$\zeta(z,q)\equiv[1-10q^2+5q^4]+[20q^3-4q^5]z-20q^4z^2+8q^5z^3.$$

Відшукаємо нулі функції $\zeta(z,q)$. Оскільки

$$256\zeta(z,1/4) = 101+79z-20z^2+2z^3 = (z+1)(2z^2-22z+101),$$

то $z=-1$ єдиний дійсний корінь рівняння $\zeta(z,1/4)=0$.

Оскільки для всіх $q\in(0;1/4)$ виконується $\nu_z'(z;q)>0$, то за теоремою про неявну функцію для $z\in[-1;1]$ на проміжку $q\in(0;1/4]$ співвідношення

$$\nu(z;q) = [1-10q^2+5q^4]+[20q^3-4q^5]z-20q^4z^2+8q^5z^3 = 0$$

задає функцію $z(q)$ неявним чином. Оскільки на проміжку $q\in(0;1/4]$ виконується $z'(q)>0$, то на цьому проміжку функція $z(q)$ зростає і досягає значення $z(1/4)=-1$. А це у свою чергу означає, що для будь-якого $q\in(0;1/4)$ функція $\zeta(\cos t,q)$ зберігає знак і виконується умова

$$|\zeta(\cos t,q)| = \zeta(\cos t,q);\quad q\in(0;1/4); t\in(-\pi;\pi).$$

Це означає, що для $q \in (0;1/4); t \in (0;\pi)$ функкція $\xi_{\overline{4}}(t;q)$ є додатною, а для $q \in (0;1/4); t \in (-\pi;0)$ вона є від'ємною. Отже для функції

$$\varphi(t) = \mathrm{sign}\xi_{\overline{4}}(t;q) = \begin{cases} 1, & t \in (0;\pi); \\ -1, & t \in (-\pi;0) \end{cases}$$

виконується $\varphi(t) \in S_M^0$ і

$$\sup_{f \in C^q_{1,\infty}} \left\| \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f_1^q(x+t) \frac{-Z_q^{10}(t)}{\prod_{i=1}^4 p_i} \; \xi_{\overline{4}}(t;q)dt \right\|_C = \frac{1}{\pi \prod_{i=1}^4 p_i} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(t) Z_q^{10}(t) \xi_{\overline{4}}(t;q)dt =$$

$$= q^2 J_2(t) + q^2[2-3q^2]J_3(t) + 3q^2(1-q^2)^2 J_4(t) - (1-q^2)^4 J_5(t), \qquad (3)$$

де

$$J_k(t) = \int \frac{dz}{(1-2qz+q^2)^k}.$$

Виконуючи обчислення

$$J_2(t)\Big|_0^\pi = \frac{-2}{(1-q^2)^2}; J_3(t)\Big|_0^\pi = \frac{-2-2q^2}{(1-q^2)^4}; J_4(t)\Big|_0^\pi = \frac{-2-\frac{20}{3}q^2-2q^4}{(1-q^2)^6};$$

$$J_5(t)\Big|_0^\pi = \frac{-2-\frac{27}{2}q^2-\frac{27}{2}q^4-2q^6}{(1-q^2)^8},$$

на підставі (3), маємо

$$J(t)\Big|_0^\pi = \frac{q[4+3q^2-q^4]}{\pi \prod_{i=1}^4 p_i (1-q^2)^4}.$$

Таким чином

$$\mathcal{E}(C^q_{1,\infty}; \sigma^{(4)}_{n,\overline{p}}) = \frac{q[4+3q^2-q^4]}{\pi \prod_{i=1}^4 p_i (1-q^2)^4} + O(1) \frac{\sum\limits_{\alpha \subset \overline{4}, \alpha \neq \overline{4}} |\xi_\alpha(t;q)|}{\pi \prod_{i=1}^4 p_i} \int_{-\pi}^{\pi} Z_q^{10}(t)dt. \qquad (4)$$

Оскільки, для $\alpha \subset \overline{4}, \alpha \neq \overline{4}$

$$|\xi_\alpha(t;q)| = q^{n-\Sigma_p^\alpha+4} |\sum_{j=0}^{5} (-1)^j C_5^j q^j \sin(n-\Sigma_p^\alpha+4-j)t| = O(1) q^{n-\Sigma_p^\alpha},$$

тож

$$\sum_{\alpha \subset \overline{4}, \alpha \neq \overline{4}} |\xi_\alpha(t;q)| = O(1) \sum_{\alpha \subset \overline{4}, \alpha \neq \overline{4}} q^{n-\Sigma_p^\alpha} = O(1) \sum_{i=1}^{4} q^{p_i}. \qquad (5)$$

Оскільки, $(1-2q\cos t+q^2)\geqslant(1-2q+q^2)=(1-q)^2$, то для $q\in(0;1/4)$ маємо

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi}\frac{dt}{(1-2q\cos t+q^2)^5}\leqslant\int\limits_{-\pi}^{\pi}\frac{dt}{(1-q)^{10}}\leqslant\frac{2\pi}{(3/4)^{10}}=O(1). \tag{6}$$

Підставивши оцінки (5), (6) в співвідношення (4), отримуємо асимптотичну формулу (2). Теорема доведена.

Література

1. *Новіков О.О.* Екстремальна задача для потрійних операторів Фейєра / О.О. Новіков, О.Г. Ровенська, Ю.О. Козаченко, [та ін.] // Збірник наукових праць фізико-математичного факультету ДДПУ. — 2016. — Вип. №6. — С. 13–18.
2. *Бодра В.І.* Екстремальна задача для подвійних операторів Фейєра на класах інтегралів Пуассона / В.І. Бодра, К.В. Безсмертна, О.В. Єгорова , [та ін.] // Збірник наукових праць фізико-математичного факультету ДДПУ. — 2015. — Вип. №5. — С. 20–22.
3. *Степанец А.И.* Решение задачи Колмогорова-Никольского для интегралов Пуассона непрерывных функций // Мат. сборник. — 2001. — Т. 192, № 1. — С. 113–138.
4. *Степанец А.И.* Приближения суммами Валле Пуссена / Степанец А.И., Рукасов В.И., Чайченко С.О. — К. : Ін-т математики НАН України, — 2007. — 386 с. — (Праці Ін-ту математики НАН України ; т. 68).
5. *Новиков О.А.* Приближение классов интегралов Пуассона r-повторными суммами Валле Пуссена / О.А. Новиков, О.Г. Ровенская // Вісник Одеського національного університету. Математика і механіка. — 2014. — Т.19, вип. 3(23). — С. 14–26.

Approximation properties of the repeat Fejer's operators.

Kyiv National University of Technologies and Design, Kyiv, Ukraine,
Donbas State Teachers' Training University, Slovijans'k, Ukraine.

Bodra V., Stepkin A., Sypchuk Ye., Lytvynenko O., Volik S.

Questions of approximations of functions, which can be set in the form of Poisson integrals, by 4-repeated Fejer operators are considered. Asymptotic formulas for upper bounds of inflexions of repeated Fejer operators on the class of Poisson integrals are obtained. These formulas provide the solution of a corresponding Kolmogorov-Nikol'skiy problem in certain conditions.

Keywords: *Fourier series, repeated sums of Fejer, asymptotic formula.*

УДК 517.5

Новіков О.О., Ровенська О.Г., Козаченко Ю.О., Вагнер Г.О., Чала В.В.

[1] *кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри математики, ДВНЗ «ДДПУ»*

[2] *кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри вищої математики, ДДМА*

[3–5] *студенти фізико-математичного факультету, ДВНЗ «ДДПУ»*

e-mail: sgpi@slav.dn.ua

ЕКСТРЕМАЛЬНА ЗАДАЧА ДЛЯ ПОДВІЙНИХ ОПЕРАТОРІВ ВАЛЛЕ ПУССЕНА НА КЛАСІ АНАЛІТИЧНИХ ФУНКЦІЙ

Вивчаються верхні грані відхилень подвійних операторів Фейєра на класі аналітичних функцій дійсної змінної, які не обов'язково можуть подаватися у вигляді інтегралів Пуассона. Отримані асимптотичні формули для цих величин за природних умов забезпечують розв'язки відповідної задачі Колмогорова-Нікольського.

Ключові слова: *ряд Фур'є, повторні суми Фейєра, асимптотична формула.*

Нехай L — множина сумовних 2π–періодичних функцій і

$$S[f]=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k(f)\cos kx+b_k(f)\sin kx)\equiv\sum_{k=0}^{\infty}A_k(f;x)$$

— ряд Фур'є функції $f\in L$. Позначимо через $S_n(f;x)$ часткові суми ряду Фур'є. Для фіксованого $p\in\mathbb{N}$ відповідні суми Валле Пуссена функції $f\in L$ задаються співвідношенням

$$V_{n,p}(f,x)=\frac{1}{p}\sum_{k=n-p}^{n-1}S_k(f,x).$$

Застосовуючи метод підсумовування Валле Пуссена двічі, отримуємо наступний метод побудови тригонометричних поліномів. Нехай p є довільним натуральним числом таким, що $2p<n$. Функції $f\in L$ поставимо у відповідність послідовність подвійних середніх Валле Пуссена

$$V^{(2)}_{n,p}(f,x)=\frac{1}{p}\sum_{k=n-p}^{n-1}V_{k+1,p}(f,x)=\frac{1}{p}\sum_{k=n-p}^{n-1}\frac{1}{p}\sum_{m=k-p+1}^{k}S_m(f,x)=$$

$$=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{n-1}\lambda_k^{(n)}(a_k(f)\cos kx+b_k(f)\sin kx),\qquad(1)$$

де

$$\lambda_k^{(n)} = \begin{cases} 1, & 1 \leqslant k \leqslant n-2p+1; \\ 1 - \frac{(k-n+2p)(k-n+2p-1)}{2p^2}, & n-2p+1 \leqslant k \leqslant n-p; \\ 1 - \frac{2p^2-(n-k)(n-k+1)}{2p^2}. & n-p \leqslant k \leqslant n-1. \end{cases} \qquad (2)$$

Наслідуючи О.І. Степанця [1, 2], класи періодичних функцій запровадимо наступним чином. Нехай $\psi(k)$ — довільна функція натурального аргументу і β — фіксоване дійсне число. Множина неперервних функцій $f(x)$, для яких ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\psi(k)} \left(a_k \cos(kx + \frac{\beta\pi}{2}) + b_k \sin(kx + \frac{\beta\pi}{2}) \right)$$

є рядом Фур'є деякої сумовної функції $f_\beta^\psi(x)$, позначається C_β^ψ. Якщо $f \in C_\beta^\psi$ і, крім того, $f_\beta^\psi(x) \in S_M^0$, тобто виконаними є умови

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} f_\beta^\psi(t)dt = 0, \quad \operatorname{ess\,sup}|f_\beta^\psi(t)| \leqslant 1,$$

то множина таких функцій позначається $C_{\beta,\infty}^\psi$.

Для фіксованого $q \in (0;1)$ позначимо символом D_q множину послідовностей $\psi(k)$, $k \in \mathbb{N}$, для яких має місце співвідношення

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\psi(k+1)}{\psi(k)} = q.$$

У цьому випадку множини $C_{\beta,\infty}^\psi$ складаються з 2π-періодичних функцій, які є звуженнями на дійсну ось функцій $F(z)$, аналітичних у смузі $|\Im z| < \ln q^{-1}$.

Важливим прикладом таких класів функцій є класи неперервних 2π-періодичних функцій $f(x)$, які можна подати у вигляді згортки

$$f(x) = A_0 + \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f_\beta^\psi(x+t) \sum_{k=1}^{\infty} q^k \cos(kt + \frac{\beta\pi}{2})dt.$$

В цьому випадку класи $C_{\beta,\infty}^\psi$ позначаються $C_{\beta,\infty}^q$ і називаються класами інтегралів Пуассона [3].

Задача наближення класів інтегралів Пуассона лінійними операторами має багату історію, пов'язану з іменами С.М. Нікольського, С.Б. Стечкина, О.І. Степанця, С.А. Сердюка, В.І. Рукасова, С.О. Чайченка та інших [3].

Для точних верхніх меж відхилень сум Фур'є на класах функцій $C^{\psi}_{\beta,\infty}$, $\psi(k) \in D_q$ у роботі [2] отримана при $n \to \infty$ асимптотична формула

$$\mathcal{E}(C^{\psi}_{\beta,\infty}; S_n) = \frac{8\psi(n)}{\pi^2} K(q) + O(1)\left(\frac{\psi(n)}{n(1-q)} + \frac{\psi(n)\varepsilon_n}{(1-q)^2}\right),$$

де

$$\varepsilon_n = \sup_{k \geqslant n} \left| \frac{\psi(k+1)}{\psi(k)} - q \right|, \tag{3}$$

$O(1)$ — величина, рівномірно обмежена щодо n, q, β і $\psi(k)$.

У роботі [4] отримано асимптотичні формули для точних верхніх меж відхилень сум Валле Пуссена на класах аналітичних функцій $C^{\psi}_{\beta,\infty}$, $\psi(k) \in D_q$, $q \in (0;1)$. Ці результати також було розповсюджено на двовимірні аналоги класів $C^{\psi}_{\beta,\infty}$, $\psi(k) \in D_q$, $q \in (0;1)$ у роботі [5].

В даній роботі отримані асимптотичні формули для верхніх граней відхилень тригонометричних поліномів $V^{(2)}_{n,p}(f,x)$ на класах $C^{\psi}_{\beta,\infty}$, де $\psi(k) \in D_q$, $q \in (0;1)$

$$\mathcal{E}(C^{\psi}_{\beta,\infty}, V^{(2)}_{n,p}) = \sup_{f \in C^{\psi}_{\beta,\infty}} ||f(x) - V^{(2)}_{n,p}(f,x)||_C.$$

Теорема 1. *Нехай $\psi(k) \in D_q$, $q \in (0;1)$, $\psi(k) > 0$, $\beta \in \mathbb{R}$. Тоді при $n - 2p \to \infty$, має місце асимптотична формула*

$$\mathcal{E}(C^{\psi}_{\beta,\infty}; V^{(2)}_{n,p}) = \frac{8\psi(n-2p+2)}{\pi p^2 (1+q)^3} \Pi\left(\frac{4q}{(1+q)^2}; \frac{2\sqrt{q}}{1+q}\right) +$$

$$+ O(1)\left(\frac{\psi(n-2p)}{p^2(n-2p)(1-q)^4} + \frac{\psi(n-2p)q^p}{p^2(1-q)^3} + \frac{\psi(n-2p)\varepsilon_{n-2p+2}}{(1-q)^2}\right), \tag{4}$$

де $\Pi(n;k)$ — повний еліптичний інтеграл третього роду, $O(1)$ — величина, рівномірно обмежена щодо n, q, β, p і $\psi(k)$, величини ε_m задані співвідношенням (3).

Доведення. Нехай величини $\lambda^{(n)}_k$ задані співвідношенням (2). Для $f \in C^{\psi}_{\beta,\infty}$ мають місце інтегральні зображення [1, 2]

$$\rho_{n,p}(f,x) \equiv f(x) - V^{(2)}_{n,p}(f,x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^{\psi}_{\beta}(x+t) \sum_{k=1}^{\infty} (1 - \lambda^{(n)}_k) \psi(k) \cos(kt + \frac{\beta\pi}{2}) dt.$$

Тоді, виконуючи перетворення, маємо

$$\rho_{n,p}(f,x) =$$

$$= \psi(n-2p+2)\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f_\beta^\psi(x+t) \sum_{k=n-2p+2}^{\infty}(1-\lambda_k^{(n)})\frac{\psi(k)}{\psi(n-2p+2)}\cos(kt+\frac{\beta\pi}{2})dt =$$

$$= \frac{\psi(n-2p+2)}{\pi}\left[\int\limits_{-\pi}^{\pi} f_\beta^\psi(x+t) \sum_{k=n-2p+2}^{\infty}(1-\lambda_k^{(n)})\left[\frac{\psi(k)}{\psi(n-2p+2)} - \frac{q^k}{q^{n-2p+2}}\right]\times\right.$$

$$\left.\times\cos(kt+\frac{\beta\pi}{2})dt + \int\limits_{-\pi}^{\pi} f_\beta^\psi(x+t) \sum_{k=n-2p+2}^{\infty}\frac{(1-\lambda_k^{(n)})q^k}{q^{n-2p+2}}\cos(kt+\frac{\beta\pi}{2})dt\right] =$$

$$= \frac{\psi(n-2p+2)}{q^{n-2p+2}}\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f_\beta^\psi(x+t) \sum_{k=n-2p+2}^{\infty}(1-\lambda_k^{(n)})q^k\cos(kt+\frac{\beta\pi}{2})dt+$$

$$+\psi(n-p_1-p_2+2)R_{n-2p}(f,x),$$

де

$$R_{n-2p}(f,x) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f_\beta^\psi(x+t)r_{n-2p}(t)dt, \quad r_{n-2p}(t) = \sum_{k=1}^{\infty}(1-\lambda_{n-2p+2+k}^{(n)})\times$$

$$\times\left[\frac{\psi(n-2p+2+k)}{\psi(n-2p+2)} - \frac{q^{n-2p+2+k}}{q^{n-2p+2}}\right]\cos((n-2p+2+k)t+\beta\pi/2). \qquad (5)$$

Розглянемо величину $r_{n-2p}(t)$. Оскільки

$$\prod_{l=0}^{k-1}\frac{\psi(n-2p+k+3)}{\psi(n-2p+l+2)} = \frac{\psi(n-2p+3)}{\psi(n-2p+2)}\frac{\psi(n-2p+4)}{\psi(n-2p+3)}\cdots\frac{\psi(n-2p+k+2)}{\psi(n-2p+k+1)} =$$

$$= \frac{\psi(n-2p+2+k)}{\psi(n-2p+2)},$$

то

$$r_{n-2p}(t) = \sum_{k=1}^{\infty}(1-\lambda_{n-2p+2+k}^{(n)})\left[\frac{\psi(n-2p+2+k)}{\psi(n-2p+2)} - \frac{q^{n-2p+k+2}}{q^{n-2p+2}}\right]\times$$

$$\times\cos((n-2p+2+k)t+\frac{\beta\pi}{2}) =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty}(1-\lambda_{n-2p+2+k}^{(n)})\left(\prod_{l=0}^{k-1}\frac{\psi(n-2p+k+3)}{\psi(n-2p+l+2)} - q^k\right)\cos((n-2p+2+k)t+\frac{\beta\pi}{2}).$$

Враховуючи співвідношення (3.5.9) роботи [1], маємо

$$\left|\prod_{l=0}^{k-1}\frac{\psi(n-2p+k+3)}{\psi(n-2p+l+2)}-q^k\right|\leqslant(q+\varepsilon_{n-2p+2})^k-q^k,$$

де величини ε_m задані співвідношенням (3). Тоді маючи на увазі умову $0\leqslant 1-\lambda_k^{(n)}\leqslant 1$, отримуємо

$$|r_{n-2p}(t)|\leqslant\sum_{k=1}^{\infty}\left|\prod_{l=0}^{k-1}\frac{\psi(n-2p+k+3)}{\psi(n-2p+l+2)}-q^k\right|\leqslant\sum_{i=2}^{\infty}(q+\varepsilon_{n-2p+1})^k-q^k\leqslant$$

$$\leqslant\frac{\varepsilon_{n-2p+2}}{((1-q)-\varepsilon_{n-2p+2}))(1-q)}.$$

Оскільки, для будь-якої $f\in C^{\psi}_{\beta,\infty}$ виконується $|f^{\psi}_{\beta}(x)|\leqslant 1$, то

$$||R_{n-2p}(f;x)||_C=||\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}f^{\psi}_{\beta}(x+t)r_{n-2p}(t)dt||_C=O(1)\frac{\varepsilon_{n-2p+2}}{(1-q)^2}.$$

Нехай $J^q_{\beta}(\varphi)$ є (β,q)–інтегралом функції $\varphi\in S^0_M$. Тоді

$$\rho_{n,p}(J^q_{\beta}(f^{\psi}_{\beta},x))=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}f^{\psi}_{\beta}(x+t)\sum_{k=2m-n+2}^{\infty}(1-\lambda_k^{(n)})q^k\cos(kt+\frac{\beta\pi}{2})dt.$$

Таким чином, маючи на увазі співвідношення (5) і (6), отримуємо

$$\rho_{n,p}(f,x)=\frac{\psi(n-2p+2)}{q^{n-2p+2}}\rho_{n,p}(J^q_{\beta}(f^{\psi}_{\beta},x))+\psi(n-2p+2)R_{n-2p}(f;x),$$

$$||\rho_{n,p}(f,x)||_C=\frac{\psi(n-2p+2)}{q^{n-2p+2}}||\rho_{n,p}(J^q_{\beta}(f^{\psi}_{\beta},x))||_C+O(1)\frac{\psi(n-2p)\varepsilon_{n-2p+2}}{(1-q)^2}.\quad(7)$$

В роботі [6] показано, що

$$\sup_{\varphi\in S^0_M}||\rho_{n,p}(J^q_{\beta}(\varphi,\cdot))||_C=\mathcal{E}(C^q_{\beta,\infty},V^{(2)}_{n,p})=\frac{8q^{n-2p+2}}{\pi p^2(1+q)^3}\Pi\left(\frac{4q}{(1+q)^2};\frac{2\sqrt{q}}{1+q}\right)+$$

$$+O(1)\left(\frac{q^{n-2p}}{p^2(n-2p)(1-q)^4}+\frac{q^{n-p}}{p^2(1-q)^3}\right).\quad(8)$$

Враховуючи, що

$$\sup_{f\in C^{\psi}_{\beta,\infty}}||\rho_{n,p}(J^q_{\beta}(f^{\psi}_{\beta},\cdot))||_C=\sup_{\varphi\in S^0_M}||\rho_{n,p}(J^q_{\beta}(\varphi,\cdot))||_C=\mathcal{E}(C^q_{\beta,\infty},V^{(2)}_{n,p}),$$

отримуємо для верхніх граней правої і лівої частин рівності (7)

$$\mathcal{E}(C^{\psi}_{\beta,\infty}, V^{(2)}_{n,p}) = \frac{\psi(n-2p+2)}{q^{n-2p+2}}\mathcal{E}(C^{q}_{\beta,\infty}, V^{(2)}_{n,p}) + O(1)\frac{\psi(n-2p)\varepsilon_{n-2p+2}}{(1-q)^2}.$$

Тож, підставивши в останню рівність співвідношення (8), отримуємо асимптотичну формулу (4). Теорема доведена.

Література

1. *Степанец А.И.* Методы теории приближений: В 2 ч. / Степанец А.И. — К. : Ин-т математики НАН Украины, 2002. — Ч. 1. — 427 с. — (Праці Ін-ту математики НАН України ; т. 40).
2. *Степанец А.И.* Приближения суммами Фурье и наилучшие приближения на классах аналитических функций / А.И. Степанец, А.С. Сердюк // Укр. мат. журн. — 2000. — Т. 52, № 3. — С. 375–395.
3. *Степанец А.И.* Решение задачи Колмогорова-Никольского для интегралов Пуассона непрерывных функций / Степанец А.И. // Мат. сборник. — 2001. — Т. 192, № 1. — С. 113–138.
4. *Рукасов В.И.* Приближение суммами Валле Пуссена классов аналитических функций / В.И. Рукасов // Укр. мат. журн. —2003. — Т. 55, № 6. — С. 806–816.
5. *Новіков О.О.* Наближення періодичних функцій високої гладкості прямокутними суммами Фур'є / О.О. Новіков, О.Г. Ровенська //Карпатські математичні публікації. — 2013. — Т. 5, № 1. С. 111–118.
6. *Ровенская О.Г.* Приближение интегралов Пуассона повторными суммами Валле Пуссена/ О.Г. Ровенская, О.А. Новиков // Нелінійні коливання. — 2010. — Т. 13, № 1. — С. 96–99.

An extreme tasks for double operators of Vallee Poussin on the class of analytic functions

Donbas State Teachers' Training University, Slovijans'k, Ukraine
Donbas State Engineering Academy, Kramators'k, Ukraine.

Novikov O., Rovens'ka O., Kozachenko Yu., Vagner G., Chala V.

Upper bounds of inflexions of double Fejer's operators on a group of analytical functions of a real variable which not necessarily can be set in the form of Poisson integrals are studied. The received asymptotic formulas for these values provide the solution of a corresponding Kolmogorov-Nikol'skiy problem in certain conditions.

Keywords: *Fourier series, repeated sums of Fejer, asymptotic formula.*

УДК 512.53

Рябухо О.М., Смоляков О.В., Турка Т.В.

[1] *кандидат фізико-математичних наук, доцент, «КДМТУ»*

[2] *студент 4 курсу фізико-математичного факультету, ДВНЗ «ДДПУ»*

[3] *кандидат фізико-математичних наук, доцент, «ДДПУ»*

e-mail: smolyakovalex@ukr.net, tvturka@gmail.com

ПРИКЛАДИ НАПІВГРУП ВІДПОВІДНОСТЕЙ

У даній статті наведено деякі приклади напівгруп відповідностей, а саме напігрупа відповідностей напівгрупи з нулем і нульовим множенням, напівгрупа відповідностей напівгрупи лівих (правих) нулів, яка є ізоморфною напівгрупі всіх бінарних відношень. Також описано спосіб отримання елементів напівгрупи відповідностей $S(G)$, для $G=(N,\circ)$, де $N=\{1,2,\ldots,n\}$, а дія $\circ$ визначається так: $a\circ b=\max\,(a,b)$.

Ключові слова: *напівгрупа відповідностей, напвігрупа лівих нулів, напівгрупа бінарних відношень.*

Вступ

Теорію напівгруп, як і більшість розділів алгебри, можна умовно поділити на дві великі частини. Першу з них можна назвати загальною або абстрактною. Це та частина теорії напівгруп, яка вивчає напівгрупи, виходячи з певних абстрактних обмежень, що покладаються на напівгрупи: регулярні напівгрупи, інверсні, моногенні, зі скороченням ... (цей список можна продовжувати дуже довго).

Другу частину теорії напівгруп можна назвати прикладною або конкретною. Вона вивчає конкретні приклади або класи напівгруп, що виникають як у самій теорії напівгруп, так і за її межами.

Зрозуміло, що ці частини теорії напівгруп тісно переплетені між собою: перша створює відповідний теоретичний апарат для другою, а друга дає ілюстративні приклади і ставить задачі для першої.

Дана робота належить до конкретної частини теорії напівгруп. Вона присвячена дослідженню напівгруп відповідностей універсальних алгебр.

Задачу вивчення напівгруп відповідностей універсальних алгебр свого часу ставив Курош О.Г. в своєму курсі загальної алгебри, який він читав на механіко-математичному факультеті Московського університету в 1969-70 навчальному році (див. [1]). Однак зроблено в цьому напрямку небагато.

Першими тут були роботи А.А. Іскандера [2], [3], учня О.Г. Куроша. Однак Іскандера цікавила лише будова напівгруп відповідностей як частково впорядкованих множин стосовно природного часткового порядку, який там є.

У роботі [4] показано, що коли G — група, то елементи напівгрупи $S(G)$ можна ототожнити з п'ятірками вигляду $(H_1, G_1, H_2, G_2, \varphi)$, де $H_1 \lhd G_1 < G$, $H_2 \lhd G_2 < G$, а φ — ізоморфізм факторгрупи G_1/H_1 на факторгрупу G_2/H_2. При цьому відповідний елемент напівгрупи $S(G)$ — як підмножина із $G \times G$ — має вигляд

$$(H_1, G_1, H_2, G_2, \varphi) = \bigcup_{a \in G_1} (aH_1 \times \varphi(aH_1)).$$

Множини вигляду $aH_1 \times bH_2$, де $bH_2 = \varphi(aH_1)$, будемо називати блоками елемента $A = (H_1, G_1, H_2, G_2, \varphi)$.

Також у [4] підраховано порядок напівгруп $S(G)$, коли G є скінченною групою. Зокрема, явно вказано порядок $|S(G)|$ для трьох класичних серій скінченних груп: циклічних, дієдральних та елементарних абелевих.

Будову відношень Гріна на напівгрупі відповідностей скінченної групи описано в роботі [5]. Для циклічних, дієдральних та елементарних абелевих груп обчислено також кількість та потужність $\mathcal{D}$-, $\mathcal{R}$-, $\mathcal{H}$-класів.

Описано умови ідемпотентності елементів і максимальні підгрупи $\mathcal{D}$-класу напівгрупи відповідностей скінченної групи. Доведена теорема про регулярність напівгрупи відповідностей [6].

У роботі [7] описано центр напівгрупи відповідностей скінченної групи. Введено означення суперцентрального автоморфізму скінченної групи. Показано, що кожний автоморфізм циклічної групи є суперцентральним. Доведено, що центр напівгрупи відповідностей скінченної групи ізоморфний групі суперцентральних ізоморфізмів групи.

1. Означення напівгрупи відповідностей.

Нехай G — універсальна алгебра. Якщо G не містить 0-арних операторів (тобто виділених елементів), то пусту підмножину ми також будемо вважати підалгеброю алгебри G. Розглянемо множину $S(G)$ всіх підалгебр декартового квадрату $G \times G$ алгебри G. На кожну підалгебру $H \leqslant G \times G$ можна дивитися як на бінарне відношення на множині G.

Твердження 1. *Множина $S(G)$ як множина бінарних відношень на алгебрі G утворює напівгрупу відносно деморганівського добутку відношень.*

Доведення. Оскільки деморганівський добуток відношень є асоціативним, то треба довести тільки замкненість множини $S(G)$ відносно деморганівського добутку.

Нехай H_1, H_2 — два елементи з $S(G)$, а ω — n-арна операція із сигнатури G. Розглянемо довільну n-ку елементів (a_1, c_1), $\ldots$, (a_n, c_n) із деморганівського добутку $H_1 \circ H_2$. Тоді існують такі елементи $b_1, \ldots, b_n$ із G, що

$$(a_1, b_1), \ldots, (a_n, b_n) \in H_1 \quad \text{і} \quad (b_1, c_1), \ldots, (b_n, c_n) \in H_2$$

Оскільки H_1 і H_2 — підалгебри з $G \times G$, то H_1 містить елемент $(\omega(a_1, \ldots, a_n), \omega(b_1, \ldots, b_n))$, а H_2 — елемент $(\omega(b_1, \ldots, b_n), \omega(c_1, \ldots, c_n))$. Але тоді

$$\omega((a_1, c_1), \ldots, (a_n, c_n)) = (\omega(a_1, \ldots, a_n), \omega(c_1, \ldots, c_n)) \in H_1 \circ H_2.$$

Отже, відношення $H_1 \circ H_2$ є замкненим відносно операції ω.
Із довільності ω випливає, що $H_1 \circ H_2$ є підалгеброю алгебри $G \times G$. $\Box$

Напівгрупу $S(G)$ називають *напівгрупою відповідностей* алгебри G.

Зауважимо, що $S(G)$ містить діагональ

$$\Delta = \{(a, a) | a \in G\},$$

яка є одиницею напівгрупи $\mathfrak{B}(G)$ усіх бінарних відношень на множині G. Оскільки $S(G) \leqslant \mathfrak{B}(G)$, то Δ буде одиницею і для напівгрупи $S(G)$. Таким чином напівгрупа відповідностей є напівгрупою з одиницею.

2. Приклади напівгруп відповідностей.

1. Нехай G — напівгрупа з нулем 0 і нульовим множенням (тобто $ab = 0$ для довільних $a, b \in G$). Тоді $G \times G$ також є напівгрупою з нульовим множенням (нулем буде елемент $(0, 0)$). Тому піднапівгрупами в $G \times G$ (тобто елементами напівгрупи $S(G)$) будуть усі підмножини з $G \times G$, які містять $(0, 0)$. Зокрема, якщо $|G| = n$, то $|S(G)| = 2^{n^2 - 1}$.

Нехай $\mathfrak{B}^0(G)$ — напівгрупа всіх бінарних відношень на множині $G \setminus \{0\}$. Розглянемо множину

$$\widetilde{\mathfrak{B}^0(G)} = \{\varphi \cup \{(0, 0)\} | \varphi \in \mathfrak{B}^0(G).\}$$

Легко бачити, що $\widetilde{\mathfrak{B}^0(G)}$ буде піднапівгрупою з $S(G)$, ізоморфною напівгрупі $\mathfrak{B}^0(G)$:

$$(\varphi \cup \{(0, 0)\}) \circ (\psi \cup \{(0, 0)\}) = (\varphi \circ \psi) \cup \{(0, 0)\}).$$

Таким чином, хоча напівгрупа G влаштована надзвичайно просто, будова її напівгрупи відповідностей $S(G)$ є дуже складною. Зауважимо, що дослідженню повної напівгрупи бінарних відношень присвячено багато робіт різних авторів (див. напр., [8] і вказану там літературу).

2. Нехай G — напівгрупа лівих нулів (тобто $ab = a$ для всіх $a, b \in G$). Оскільки $(a, b)(c, d) = (ac, bd) = (a, b)$, то кожна підмножина з $G \times G$ буде підалгеброю. Таким чином, напівгрупа відповідностей $S(G)$ збігається з множиною всіх підмножин множини G, а тому є ізоморфною напівгрупі $\mathfrak{B}(G)$ усіх бінарних відношень на напівгрупі G.

Цей факт у певному сенсі можна обернути:

Твердження 2. *Напівгрупа відповідностей $S(G)$ напівгрупи G буде збігатися з напівгрупою $\mathfrak{B}(G)$ усіх бінарних відношень на множині G тоді і тільки тоді, коли G – напівгрупа лівих (правих) нулів.*

Доведення. *Достатність* фактично вже доведена вище.

Необхідність. Якщо кожна підмножина з $G \times G$ є піднапівгрупою, то піднапівгрупою повинна бути і кожна двоелементна підмножина. Тому для довільних двох елементів (a, a) і (b, b) із $G \times G$ має бути

$$(a, a) \cdot (b, b) = (ab, ab) = (a, a) \quad \text{або} \quad (ab, ab) = (b, b).$$

Таким чином, для довільних елементів $a, b \in G$ маємо $ab = a$ або $ab = b$.

Нехай для деяких $a, b \in G$, $a \neq b$ маємо $ab = a$ (випадок $ab = b$ розглядається аналогічно). Покажемо, що тоді $xy = x$ для довільних $x, y \in G$.

Припустимо, що це не так. Тоді існують такі елементи $c \neq d$, що $cd = d$. Тут можливі такі випадки.

1) $\{a, b\} \cap \{c, d\} = \varnothing$. Тоді для підмножини $H = \{(a, c), (b, d)\}$ із $G \times G$ маємо:

$$(a, c) \cdot (b, d) = (ab, cd) = (a, d) \notin H.$$

Отже, підмножина H не є замкненою відносно множення, а тому не є піднапівгрупою. Таким чином, цей випадок неможливий.

2) $a = c$. Тоді для підмножини $H = \{(c, c), (b, d)\}$ маємо:

$$(c, c) \cdot (b, d) = (cb, cd) = (ab, cd) = (a, d) \notin H.$$

Отже, підмножина H знову не є замкненою відносно множення, а тому не є піднапівгрупою. Таким чином, і цей випадок неможливий.

Інші можливі випадки розглядаються аналогічно:

3) $a = d$. Тоді для $H = \{(d, c), (b, d)\}$ маємо:

$$(d, c) \cdot (b, d) = (db, cd) = (cb, cd) = (a, d) \notin H.$$

4) $b = c$. Тоді для $H = \{(a, b), (b, d)\}$ маємо:

$$(a, b) \cdot (b, d) = (ab, bd) = (ab, cd) = (a, d) \notin H.$$

5) $b = d$. Тоді для $H = \{(a, c), (d, d)\}$ маємо:

$$(a, c) \cdot (d, d) = (ad, cd) = (ab, cd) = (a, d) \notin H.$$

$\square$

3. Нехай $G = (N, \circ)$, де $N = \{1, 2, \ldots, n\}$, а дія $\circ$ визначається так: $a \circ b = \max\,(a, b)$. Тоді із рівності

$$(a_1, a_2) \circ (b_1, b_2) = (\max\,(a_1, b_1), \max\,(a_2, b_2))$$

випливає, що підмножина $H \subseteq G \times G$ буде піднапівгрупою тоді і тільки тоді, коли для довільних $(a_1, a_2), (b_1, b_2) \in G$ із $a_1 \geqslant b_1$ і $b_2 \geqslant a_2$ випливає, що $(a_1, b_2) \in H$.

Твердження 3. *Нехай* $0 \leqslant k \leqslant n$, $\{b_1, b_2, \ldots, b_k\} \subseteq N$, $b_1 < b_2 < \ldots < b_k$, $A_1, A_2, \ldots, A_k \subseteq N$, $a'_i = max\,A_i$, $(i = 1, 2, \ldots, k)$, $a''_i = min\,A_i$, $(i = 1, 2, \ldots, k)$, $a'_1 \leqslant a'_2 \leqslant \ldots a'_k$ *та для кожного* j $(1 < j \leqslant k)$ *виконується умова*

$$A_j \supseteq [a''_j, a'_j] \cap (\bigcup_{i<j} A_i). \tag{1}$$

Тоді множина

$$C = \bigcup_{i=1}^{k} (A_i, b_i)$$

буде елементом напівгрупи $S(G)$ *і кожен елемент із* $S(G)$ *можна отримати в такий спосіб.*

Доведення. Покажемо спочатку, що множина G є піднапівгрупою в $G \times G$. Справді, нехай (a_i, b_i), $(a_j, b_j) \in G$ і $a_i \geqslant a_j$, $b_j \geqslant b_i$. Тоді

$$(a_i, b_i) \cdot (a_j, b_j) = (a_i, b_j).$$

Тому треба показати, що $a_i \in A_j$. Це очевидно, якщо $i = j$. Нехай тепер $i \neq j$. Тоді з нерівності $b_j > b_i$ випливає, що $j > i$. Крім того, з нерівності $a_i \geqslant a_j$ випливає, що $a_i \geqslant a''_j$. Звідси і з нерівності $a_i \leqslant a'_i \leqslant a'_j$ отримуємо, що $a_i \in [a''_j, a'_j]$. Але тоді з умови (1) випливає, що $a_i \in A_i$, а тому $(a_i, b_j) \in C$.

Навпаки, нехай $C \subseteq G \times G$ — піднапівгрупа. Очевидно, що пуста підмножина із $G \times G$ одержується в потрібний спосіб при $k = 0$. Тому далі можна вважати, що $C \neq \varnothing$.

Нехай $\{b_1, b_2, \dots, b_k\}$ $(b_1 < b_2 < \dots < b_k)$ — проекція C на другий множник.

Покладемо для кожного $i = 1, 2, \dots, k$ $A_i = \{a | (a, b_i) \in C\}$, $a'_i = \max A_i$, $a''_i = \min A_i$.

Нехай $i < j$. Тоді для елементів (a'_i, b_i) та (a'_j, b_j) маємо:

$$(a'_i, b_i) \cdot (a'_j, b_j) = (\max (a'_i, a'_j), b_j).$$

Оскільки $\max (a'_i, a'_j) \in A_j$, то $\max (a'_i, a'_j) \leqslant a'_j$, звідки $a'_i \leqslant a'_j$. Отже,

$$a'_1 \leqslant a'_2 \leqslant \dots \leqslant a'_k.$$

Лишилось довести умови (1).

Нехай $a \in [a''_j, a'_j] \cap (\cup_{i<j} A_i)$. Тоді існує такий номер $i_0 < j$, що $(a, b_{i_0}) \in C$. Далі маємо

$$(a, b_{i_0}) \cdot (a''_j, b_j) = (a, b_j).$$

Отже, $(a, b_i) \in C$, а тому $a \in A_j$. $\square$

Наслідок 1. *Нехай* $G = (\{1, 2, \dots, n\}, \circ)$, *де* $a \circ b = max(a, b)$. *Тоді порядок напівгрупи відповідностей* $S(G)$ *задовольняє нерівність*

$$|S(G)| \geqslant 1 + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \sum_{1 \leqslant a_1 \leqslant a_2 \leqslant \dots \leqslant a_k \leqslant n} a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_k. \tag{2}$$

Доведення. Досить показати, що для деякого k, $1 \leqslant k \leqslant n$ конструкція із попереднього твердження дає не менше ніж

$$\binom{n}{k} \sum_{1 \leqslant a_1 \leqslant a_2 \leqslant \dots \leqslant a_k \leqslant n} a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_k$$

різних елементів напівгрупи $S(G)$. Справді, множину $\{b_1, b_2, \dots, b_k\} \subseteq N$ може вибрати $\binom{n}{k}$ способами.

Далі для фіксованої множини $\{b_1, b_2, \dots, b_k\}$ вибираємо набір

$$1 \leqslant a_1 \leqslant a_2 \leqslant \dots \leqslant a_k \leqslant n.$$

Для кожного i, $1 \leqslant i \leqslant k$, множину A_i вибираємо як множину вигляду

$$A_i = [a''_i, a_i], \;\; 1 \leqslant a''_i \leqslant a_i.$$

Очевидно, що тоді $\max A_i = a_i$, а саму множину A_i можна вибрати a_i способами. Умова (1) тепер виконується очевидним чином, бо при нашому виборі A_i маємо $A_i = [a_i'', a_i']$.

Таким чином, для кожного такого набору множин A_i одержуємо елемент із $S(G)$, різним наборам відповідають різні елементи, а різних наборів A_i , $1 \leqslant i \leqslant k$, буде $a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_k$. $\square$

Зауваження. Безпосереднім обчисленням перевіряється, що при $n = 1, 2$ в наслідку 1. маємо рівність. При $n \geqslant 3$ напівгрупа $S(G)$ містить елемент

$$H = \{(1,1),(1,2),(3,2),(3,3)\}.$$

Оскільки в цьому випадку $A_2 = \{1, 3\}$ не є інтервалом, то H не одержується конструкцією із доведення наслідку 1. Отже, при $n \geqslant 3$ нерівність (2) буде строгою.

Література

1. *Курош А.Г.* Общая алгебра. Лекции 1969–1970 учебного года. / А.Г. Курош — М.: Наука, 1974. — 159 с.
2. *Искандер А.А.* Структура соответствий универсальной алгебры / А.А. Искандер // Известия АНСССР: серия математическая. — 1965. — Т. 29, Вып. 6. — С. 1357–1372.
3. *Искандер А.А.* Частичные универсальные алгебры с задаными структурами подалгебр и соответствий / А.А. Искандер // Математический сборник. — 1966. — Т. 70 (112):3. — С. 438–456.
4. *Ганюшкін О.Г., Турка Т.В.* Порядок напівгрупи відповідностей скінченної групи // Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка, вип. № 3. Серія: фізико-математичні науки, 2009. — С. 9–13.
5. *Турка Т.В.* Відношення Гріна на напівгрупі відповідностей скінченної групи // Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка, вип. № 4. Серія: фізико-математичні науки, 2010. – С. 38–42.
6. *Рябухо О.М.* Напівгрупи відповідностей груп та напівгруп / О.М. Рябухо, Т.В. Турка, К.О. Судіна, Г.В. Плюшко // Збірник наукових праць фізико-математичного факультету ДДПУ. – 2014. – Вип. № 4. – С. 58–62.
7. *Турка Т.В.* Центр напівгрупи відповідностей // Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка, вип. № 2. Серія: фізико-математичні науки, 2015. — С. 41–44.
8. *Plemmons R.J.* On the semigroup of binary relations / R.J. Plemmons, M.T. West // Pacific Journal of Mathematics. — 1971. — Vol. 35 (3). — P. 743–753.

Ryabukho O.M., Smolyakov A.V., Turka T.V.
Donbas State Teachers' Training University, Slovijans'k, Ukraine.

Examples of semigroup of correspondence

This article contains some examples of semigroup of correspondences, namely, the semigroup of correspondence of a semigroup with zero and zero multiplication, the semigroup of correspondence of the semigroup of left (right) zeros, which is isomorphic to the semigroup of all binary relations. The method of obtaining elements of the semigroup of correspondences $S(G)$ is also described, where $G = (N, \circ)$ where $N = \{1, 2, \dots, n\}$, and the operation of $\circ$ is defined as: $a \circ b = \max\,(a, b)$. $N = 1, 2, ..., n$.

Keywords: *the semigroup of correspondence, semigroup of left zeros, semigroup of binary relations*

ФІЗИКА. МЕТОДИКА ВИКЛАДАННЯ ФІЗИКИ І АСТРОНОМІЇ В ЗОШ ТА ВНЗ

УДК 539.4

Надточий В.А., Уколов А.И., Баранюкова И.С.

[1] *доктор физико-математических наук, заведующий кафедры физики, ГВУЗ «ДГПУ»*

[2] *кандидат физико-математических наук, ассистент кафедры высшей математики и физики, Керченский государственный морской технологический университет*

[3] *студентка 5 курсу физико-математического факультета, ГВУЗ «ДГПУ»*

e-mail: fiziksgpu@ya.ru

УСТОЙЧИВОСТЬ ДИСЛОКАЦИЙ, СОЗДАННЫХ АКТИВНЫМ ИСТОЧНИКОМ В ТОНКОМ ПРИПОВЕРХНОСТНОМ СЛОЕ КРИСТАЛЛА ПОЛУПРОВОДНИКА

Рассмотрена модель, в которой источник дислокаций заблокирован испущенными от него дислокациями в приповерхностном слое и они находятся под действием дислокационных сил изображения. Вычислены напряжения, действующие на дислокационный источник со стороны испущенной петли, полупетли и от дислокаций, являющихся их изображением. Показано, что при заданном внешнем напряжении силы изображения способны вывести на поверхность лишь малые дислокационные петли из глубины, не большей нескольких сотен ангстрем.

Ключевые слова: *дислокация, полупроводник, силы изображения, эллиптический интеграл, диффузия, структура.*

Введение

Ковалентные кристаллы германий и кремний абсолютно хрупкие при температуре ниже 0,35 температуры плавления. Вместе с тем прецизионные измерения, выполненные с использованием высокочувствительных датчиков деформации, электрические измерения структурно чувствительных характеристик, структурные исследования с помощью оптической и электронной микроскопии, а также рентгеновский микроанализ дали возможность обнаружить ряд аномальных деформационных эффектов, проявляющихся в тонких приповерхностных слоях полупроводников, толщиной в несколько микрометров [1, 2]. Среди них можно отметить явление диффузионного массопереноса, являющегося основой диффузионно-дислокационного механизма микропластичности. В работе [3] впервые предложен новый физический механизм формирования квантово-размерных структур на поверхности германия за счет дислокационно-поверхностной диффузии. Массивы таких низкоразмерных ($\leqslant$ 50 нм) образований могут быть использованы в квантовых компьютерах.

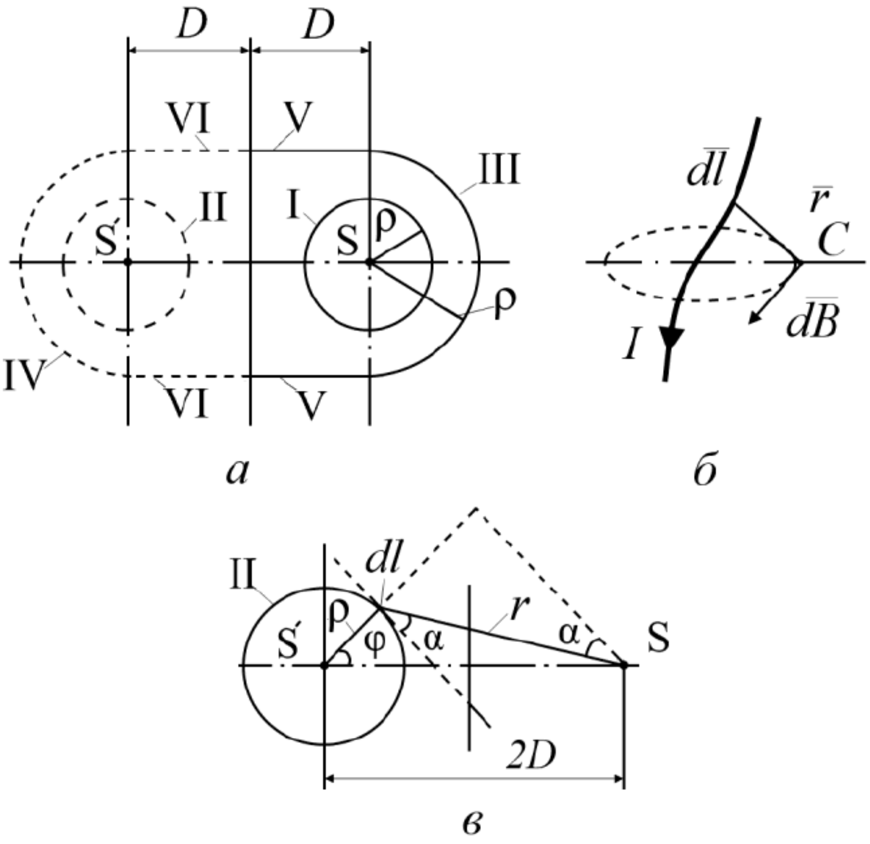


Рис. 1: *а* – дислокационный источник S находится под действием напряжений от собственных дислокаций и дислокации зеркального источника S'; *б* – электромагнитная модель, в которой силовая характеристика $d\overline{B}$ представляется родственной функции $d\overline{\tau}$ в модели *а*; *в* – вспомогательное построение для расчета τ_b^{II}

Практическая реализация полупроводниковых наноструктур требует разработки способа создания высокой плотности дислокаций в тонком слое кристалла, а также исследования их устойчивости при действии сил зеркального изображения, стремящихся вытянуть их на поверхность. В данной работе для этого воспользовались уравнениями [4], где в рамках линейной теории упругости изотропной среды определено поле напряжений дислокации, перпендикулярной в месте выхода к свободной поверхности (рис. 1). Способ создания такого вида петель рассмотрен в работах [1, 3].

Основная часть

Представляет интерес провести сравнительную оценку эффективных напряжений, необходимых для работы приповерхностных и объемных дислокационных источников одинаковой геометрии и природы, а также сравнить соответствующие величины обратных напряжений, запирающих эти источники. Такая сравнительная оценка величин обратных и соответствующих эффективных напряжений, действующих на источник, испустивший одну круговую петлю или одну полупетлю вблизи свободной поверрхности и в объеме кристалла (рис. 1), была нами сделана для *Ge*. При этом использовалась методика расчета, предложенная в [4].

Согласно Пичу и Келеру [5], сдвиговое напряжение $\overline{d\tau}$ в том месте $\overline{r}$, где действуют напряжения от элемента дислокационной петли $\overline{dl}$, определяется как

$$\overline{d\tau} = \frac{Gb}{4\pi}\frac{\left[\overline{dl}\times\overline{r}\right]}{r^3}. \tag{1}$$

Это уравнение подобно выражению для вектора магнитной индукции $d\overline{B}$ (силовой характеристики поля) в некоторой точке C, создаваемой витком с током величиной J (рис. 1):

$$d\overline{B} = \frac{\mu_0\mu J}{4\pi}\frac{\left[\overline{dl}\times\overline{r}\right]}{r^3}. \tag{2}$$

Величины обратных напряжений, действующих от участков дислокаций I, II, III, IV, V и VI (рис. 1) на источник S внутри кристалла, можно расчитать интегрированием уравнения (1). Тогда обратное напряжение петли I

$$\tau_b^I = \frac{Gb}{4\pi}\int\limits_0^{2\pi\rho}\frac{\rho\sin\left(\widehat{dl,\rho}\right)}{\rho^3}\,dl = \frac{Gb}{4\pi}\int\limits_0^{2\pi}\frac{d\varphi}{\rho} = \frac{Gb}{2\rho}. \tag{3}$$

Здесь $dl = \rho d\varphi$

$$\tau_b^{II} = -\frac{Gb}{4\pi}\int\frac{r\sin\left(\widehat{dl,r}\right)}{r^3}\,dl.$$

Перейдем от переменного r к ρ:

$$r = \sqrt{\rho^2+4D^2-4D\rho\cos\varphi}.$$

Из рис. 1, *в* $r\sin\left(\widehat{dl,r}\right) = r\sin\alpha = 2D\cos\varphi-\rho$; тогда подстановка в τ_b^{II} дает

$$\tau_b^{II} = -\frac{Gb}{4\pi}\int\limits_0^{2\pi}\left\{\frac{\rho^2-2D\rho\cos\varphi}{\left(\rho^2+4D^2-4D\rho\cos\varphi\right)^{\frac{3}{2}}}\right\}d\varphi \tag{4}$$

Перейдем к новым параметрам и преобразуем выражение, стоящее в знаменателе:

$$\varphi = \pi - 2\beta;\ \cos\varphi = -\cos 2\beta;\ d\varphi = -2d\beta;\ \cos 2\beta = 1 - \sin^2\beta.$$

При $\varphi = 0\ \beta = \pi/2,\ \varphi = 2\pi\ \beta = -\pi/2$. Тогда после преобразований

$$\rho^2 + 4D^2 - 4D\rho\cos\varphi = (\rho + 2D)^2[1 - K^2\sin^2\beta]. \tag{5}$$

Здесь

$$k^2 = \frac{8D\rho}{(\rho + 2D)^2}; \tag{6}$$

после преобразования имеем

$$\tau_b^{II} = -\frac{Gb}{4\pi}\int\limits_0^{\pi/2}\frac{\rho^2 + 2D\rho - 4D\rho\sin^2\beta}{\left\{(\rho^2 + 2D)^2[1 - k^2\sin^2\beta]\right\}^{\frac{3}{2}}}d\beta. \tag{7}$$

Интеграл (7) можно выразить как

$$\tau_b^{II} = \frac{Gb}{4\pi}\,\rho\,\frac{\partial J_1}{\partial\rho},\ \text{где}\ J_1 = \frac{4}{\rho + 2D}\int\limits_0^{\pi/2}\frac{d\beta}{[1 - k^2\sin^2\beta]^{\frac{1}{2}}}. \tag{8}$$

Проверим, выполняется ли это соотношение

$$J_1 = \frac{4}{\rho + 2D}\int\limits_0^{\pi/2}\frac{d\beta}{[1 - k^2\sin^2\beta]^{\frac{1}{2}}} = 4\int\limits_0^{\pi/2}\frac{d\beta}{[(\rho + 2D)^2 - 8D\rho\sin^2\beta]^{\frac{1}{2}}},$$

$$\frac{dJ_1}{d\rho} = -\frac{1}{\rho}\int\limits_0^{\pi/2}\frac{\rho^2 + 2D\rho - 4D\rho\sin^2\beta}{[(\rho + 2D)^2\cdot(1 - k^2\sin^2\beta)]^{\frac{3}{2}}}d\beta. \tag{9}$$

Сравнивая правые подынтегральные части уравнений (7) и (9), находим, что они полностью идентичны, откуда следует, что действительно

$$\tau_b^{II} = -\frac{Gb}{4\pi}\,\rho\,\frac{\partial J_1}{\partial\rho}.$$

Решим интеграл

$$J_1 = \frac{4}{\rho + 2D}\int\limits_0^{\pi/2}\left(1 - k^2\sin^2\beta\right)^{-\frac{1}{2}}d\beta = \frac{4}{\rho + 2D}F\left(\frac{\pi}{2}, k\right)$$

Здесь $F\left(\dfrac{\pi}{2},k\right)$ – полный эллиптический интеграл I рода [6],

$$F\left(\frac{\pi}{2},k\right)=\frac{\pi}{2}\left[1+2\frac{k^2}{8}+9\left(\frac{k^2}{8}\right)^2+\ldots\right],$$
$$J_1=\frac{4\pi}{2(\rho+2D)}\left[1+2\frac{k^2}{8}+9\left(\frac{k^2}{8}\right)^2+\ldots\right]$$

После подстановки значения k^2 (см. [6]), преобразований и дифферненцирования получим

$$\frac{\partial J_1}{\partial\rho}=-\frac{\pi\rho}{8D^3};\ \tau_b^{II}=\frac{Gb}{4\pi}\,\rho\,\frac{\partial J_1}{\partial\rho}=-\frac{Gb\rho^2}{32D^3}. \tag{10}$$

Напряжение τ_b^{III} определяется аналогично τ_b^{I}:

$$\tau_b^{III}=\frac{Gb}{4\pi}\int\limits_0^{\pi}\frac{1}{\rho}d\varphi=\frac{Gb}{4\rho}. \tag{11}$$

Выражение для τ_b^{IV} находится аналогично τ_b^{II} путем перехода к эллептическому интегралу II рода:

$$\tau_b^{IV}=-\frac{Gb}{4\pi}\int\limits_{\pi/2}^{3\pi/2}\frac{\rho^2-2D\rho\cos\varphi}{(\rho^2+4D^2-4D\rho\cos\varphi)^{\frac{3}{2}}}d\varphi=\frac{Gb}{4\pi}\,\rho\,\frac{\partial J_2}{\partial\rho}, \tag{12}$$

где $J_2=\frac{4}{\rho+2D}\int\limits_0^{\pi/4}(1-k^2\sin^2\beta)^{-\frac{1}{2}}d\beta;\ k^2=\dfrac{8D\rho}{(\rho+2D)^2}$.

Правая подынтегральная часть выражения J_2 представляет эллиптический интеграл $F=(\pi/4,k)$, который находится так же, как это было сделано ранее для τ_b^{II}. После подстановки значения K, преобразований и дифференцирования получим

$$\tau_b^{IV}=-\frac{Gb}{4\pi}\left[\frac{\pi\rho}{(\rho+2D)^2}-\frac{0{,}4(2D\rho)^{\frac{1}{2}}}{(\rho+2D)^2}+\frac{1{,}6(2D\rho)^{\frac{1}{2}}\rho}{(\rho+2D)^3}\right]. \tag{13}$$

Путем несложных тригонометрических преобразований находятся τ_b^V и τ_b^{VI}

$$\tau_b^{VI} = -2\frac{Gb}{4\pi} \int\limits_{\mathrm{arctg}\left(\frac{D}{\rho}\right)}^{\mathrm{arctg}\left(\frac{2D}{\rho}\right)} \frac{\cos\varphi}{\rho} d\varphi =$$

$$= -\frac{Gb}{2\pi\rho} \left\{ \sin\left[\mathrm{arctg}\left(\frac{2D}{\rho}\right)\right] - \sin\left[\mathrm{arctg}\left(\frac{D}{\rho}\right)\right] \right\}, \qquad (14)$$

$$\tau_b^{V} = 2\frac{Gb}{4\pi} \int\limits_{0}^{\mathrm{arctg}\left(\frac{D}{\rho}\right)} \frac{\cos\varphi}{\rho} d\varphi = \frac{Gb}{2\pi\rho} \sin\left[\mathrm{arctg}\left(\frac{2D}{\rho}\right)\right]. \qquad (15)$$

В выражениях для τ_b^V и τ_b^{VI} учтено действие одновременно двух участков петель V и VI (рис. 1).

Рассмотрим теперь работу двух дислокационных источников: одного в объеме и другого вблизи поверхности кристалла, которые генерируют дислокационные петли. Предположим, что на начальной стадии работы источников каждый из них излучил по одной петле. Тогда обратное запирающее напряжение, действующее на источник в объеме кристалла будет равно τ_b^I, а на источник вблизи поверхности — $\tau_G = \tau_b^I - \tau_b^{II} = \dfrac{Gb}{2\rho} - \dfrac{Gb\rho^2}{32D^3}$, т.е. меньше на величину τ_b^{II}. Таким образом, компонент изображения представляет собой напряжение, на величину котого понижается обратное напряжение τ_G, запирающее источник, и, как следствие этого, повышается соответствующая величина эффективного напряжения генерирования петель приповерхностным источником дислокаций. При $D \to \rho$ $\tau_b^{II} \to Gb/32\rho$. Пусть $\rho = 40$ Å. Тогда для германия получим $\tau_b^{II} = 15,6$ кгс/мм^2). Компоненту τ_b^{II} можно также рассматривать как напряжение, стремящееся вытянуть уже готовую петлю I на свободную поверхность. При аналогичных параметрах $R = 40$ Å и $a = 40$ Å по модели Бастечка [7] имеем $\tau_G = 54,6$ кгс/мм^2), т.е. величину несколько большую, чем τ_b^{II}. Это является вполне естественным, поскольку в данном случае имеет место более выгодная ориентация петли относительно действия сил изображения (петля призматическая, параллельная поверхности).

При условии, если источник вблизи поверхности излучает петлю, которая выходит на поверхность, превращаясь в полупетлю, имеем

$$\tau_G = \tau_b^{III} + \tau_b^{V} + \tau_b^{VI} + \tau_b^{IV} = \frac{Gb}{4\rho} + \frac{Gb}{2\pi\rho}\sin\left[\operatorname{arctg}\left(\frac{D}{\rho}\right)\right] - \\ - \frac{Gb}{2\pi\rho}\left\{\sin\left[\operatorname{arctg}\left(\frac{2D}{\rho}\right)\right] - \sin\left[\operatorname{arctg}\left(\frac{D}{\rho}\right)\right]\right\} - \\ \frac{Gb}{4\pi}\left[\frac{\pi\rho}{(\rho+2D)^2} - \frac{0{,}4(2D\rho)^{\frac{1}{2}}}{(\rho+2D)^2} + \frac{1{,}6(2D\rho)^{\frac{1}{2}}\rho}{(\rho+2D)^3}\right]. \qquad (16)$$

При $D \to \rho$ после вычислений получим $\tau_G = 0,3625\,Gb/\rho - 0,0438\,Gb/\rho$. В этом случае зеркальная компонента напряжения изображения выше, чем для круговой петли, и при тех же условиях ($\rho = 40$ Å) для германия составит величину $21,9$ кгс/мм^2). Следовательно, величина эффективного напряжения на источнике будет еще больше, чем в первом случае.

Зная величины напряжений, при которых движутся дислокации в соответствующих материалах, можно найти глубину слоя $a_{\text{кр}}$, из которого петля будет выходить на поверхность.

Задаваясь для *Si* и *Ge* при $T < T_{\text{кр}}$ ($T_{\text{кр}}$ — температурный порог хрупкости) значением $\tau \simeq 40 - 60$ кГс/мм^2 для петель радиуса $\rho = 40$ Å находим $a_{\text{кр}} \simeq 40 - 60$ Å, и для $R = 400$ Å $a_{\text{кр}} \simeq 40 - 100$ Å. Для нашего случая полупетель с $R = 4$ мкм $= 40000$ Å, используемых для выращивания наноструктур [3] $a_{\text{кр}} = 0,4$ мкм $= 4000$ Å. Таким образом можно полагать, что используемые нами для полупроводниковых нанотехнологий дислокационные петли с размерами, равными $4 \div 5$ мкм не смогут выходить на поверхность под действием сил изображения $a_{\text{кр}} < R$ будут устойчивыми.

Выводы

Выполнена сравнительная оценка обратных напряжений, действующих на дислокационный источник вблизи поверхности кристалла со стороны испущенных дислокаций и дислокаций изображения. Установлено, что малые дислокационные петли ($40 - 100$ Å)могут выходить на поверхность под действием дислокаций изображения из глубины . Чем больше размеры петли, тем больше толщина слоя, из которого они могут выходить на поверхность. Петли дислокаций, созданные в *Ge* и *Si* при $T = 300\ K$ с размерами 1 – 5 мкм останутся стабильными.

Литература

1. *Надточий В.А.* Микропластичность алмазоподобных кристаллов (Si, Ge, GaAs, InAs): дис. ... доктора физ.-мат. наук: 01.04.07 / Харьковский национальный университет. — Харьков, 2006. — 467 с.

2. *Nadtochiy V.* Investigation of dislocations in *Ge* single crystals by scanning electron beam / V. Nadtochiy, M. Golodenko, D. Moskal // Functional Materials. — 2004. — V11, №1 . — P. 40–43.
3. *Уколов А.И.* Образование дефектов и низкоразмерных атомных структур в приповерхностных слоях германия в процессе деформации в интервале температур 300–600 K: дисс. ... канд. физ.-мат. наук, 01.04.07 / Харьк. национ. ун-т. — Харьков, 2006. — 163 с.
4. *Sumino K.* Easy operation of dislocation sourses in the surface region of crystal during plastic deformation / K. Sumino // J. Phys. Soc. Japan. — 1962. — Vol.17, №3. — P. 454–462.
5. *Peach M.* The forces exerted on dislocations and stress fields produced by them / M. Peach, J. S. Koehler // Phys. Rev. — 1950. — V.80, №3. — P. 436–439.
6. *Фихтенгольц Г.М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления. — М.: Высшая школа. — 1948. — Т.2. — 320 с.
7. *Bastecka J.* Interaction of dislocation loop with free surface / J. Bastecka // Chech. Journ. Phys (b). — 1964. — Vol.14, №6. — P. 431-442.

Nadtochiy Viktor A., Ukolov Aleksey I., Baranyukova Irina S.
Donbas State Teachers' Training University, Slovijans'k, Ukraine.

Dislocation stability, created by an active source of a thin near-surface layer of a semiconductor crystal

A model is considered in which a dislocation source is blocked by dislocations emitted from it in the near-surface layer and they are under the action of dislocation image forces. The stresses acting on the dislocation source from the side of the emitted loop, the half loop and from the dislocations that are their images are calculated.

It is shown that at a given external voltage, the image forces are able to bring to the surface only small dislocation loops from a depth not exceeding several hundred angstroms.

Keywords: *dislocation, semiconductor, image forces, elliptic integral, diffusion, structure.*

УДК 539.4

Надточий В.А., Уколов А.И., Нечволод Н.К., Баранюкова И.С.

[1] *доктор физико-математических наук, заведующий кафедры физики, ГВУЗ «ДГПУ»*

[2] *кандидат физико-математических наук, ассистент кафедры высшей математики и физики, Керченский государственный морской технологический университет*

[3] *доктор физико-математических наук, советник ректора, ГВУЗ «ДГПУ»*

[4] *студентка 5 курсу физико-математического факультета, ГВУЗ «ДГПУ»*

e-mail: fiziksgpu@ya.ru

ОБРАЗОВАНИЕ ДЕФЕКТОВ В МОНОКРИСТАЛЛАХ ГЕРМАНИЯ ПРИ ИМПУЛЬСНОМ ЛАЗЕРНОМ ВОЗДЕЙСТВИИ

Выполнены структурные исследования на поверхности германия (Ge) в области действия импульса лазерного излучения в режиме свободной генерации ($\lambda = 0,694$ мкм) длительностью $\tau = 1$ мс и энергией в импульсе $W = 6$ Дж. Снимки выполнены на расстоянии от центра лазерного пятна, где температура не превышала $150\,^{\circ}\mathrm{C}$. Обнаружены упорядоченные линейные дефекты типа дислокаций, ориентированных в радиальном направлении от центра облучения. Показано также, что после импульсного облучения Ge при температуре 77 К линейные дефекты образуются из коротких петель дислокаций размерами 3–4 мкм.

Ключевые слова: *лазер, дефекты, импульсное облучение, германий, структура.*

Введение

Возможность получения при лазерном воздействии высоких скоростей нагрева и градиентов температур на поверхности, а также селективность и локальность воздействия позволяют направленно менять (модифицировать) те или иные физико-химические характеристики поверхностного слоя полупроводников и диэлектриков. Хорошо известны такие приложения лазерной модификации поверхности, как лазерный отжиг, лазерное легирование, лазерная аморфизация и перекристаллизация и т.д. [1–3]. С другой стороны, действие мощного лазерного излучения на поверхность может привести к генерации в поверхностном слое значительной концентрации дефектов, что в ряде случаев является нежелательным при проведении вышеуказанных технологических операций. Поэтому диагностика поверхностных изменений и поиск возможности управления процессом дефектообразования при воздействии мощного лазерного излучения на поверхность представляют значительный интерес для прикладных задач лазерной микротехнологии.

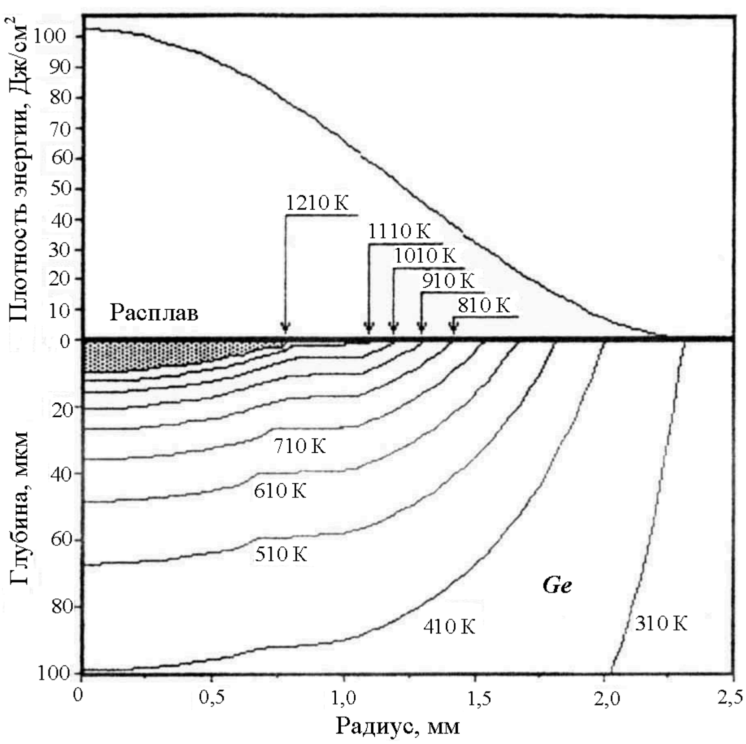


Рис. 1: Распределение плотности оптической энергии на поверхности кристалла германия и изотермы в кристалле через 0,33 мс после начала действия импульса свободной генерации ($\lambda = 0,694$ мкм, энергия в импульсе $W = 6$ Дж, длительность импульса $\tau_p = 1$ мс)

Основная часть

При воздействии на поверхность (112) Ge лазерного импульса с энергией $W = 6$ Дж, что соответствует распределению плотности оптической энергии, показанной на рис. 1, в непосредственной близости к расплаву возникают трещины и происходит слабое оплавление на дислокациях. По мере удаления от центра наблюдаются дислокационные структуры без оплавления (рис. 2; 3). Структура на рис. 2 снята на расстоянии 1,6 мм от центра лазерного пятна. Наблюдается ориентация линий травления в радиальном направлении от его центра, видна также капля расплава, выброшенная из зоны оплавления. Снимки на рис. 3, *а*, *б* сделаны на расстоянии 2 мм от центра пятна, где согласно расчетам температура не превышала $150\,^{\circ}\mathrm{C}$. Дислокационная природа фигур травления подтверждается тем, что в местах выхода на свободную поверхность вытравливаются ямки. Характерным для дислокационных конфигураций является увеличение их периодичности по мере удаления от центра пятна, а ориентация не всегда связана с кристаллографией.

В зоне трещинообразования преобладают дислокационные сплетения, а в периферийных областях на протяженных участках поверхности выявляются

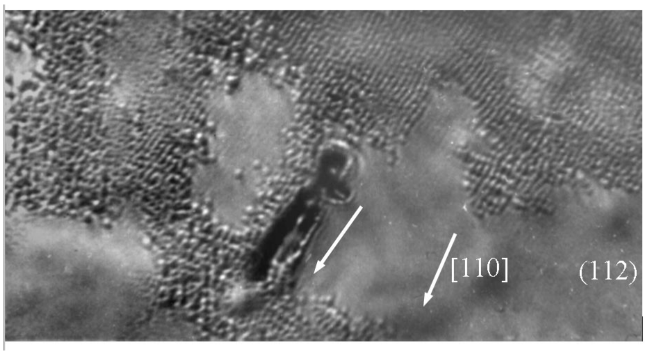
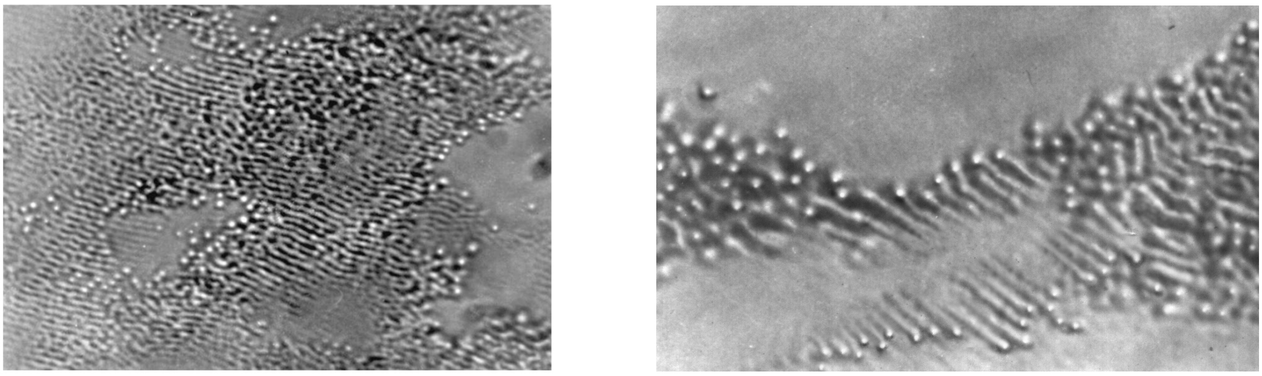


Рис. 2: Образование упорядоченных линейных дефектов (дислокаций), ориентированных в радиальном направлении от центра лазерного пятна. Указано направление выброса капли из лунки расплава *Ge*, x1000



а) б)

Рис. 3: Дислокационная структура *Ge* после лазерного облучения при температуре 300 К. Расстояние от центра пятна 2 мм; снимок (*а*) соответствует увеличению x1000, (*б*) — x2000

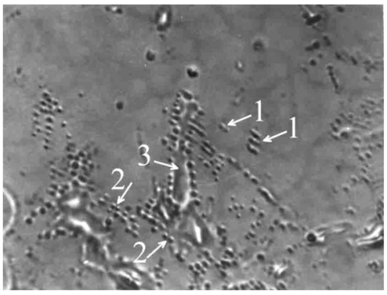


Рис. 4: Начальный процесс формирования линейных дефектов из отдельных полупетель. Температура облучения Ge 77 К. x1000

периодические структуры с периодом 0,9 мкм. Кратковременное химическое травление показало, что все наблюдаемые дислокационные структуры находятся в тонком приповерхностном слое. Глубина залегания дислокаций составляет 10 мкм в зоне трещинообразования и уменьшается до долей микрона на периферийных участках облучения. Вследствие близости поверхности, действия сил зеркального изображения и наличия большой концентрации вакансий, способствующих переползанию, отдельные участки дислокаций со временем выходят из кристалла, что обнаруживается по появлению дополнительных ямок травления вдоль дислокаций через несколько суток хранения образцов.

Важным является установление последовательности структурных изменений от начала воздействия лазерного луча. Оплавление поверхности раньше всего начинается на дислокациях, что совпадает с выводами работы [4] при лазерном облучении кристаллов Si. Это означает, что дислокации зарождаются, в основном, во время действия импульса, а не в процессе релаксации остаточных напряжений после его окончания. Кроме того, дислокационные линии всегда имеют продолжение на поверхности при пересечении трещин, что вполне объяснимо, если считать, что зарождение дислокаций предшествует трещинообразованию. Таким образом, зарождение дислокаций при одновременном действии светового излучения и термоупругих напряжений происходит, по-видимому, в начальный период действия импульса.

Облучение кристаллов при 77 K также способствует зарождению дислокаций (рис. 4). На снимке видны отдельные полупетли (1) и дислокации (2), расположенные в периодических структурах. Диффузионно-контролируемое расширение таких петель вдоль ориентированных направлений вызывает их объединение за счет аннигиляции краевых компонент противоположного знака и при повышенной температуре облучаемой поверхности приводит к формированию протяженных дислокаций периодической структуры (рис. 2; 3). На рис. 4 отмечен оплавленный участок 3, вдоль берегов которого видны ямки травления в местах выхода дислокаций на поверхность. Снимок подтверждает тот факт, что коэффициент поглощения лазерного излучения в области дислокаций выше [5].

Выводы

Впервые показано, что при лазерном облучении поверхности кристалла линии дислокаций упорядоченной структуры образуются из коротких призматических петель межузельного типа, выходящих на поверхность. Увеличение дислокационной петли со временем осуществляется за счет достраивания ее атомной плотности новыми атомами при создании их локального пересыщения.

Литература

1. *Качурин Г.А., Нидаев Е.В., Данюшкина Н.В.* Отжиг дефектов наносекундными лазерными импульсами после внедрения малых доз ионов // ФТП. — 1980. — Т. 14, № 4. — С. 656–660.

2. *Двуреченский А.В., Качурин Г.А., Нидаев Е.В., Смирнов Л.С.* Импульсный отжиг полупроводниковых материалов. — М.: Наука. — 1982. — 280 с.
3. *Eds Poate J.M., Mayet J.W.* Laser annealing of semiconductors // N.Y.: Acad. Press. — 1982. — 564 p.
4. *Банишев А.Ф., Новикова Л.В.* Образование обратимых и необратимых структурных дефектов на поверхности кремния под действием лазерного импульса // Физ. и хим. обраб. материалов. — 1992. — № 4. — С. 55–59.
5. *Lipson H.G., Burstein E., Smith P.L.* Optical effects in plastically deformed germanium // Phys. Rev. — 1955. — V.98, №5. — P. 1535–1538.

Nadtochiy Viktor A., Ukolov Aleksey I., Nechvolod Nikolay K., Baranyukova Irina S.
Donbas State Teachers' Training University, Slovijans'k, Ukraine.

Defect formation in germanium single crystals under pulsed laser action

Structural studies on the surface of germanium (Ge) in the field of the action of a laser radiation in the mode of free generation ($\lambda = 0,694\ \mu m$) with a duration of $\tau = 1$ ms and an energy in the pulse $W = 6$ J were performed. Pictures at a distance from the center of the laser spot where the temperature did not exceed 150 °C were taken. Linear defects of the dislocation type oriented in the radial direction from the center of irradiation were identified. It was reveaded that after pulse radiation of Ge at 77 K, linear defects were formed from short dislocation loops of 3–4 μm in size.

Keywords: *laser, defects, pulse, radiation, germanium, structure.*

УДК 372.853

Лимарєва Ю.М., Цимбал М.В., Цимбал В.В.

[1] *кандидат педагогічних наук, доцент кафедри фізики ДВНЗ «ДДПУ»*

[2] *студентка 4 курсу фізико-математичного факультету ДВНЗ «ДДПУ»*

[3] *вчитель початкових класів вищої категорії ЗОШ № 26, м. Краматорськ*

e-mail: zet.80@bk.ru

ПРОБЛЕМИ ВИВЧЕННЯ ОСНОВ ФІЗИКИ У ПОЧАТКОВІЙ ШКОЛІ

Стаття присвячена дослідженню основних проблем вивчення елементів фізики у курсі «Природознавство» початкової школи. Розглянуто можливості їх подолання на сучасному етапі розвитку початкової освіти. Виділено шляхи подолання проблеми початкової фізичної освіти та допомоги вчителю початкових класів, окреслено основні вимоги до організації заходів щодо залучення молодших школярів до активного навчання.

Ключові слова: *навчальний процес, явище, дослід, етап, послідовність, повторюваність, запитання, активність.*

Вступ.

Проблема викладання основ фізики в курсі «Природознавство» початкової школи та її окремі аспекти піднімалася у наших попередніх дослідженнях. Подальше вивчення проблеми дає змогу стверджувати, що одним із найпростіших шляхів вирішення проблеми є консультування вчителів початкових класів з приводу фізичного змісту матеріалу «Природознавства».

Отже, **метою** статті є окреслення шляхів подолання проблеми початкової фізичної освіти та допомоги вчителю початкових класів, виділення основних вимог до організації заходів із залучення молодших школярів до активного навчання.

Основна частина.

Основою для вивчення ШКФ є життєвий досвід дитини (його спостереження), знання з курсу природознавства та математики початкової школи.

Проблема набуття життєвого досвіду малечі додається до умови систематичного впливу дорослого оточення на неї:

— зосередження уваги на явищах;

— елементарне пояснення змін, що відбуваються (за умови дозованості пояснень);

— встановлення найпростіших зав'язків між явищами (сонце світить – калюжі зникають);

— мотивація дитини до спостережень.

У такий спосіб ще до початку шкільної освіти закладаються елементарні основи фізичної освіти.

Учитель початкової школи підтримуючи ідею наступності навчання на уроках природознавства (безпосереднє вивчення природи) та математики (вивчення будови та правил роботи з елементарними вимірювальними приладами), читання (опис явищ) забезпечує формування уяви особистості та мотивації до спостережень.

Проблема підготовки фахівців з фізики полягає у відсутності знань професійної роботи з молодшими школярами. Тому, аби уникнути складнощів, вчитель фізики має бути кваліфікованим консультантом для викладача початкових класів. У такий спосіб організація фізичної освіти буде мати послідовний, логічно-обґрунтований хід, а розвиток та формування «світогляду» дитини відповідати усім етапам її природного розвитку.

На уроках математики відбувається початкове знайомство з елементарними вимірювальними приладами, а саме:

— призначення;

— будова (основні елементи, без деталей);

— правила користування;

— відпрацювання вмінь та навичок роботи.

Принципово важливим для молодших школярів є те, що безпосередня «жива» робота з приладом має передувати спостереженню приладів та їх використання на малюнках. У такий спосіб відбувається легке розуміння дитиною суті малюнка, чого не дає, нажаль, зворотній спосіб. Окрім того, доцільно відпрацювати вміння великій кількості вправ не жалкуючи для цього додаткового часу. Так, наприклад, при вивченні лінійки:

— виміряти тіла для яких довжини лінійки достатньо;

— виміряти тіла для яких довжини лінійки не достатньо: пояснити що слід змінити вимірювальний прилад, якщо вимірювальних можливостей даного не вистачає.

В подальшому, при вивченні термометра доцільно пояснити яким чином слід вчинити, аби отримати результат бажаного вимірювання, при вивченні термометра;

— виміряти температуру;

— пояснити принцип роботи при цьому слід пояснити, що не можна використовувати прилад «замалий» та в чому полягає небезпека такого використання. Також, показати відмінності використання лінійки та термометра для вимірювання відповідних величин, більших за можливості приладу.

Творчим завданням для закріплення навичок роботи з лінійкою має бути створення копії березового листка, намальованого на аркуші (або в зошиті), або з натури. Завдання полягає у визначенні найбільш принципових розмірів листка та відповідно їх відтворення на аркуші (довжина осі, стеблини, найбільшої ширини, кілька додаткових величин). До того ж слід звернути увагу на його симетричність та правила постановки «основних» крапок. Таке завдання сприяє відпрацюванню вмінь дитини малювати прямі лінії з використанням лінійки та відкладати рівні відрізки (наприклад, для більш точного малювання листочка доцільно проведення кількох розмірів, перпендикулярних до його вісі, вимірювання відстаней до країв та їх відповідне відкладання на власному малюнку. Викладання основ фізики у початковій освіті базується на таких основних аспектах:

— Опора на життєвий досвід;

— Метод навчання: спостереження та дослід;

— Засіб навчання: запитання та якісна задача.

Зважаючи на те, що в першому класі організувати взаємонавчання дуже складно та вважається фахівцями методично невиправданим, то вчитель є єдиним джерелом інформації у школі. Такі обставини вимагають від спеціаліста знань, вмінь та навичок урізноманітнювати методи навчання. Доцільним та виправданим з методичної точки зору є співробітництво. В початковій школі воно є подвійним, вчитель-учень та учень-учень під пильним наглядом керівника.

Тому, окремої уваги потребує організація консультацій з фізики для вчителів початкових класів.

1. Аналіз навчальних програм. Визначення матеріалу заснованого на фізичних явищах.

2. Розгляд фізичного явища з наукової точки зору. Сприйняття та усвідомлення вчителями початкових класів фізичної суті явища та експерименту, яким воно демонструється, підтверджується або пояснюється.

3. Встановлення «меж доступності» явища для молодшого школяра. Встановлення особливостей умов та протікання суті явища.

4. Усвідомлення методичної доцільності методів та прийомів роботи з пояснення матеріалу учням.

5. Окреслення кола запитань пов’язаних з поданим матеріалом та призначених для закріплення отриманих знань (якісні задачі, запитання, експерименти).

6. Обговорення варіантів творчих завдань за темою вивчення.

Введення окремих фізичних явищ має полягати у розгляді та винайденні основних їх особливостей та характеристик, а не у безпосередньому введенні означення. Дитина, має зрозуміти ознаки, причини, фізичну суть на тому рівні, що відповідає її віковим можливостям.

Завдання мають бути взаємопов'язаними (підтримка цілісності вивчення матеріалу) аби єдина повна картина створювалася у свідомості особистості.

Окремий аспект проблеми – залучення батьків (інших дорослих) до участі у домашній навчальній роботі дитини. При цьому вважаємо за необхідне акцентувати увагу на таких моментах:

— Виявити зацікавленість до того, про що йшла мова на занятті, та що було цікавим, чи сподобалося, та що саме дитина отримала в якості домашнього завдання. Підтримати школяра власною зацікавленістю батьків до теми розмови.

— Принципово важливо «брати участь», а не «виконувати» завдання замість дитини.

— Дозволити дитині керувати допомогою дорослих («Чим саме я можу тобі допомогти?»). Організувати домашнє взаємонавчання: дати можливість дитини «навчити дорослого» тому, чому вона навчилася в школі. При цьому дорослі в свою чергу допоможуть виконати подальші завдання.

— Ставитися схвально до будь-якої оцінки та обов'язково обговорювати, конкретизувати позитивні та негативні впливи на отриманий результат.

— Виховувати вміння сприймати негативний результат, як результат власної діяльності.

Висновки.

На основі вище зазначеного у подоланні основних проблем викладання основ фізики в курсі початкової школи можна зробити такі висновки:

1. Організація практичної допомоги фахівця з фізики вчителю початкових класів є методично виправданою та доцільною. Фрагментарна присутність вчителя фізики може лише урізноманітнювати навчальний процес, але не набувати систематичності бо це вимагає знань методики початкової освіти, яка значно відрізняється від методики викладання фізики у середній школі.

2. Залучення батьків та інших дорослих із оточення дитини до взаємодії у навчанні школяра створює міцний фундамент для подальшого формування в особистості стійких навичок самоаналізу та самоосвіти. Додаткове консультування дорослих може бути організоване як учителями початкових класів

так і фахівцями з фізики. Така «доросла домашня підтримка» дитини у формі «зміни ролей» зміцнює і стосунки в родині, і, таким чином, забезпечує цілеспрямоване виховання та розвиток дитини.

3. Взаємодія основних учасників навчально-виховного процесу з фізики у початковій школі має ґрунтуватися на чіткому усвідомленні учителем елементарних дій (етапів) у вирішенні задачі початкової освіти з фізики; відпрацюванні кожного з виділених етапів на численних прикладах; багаторазовому повторенні; використанні великої кількості запитань, що вимагають однослівної відповіді та придатних для колективного опитування.

Перспективи подальших розвідок вбачаємо у розробці методичних рекомендацій за окремими темпами курсу фізики для вчителів початкових класів та їх впровадження у навчальний процес ЗОШ.

Литература

1. *Білоус С.Ю.* Як розвинути в учня якості дослідника / С.Ю. Білоус. — Х. : Основа, 2004. — 106 с.
2. *Бухало О.Л.* Вплив емоційного компоненту на життєдіяльність молодшого школяра / О. Л. Бухало // Педагогіка і психологія формування творчої особистості: проблеми і пошуки: зб. наук. пр. / редкол.: Т.І. Сущенко (голов. ред.) та ін. — Запоріжжя. — 2008. — Вип. 50. — С. 45–50.
3. *Лимарєва Ю.М.* Особливості викладання фізики в інтегрованому курсі «Природознавство» / Ю. М. Лимарєва // Гуманізація навчально-виховного процесу : збірник наукових праць / [За заг. ред. проф. В.І. Сипченка]. — Вип. LXXIII. — Слов'янськ : ДДПУ, 2015. — С. 227–232.
4. *Лимарєва Ю.М.* Фізика у початковій освіті / Ю. М. Лимарєва / — Вісник Черкаського університету. Серія «Педагогічні науки» — Випуск № 34 (287). 2013. — Черкаси, 2013. — С. 54–58.
5. *Лупаренко С.Є.* Видатні педагоги про засоби розвитку пізнавальної активності учнів / С. Є. Лупаренко // Педагогіка і психологія формування творчої особистості: проблеми і пошуки: зб. наук. пр. / редкол.: Т. І. Сущенко (голов. ред.) та ін. — Запоріжжя. — 2008. — Вип. 50. — С. 214–219.
6. *Шалоха Н.В.* Аналіз умов формування творчої активності особистості / Н. В. Шалоха // Педагогіка і психологія формування творчої особистості: проблеми і пошуки: зб. наук. пр. / редкол.: Т. І. Сущенко (голов. ред.) та ін. — Запоріжжя. — 2008. — Вип. 50. — С. 408–414.

Lymareva Yuliya N., Tsymbal Maria V., Tsymbal Vera V.
Donbas State Teachers' Training University, Slovijans'k, Ukraine
Secondary school № 26, Kramators'k, Ukraine

Problems of the physics fundamentals studying in primary school

The article is devoted to the research of the main problems of studying physics elements in the course «Natural science» in elementary school. The possibilities of their overcoming at the present stage of the primary education development have been considered. The ways of solving the problem of primary physical education and assistance to a primary school teacher have been found, the basic requirements for organization of the measures to attract younger schoolchildren to active teaching have been determined.

Keywords: *educational process, phenomenon, experience, stage, sequence, repetition, question, activity.*

УДК 372.853

Лимарєва Ю.М., Рябко А.Е., Дятлов С.А., Сисоєв В.Р., Тарасова О.В.

[1] *кандидат педагогічних наук, доцент кафедри фізики ДВНЗ «ДДПУ»*

[2–5] *студенти 4 курсу фізико-математичного факультету ДВНЗ «ДДПУ»*

e-mail: zet.80@bk.ru

ОСНОВНІ ПРОБЛЕМИ НАВЧАННЯ ВИРІШЕННЮ ФІЗИЧНИХ ЗАДАЧ УЧНІВ БАЗОВОЇ ШКОЛИ

Стаття присвячена дослідженню основних проблем вивчення фізики у базовій школі. Розглянуто можливості їх подолання на сучасному етапі розвитку шкільної освіти. Виділено основні вимоги до організації заходів щодо подолання проблеми залучення школярів до вирішення фізичної задачі.

Ключові слова: *навчальний процес, фізична задача, етап, послідовність, повторюваність, запитання.*

Вступ.

Моніторинг успішності учнів базової школи ЗОШ дозволяє стверджувати, що основна проблема складності у навчанні розв'язуванню задач походить із 7 класу та від самих витоків вивчення фізики. Надмірна програмна математизація фізики від початку вивчення не дає змоги учням поступово налаштуватися на фізику як науку та методи її вивчення. Тому перед вчителем постає задача пристосувати програмні вимоги до вікових можливостей учнів та їх рівня освіченості із інших предметів, головними із яких виступають математика та природознавство.

Отже, **метою** статті є встановлення основних причин що ускладнюють вивчення фізики у базовій школі, визначення шляхів їх подолання та алгоритмів відпрацювання кожного окремого етапу досягнення поставленої мети.

Основна частина.

Власний досвід роботи та результати проходження активної педагогічної практики свідчить про те, що в сучасному викладанні фізики існують кілька «елементарних» прогалин які створюють фундамент невпевненості учня вже на початкових етапах засвоєння навчального матеріалу з курсу фізики. Не одноразово на таких проблемах наголошувалося у працях сучасних методистів [2, 6 – 8] та інших. До цих проблем належать:

— визначення фізичних величини;

— математичні перетворення основної формули та виведення шуканої величини;

— перевірка одиниць вимірювання;

— скорочений запис умови задачі на дошці.

Вирішення цієї низки проблем має починатися із перших уроків на яких учні чітко мають усвідомити перші фізичні поняття та їх характеристики, а саме:

— поняття фізичної величини;

— умовне позначення (літера): загальноприйняті, варіативні;

— одиниці вимірювання (стандартні та нестандартні);

— властивість, яку характеризує дана фізична величина;

— прилад яким вимірюється (без з'ясування принципу дії);

— зв'язок з іншими величинами.

Окремо слід звернути увагу на використання індексу та чітке засвоєння того факту, що індекс (якщо він використовується) не змінює фізичної суті та фізичного змісту величини, тобто маса – залишається масою, а довжина – довжиною.

Із перших же задач необхідно вимагати вирішення у загальному вигляді.

Від початку, будь які фізичні величини мають бути трансформовані у стандартні одиниці вимірювання і всі подальші математичні операції мають відбуватися лише з ними.

Навчання розв'язуванню задач починається із ознайомлення на конкретному прикладі з усіма етапами розв'язування фізичної задачі. А саме:

1. Ознайомлення зі змістом задачі.

2. Встановлення відомих величин заданих у умові.

3. Конкретизація запитання поставленого в задачі та встановлення фізичної величини, яку необхідно знайти. Із цього моменту починається все незрозуміле у вирішенні задач.

4. Запис скороченої умови задачі, що є чередою відповідей на таку послідовність запитань:

a) — що відомо? (назвати величину)
— якою літерою позначається?
— чому дорівнює?
— які одиниці вимірювання?

b) — що необхідно знайти? (назвати величину)
— якою літерою позначається?

5. Аналіз умови та окреслення алгоритму розв'язування задачі.

6. Створення фізичної моделі задачі (малюнок, графік).

7. Складання математичної моделі задачі.

8. Встановлення фізичних законів та принципів, що будуть основою вирішення задачі.

9. Розв'язок задачі в загальному вигляді (виконання математичних перетворень над системою формул) та отримання розрахункової формули для обчислення шуканої величину.

10. Перевірка розмірності (одиниць вимірювання). Метою якої є перевірка правильності розрахункової формули.

Цей етап надзвичайно важливий та вимагає досконалого відпрацювання на значній кількості задач. Учень має чітко засвоїти алгоритми виконання дій та практичну їх доцільність. Особливим для засвоєння учнів при цьому є те, що перевірка розмірності повністю повторює робочу формулу, але записана в одиницях вимірювання відповідних фізичних величин (L – м; V – м/с; t – С; m – кг; F – Н; і інші). Так само всі математичні дії з одиницями вимірювання повторюють математичні дії із звичайними числами. Кінцевим результатом шуканої величини при цьому має бути одиниця вимірювання саме зазначеної величини, а не будь-якої іншої.

11. Безпосереднє обчислення невідомої величини (отримання числового результату).

12. Аналіз отриманого результату та його перевірка на достовірність (швидкість руху людини не може бути 80 км/год або маса слона 4 кг)

Кожний етап у розв'язуванні задачі має бути коментований, але не у монологічний спосіб, а у діалогічний, коли учні будуть відповідати на послідовні запитання вчителя:

— яка величина позначається конкретною літерою;

— якою є одиниця вимірювання даної величини і т. ін.

Іншою проблемою стають теми, що містять велику кількість нових понять на початку її вивчення та складають, таким чином, фундамент для вивчення. Наприклад: «Механічний рух, тіло відліку, система відліку, матеріальна точка, траєкторія, шлях, переміщення» або «теплові явища, агрегатний стан речовини, взаємні перетворення рідин та газів». Велика кількість означень ускладнює їх швидке запам'ятовування та розуміння.

На нашу думку, механізм подолання зазначеної проблеми має відповідати наступному алгоритму:

1) коментований запис означень (коментар дає змогу пояснити незрозумілі слова);

2) пояснення на прикладах із життя та демонстраціях на підручних матеріалах;

3) показ короткометражних відео матеріалів із введених понять та механізмів протікання явищ;

4) колективне повторення отриманої інформації засноване на однослівних відповідях на запитання учителя.

Зауважимо, що запитання мають бути логічно послідовними та заздалегідь продуманими учителем.

Завжди залишається на вустах вчителів, проблема залучення школярів базової школи до роботи з формулами, а саме співвідношення математичного виразу та фізичного змісту, операції (математичне перетворення) над ними, виведення невідомою величини. І результат від цього один єдиний: задача залишається без відповіді, то вона по окремих діях не може, дуже часто, бути вирішеною, а в загальному вигляді у дитини трансформується із 7 класу і надалі, залишаючись проблемою без вирішення.

На основі власного досвіду проведення уроків у базовій школі та спостережень за роботою інших учителів можемо зробити такий висновок вирішення поставленої проблеми:

— використання візуалізації формули (наочність). Наприклад: трикутник рівномірного руху (S-V-t), який згодом можна узагальнити.

— багаторазовим повторенням закріпити навички роботи із трикутником. Єдиним питанням має бути «Як знайти (шлях, час, швидкість та прискорення)?»

— математичні перетворення формул.

На цьому етапі виникає, так звана, «невідповідність» невідомої величини у математиці (позначається літерою «x») та у фізиці (позначається іншою літерою). Тому важливо на конкретних прикладах показати аналогію математичного виразу та фізичної формули. Вчитель у такий спосіб має отримати у свідомості учня, що невідома величина може позначатися не лише через «x», але й будь-якою іншою літерою.

До тренувальних завдань на перетворення формул можна відвести будь-які вирази (без чисел), що вимагають знайти зазначену літеру. З метою подальшого ж ускладнення учням пропонується вираз із багатьох літер пов'язаних математичними операціями з якого слід зазначити вираз для кожної літери, за умови, що всі інші є відомими.

Висновки.

На основі вище зазначених проблем, які виникають на самому початку вивчення фізики у ЗОШ можна зробити висновок, що з методичної точки зору виправданими є така послідовність дій для їх подолання:

— чітке усвідомлення учителем елементарних дій (етапів) у вирішенні задачі;

— відпрацювання кожного з виділених етапів на численних прикладах;

— багаторазове повторення (позначень, одиниць вимірювання, формул, їх перетворень);

— використання великої кількості запитань, що вимагають однослівної відповіді та придатних для колективного опитування.

Перспективи подальших розвідок проблем методики викладання фізики у базовій школі вбачаємо у розширенні та дослідженні спектру інших проблем пов'язаних із технікою їх подолання.

Литература

1. *Воровщиков С.Г., Новожилова М.М.* Школа должна учить мыслить, проектировать, исследовать: Управленческий аспект: Страницы, написанные консультантом по управлению и директором школы. — М.: 5 за знания, 2006. — 352 с.
2. *Горденко Т.* Елементи технології навчання як дослідження на уроках фізики / Т. Горденко / – Наукові записки. – Випуск 4. – Кіровоград : РВВ КДПУ ім.. В. Винниченка, 2013. — С. 133–138.
3. *Лазарев В.С.* Опытно-экспериментальная работа в образовательном учреждении: Практическое пособие для руководителей – М.: Центр педагогического образования, 2008. — 48 с.

4. *Плигин А.А.* Познавательные стратегии школьников: Монография. — М.: Профит Стайл, 2007. — 528 с.
5. *Подалов М.* Использование принципа наглядности в формировании исследовательской компетенции / М. Подалов / — Наукові записки. — Випуск 4. – Кіровоград : РВВ КДПУ ім. В. Винниченка, 2013. — С. 78–81.
6. Рефлексивный подход: от методологии к практике / Под ред. В.Е. Лепского. – М.: Когито-Центр, 2009. – 447 с.
7. *Шарко В.Д.* Сучасний урок фізики: технологічний аспект : посіб. для для вчителів і студ. / В.Д. Шарко. — К. : Есе, 2005. — 220 с.
8. *Шаталов В.Ф.* Куда и как исчезли тройки / В.Ф. Шаталов. — М. : Педагогика, 1979. — 134 с.

Lymareva Yuliya N., Ryabko Alina E., Dyatlov Stanislav A., Sysoev Vadim R., Tarasova Alyona V.
Donbas State Teachers' Training University, Slovijans'k, Ukraine.

Main problems of training to solve physical tasks of basic school students

The article is devoted to the research of the basic problems of studying physics in basic school. The possibilities of their overcoming at the present stage of the primary education development have been considered. The basic requirements for organization of the measures to overcome the problem of involving schoolchildren in solving the physical problem have been determined.

Keywords: *educational process, physical task, stage, sequence, repetition, question.*

ІНФОРМАТИКА ТА МЕТОДИКА ЇЇ ВИКЛАДАННЯ

УДК 37.091.26

Сьомкін В.С., Омельченко Д.М.

[1] *кандидат педагогічних наук, доцент, учитель математики, Слов'янський педагогічний ліцей Слов'янської міської ради Донецької області*

[2] *студент 1 курсу факультету інформаційно-обчислювальних технологій, Національний технічний університет України «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»*

e-mail: vladimir-syomkin@yandex.ru, dima.omelchenko@list.ru.

ПРОГРАМНЕ ЗАБЕЗПЕЧЕННЯ ДЛЯ ЗНАХОДЖЕННЯ ЛОКАЛЬНО-ОПТИМАЛЬНОГО РОЗМІЩЕННЯ ОПУКЛИХ МНОГОКУТНИКІВ У ПРЯМОКУТНІЙ ОБЛАСТІ

Стаття присвячена опису створеного програмного забезпечення знаходження локально-оптимального розміщення опуклих многокутників у прямокутній області.

Ключові слова: *програмне забезпечення, Ф-функція, математична модель, локальний мінімум, локально-оптимальне розміщення.*

Вступ

Універсальний конструктивний математичний апарат, що дозволяє будувати аналітичний опис умов взаємного розташування об'єктів з урахуванням технологічних обмежень, був розроблений у роботах наукової школи, очолюваної Ю.Г. Стояном (м. Харків).

На основі апарату, пов'язаного з використанням функцій щільного розміщення, було здійснено розробку автоматичної системи розв'язання задач розміщення досить великого набору геометричних об'єктів. Отримувані результати давали добрі наближення до локального мінімуму [2,3].

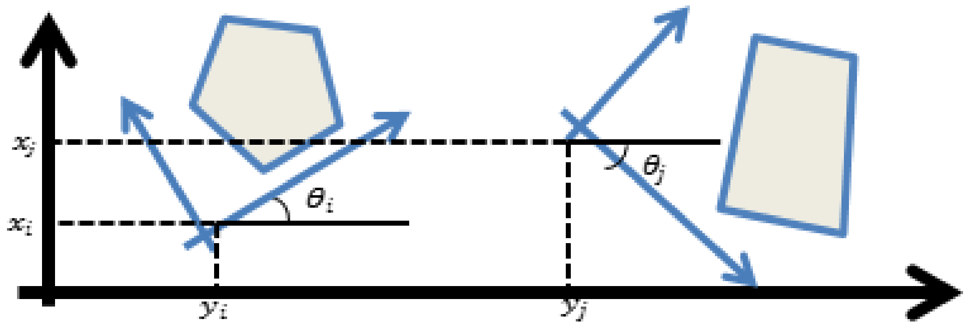
Надалі теорія отримала свій розвиток на тлі поняття Ф-функція, яке формалізує геометричні відносини неперетину геометричних об'єктів і є якісною мірою виконання цих відносин [4].

Основна частина.

Постановка задачі.

<u>Задача</u>. Задано прямокутник S зі змінними шириною L і висотою H, а також опуклі многокутники P_i, $i = 1 \ldots 8$. Необхідно розмістити ці многокутники у прямокутнику S так, щоб вони не перетиналися, а площа прямокутника досягала мінімуму.

З кожним многокутником, який розміщуємо у прямокутнику S, зв'яжемо власну систему координат. Центри цих систем називаються полюсами многокутника. Координати полюсів будемо задавати відносно нерухомої системи координат прямокутника S.



Положення многокутника P_i на площині однозначно визначається координатами x_i, y_i його полюса у загальній системі координат і кутом його повороту θ_i, $i \in \{1, 2, ..., n\}$ відносно цієї системи координат. Величини $u_i = (x_i, y_i, \theta_i)$ називаються параметрами розміщення многокутника P_i, $i \in \{1, 2, ..., n\}$.

Для розв'язання цієї задачі перш за все були описані умови неперетину многокутників і їх знаходження у прямокутнику S.

В математиці існує поняття, яке дозволяє описати умови неперетину геометричних фігур (об'єктів), введене членом-кореспондентом НАН України Ю.Г. Стояном.

<u>Означення 1</u>. *Будь-яка неперервна всюди визначена функція* $\Phi_{i,j}(u_i, u_j)$ *називається* Φ*-функцією об'єктів* T_i *і* T_j, *якщо виконуються наступні властивості:*

$\Phi_{i,j}(u_i, u_j) > 0$, *якщо* $T_i \cap T_j = \emptyset$;

$\Phi_{i,j}(u_i, u_j) = 0$, *якщо* $\text{int } T_i \cap \text{int } T_j = \emptyset$, $\text{fr } T_i \cap \text{fr } T_j \neq \emptyset$;

$\Phi_{i,j}(u_i, u_j) < 0$, *якщо* $\text{int } T_i \cap \text{int } T_j \neq \emptyset$.

Φ-функція двох об'єктів служить для визначення міри перетину цих об'єктів. Нами в якості таких об'єктів розглядаються опуклі многокутники, а в якості аргументів функції – параметри їх розміщення.

Φ-функція приймає нульове значення, якщо об'єкти лише дотикаються, значення менше нуля — якщо перетинаються, і значення більше нуля — якщо розглянуті об'єкти не мають спільних точок.

Запишемо математичну модель розв'язання поставленої задачі, як задачі нелінійного програмування:

$$\min F(x), x \in D,$$

$$X = (x_1, y_1, \theta_1, x_2, y_2, \theta_2, ..., x_8, y_8, \theta_8, L, H) \in D \subset R^{26},$$

де

$$F(X) = L \cdot H\,,$$
$$D = \{X \in R^{26} | \Phi_{i,j}(x_i, y_i, \theta_i, x_j, y_j, \theta_j) \geqslant 0, i < j \leqslant 8,$$
$$\Phi_i(x_i, y_i, \theta_i, L, H) \geqslant 0, i \leqslant 8\}\,.$$

Функцією мети поставленої задачі є площа прямокутника S, а область допустимих розв'язків задається Φ-функціями Φ_1, Φ_2, Φ_3.

Для автоматизації процесу розв'язування задачі нами написана комп'ютерна програма опис якої представлений нижче.

1. Характеристика програмного забезпечення.

Програма написана на мові програмування C#.

Коло задач, що розв'язуються: задачі знаходження локально оптимального розміщення опуклих многокутників у прямокутній області.

Інтерфейс програми складає:

— панель інструментів (рис. 1) (доступ до основних команд);

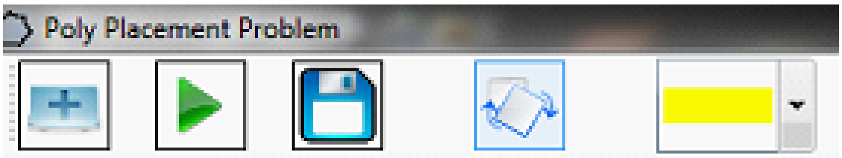


Рис. 1: Меню

— вікно створення опуклих многокутників (CreateArea) (рис. 2)

— вікно тимчасової бібліотеки (pending) (рис. 3), де зберігаються створені фігури, які, за бажанням, можна перенести до бібліотеки;

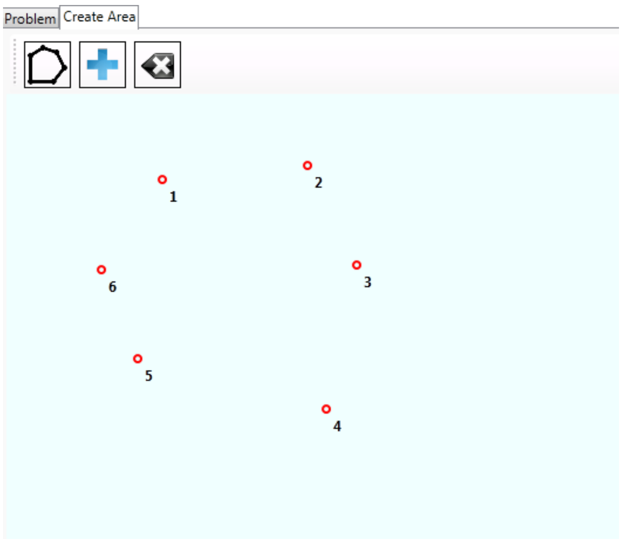


Рис. 2: Create Area

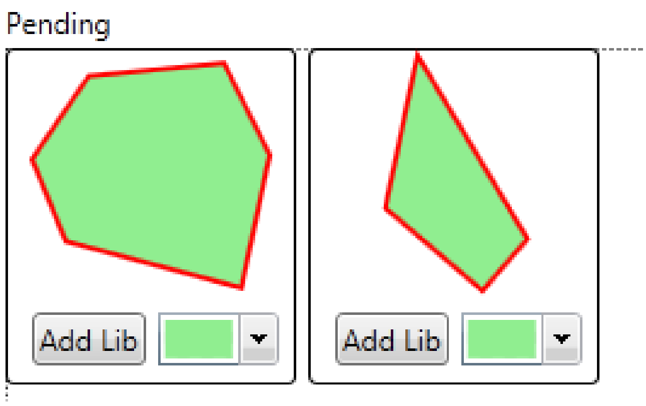


Рис. 3: Pending

— вікно бібліотеки (library) (рис. 4), де зберігаються створені фігури;

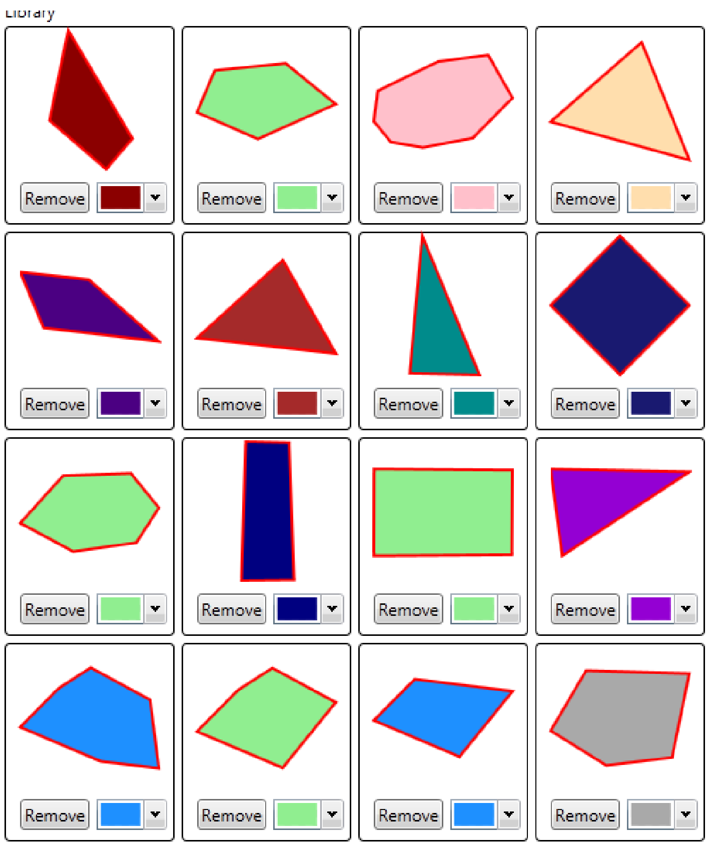


Рис. 4: Бібліотека

— робоча область (рис. 5) (безпосереднє створення задачі шляхом розміщення обраних многокутників на площині);

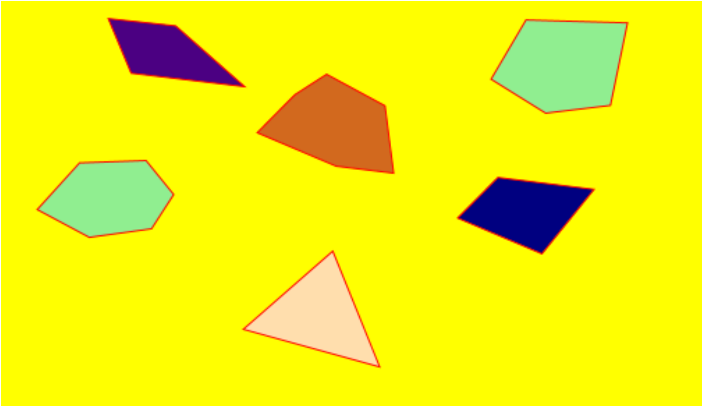


Рис. 5: Робоча область

— вікно збережених задач (Saved Problems) (рис. 6) надає можливість переглянути всю інформацію щодо збережених задач.

			Description	# Poly	Creation Date	
			a1	6	1/26/2016 10:38:47 PM	
			1	5	1/26/2016 10:31:39 PM	
			zzxcxzx	9	12/13/2015 7:50:02 PM	
			c1	8	12/12/2015 12:26:39 AM	
			b2	11	12/12/2015 12:15:54 AM	
			b1	11	12/12/2015 12:13:15 AM	
			aaa	15	12/11/2015 11:49:54 PM	
			777	8	12/11/2015 9:58:22 PM	
			666	8	12/11/2015 9:55:52 PM	
			555	8	12/11/2015 9:45:02 PM	
			444	8	12/11/2015 9:43:33 PM	
			333	8	12/11/2015 9:39:21 PM	
			222	8	12/11/2015 9:38:49 PM	
			111	8	12/11/2015 9:29:05 PM	

Рис. 6: Архів збережених задач

Режими роботи:

— створення фігур (рис. 7) — на робочому полі обираємо вкладку «CreateArea», потім за допомогою миші розміщуємо потрібну кількість точок на площині — це будуть вершини многокутника. Далі натискаємо для його побудови. У випадку, якщо точки розставлені так, що многокутник не опуклий програма будує опуклу оболонку, ігноруючи зайві точки. Для того, щоб додати отриману фігуру до проміжної бібліотеки, достатньо натиснути (для того, щоб додати фігуру до бібліотеки, необхідно перейти до проміжної, відкривши вкладку «Pending» та під фігурою натиснути «Addtolib»);

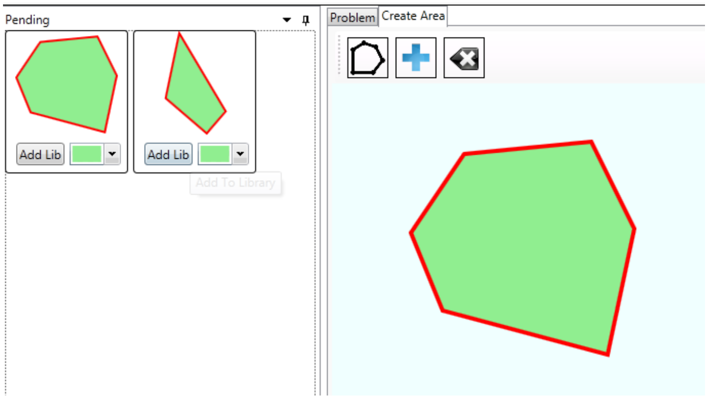


Рис. 7: Створення многокутників

— розв'язання задачі — обравши вкладку «Problem», на області, що з'явилась, можна розміщувати фігури з бібліотеки у якій заздалегідь накопичуються многокутники необхідні для розв'язання задачі. Розміри фігур та робочої площі регулюються колесом миші. За допомогою  можна включати/відключати повороти многокутників. Розміри фігур та робочої площі регулюються колесом миші. Для безпосереднього вирішення задачі необхідно натиснути . Отримуємо результат розміщення (рис. 8).

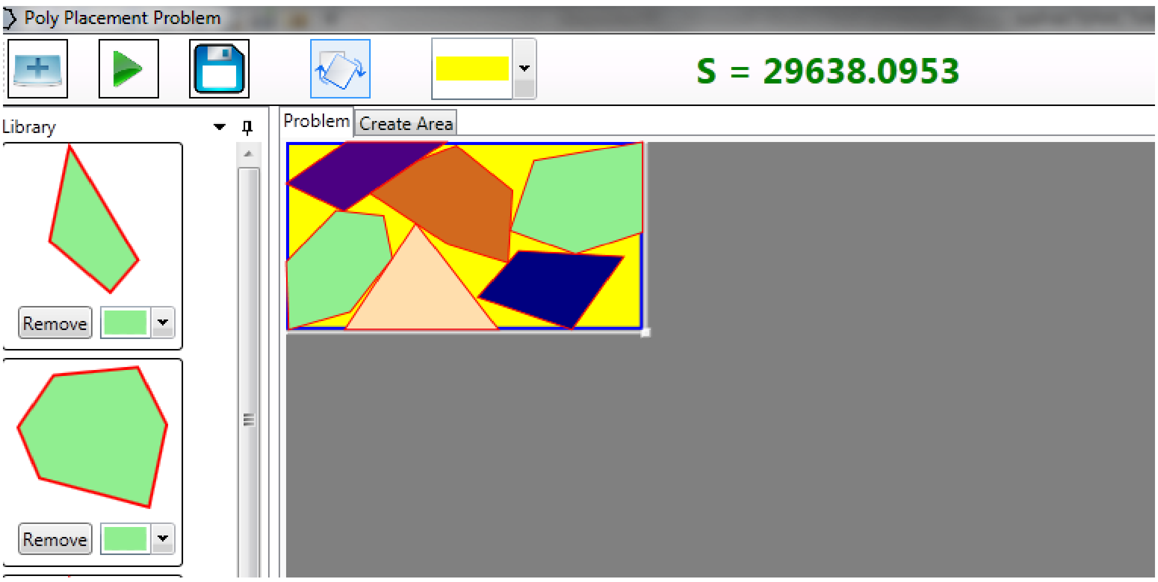


Рис. 8: Розв'язок задачі

— виведення результатів (рис. 9) — виводиться таблиця координат фігур у нерухомій системі координат та кути їх повороту:

DOMAIN: L = 235.6358, H = 125.7793, S = 29638.10597894

	X	Y	Angle	Vertices
	-38.5818	84.5625	-0.7736227	(0;57.61), (30.36;24.13), (78.14;22.43), (98;46.83), (82.11;71.43), (37.36;77.57)
	66.05672	-20.87825	0.185884	(56.72;80.51), (0;56.48), (27.07;29.19), (49.85;14.53), (91.8;37.2), (98;85.47)
	-16.89245	8.837284	-0.7213688	(16.46;64.78), (0;25.58), (48.42;30.82), (98;74.42)
	123.1844	52.58564	-0.06650975	(0;51.75), (28.89;22.61), (98;31.16), (60.56;77.39)
	135.8957	1.586284	-0.2036386	(0;59.06), (25.04;16.58), (98;18.62), (85.76;77.87), (39.2;83.42)
	21.49219	63.55406	-0.268826	(0;64.54), (64.29;8.46), (98;91.54)

Рис. 9: Дані локально оптимального розміщення многокутників

— в той же час, з архіву виводяться зображення збережених задач автоматично впорядкованих по площі S (рис. 10):

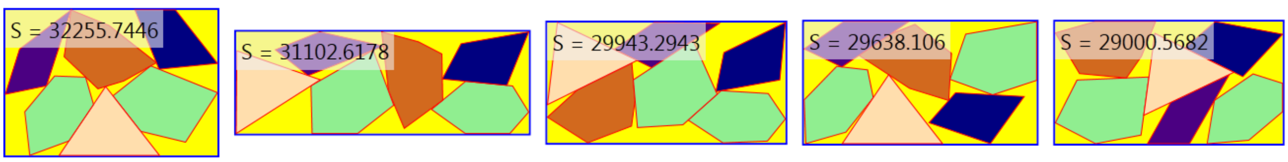


Рис. 10: Результати розміщення

Система команд (Рис. 11):

— створення нової задачі (1);
— запуск програми (2);
— збереження задачі (3);
— увімкнення/вимкнення повороту (4);
— зміна кольору робочого поля (5);
— побудова фігури (6);
— занесення фігури до бібліотеки (7);
— видалення створеної фігури (8);
— видалення фігури з бібліотеки (9);
— зміна кольору фігури (10);
— зміна розміру фігури (за допомогою коліщатка миші);
— порівняння результатів декількох вирішених задач (11);;
— завантаження збереженої задачі (12);
— перегляд додаткової інформації щодо збереженої задачі (13);
— видалення збереженої задачі (14).

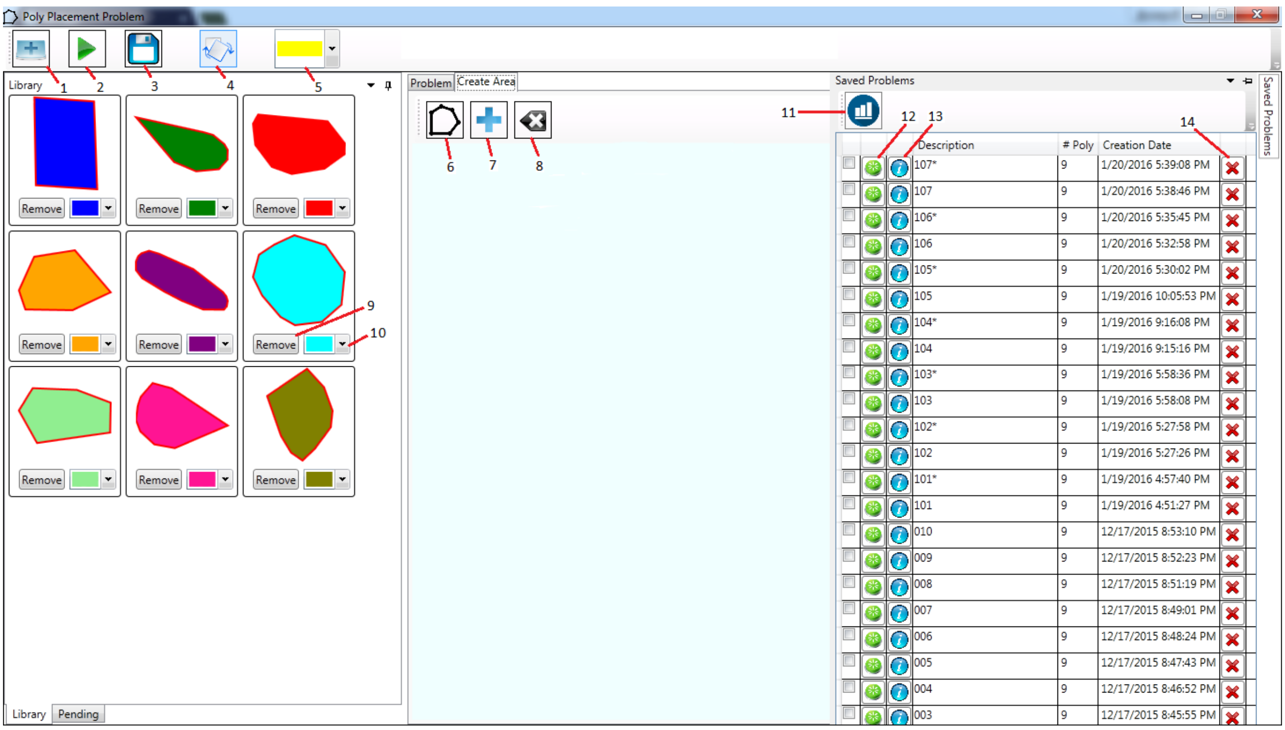


Рис. 11: Засоби керування програмою

2. Приклади розв'язання задач.

Розглянемо декілька прикладів розв'язування задач за допомогою розробленої програми.

В якості вихідних даних візьмемо значення, наведені в таблиці 1, які відповідають розміщенню многокутників на рисунку 12.

Таблиця 1

	X	Y	Angle
	243.8099	278.831	-1.116019
	96.50448	184.5953	-1.088685
	288.6791	164.2155	-1.150465
	433.1228	275.0266	-0.4980395
	227.6728	474.8716	-1.776192
	333.2104	269.4496	0.2167303
	146.9745	305.6293	-0.4005649
	233.766	22.04849	0.2453393

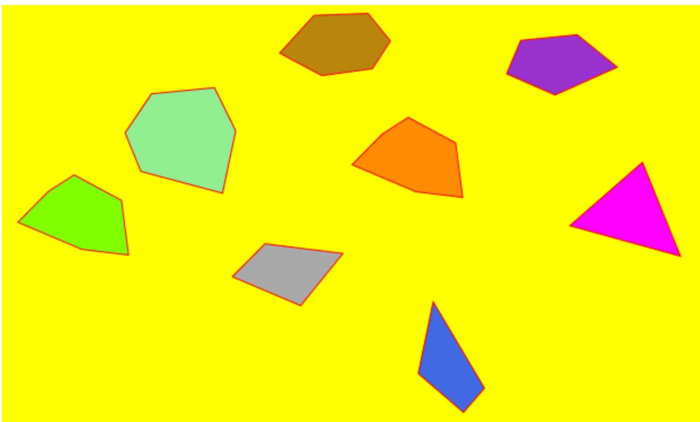


Рис. 12: Початкове розміщення

В результаті розв'язання задачі отримуємо точку локального мінімуму X^* таку, що

$$\min \; F\left(X^*\right) = 45929.4884.$$

У точці X^* лінійні розміри прямокутника $L = 385.5024$ і $H = 119.1419$, а відповідне розміщення наведено на рис. 13.

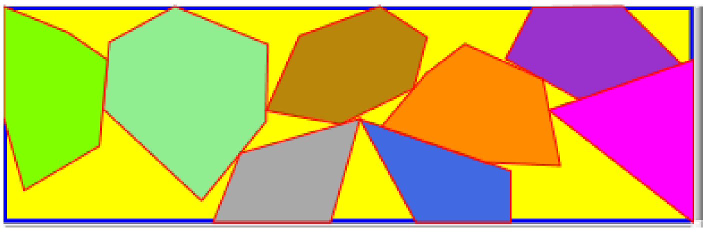


Рис. 13:

Точці локального мінімуму відповідають наступні дані розміщення многокутників (таб. 2):

Таблиця 2.

DOMAIN: L = 385.5024, H = 119.1419, S = 45929.48839056

	X	Y	Angle	Vertices
	79.04723	-18.49552	0.4821117	(13.94;77.42), (0;43.26), (23.38;8.64), (79.12;3.25), (98;41.46), (86.31;96.75)
	96.88169	71.49236	-0.4005649	(0;51.75), (28.89;22.61), (98;31.16), (60.56;77.39)
	52.0132	-22.02547	1.170231	(56.72;80.51), (0;56.48), (27.07;29.19), (49.85;14.53), (91.8;37.2), (98;85.47)
	285.7744	-28.74396	0.08843052	(0;57.92), (12.51;28.31), (62.55;23.31), (98;52.09), (42.95;76.69)
	173.4375	84.4264	-0.7099859	(20.7;63.57), (33.94;0), (79.3;76.48), (60.76;98)
	129.0119	2.787096	-0.3137912	(0;57.61), (30.36;24.13), (78.14;22.43), (98;46.83), (82.11;71.43), (37.36;77.57)
	207.0144	10.05074	-0.07506544	(56.72;80.51), (0;56.48), (27.07;29.19), (49.85;14.53), (91.8;37.2), (98;85.47)
	329.1102	-2.529079	0.3854492	(0;64.54), (64.29;8.46), (98;91.54)

Наведемо розв'язання цієї задачі без поворотів (рис. 14), тобто зафіксуємо $\theta_i = 0$, тому розмірність простору розв'язків зменшується на n.

В результаті розв'язання задачі отримуємо точку локального мінімуму X^* таку, що

$$\min \; F\left(X^*\right) = 56357.28085944.$$

У точці X^* лінійні розміри прямокутника $L = 364.3014$, $H = 154.6996$.

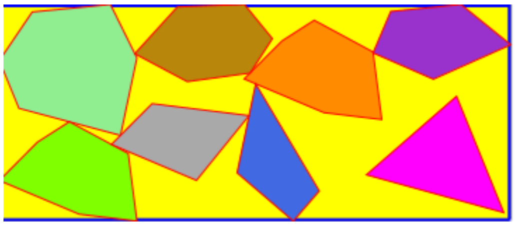


Рис. 14:

Точці локального мінімуму відповідають наступні дані розміщення многокутників (таб. 3):

Таблиця 3.

DOMAIN: L = 364.3014, H = 154.6996, S = 56357.28085944

	X	Y	Angle	Vertices
	79.87791	48.24652	0	(0;51.75), (28.89;22.61), (98;31.16), (60.56;77.39)
	96.50687	-22.42568	0	(0;57.61), (30.36;24.13), (78.14;22.43), (98;46.83), (82.11;71.43), (37.36;77.57)
	0	-3.247706	0	(13.94;77.42), (0;43.26), (23.38;8.64), (79.12;3.25), (98;41.46), (86.31;96.75)
	266.3014	-23.31064	0	(0;57.92), (12.51;28.31), (62.55;23.31), (98;52.09), (42.95;76.69)
	261.4255	57.14013	0	(0;64.54), (64.29;8.46), (98;91.54)
	148.6656	56.69959	0	(20.7;63.57), (33.94;0), (79.3;76.48), (60.76;98)
	174.4184	-3.25292	0	(56.72;80.51), (0;56.48), (27.07;29.19), (49.85;14.53), (91.8;37.2), (98;85.47)
	0	69.23239	0	(56.72;80.51), (0;56.48), (27.07;29.19), (49.85;14.53), (91.8;37.2), (98;85.47)

Бачимо, що для однієї і тієї ж початкової точки, при розв'язанні задачі з поворотами отримуємо мінімум функції значно менший, ніж без поворотів. Різниця в даному випадку становить 18.5%.

Зрозуміло, що отриманий результат в розглянутій задачі залежить від початкової точки. Спробуємо, змінюючи цю точку, досягти ще меншого значення площі прямокутника. Проведемо декілька експериментів. Результати розміщень будемо подавати у вигляді рисунків «Початкове розміщення» і «Розв'язок задачі».

Задача 1.

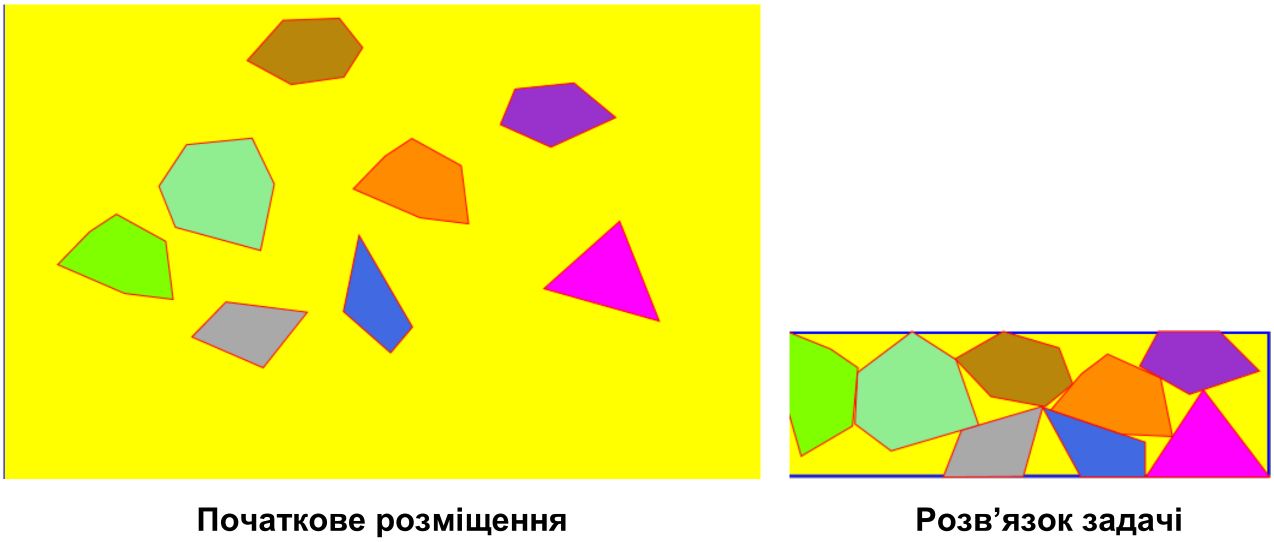


Рис. 15: до задачі 1

Розміри прямокутника:

$$L = 395.9682, \quad H = 118.5562, \quad S = 46944.4851.$$

Задача 2.

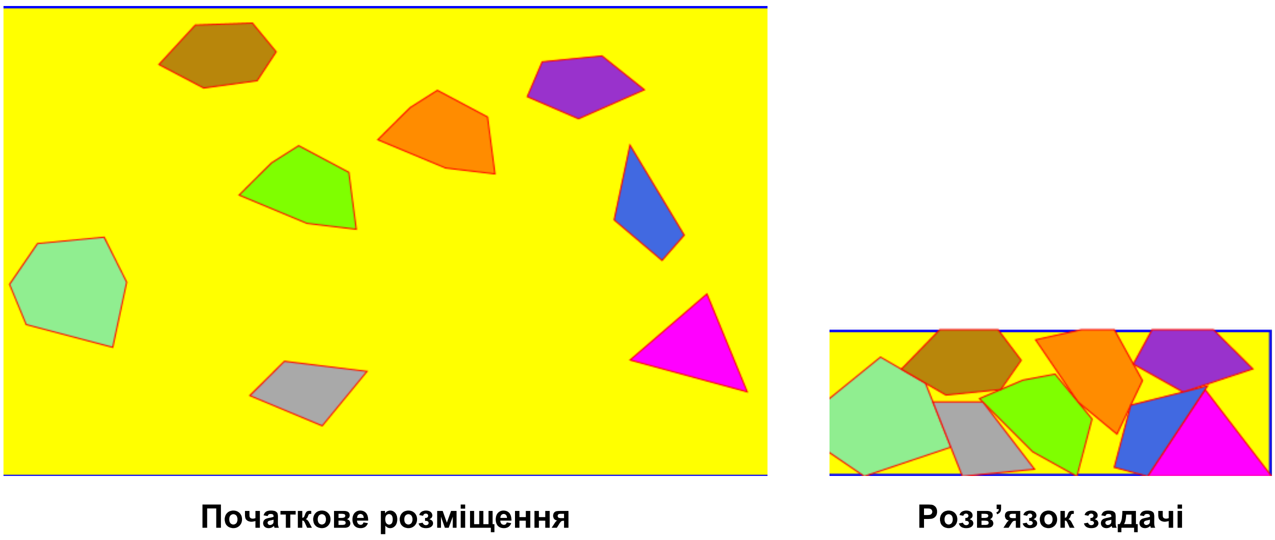


Рис. 16: до задачі 2

Розміри прямокутника:

$$L = 364.6317, \quad H = 120.309, \quad S = 43868.4475.$$

Задача 3.

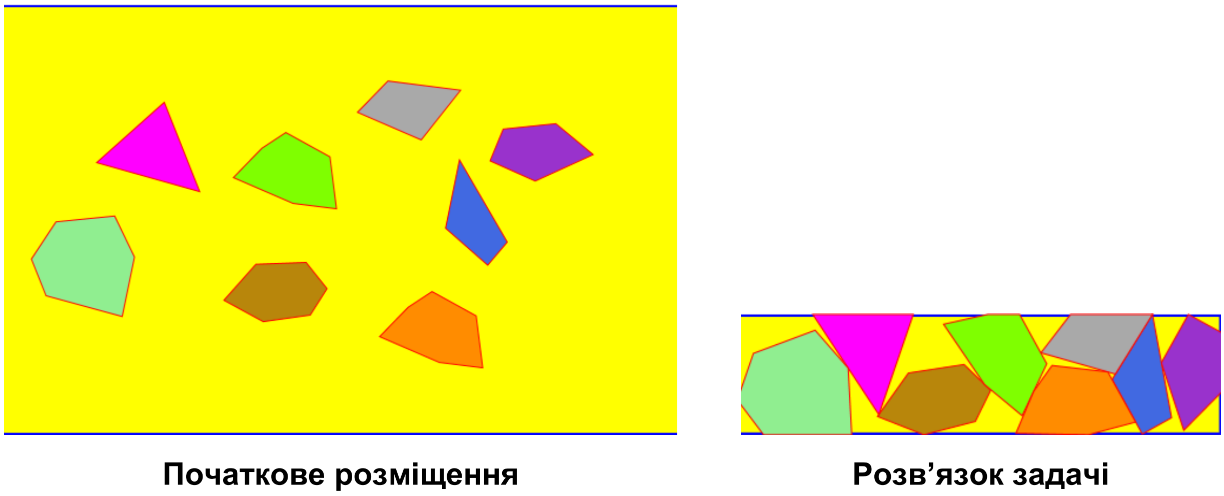


Рис. 17: до задачі 3

Розміри прямокутника:

$$L = 411.4672, \quad H = 101.868, \quad S = 41915.3407.$$

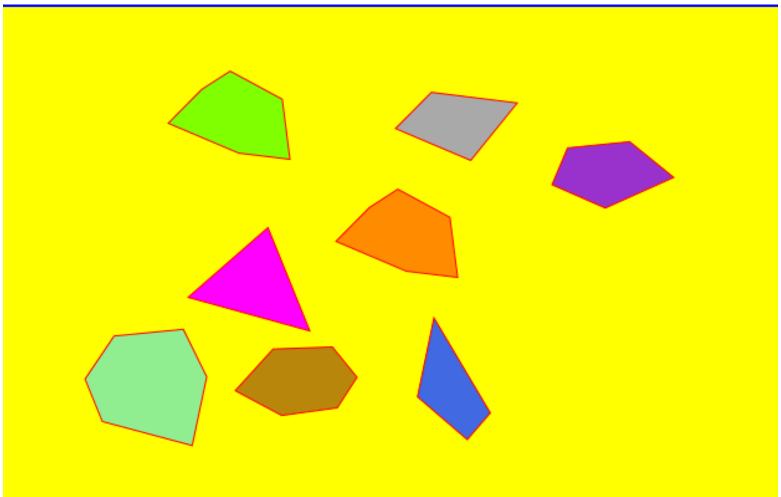
Задача 4.

Рис. 18: до задачі 4

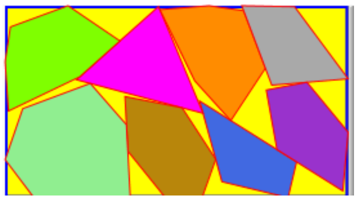
Розміри прямокутника:

$$L = 232.3503, \quad H = 168.3939, \quad S = 39126.373183.$$

Задача 5.



Початкове розміщення



Розв'язок задачі

Розміри прямокутника $L = 266.4012$, $H = 148.6465$, $S = 39599.606$

Найкращі дані отримані при розв'язанні задачі 4. Саме тут отримано мінімальне значення функції цілі: $S = 39126.373183$. На рисунках наведено відповідне розміщення многокутників на початку і в кінці розв'язку задачі, а у таблиці 4 — числові дані цього розміщення

Таблиця 4.

	X	Y	Angle	Vertices
	204.0121	53.13132	0.5828679	(20.7;63.57), (33.94;0), (79.3;76.48), (60.76;98)
	99.26758	-31.47953	0.9796501	(56.72;80.51), (0;56.48), (27.07;29.19), (49.85;14.53), (91.8;37.2), (98;85.47)
	81.67068	38.18016	-0.08684079	(0;64.54), (64.29;8.46), (98;91.54)
	135.8833	75.67089	-1.005691	(0;57.92), (12.51;28.31), (62.55;23.31), (98;52.09), (42.95;76.69)
	-9.80021	97.18973	-0.260989	(13.94;77.42), (0;43.26), (23.38;8.64), (79.12;3.25), (98;41.46), (86.31;96.75)
	109.3479	80.92564	0.2176137	(0;57.61), (30.36;24.13), (78.14;22.43), (98;46.83), (82.11;71.43), (37.36;77.57)
	52.0132	-22.02547	1.170231	(56.72;80.51), (0;56.48), (27.07;29.19), (49.85;14.53), (91.8;37.2), (98;85.47)
	110.017	-18.89255	-0.1230683	(0;51.75), (28.89;22.61), (98;31.16), (60.56;77.39)

Зрозуміло, що можуть знайтись розміщення ще з меншою площею S, але для цього знадобиться провести більшу кількість експериментів.

Висновки

Створене програмне забезпечення може бути використане як в подальших теоретичних дослідженнях, так і в якості оптимізаційного засобу в задачах моделювання розкрою листового матеріалу у різних сферах діяльності людини.

Литература

1. *Беннел Дж., Шейтауэр Г., Стоян Ю.Г., Романова Т.* Tools of mathematical modeling of arbitrary object packing problems, 2008.
2. *Стоян Ю.Г.* Размещение геометрических объектов / Ю.Г. Стоян. — Киев: Наук.думка, 1975. — 237 с.
3. *Стоян Ю.Г.* Методы и алгоритмы размещения плоских геометрических объектов / Ю.Г. Стоян, Н.И. Гиль; Киев: Наук.думка, 1976. — 248 с.
4. *Стоян Ю.Г.* Математические модели и оптимизационные методы геометрического проектирования / Ю.Г. Стоян, С.В. Яковлев; Киев: Наук. думка, 1986. — 268 с.

Semkin V., Omelchenko D.
Pedagogical Lyceum of Slovijans'k, city council of Donets'k region, Ukraine; National Technical University of Ukraine «Ihor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute», Kyiv, Ukraine.

To the question about the application of algorithmic approach while solving of shot-rational inequalities with the method of intervals

The article describes software that has been developed for solving a placement problem of convex polygons in a rectangular domain.

Keywords: *software, placement problem, Φ-function, mathematical model, local minima.*

УДК 378.92

Величко В.Є., Федоренко О.Г.

[1] *кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри алгебри, ДВНЗ «ДДПУ»*

[2] *кандидат педагогічних наук, старший викладач кафедри алгебри, ДВНЗ «ДДПУ»*

e-mail: vladislav.velichko@gmail.com

15 РОКІВ ЕЛЕКТРОННОМУ НАВЧАННЮ НА ФІЗИКО-МАТЕМАТИЧНОМУ ФАКУЛЬТЕТІ

Інформатизація суспільства проявляє себе в усіх галузях діяльності і освіта не є виключенням. Значний емпіричний досвід використання комп'ютерних технологій в освітній діяльності та необхідність його теоретичного аналізу та осмислення призводить до появи нових форм і методів освітньої діяльності, що безпосередньо спираються на ІКТ. Сьогодення педагогічної теорії призводить до необхідності розробки нового виду діяльності – електронного навчання. У статті розглядаються успіхи використання ІКТ в освітній діяльності майбутніх учителів за напрямом підготовки математика, фізика та інформатика на фізико-математичному факультеті ДВНЗ «Донбаський державний педагогічний університет».

Ключові слова: *електронне навчання, підготовка вчителів, фізико-математичний факультет.*

Вступ

Характер розвитку сучасного суспільства, а також глобальні соціально-економічні та науково-технічні процеси активізують застосування інноваційних підходів до процесу навчання на додаток до традиційних. У останні роки інтерес до питання впровадження інформаційних новацій набув особливої значимості. Це пов'язано з інформатизацією системи освіти, та, як наслідок, упровадженням нових ІКТ у процес підготовки майбутніх учителів.

Напрями використання інформаційно-комунікаційних технологій у освітній діяльності слід розглядати як: елемент методики наукових досліджень; складову частину системи управління освітою; об'єкт вивчення; засіб навчання. Кожен із зазначених напрямів знаходиться в тісній взаємодії один з одним.

Сьогодення використання ІКТ у навчальному процесі підготовки майбутніх учителів характеризується, насамперед, додаванням широких можливостей комп'ютерних комунікаційних технологій і побудованих на їх основі хмарних технологій в освітній діяльності. Використання ІКТ для побудови дистанційної освіти, масових відкритих он-лайн курсів, гібридного навчання та мобільного навчання породжують розробку нових вимог як до методики використання програмного забезпечення, так і до самого програмного забезпечення [1].

Таким чином, постає не тільки питання теоретичного обгрунтування сучасних форм і методів використання ІКТ в освітній діяльності, а й питання розробки теоретичних і методичних основ електронного навчання, з урахуванням специфіки його використання, дидактичних переваг та недоліків. Дослідження питання електронного навчання відображені в роботах О. Андрєєва, В. Бикова, К. Бугайчука, Р. Гуревич, М. Кадемія, Р. Кларк (R. Clark), В. Кухаренка, Р. Майер (R. Mayer), А. Манако, М. Росенберг (M. Rosenberg), О. Семерікова, М. Шишкіної та інших.

Основна частина

Під електронним навчанням, за дослідженням В. Бублик та співавторів, розуміється сукупність методів, форм і засобів самостійного, але контрольованого засвоєння певного масиву знань за допомогою спеціалізованого інформаційно-освітнього середовища. Інформаційно-освітнім середовищем електронного навчання є системно-организована сукупність засобів передачі даних, інформаційних ресурсів, протоколів взаємодії, апаратно-програмного забезпечення, орієнтованих на задоволення освітніх проблем користувачів [2].

Марк Розенберг (Marc Rozenberg) говорить про e-Learning як про використання Інтернет-технологій для надання широкого спектру рішень, що забезпечують підвищення знань та продуктивність праці. На його думку, електронне навчання базується на наступних принципах: робота здійснюється в мережі, доставка навчального контенту кінцевому користувачу здійснюється за допомогою комп'ютера з використанням стандартних Інтернет-технологій [3].

У деяких дослідженнях, електронне навчання сприймається і трактується як технологія, тобто набір ІКТ в навчанні або пакети прикладних програм, системи оболонок за допомогою яких можна здійснювати навчання, використовуючи при цьому ресурси мережі. В інших дослідженнях електронне навчання розглядається як сукупність освітніх технологій, що базується на досягненнях високих технологій hi-tech, і технологічних інструментів, у яких реалізуються навчальні методики. Відмінна думка визначення електронного навчання полягає в тому, що це організаційні та методичні елементи педагогічного процесу, які здійснюються завдяки сучасним інформаційним технологіям, а не оболонка для традиційного навчального процесу.

Еллісон Роззетт (Allison Rossett) визначає e-Learning як: Web-навчання (WBT) або електронне навчання, або онлайн навчання та стверджує, що це навчальні курси, що знаходяться на сервері або на комп'ютері, який підключений до мережі Інтернет [5].

Кларк Адрич (Clark Adrich) визначає електронне навчання як широке поєднання процесів, змісту та інфраструктури для використання комп'ютерів і мереж в процесі створення та/або поліпшення будь-якої складової навчальної діяльності [5].

Фахівці ЮНЕСКО вважають, що e-Learning — це навчання за допомогою Інтернет і мультимедіа [6]. Існує велика кількість тлумачень, які роблять акцент на інших аспектах e-Learning. Наведемо декілька з них [6]:

- e-Learning — широкий набір додатків і процесів, що забезпечують: навчання, побудоване на використанні web-технологій; навчання, побудоване з використанням персонального комп'ютера, віртуальних комп'ютерних лабораторій; засоби організації взаємодії користувачів у мережі. e-Learning включає в себе доставку навчального контенту через Інтернет, аудіо- і відеозапис, супутникове мовлення, інтерактивне телебачення тощо;
- e-Learning — навчання, побудоване з використанням інформаційних і телекомунікаційних технологій. Охоплює весь спектр дій, починаючи від підтримки процесу навчання, до доставки навчального контенту слухачам.

Розвиток електронного навчання, за дослідженням С. Семерікова, відбувався за трьома етапами [4, с. 103–105]:

Перший етап (20-50-ті роки XX століття) охоплює період з моменту появи механічних, електромеханічних та електронних індивідуалізованих пристроїв, за допомогою яких подавався навчальний матеріал та виконувався контроль і самоконтроль знань. Час коли була розроблена технологія програмованого навчання.

Другий етап охоплює період 50-80-х років минулого століття та пов'язаний з широким впровадженням ЕОМ у навчальну практику. Ключовими термінами даного періоду стали: інтелектуальні навчаючі системи, комп'ютерно-орієнтовані системи навчання, комп'ютерна підтримка навчального процесу, комп'ютерні системи контролю знань. Під час другого періоду була створена лінійка спеціалізованого програмного забезпечення – автоматизованих навчальних систем PLATO, Coursewriter, Tutor тощо. Цьому сприяли очевидні переваги електронних комп'ютерів над електромеханічними — наявність пам'яті для зберігання навчальних матеріалів, висока швидкість опрацювання та розрахунків, більш широкі засоби для перегляду навчальних матеріалів та багато іншого. Головним недоліком розробок другого етапу була їх стаціонарність та автономність, пов'язана з використанням «великих» обчислювальних машин або, у кращому випадку, під'єднаних до них терміналів. Також було важко реалізувати обмін освітніми ресурсами та послугами між великою кількістю користувачів.

Третій етап (з 80-х років минулого століття) розпочався з появою комп'ютерних мереж та персональних комп'ютерів. Виключно потужний імпульс у розвитку освітніх технологій пов'язаний з використанням глобальної мережі Інтернет. Використання спільних і розподілених ресурсів, Web-технологій, віддалений доступ до навчальних матеріалів забезпечив суттєве підвищення ефективності професійної підготовки, її доступності та масовості. Мережеві технології, висока якість та підвищення апаратного забезпечення уможливили створення професійних середовищ та систем для надання освітніх послуг і реалізації різноманітних видів формальної (організованої) та неформальної (не організованої спеціально) освіти. Ключовими термінами даного етапу є Інтернет, Web-курси, гіпертекст, віртуальне навчання, віртуальний університет, неперервна освіта, навчання протягом усього життя, дистанційне навчання, електронне навчання та мобільне навчання.

Перші кроки до електронного навчання на фізико-математичному факультеті Донбаського державного педагогічного університету розпочались із об'єднання комп'ютерних класів обчислювального центру факультету в єдину локальну мережу. За ініціативою викладачів Величка В.Є. та Піруса Є.М. на наявному обладнанні в 2002 році було запущено комплект програм Eserv/2, який включав у собі mail, proxy, news, web та ftp сервери. У створеній мережі Інтранет були розміщені лабораторні роботи, у яких окрім розділів з програмування були також й завдання з комп'ютерних мереж, електронної пошти, баз даних.

Влітку 2003 року почала функціонувати перша мультимедійна аудиторія на факультеті. Це дозволило демонструвати розроблені електронні освітні ресурси під час лекційних занять, та розміщувати накопичені лекційні матеріали в електронних навчальних курсах. Також, у зв'язку з цим іншого змісту набули захисти курсових та дипломних робіт, а особливо ті, що використовували ІКТ.

У квітні 2004 року за підтримки декана факультету Новікова О.А. було створено виділений сервер, що працював під дією ОС Windows Server 2003 з ліцензією за програмою MSDN AA. На даний сервер було перенесено навчальні матеріали та встановлено відповідні служби. У тестовому режимі була встановлена система дистанційного навчання Moodle, основним завданням якої була інформаційна підтримка навчальних дисциплін кафедри алгебри. Накопичений матеріал невдовзі дозволив використовувати систему Moodle для проведення тестування як одного з компонентів державного екзамену з інформатики.

У 2006 році на кафедрі фізики почала функціонувати лабораторія впровадження нових інформаційних технологій навчання обладнана сучасним комплектом шкільного кабінету фізики в поєднанні з мультимедійними smart-пристроями.

У 2008 році у зв'язку з підключенням локальної мережі факультету до глобальної мережі Інтернет була змінена серверна операційна система на Centos 5 та з'явилась можливість доступу у студентів до навчальних ресурсів факультету з будь-якого пристрою. Останнє дало поштовх до розробки персональних і тематичних сайтів, результатом якого стало написання цілої низки курсових і дипломних робіт як зі створення систем управління змістом електронних ресурсів, так й із розробки та використання електронних освітніх ресурсів.

У 2012 році за ініціативою заступника декана факультета Кадубовського О.А. було розроблено та створено інформаційний сайт фізико-математичного факультету. Даний сайт являє собою інформаційний ресурс на якому розміщені офіційні повідомлення, нормативна документація та методичні посібники які доповнили існуючі електронні ресурси до необхідного забезпечення електронного навчання на факультеті.

Висновки

Виконаний аналіз дозволяє зробити висновок, що електронне навчання є новим кроком у процесі інформатизації освіти. До недоліків електронного навчання відносять: відсутність «живих» контактів з викладачем; недоліки в організації навчального процесу; слабкі пропускні спроможності каналів Інтернет; відсутність методичних розробок за новими формами навчання та розробки електронних освітніх ресурсів. Однак, повертатися до традиційної форми навчання не має можливості з точки зору підготовки випускника сучасності. Очевидним виходом є впровадження моделі змішаного навчання, головною концепцією якого є оптимальне поєднання традиційних та інноваційних способів реалізації освітньої діяльності ВНЗ.

Література

1. *Воронкін О. С.* Періодизація розвитку інформаційно-комунікаційних технологій навчання / О. С. Воронкін // Вища освіта України, 2014. — № 3(54). — С. 109–116.
2. *Бублик В. В.* Електронне навчання в Україні і світі. Ретроспектива і перспектива / В. В. Бублик, О. К. Закусило, В. П. Шевченко // Теорія і методика навчання інформатики та математики: Збірник наукових праць. Вип. 3. / під ред. І. П. Аносова та ін. — Мелітополь: МДПУ, 2004. — С. 10–27.
3. *Marc J. Rosenberg* E-Learning: strategies for delivering knowledge in the digital age. — New York, NY: McGraw-Hill Companies, Inc. 2001, — 343 p.
4. *Семеріков С. О.* Теоретико-методичні основи фундаменталізації навчання інформатичних дисциплін у вищих навчальних закладах : дис. ... д-ра пед. наук : 13.00.02 – теорія та методика навчання (інформатика) / Семеріков Сергій Олексійович ; Національний педагогічний ун-т ім. М. П. Драгоманова. — К., 2009. — 536 с.
5. *Defining eLearning* / Performance, Learning, Leadership,& Knowledge Site. [Electronic resource]. — Mode of access : http://www.nwlink.com/ donclark/hrd/elearning/define.html.
6. *Bates T.* National strategies for e-learning in post-secondary education and training / Bates Tony – UNESCO, 2001. — 132 p.
7. *e-Learning* / Е-Софт Девелопмент [Електронний ресурс]. — 2011. — Режим доступу : http://www.web-learn.ru/

Velychko Vladyslav Ye., Fedorenko Olena G.
Donbas State Teachers' Training University, Slovijans'k, Ukraine

15 Years of e-Learning on the faculty of physics and mathematics

Computerization of society manifests itself in all spheres of activity and education is no exception. Considerable empirical experience of using computer technology in education and the need for its theoretical analysis and understanding leads to new forms and methods of educational activities that are directly based on ICT. The present educational theory leads to the need to develop a new activity – e-Learning. The article discusses the success of ICT use in the education of future teachers in the direction of mathematics, physics and computer science on the faculty physics and mathematics of «Donbas State Teachers' Training University».

Keywords: *e-Learning, training of teachers, faculty of physics and mathematics.*

УДК 004.43:511.32+512.552.3,511.14

Вагнер Г.О., Пащенко З.Д., Рябухо О.М.

[1] *студентка 4 курсу фізико-математичного факультету, ДВНЗ «ДДПУ»*

[2] *кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри алгебри, ДВНЗ «ДДПУ»*

[3] *кандидат фізико-математичних наук, доцент, КДМТУ*

e-mail: pashchenko_zd@mail.ru; annetvagner@mail.ru

РЕАЛІЗАЦІЯ АЛГОРИТМУ ПРЕДСТАВЛЕННЯ ЛАНЦЮГОВИХ ДРОБІВ ГАУСОВИХ ЧИСЕЛ ЗАСОБАМИ МОВИ ПРОГРАМУВАННЯ FREE PASCAL

У статті розглядається реалізація алгоритму представлення ланцюгових дробів гаусових чисел засобами мови програмування Free Pascal. Автори розробили програму для такого представлення.

Ключові слова: *алгоритми, мова програмування, Free Pascal, гаусові числа, ланцюгові дроби гаусових чисел.*

Вступ

Електронні обчислювальні машини вирішують сьогодні найрізноманітніші завдання — керують процесами, доводять теореми, перекладають тексти з однієї мови на іншу, малюють картини, складають музику ...

Проблема використання криптографічних методів у інформаційних системах (ІС) стала зараз особливо актуальна. З одного боку, розширилося використання комп'ютерних мереж, зокрема глобальної мережі Інтернет, по яких передаються великі обсяги інформації державного, військового, комерційного і приватного характеру, не допускає можливість доступу до неї сторонніх осіб. З іншої сторони, поява нових потужних комп'ютерів, мережевих технологій і нейронних обчислень зробило можливим дискредитацію криптографічних систем які ще недавно вважалися практично не уразливими.

В криптографії замість простих натуральних чисел розглядається можливість застосування простих гаусових чисел. Тому досить актуальним є дослідження гаусових чисел та їх представлення.[2]

Основна частина

На множині чисел виду $a + bi$, де a, b — довільні цілі числа, а i — є коренем рівняння $x^2 = -1$, К. Гаусс вперше побудував теорію подільності, аналогічну теорії подільності цілих чисел. Він обґрунтував справедливість основних властивостей подільності; показав, що в кільці комплексних чисел існує тільки чотири оборотних елемента $\pm 1, \pm i$; довів справедливість теореми про ділення з залишком, теореми про єдиність розкладання на прості множники; показав, які прості натуральні числа залишаться простими і в кільці $Z[i]$; з'ясував природу простих цілих комплексних чисел.

Розвинена теорія, описана в його праці «Арифметичні дослідження», стала фундаментальним відкриттям для теорії чисел алгебри.

В кільці $Z[i]$ можливе ділення з остачею, при якому остача менша дільника по нормі. Точніше для будь-яких α і $\beta \neq 0$ знайдеться γ таке, що $\delta(\alpha - \beta\gamma) < \delta(\beta)$. В якості γ можна взяти найближче до комплексного числа α/β гаусове число. Більше того, кільце $Z[i] = \{a + bi | a, b \in Z\}$ цілих гаусових чисел є евклідовим.[3]

Враховуючи ці властивості гаусових чисел, довільні комплексні числа можна представити у вигляді ланцюгових дробів. А у вигляді скінченних ланцюгових дробів представляються раціональні гаусові числа і тільки вони.[1] В основі алгоритму цього представлення лежить знаходження такого цілого гаусового числа, яке знаходиться найближче до даного комплексного.

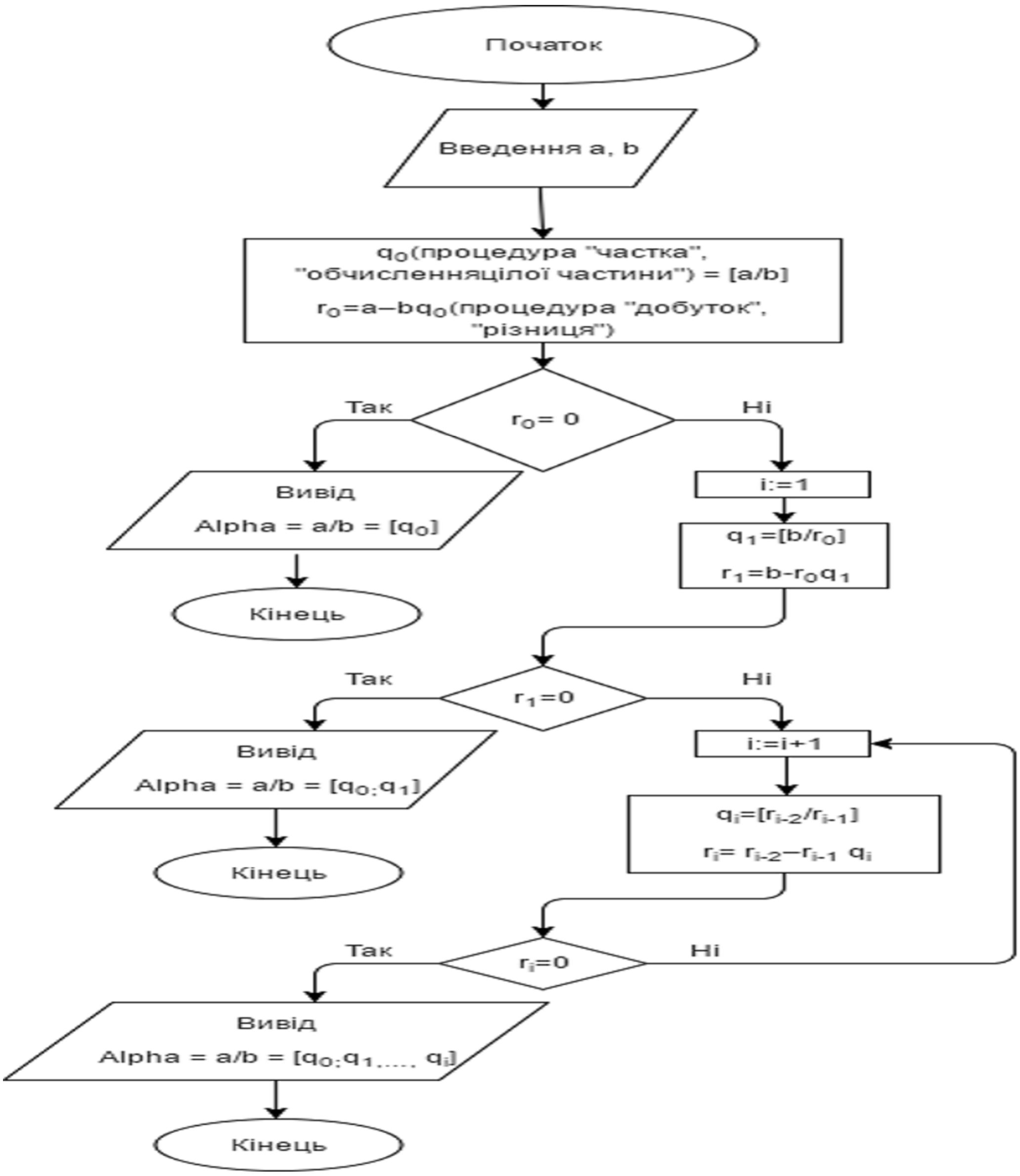
Для створення програми побудови ланцюгового дробу для дробу цілих гаусових чисел ми обрали мову програмування Pascal, а саме компілятор Free Pascal, активна розробка якого велася останні 15 років. Free Pascal Compiler (FPC) — це вільно поширюваний компілятор мови Pascal з відкритими вихідними кодами, поширюється на умовах GNU General Public License (GNU GPL). Середовище має текстовий інтерфейс дуже схожий на інтерфейс Turbo Pascal 7. 0.

Комплексні числа $z = a + bi$ в алгебраїчному вигляді задаємо як record (запис Паскаля «record» — структурований комбінований тип даних, що складається з фіксованого числа компонентів (полів) різного типу). А вивід чисел виконуємо задопомогою процедури «Вивід», де $z.re = a, z.im = b$. Для виконання основних операцій використовуються підпрограми: «Добуток», «Частка», «Різниця».[3] До комплексних чисел ми не можемо напряму застосувати операції div (цілочислове ділення), mod (залишок від ділення) так як їхній тип операндів цілий, а не комплексний. Функції $\mathrm{int}(x)$ — ціла частина числа, $\mathrm{frac}(x)$ — дробова частина числа, також неможна застосовувати, навіть для цілої і уявної частин комплексних чисел окремо, оскільки поняття цілої та дробової частини комплексного числа принципово відрізняється від понять для дійсного числа.

Для знаходження цілої частини комплексного числа ми використовуємо функцію $\mathrm{round}(x)$ — округлення числа. Саме застосування цієї функції до дійсної та уявної частин комплексного числа дає можливість знайти найближче ціле гаусове число до даного комплексного. Цей процес виконується за допомогою створеної процедури «Обчислення цілої частини»:

```
type complex=record
re,im:real;
end;
procedure Celoe (z:complex; var k:complex);
begin
k.re:=round(z.re);
k.im:=round(z.im);
end;
```

Блок-схема створеної програми обчислення ланцюгових дробів раціональних гаусових чисел має наступний вигляд:



Вивід обчисленого ланцюгового дробу раціональних гаусових чисел $\alpha = a/b = [q_0; q_1, \ldots, q_i]$ на екран здійснюється за допомогою оператору циклу з параметром j.

Висновки

В роботі представлено програмну реалізацію алгоритму представлення ланцюгових дробів раціональних гаусових чисел на мові програмування Free Pascal. Дана проблема може розвиватися на випадок представлення довільних комплексних чисел у вигляді ланцюгових дробів цілих гаусових чисел з деякою заданою точністю.

Література

1. *Пащенко З.Д., Вагнер Г.О.* Скінченні ланцюгові гаусові дроби // Збірник наукових праць фізико-математичного факультету ДДПУ. — 2016. — Випуск 6. — С. 26–30.
2. *Пащенко З.Д., Рябухо О.М.* Цепные дроби гаусовых чисел // «Евразийский союз ученых», ежемесячный научный журнал / ред. кол.: Т.В. Аркулин. — М. : ЕСУ, 2016. — №4(25), ч.5. — С. 32–36.
3. Программирование на Паскале. Режим доступа: https://pascal.proweb.kz/index.php?page=251.
4. *Требенко Д. Я., Требенко О.О.* Алгебра і теорія чисел : навч. посіб. для студ. математичних спец. вищих педагогічних навч. закладів: У 2 ч. — К. : НПУ ім. М.П.Драгоманова, 2006. — 395 с.
5. Цепные дроби их применения: сб. научных трудов / под ред. В.Я. Скоробогатько. Институт математики АН УССР. — Киев, 1976. — С. 96–97.

Vagner A.A., Pascenko Z.D., Ryabukho O.M.
Donbas State Teachers' Training University, Slovijans'k, Ukraine
FSBEI HE, «Kerch State Marine Technological University», Kerch.

Implementation of the algorithm for representing continued fractions of Gaussian numbers with the Free Pascal programming language

The article considers the Implementation of the algorithm for representing continued fractions of Gaussian numbers with the Free Pascal programming language. The authors developed a program for this representation.

Keywords: *algorithm, programming language, Free Pascal, Gaussian numbers, continued fractions of Gaussian numbers.*

УДК 378:51-37

Чечетенко В.О., Стьопкін А.В., Новіков О.О.

[1] *студентка 5 курсу фізико-математичного факультету, ДВНЗ «ДДПУ»*

[2] *кандидат фізико-математичних наук, старший викладач кафедри алгебри, ДВНЗ «ДДПУ»*

[3] *кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри математики, ДВНЗ «ДДПУ»*

e-mail: stepkin.andrey@rambler.ru

ВИКОРИСТАННЯ WEB-РЕДАКТОРУ BRACKETS НА УРОКАХ ІНФОРМАТИКИ В ШКОЛІ.

У статті висвітлено сучасний стан проблеми використання web-редакторів на уроках інформатики в загальноосвітніх школах. Розглянуто основні переваги та недоліки використання редактору Brackets у роботі вчителя інформатики.

Ключові слова: *web-редактор, brackets, вільнопоширюване програмне забезпечення, методика навчання інформатики.*

Вступ

Шкільний курс інформатики в системі освіти з кожним днем стає все більш важливішим за рахунок широкої комп'ютеризації, яка в свою чергу потребує постійно підвищувати комп'ютерну грамотність учнів, так як згодом вона перетворюється в комп'ютерну грамотність нашого суспільства. Через брак годин відведених програмою в шкільному курсі інформатики на ознайомлення з методами створення web-сторінок та з web-програмуванням, досконале оволодіння хоча б їх основами стає неможливим. Проте, інтерес школярів до вивчення web-програмування, а не тільки до ознайомлення з ним досить високий. У більшості з них є як мотивація, так і здатність до освоєння необхідних матеріалів. Але, враховуючи те, що навіть мова розмітки гіпертексту HTML, пропонується до вивчення лише в програмах з профільним та поглибленим рівнями вивчення інформатики, а каскадні таблиці стилів CSS та мова програмування JavaScript так і зовсім тільки в програмах з поглибленим вивченням, то становиться зрозумілим, що витрачати час на незручності користування звичайними текстовими редакторами, такими як WordPad чи Блокнот, недоречно.

Тому мета нашої роботи полягає в пошуку найбільш оптимального для загальноосвітніх шкіл web-редактора, який дозволяє зручно створювати web-сторінки та редагувати вже наявний код, створений за допомогою HTML, CSS та JavaScript; а також надає простий інтерфейс користувача зі зручним навігаційним меню; і, бажано, розповсюджуваний за ліцензією вільного програмного забезпечення.

Основна частина

Приймаючи до уваги закордонний та вітчизняний досвід (І.В. Роберт, І.Б. Софронова, П.І. Самойленко, Н.В. Апатова, О.О. Кузнєцов) можна зробити висновок, що інформаційні технології доцільно використовувати при вивченні всіх предметів [1], зрозуміло, що інформатика не є вийнятком. Ці технології постають як нові інтерактивні засоби навчання, які мають певні дидактичні особливості, що дають змогу якісно змінити методи і форми навчання. В наш час існує велика кількість програмних засобів для розробки web-сторінок, які надають досить широкий спектр інструментів для зручної роботи. Але кожен програмний засіб має як переваги, так і недоліки. Вагомою залишається проблема вибору оптимального програмного засобу, який в повній мірі забезпечить потреби вчителя та учнів на уроках інформатики.

Серед великої кількості web-редакторів, представлених в наш час, складно обрати оптимальний програмний засіб. Зрозуміло що для більш зручного користування він має бути кросплатформенний, тому, наприклад, web-редактори notepad++, coda та інші ми не розглядаємо. Також, зважаючи на те, що використовуватися наш редактор буде для навчання в загальноосвітніх школах, які в більшості випадків не можуть дозволити собі комерційне програмне забезпечення, то коло пошуку також зменшуємо до безкоштовних програм, тим самим не розглядається можливість використання таких web-редакторів як Sublime Text, WebStorm, Adobe Dreamweaver та інші.

Один з web-редакторів, який відповідає представленим вимогам є редактор з відкритим кодом Brackets. Він орієнтований на роботу з HTML, CSS і JavaScript [2], тобто повністю задовольняє потреби вчителя при вивченні розділів «Комунікаційні технології» та «Основи комп'ютерного проектування» в школах з поглибленим вивченням інформатики. За допомогою цих же технологій та з використанням Chromium Embedded Framework реалізовано сам редактор, що забезпечує його кросплатформенність, тобто сумісність з операційними системами Mac, Windows і Linux. Brackets створений і розвивається Adobe Systems під ліцензією MIT License та підтримується на GitHub. В основі Brackets лежать такі проекти, як CodeMirror, jQuery, Bootstrap, Node.js [3]. Основна мета проекту – спрощення процесу web-розробки. Середа розробки цілком стабільна – самі розробники IDE Brackets стали використовувати її у своїй повсякденній роботі вже досить давно. На сьогоднішній день існує безліч розширень для Brackets, що додають велику кількість необхідних інструментів для роботи, таких як система контролю версій Git [4], перегляд

HTML-коду в браузері Chrome в реальному часі, синхронізація з FTP та інше.

Інтерфейс редактора досить простий та зручний у використанні. Основними елементами інтерфейсу є:

1. Меню, що включає в себе стандартний набір пунктів (файл, правка, пошук та ін.).
2. Область роботи з файлами проекту. Передбачені стандартні функції, наприклад, запуск на редагування, перейменування файлу, створення нових файлів та каталогів, відкриття каталогу в провіднику та ін.
3. Область роботи з кодом, де саме і відбувається створення та редагування коду.

Розглянемо більш детально основні можливості, які значно спрощують користування редактором та виокремлюють його серед більшості аналогічних web-редакторів:

1. В Brackets включені різні теми оформлення, що дозволяє налаштувати інтерфейс редактора за вашим бажанням.
2. Є можливість розділення екрану на дві частини, що дозволяє одночасно переглядати та редагувати два документи, що значно спрощує редагування web-сторінок. Розділяти екран можна як по вертикалі так і по горизонталі.
3. Brackets підтримує мінікарту документу, що значно спрощує орієнтування в досить великих документах.
4. Також в редакторі є підтримка множинних курсорів, що дозволяє вносити однотипну інформацію одразу в декілька рядків, наприклад, коли необхідно закрити одночасно декілька однакових тегів.
5. Інтелектуальне автодоповнення коду. Завдяки новому API (application programming interface) автодоповнення працює з HTML, CSS, JavaScript (включаючи jQuery) [5].
6. Inline-редагування коду. Основна ідея – це скорочення числа переміщень між файлами в рамках одного проекту – втілюється за допомогою, так званого, Inline-редагування, яке дозволяє працювати з контекстно-залежними частинами інших файлів, не покидаючи своє поточне місце розташування в проекті. Також реалізовано «Inline Color Editor» для редагування кольору об'єкту без використання графічного редактору та таблиці кольорів, необхідно просто обрати колір з запропонованого спектру, і редактор сам додасть необхідний колір до коду [5].
7. Швидкий доступ до документації. Дуже корисна функція відображення довідки по CSS-елементам безпосередньо під час роботи з кодом. Довідкова система заснована на базі матеріалів з webplatform.org. Щоправда

довідка доступна лише англійською мовою.

8. Швидкий доступ до файлів проекту. Існує панель швидкого переходу до файлів проекту. При введенні початку імені необхідного файлу редактор запропонує нам всі файли проекту, які задовольняють введеній умові, обравши файл він одразу відкривається для редагування.
9. Менеджер розширень. Установка необхідних плагінів (а їх нараховується десь біля 200) відбувається у вікні менеджера розширень. Плагіни в Brackets дозволяють розширити стандартний функціонал і полегшити розробку проектів. Один з самих відомих плагінів є всім відомий Emmet. Emmet – це плагін, що дозволяє за допомогою спеціального скороченого синтаксису написати великий код, що значно економить час при розробці проектів [5].
   Наприклад, написавши такий код в html документі:
   $$ul > li * 2 > a[href = \#]\{Link\$\}$$
   та натиснувши клавішу TAB, отримаємо наступну конструкцію:
   $$\begin{array}{l} \\ \quad <a\ href = "\#" > Link1 \\ \quad <a\ href = "\#" > Link2 \\ \end{array}$$
10. Живий попередній перегляд (Live Preview). За замовчуванням живий попередній перегляд працює завдяки локальному Node.js серверу. Особливість цього перегляду в тому, що можна бачити результат в реальному часі. Принцип простий: вибираєте html документ, включаєте Live Preview. Відкриється віконце браузера, в якому буде відображатися ваш проект в поточному варіанті написання. Варто додати, що ця функція працює тільки з браузером Chrome. Також при редагуванні HTML в Brackets в браузері підсвічується відповідний редагований елемент [4,5].

Незважаючи на те, що виробники сконцентрувалися в першу чергу на десктопних версіях, планується створення версії Brackets для запуску в браузерах. А також вже працюють над мобільним додатком Brackets, який перетворить планшети в зручний засіб створення web-сторінок. Крім того, Brackets буде вбудовуватися в існуючі web-додатки.

Основними недоліками Brackets є, наприклад, відсутній зрозумілий механізм налаштування IDE, не найбільша швидкість завантаження програми і роботи певних функцій (наприклад, inline-редагування JavaScript). При встановленні редактору за замовчуванням в ньому є проблема з відображенням кирилиці, але це швидко вирішується простою зміною шрифту за замовчуванням.

Висновки

У закінченні наводяться висновки з даного дослідження і стисло подаються перспективи подальших розвідок у цьому напрямку. Brackets – це неймовірно зручний і багатофункціональний web-редактор, використовуючи який, ви обов'язково знайдете найбільш зручні для вас функції і властивості. Цей редактор не вимогливий до ресурсів, простий в інтерфейсі, а за допомогою гарячих клавіш і плагінів дозволяє прискорити і спростити написання коду, що дозволить вчителю використовувати його на непотужних комп'ютерах з операційною системою довільного сімейства. За функціоналом і кількістю плагінів, Brackets на даний момент поступається іншим зрілим редакторам, але він вже зараз може стати повноцінним інструментом для web-розробника, а тим паче для вчителя.

Література

1. *Рамский Ю.С.* Информационное общество. Информатизация образования // Компьютерно-ориентированные системы обучения. — Киев : НПУ им. М.П. Драгоманова, 2003. — № 7. — С. 16–28.
2. Brackets: A modern, open source text editor that understands web design. [Electronic resource]. — Access mode: http://brackets.io/
3. Update about Extract for Brackets (Preview). [Electronic resource]. — Access mode: http://blog.brackets.io/2016/04/14/update-about-extract-for-brackets-preview/
4. How to Use Brackets. [Electronic resource]. — Access mode: https://github.com/adobe/brackets/wiki/How-to-Use-Brackets
5. A Review of the Brackets Editor. [Electronic resource]. — Access mode: https://www.sitepoint.com/review-brackets-editor/

Chechetenko V.O., Stepkin A.V., Novikov O.O.
Donbas State Teachers' Training University, Slovijans'k, Ukraine.

Usage of web-editor Brackets on the lessons of informatics in schools.

The article is devoted to modern state of the problem of web-editors usage on the lessons of informatics in schools. Basic advantages and disadvantages of usage of web-editor Brackets in the work of a teacher of informatics are considered here.

Keywords: *web-editor, brackets, teaching technique of informatics.*

МЕТОДИКА ВИКЛАДАННЯ МАТЕМАТИКИ В ЗОШ ТА ВНЗ

УДК 372.851

Беседін Б.Б., Вагнер Г.О.

[1] *кандидат педагогічних наук, доцент кафедри геометрії та МВМ, ДВНЗ «ДДПУ»*

[2] *студентка 4 курсу фізико-математичного факультету, ДВНЗ «ДДПУ»*

e-mail: besedin_boris@ukr.net; annetvagner@mail.ru

МЕТОДИКА ВИКОРИСТАННЯ ЕЛЕМЕНТІВ НАОЧНОЇ ГЕОМЕТРІЇ В КУРСІ МАТЕМАТИКИ 5-6 КЛАСІВ

У статті розглядається проблема вивчення геометрії у 5-6 класах та досліджено вдосконалення методики використання елементів наочної геометрії.

Ключові слова: *наочна геометрія, методика, елементи наочної геометрії, геометрія.*

Вступ

Основним завданням школи та вчителя у сучасному світі є виховання гармонійно розвиненої особистості, тобто людини, яка розвинена всебічно. Головним завданням цього процесу є боротьба за високу якість вмінь та знань учнів, формування в них навичок самостійної розумової праці.

Збільшення розумового навантаження на уроках математики примушує задуматися над тим, як підтримати в учнів інтерес до матеріалу, що вивчається, їх активність впродовж всього уроку. У зв'язку з цим ведуться пошуки нових ефективних методів навчання і таких методичних прийомів, які активізували б думку школярів, стимулювали б їх до самостійного набуття знань.

Одним з таких способів є використання елементів наочної геометрії на уроках. Тому вдосконалення методики використання елементів наочної геометрії у 5-6-х класах є досить актуальною темою для дослідження.

Введення геометричного матеріалу в курс математики 5-6 класів надзвичайно важливо для подальшого успішного навчання школярів, їх залучення до пізнання навколишнього світу, розвитку їх розумових здібностей. Все це робить актуальним питання правильної організації навчання математики та елементів геометрії, зокрема.

Прихильниками використання елементів наочної геометрії в курсі математики є: А.Т. Фоменко, А.М. Астряб, Д. Гільберт, Г.В. Дорофєєв, І.Ф. Шаригін; Н.Я. Віленкін, В.І. Жохов, А.С. Чесноков, С.М. Нікольський, М.К. Потапов, Н.Н. Решетніков та інші.

Наочна геометрія не повинна бути придатком до арифметики, вироджуючись у вивчення мір довжини, площі та об'єму і способів вимірювання прямолінійних відрізків, площ прямокутників і обсягів прямокутних паралелепіпедів.

Основна частина

Розвиток дитини є складним процесом становлення людської особистості, процесом безперервного руху, зміни і вдосконалення її фізичних та духовних сил. Внутрішньою рушійною силою розвитку дитини є боротьба протилежних, суперечливих тенденцій, що виникають внаслідок розходження між досягнутим рівнем розвитку дитини і тим новим змістом діяльності, яким вона оволодіває.

Вік чіпко утримує розвиток і диктує свою волю. Закономірності, що діють в цій області, жорстко лімітують можливості розвитку. Я.А. Коменський був першим, хто наполягав на строгому обліку в учбово-виховній роботі вікових особливостей дітей. Він висунув і обґрунтував принцип природовідповідності, згідно з яким вчення і виховання повинні відповідати віковим етапам розвитку. Як у природі все відбувається свого часу, так і у вихованні все повинно йти своєю чергою - своєчасно і послідовно.

Урахування вікових особливостей — один з основоположних педагогічних принципів.

Учень 5 класу може керувати своєю увагою. Він добре концентрує увагу до значущої для нього діяльності. Тому для більш успішного навчання математики, необхідно підтримувати інтерес школяра до вивчення цього предмета. При цьому доцільно на уроках використовувати наочні засоби навчання: таблиці, схеми, картинки. Процес навчання буде проходити більш ефективно, якщо на уроках демонструвати зв'язок досліджуваного матеріалу з життям, застосування нових знань на практиці.

Основою формування у дітей уявлень про геометричні фігури є здатність їх до сприйняття форми. Ця здатність дозволяє дитині дізнаватися, розрізняти і зображати різні геометричні фігури: точку, пряму, криву, ламану, відрізок, кут, багатокутник, квадрат, прямокутник і т.д.

А.М. Астряб в основу курсу «Наочна геометрія» поклав такі міркування [1]:

1. Першою стадією пізнання геометричних форм є безпосереднє сприйняття. Для того щоб це безпосереднє сприйняття було яскравим та повним, необхідно, щоб у ньому брали участь не тільки очі, а по можливості більше число органів почуттів. Ось чому при розв'язанні задач діти повинні ліпити, малювати, вимірювати, накладати одну фігуру на іншу, розрізати і склеювати їх.
2. Другою стадією психологічного процесу пізнання геометричних форм є виникнення в дитячій свідомості геометричних образів. Повнота і яскравість останніх залежить від дитячої уяви, рівносильного інтересу. Пов'язане з ними почуття задоволення з'являється у дітей тільки тоді, коли вони в досліджуваному новому знаходять елементи добре знайомого або старого (апперцепція).
3. Увага і інтерес у дітей можуть підтримуватися тільки тоді, коли вивчення буде погоджено з дитячою природою, по суті своїй діяльною і творчою.

Дитина за своєю природою є активним дослідником зовнішнього світу. Ось чому вивчення геометричних форм повинно бути побудоване на принципі самодіяльності і активності. Завдання потрібно складати так, щоб діти самі вимірювали, порівнювали, розвивали свій окомір, досліджуючи пропонований їм матеріал, самі приходили до доступному для їх сил висновку, відчуваючи таким чином радість самостійного відкриття істини.

За допомогою наочності на уроках геометрії добре формується в учнів логіко-пошукова пізнавальна діяльність. Правильно організована навчальна діяльність пізнавально-пошукового типу при використанні наочності на уроках математики, продумане керівництво нею з боку педагога, викликає в учнів інтерес до навчального процесу, розвиває активність і самостійність.

За висловом Л.М.Толстого: «...знання тільки тоді знання, коли набуті зусиллям думки, а не пам'яті.» [4]. Тому, необхідно зробити навчальний процес творчим, осмисленим, активізувати всю пізнавальну діяльність школярів.

Яким вимогам мають відповідати елементи наочної геометрії, щоб учні змогли отримати широкі геометричні уявлення, оволодіти наочно-емпіричним методом дослідження, розвинули просторову уяву, геометричне сприйняття, мислення?

Шлях знайомства з найпростішими фігурами: відрізок, пряма, кут тощо, без вивчення їх властивостей, оволодіння способами побудови, знайомства з різними геометричними конфігураціями і відношеннями фігур, виявився тупиковим і не дав позитивних результатів. Розглянемо ті вимоги, яким мають відповідати елементи наочної геометрії.

По-перше, це різномаїття геометричних форм і конфігурацій, яке б забезпечувало широту сформованих уявлень, в поєднанні з виділенням «головних» об'єктів. Паралельно повинно здійснюватися вивчення плоскої та просторової геометрії. При цьому плоскі фігури повинні «виходити в простір» і розглядатися як елементи просторових тіл, а просторові тіла «переходити» на плоский аркуш паперу в якості зображень, розгорток. При вивченні ліній акцент робиться на пряму і коло, при вивченні фігур — на трикутники і чотирикутники.

Щоб уявлення про фігуру було всеохоплюючим, а не поверхневим, при його формуванні повинні враховуватися різні аспекти. В якості таких аспектів вивчення геометричного об'єкта можна виділити: а) його елементи; б) способи моделювання і графічного зображення; в) розподіл фігури і складання фігур; г) «вихід у простір» для плоских фігур; д) відношення з іншими фігурами і класифікації; е) симетрія; ж) вимір.

Друга вимога — оволодіння способами дій з геометричними фігурами також має бути об'єктом вивчення і входити в зміст освіти. Це оволодіння способами графічної побудови геометричних фігур, прийомами їх моделювання, навичками практичних вимірювань, діями по візуальному сприйняттю геометричних об'єктів, створення їх уявних образів і оперування ними.

І. Ф. Шаригін висловив думку про відмінність курсу геометрії 5-6 класів від курсу 1-4 класів, яка полягає в тому, що, незважаючи на значимість геометричного матеріалу в початковій школі, він виконує допоміжну роль по відношенню до арифметичного матеріалу. Тут метою є вироблення міцних асоціативних зв'язків у парах «фігура-число» і «фігура-слово»: враховується обсяг досліджуваних геометричних об'єктів і відношень, вводяться різні класифікації, збільшується частка графічних вправ і завдань, виконуваних у візуальному плані, вводяться нові методи дослідження. Однією з відмінних особливостей курсу геометрії 5-6 класів є завдання зацікавити, привернути увагу учнів до математики, показавши багатогранність і різноманітність її проявів.

Останнім часом з'явилася велика кількість різноманітної (за концепцією, способом викладу, добору матеріалу) літератури для учнів 5–6 класів, що містить геометричний матеріал. Під час аналізу цієї літератури легко помітити два основних напрямки, яких дотримуються автори різних посібників.

Перший — орієнтований на ознайомлення дітей з різноманітними геометричними фігурами в наочній (часто ігровій) формі через серію цікавих сюжетів, підкріплених вправами. При цьому основною метою, яку ставлять перед собою автори, є розвиток просторових уявлень учнів та прищеплення їм інтересу до предмета.

Прихильники другого напрямку вважають за необхідне використання двох років для більш раннього включення учнів у систематичне вивчення геометрії: на доступному для них рівні з урахуванням їх психологічного і предметного досвіду викладання систематичного курсу, що містить доведення багатьох теорем.

Ми вважаємо, що необхідна «золота середина». На наш погляд, геометричний матеріал, призначений для вивчення в 5-6 класах, повинен являти собою курс, який органічно включається в структуру безперервної геометричної освіти. З одного боку, дозволяє поглибити і розширити уявлення дітей про відомі їм геометричні фігури, а з іншого боку, — такий, що має основною метою підготовку учнів до систематичного вивчення геометрії в 7-9 класах.

При цьому необхідно враховувати наступне:

1) весь зміст курсу і спосіб його викладу повинні спиратися на попередній життєвий і геометричний досвід учнів;
2) весь зміст пропедевтичного курсу повинен підкорятися внутрішній логіці, максимально наближеної до логіки систематичного курсу;
3) має бути приділено достатньо уваги розвитку мовлення: роботі з термінами, реченнями, формулюванню визначень;
4) система вправ повинна сприяти, з одного боку, розвитку просторових уявлень, а з іншого боку – знайомити учнів з найпростішими логічними операціями і закладати основи формування навичок проведення цих операцій.

У пропедевтичному курсі геометрії особливу роль відіграє наочність. В систематичному курсі наочність носить, як правило, ілюстративний характер, але в пропедевтичному курсі вона повинна стати основним джерелом геометричної інформації, що диктує особливий підхід до підбору і виготовлення засобів наочності.

Через те, що у сучасному світі широко розвинені комп'ютерні технології, для використання елементів наочної геометрії можна використовувати:

1. GeoGebra — вільно розповсюджувана комп'ютерна програма для вивчення математики;
2. GEONExT — дозволяє виконувати на інтерактивній дошці побудови майже як на папері, тобто зберігаючи у школяра правильне уявлення про техніку геометричної побудови за допомогою циркуля і лінійки.
3. Kig — додаток для інтерактивних геометричних побудов, що дозволяє учням і студентам вивчати геометричні фігури за допомогою комп'ютера.

4. KmPlot — це графопобудовник алгебраїчних функцій для KDE. Програма має потужний вбудований інтерпретатор.
5. FreeMind — програма для візуалізації планів та ідей у вигляді схеми.

Висновки

Отже, підвищенню якості знань з математики у дітей 10-11 років буде сприяти: використання елементів наочної геометрії на уроках у поєднанні з іншими видами навчально-пізнавальної діяльності учнів, застосування раціональної та ефективної методики використання елементів наочної геометрії у 5-6-х класах, дотримання відповідних психолого-педагогічних умов та методичних вимог.

В процесі навчання доцільно використовувати експеримент, спостереження, вимірювання, моделювання, комп'ютерне моделювання на уроках геометрії, аби учнів гарно підготувати до систематичного вивчення курсу геометрії та для того, щоб їм було простіше сприймати теоретичний матеріал.

Література

1. *Астряб А.М.* Наглядная геометрия. — М. : Гос. изд-во, 1923. — 160 с.
2. *Бескин Н.М.* Метдика геометрии. Учебник для педагогических институтов. — М. : Ленинград, 1947. — 276 с.
3. *Карасёв П.А.* Элементы наглядной геометрии в школе. — М. : ГУПИМП РСФСР, 1955. — 206 с.
4. *Толстий Л. М.* Коло читання. — Ясна Поляна:Рипол Класік, 2004. — 463 с.
5. *Шарыгин И.Ф., Ерганжиева Л. Н.* Наглядная геометрия. Учебное пособие для учащихся V—VI классов. — М. : Дрофа, 2015. — 189 с.

Besedin B.B., Vagner A.A.
Donbas State Teachers' Training University, Slovijans'k, Ukraine.

Methods of using elements of visual geometry in the mathematics of 5-6 classes

The article deals with the problem of studying geometry in 5-6 grades and examines the improvement of methods of using elements of visual geometry.

Keywords: *visual geometry, methods, elements of visual geometry, geometry.*

УДК 372.851

Беседін Б.Б., Смоляков О.В.

[1] *кандидат педагогічних наук, доцент кафедри геометрії та МВМ, ДВНЗ «ДДПУ»*

[2] *студент 4 курсу фізико-математичного факультету, ДВНЗ «ДДПУ»*

e-mail: besedin_boris@ukr.net, smolyakovalex@ukr.net

ВИКОРИСТАННЯ НАОЧНОСТІ НА УРОКАХ МАТЕМАТИКИ

Стаття присвячена вивченню проблеми використання наочності в основній школі. У ній окреслено потребу у використанні наочності і надано деякі рекомендації по використанню наочності на уроках математики.

Ключові слова: *наочність, види наочності, математика, основна школа.*

Вступ

XXI століття – це час переходу до високотехнологічного інформаційного суспільства, в якому якість людського потенціалу, рівень освіченості й культури всього населення набувають вирішального значення. Сьогодні для розвитку інтересу дітей до навчання на уроках математики недостатньо лише особистісних якостей учителя.

Застосування наочності є одним з основних дидактичних принципів навчання. На основі безпосередніх сприймань і міркувань , що спираються на наочність , у дітей створюється уявлення , а потім формується поняття. Від якості засвоєння цих понять залежить успіх дальшого засвоєння математики.

За допомогою спеціальних засобів наочності математика дозволяє формувати і розвивати образне, абстрактне, візуальне, просторове мислення учнів, що полегшує їм задачу сприйняття, розуміння, осмислення і засвоєння учбового матеріалу.

Нажаль, деякі вчителі не надають великого значення наочності, або ж використовують її не правильно, що не тільки не допомагає учням, але й навпаки, шкодить. Таким чином, актуальність статті визначається необхідністю розгляду науково-обґрунтованої теорії використання наочності у викладанні математики в основній школі, що приводить до поліпшення якості знань учнів і підвищення їх інтересу до предмету.

Основна частина

Принцип наочності в навчанні вважається похідним від принципу доступності: чим насиченішим є унаочнення заняття, тим доступнішим буде пояснення нової теми. Сутність цього принципу можна передати висловом: «краще один раз побачити, ніж сто разів почути». Він спирається на провідну роль зорових аналізаторів у сприйманні зовнішнього світу (адже за їхньою допомогою людина отримує від 80 до 90 відсотків інформації). Тому навчальний матеріал потрібно подавати в найбільш унаочненій формі. Засновник цього принципу Я. В. Коменський стверджував, що необхідно здобувати мудрість не з книг, а з неба, землі, дубів і буків, а якщо ми маємо намір передавати учням істинні й достовірні знання, то повинні навчати за допомогою особистого спостереження і чуттєвої наочності.

Основні правила принципу наочності:

- чітко визначити мету використання засобів наочності;
- комплексно використовувати такі види наочності, які давали б найбільший ефект, але ні в якому разі не зловживати ними;
- активно залучати суб'єктів учіння до роботи із засобами наочності;
- керувати спостереженнями суб'єктів учіння;
- відкидати все зайве, щоб не викликати додаткових асоціацій;
- застосовувати наочність на всіх етапах навчального процесу;
- демонструвати засоби наочності послідовно в міру подання навчального матеріалу;
- забезпечувати змістовність і естетичність їх оформлення;
- наочність має відповідати психологічним закономірностям сприймання;
- не використовувати засоби наочності як самоціль, а вдало доповнювати матеріал, що вивчається;
- не переоцінювати й не недооцінювати роль наочності в навчанні тощо.

Під час навчання необхідно застосовувати різні види наочності — натуральну, образну, словесно-образну наочність (динамічну і статичну, плоску і об'ємну).

Отже, принцип наочності можна визначити як сукупність норм, які випливають із закономірностей процесу навчання і стосуються пізнання дійсності на основі спостережень, мислення і практики на шляху від конкретного до абстрактного, і навпаки.

Відомо, що вихідним моментом у пізнанні є споглядання. Від живого споглядання до абстрактного мислення, а від нього до практики — такий діалектичних шлях пізнання реальної дійсності. Отже, для здійснення живого споглядання вчитель повинен потурбуватись про наочні посібники.

Наочними посібниками називають ті речі, моделі, малюнки, таблиці, схеми, які показують учням у процесі навчання для того, щоб вони успішно засвоїли навчальний матеріал. У процесі навчання математики найчастіше використовують такі наочні посібники:

1) натуральну наочність, яка представляє собою реальні предмети, що зустрічаються в природі, побуті, техніці;

2) моделі, прилади та інструменти;

3) схематичні малюнки, графіки, таблиці, діаграми.

Часто найкращим наочним посібником є справжня річ. Застосування наочності на уроках математики дещо відмінне від застосування її на інших уроках. Головне призначення наочного приладдя на уроках математики — полегшити процес утворення абстрактних понять, створити основу для певних узагальнень. Наочність використовується не тільки під час пояснення нового матеріалу на уроці, а й при його закріпленні, при повторенні вивченого, під час розв'язання задач тощо.

Наприклад, розглядаючи в курсі геометрії 7 класу трикутник як жорстку фігуру, слід показати учням використання жорсткості трикутника на практиці: при побудові підйомних кранів, різних архітектурних споруд, мостів.

Вивчаючи тему «Прямокутник» у курсі геометрії 8 класу, доцільно наводити приклади прямокутників з оточуючого середовища: стіни, стеля і підлога класної кімнати, кришка стола, вікно, аркуш зошита, підручника тощо.

Використання натуральної наочності на уроках математики переконує учнів у тому, що математика вивчає просторові форми і кількісні відношення реального світу. Але іноді модель реального предмета краща, ніж сам предмет. Наприклад, для порівняння раціональних чисел, вивчення дій над ними зручно використовувати модель термометра з рухомою стрічкою, а справжній термометр для цього не придатний.

Наочними посібниками є також різні прилади і інструменти. Якщо вчитель вперше показує транспортир і пояснює, як ним вимірювати кути, то він у цьому випадку є наочним посібником, а пізніше учні ним користуються як вимірювальним приладом. Такими приладами і інструментами на уроках математики є: лінійка, складний метр, рулетка, польовий циркуль, штангенциркуль, мікрометр (для вимірювання довжин відрізків), транспортир, астролябія, теодоліт (для вимірювання кутів, побудови кіл і дуг), палетка (для вимірювання площ). При вивченні відповідного матеріалу слід демонструвати і пояснювати, як ними користуватися.

На уроках математики серед усіх наочних посібників найчастіше використовуються малюнки. При виведенні формул, доведенні теорем, розв'язуванні задач доводиться будувати графіки, схеми, діаграми, різні геометричні фігури. До малюнка ставляться певні вимоги. Він повинен бути правильним, наочним і простим у виконанні. Правильним вважається малюнок, який є однією з проекцій зображуваної фігури, відповідає розглядуваній задачі чи теоремі. Малюнок вважається наочним, якщо він викликає таке ж сприймання форми фігури, як і при безпосередньому розгляді її моделі. Третя вимога зводиться до того, щоб малюнок, по можливості, виконувався безпосередньо, при мінімальній кількості допоміжних побудов.

На дошці малюнки краще виконувати кольоровою крейдою, рівні відрізки позначати однаковим числом невеликих рисочок, прямі кути позначати маленькими квадратиками. За готовим малюнком учень може розпізнати певне поняття, сформулювати теорему чи задачу, висунути гіпотезу. Корисно учням пропонувати і самостійно виконати малюнок до теореми чи задачі.

Також, ефективним видом наочності при засвоєнні системи понять є класифікаційні схеми — схеми з пропущеними рядками, схеми з недостатньою або зайвою інформацією.

Одним із видів наочності є таблиці. Особливостями таблиць є велика інформативність, наочність і статичність поданої інформації, що дає можливість узагальнювати знання учнів, засвоювати поняття в системі. До кожної таблиці вчитель може запропонувати систему питань, що сприяють усвідомленню учнями взаємозв'язків між поняттями. Таблиці поділяють на:

1) довідкові;
2) ілюстративні;
3) робочі (таблиці-завдання).

Принципово нові можливості використання наочності надають комп'ютери, які в даний час досить широко використовуються в школах. Комп'ютери надають потужні й універсальні засоби отримання, опрацювання, зберігання, подання різноманітної інформації, розкривають широкі можливості щодо істотного зменшення навчального навантаження і водночас інтенсифікації навчального процесу, надання навчально-пізнавальній діяльності творчого, дослідницького спрямування, яка природно приваблює учня, результати якої приносять йому задоволення, стимулюють бажання працювати, набувати нових знань.

Необхідність використання комп'ютера у навчанні математики пов'язана перш за все зі значно ширшими (порівняно з традиційними технологіями навчання) можливостями розкриття загальноосвітніх функцій математики.

Ефективність використання комп'ютера під час вивчення математики значною мірою залежить від спеціальних програмних засобів, які дають змогу поєднати високі обчислювальні можливості з графічним поданням результатів опрацювання інформації; дають можливість економити навчальний час за рахунок виключення механічних нетворчих обчислень, здебільшого розрахункового характеру, озброюють учнів ефективними наочними методами розв'язування широкого класу задач. Використання таких програмних засобів дозволяє учневі розв'язувати окремі задачі, не знаючи відповідного аналітичного апарату, методів і формул, правил тотожних перетворень виразів тощо. Але інколи ми можемо бачити, що наочність застосовується неправильно, наприклад: при використанні презентації, вчитель занадто захаращив її текстом і купою формул. Діти швидко втомляться і втратять інтерес до пояснюваного матеріалу. Наочність використана в цьому випадку, не лише не допомагає, але й навпаки, шкодить учням.

У процесі навчання наочні посібники використовуються по-різному. Розглянемо, використання наочних посібників: для ознайомлення з новим матеріалом, закріплення знань, умінь та навичок (ЗУН), перевірки засвоєння ЗУН.

Треба звернути увагу на те, що коли наочний посібник виступає як джерело знань, він особливо повинен підкреслювати істотне — те, що є основою для узагальнення, а також показувати неістотне. Наприклад, моделі прямокутників треба взяти різних розмірів — це дає можливість дітям побачити, що рівність протилежних сторін є загальна властивість будь-яких прямокутників, вона не залежить від довжини його сторін.

Ознайомлюючи з новим матеріалом, вчитель часто використовує наочний посібник для конкретизації нових знань. У цьому разі він виступає як ілюстрація словесних пояснень. Наочний посібник може виступати для конкретизації нових знань. Наприклад, допомагаючи дітям у пошуках розв'язку задачі, вчитель робить схематичний малюнок або креслення до задачі; пояснюючи прийом обчислення, супроводжує пояснення діями з предметами і відповідними записами. При цьому важливо використати наочний посібник своєчасно, ілюструючи суть пояснення, залучаючи до роботи з посібником і пояснення самих учнів. Під час розкриття прийому обчислення, вимірювання, розв'язування задачі треба особливо чітко показувати рух (додати — присунути, відняти — відсунути).

Супроводжуючи пояснення малюнком і математичними записами на дошці, вчитель не лише полегшує сприймання матеріалу дітьми, а й одночасно показує зразок виконання роботи в зошитах. Пояснення вчителя на дошці –

є прикладом, тому виконувати креслення і записи треба красиво і грамотно.

Під час ознайомлення з новим матеріалом і особливо під час закріплення знань і умінь, треба так організувати роботу з наочними посібниками, щоб учні самостійно оперували ними і супроводжували свої дії відповідними поясненнями. При ознайомленні з новим матеріалом і при закріпленні ЗУН учні мають самостійно оперувати наочними посібниками і пояснювати свої дії. Якість засвоєння матеріалу в цих випадках значно підвищується, бо в роботу включаються різні аналізатори. Вчитель повинен заохочувати дітей до використання наочних засобів під час самостійної роботи.

На етапі закріплення ЗУН широко використовують для різноманітних вправ довідкові таблиці, таблиці для усної лічби, малюнки, схеми, креслення для складання задач дітьми.

Наочні посібники іноді використовують для перевірки знань, умінь учнів. Наприклад, використовуючи роздавальний матеріал (картки з відрізками, многокутниками і т.д), учитель перевіряє уміння вимірювати довжину відрізків, площу і периметр многокутників тощо.

Найбільше унаочнення потрібно при вивченні нового матеріалу, при закріпленні і повторенні — лише частково. З відстаючими учнями унаочнення треба використовувати частіше.

Висновки

Отже, у процесі навчання математики найчастіше використовують такі наочні посібники: натуральну наочність, яка представляє собою реальні предмети, що зустрічаються в природі, побуті, техніці; моделі, прилади та інструменти; схематичні малюнки, графіки, таблиці, діаграми.

Можна зробити висновок, що наочні посібники треба вміло застосовувати під час уроку. При надмірному унаочненні робота схожа на гру, учень бавиться, не напружуючи думки. Таке унаочнення втрачає свою доцільність, воно гальмує розумовий розвиток учнів. У свою чергу при правильному застосуванні наочні посібники дають змогу урізноманітнити навчальний процес, зробити його більш цікавим, захоплюючим, ефективно організувати як колективну, так і індивідуальну роботу. Правильне використання наочності на уроках математики сприяє формуванню чітких просторових і кількісних уявлень, змістовних понять, розвиває логічне мислення і мову, допомагає на основі розгляду й аналізу конкретних явищ прийти до узагальнень, які потім застосовуються на практиці.

Використання наочних посібників дає змогу: активізувати роботу учнів; зекономити час на уроці; збільшити обсяг роботи на уроці; підвищити ефективність процесу оволодіння знаннями, вміннями і навичками.

Література

1. *Ващенко Г.І.* Загальні методи навчання: Підручник для педагогів / Г.І. Ващенко. — Київ : Свічадо, 1997. — 441 с.
2. *Жалдак М.І.* Компю'тер на уроках математики : посіб. для вчителів / М.І. Жалдак. — К. : Техніка, 1997. — 303 с.
3. Психологія навчання / за ред. Б.Ф. Баєва. — К. : Рад. школа, 1972. — 136 с.
4. *Сморжевський Л.О.* Методика використання наочності на уроках алгебри і геометрії в основній школі : навчальний посібник / Л.О. Сморжевський, Ю.Л. Сморжевський. Кам'янець-Подільський : Камянець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка, 2010. — 184 с.

Besedin B.B., Smolyakov A.V.
Donbas State Teachers' Training University, Slovijans'k, Ukraine.

The use of visualization in the lessons of mathematics

The article is devoted to the study of the problem of using visualization in the primary school. It identifies the necessity of using visualization and provides some recommendations of the visualization usage in math lessons.

Keywords: *visualization, types of visualization, mathematics, primary school.*

УДК 519.813.3

Боєвець Н.В.

[1] *викладач кваліфікаційної категорії «спеціаліст вищої категорії», «старший викладач» Державного вищого навчального закладу «Слов'янський коледж транспортної інфраструктури»*

e-mail: inna_boevec@mail.ru

ВИКОРИСТАННЯ ДІЛОВОЇ ГРИ ЯК ОДНОГО З ІНТЕРАКТИВНИХ МЕТОДІВ НАВЧАННЯ ПРИ ВИКЛАДАННІ ДИСЦИПЛІНИ «МАТЕМАТИКА»

Одним з пріоритетних завдань сучасної освіти є створення необхідних і повноцінних умов для особистісного розвитку кожного студента, формування їх активної позиції в навчальному процесі. Тому використання ділової гри є основою розвитку пізнавальної компетентності студента.

Ключові слова: *пізнавальна компетентність, інтерактивні вправи, «мозкова атака», лабірінт, математичне лото, турніри, диспути, конференції.*

Вступ

Ділові ігри є педагогічним засобом і активною формою навчання, яка інтенсифікує навчальну діяльність, моделюючи управлінські, економічні, психологічні, педагогічні ситуації і дає можливість їх аналізувати і виробляти оптимальні дії в подальшому. Ігровий супровід вивчення матеріалу дозволяє підтримувати постійний високий інтерес у студентів до змісту дисципліни, активізує їх самостійну діяльність, формує і закріплює практичні навички.

Ділові ігри на відміну від інших традиційних методів навчання, дозволяють більш повно відтворювати практичну діяльність, виявляти проблеми і причини їх появи, розробляти варіанти вирішення проблем, оцінювати кожен із варіантів вирішення проблеми, приймати рішення і визначати механізм його реалізації. Перевагою ділових ігор є те, що вони дозволяють: розглянути певну проблему в умовах значного скорочення часу; освоїти навички виявлення, аналізу та вирішення конкретних проблем; працювати груповим методом при підготовці та прийнятті рішень, орієнтації в нестандартних ситуаціях; концентрувати увагу учасників на головних аспектах проблеми і встановлювати причинно-наслідкові зв'язки. Крім того, за допомогою ділових ігор можна вчити і вчитися не лише тому, як і чому треба працювати, можна тренувати такі важливі для успішної роботи якості, як комунікативність, лідерські якості, вміння орієнтуватися в складній, швидко мінливій ситуації.

Основна частина

Використання ігрових завдань та інтерактивних вправ на заняттях з математики позитивно вплинуло на якість успішності студентів, про що свідчать результати контрольних робіт, тематичного тестування. Показник якості зріс з 51% у 2012 році до 59% у 2016 році.

Ігри, які я використовую на уроках математики, розвивають мислення, кмітливість, збагачують увагу студентів, спонукають їх до пошуку, активізують групу під час вивчення нового і закріплення вже вивченого матеріалу.

У своїй практиці я використовую такі дидактичні ігри як математичне лото, лабіринти, математичні турніри, диспути, вікторини, конференції, проводжу заняття «мозкової атаки», заняття систематизації та узагальнення знань у формі подорожей, конкурсів, математичних змагань.

1. Математичне лото

Математичне лото можна використовувати на семінарських заняттях під час закріплення вивченої теми і повторенні матеріалу.

Наведемо приклади карток і великої картки математичного лото при вивченні теми: «Інтеграл і його застосування».

Велика картка

Маленькі картки

$\int\limits_1^3 \frac{dx}{x^2}$	$\int\limits_{-1}^2 x^4 dx$	$\int\limits_9^{16} \frac{dx}{2\sqrt{x}}$
$\int\limits_0^1 e^x dx$	$\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos x dx$	$\int\limits_0^{\pi/3} \sin x dx$

Велика картка

2/3	1	1/2
6,6	1,7	2

2. Математичні турніри

Математичні турніри можна проводити в кінці заняття, з метою активізації навчальної діяльності студентів, коли студенти втомилися. На проведення турніру відводиться 15-20 хвилин. Групу поділяють на 2 команди. Кожній команді пропонується 2-3 нескладні задачі, або 5-6 прикладів. Через 6-8 хвилин кожен студент повинен записати у зошит розв'язок задач або прикладів своєї команди. Допускаються консультації в середині команди.

Наведемо приклад завдань однієї з команд при вивченні теми: «Похідна та її застосування».

Знайти похідні функцій:

а) $f(x) = 5 + 2 \cdot \sin x\,;$
б) $f(x) = x^2 \cdot \operatorname{tg} x\,;$
в) $f(x) = \sqrt{\sin x}$
г) $f(x) = 8 \ln x^2 + 29 \cdot e^x - 1$
д) $f(x) = \sqrt{\lg 6x}$
е) $f(x) = x^2 \cdot \ln^4 x$

3. Лабіринт

Основна мета: перевірити теоретичні знання студентів з даної теми та вміння розв'язувати задачі.

Для кожного студента з трьох команд у окремий конверт кладуть 3-5 карток. Задачі в кожному наборі розташовані по наростаючій складності. Задачі команд мало відрізняються одна від одної. Студент бере з конверта ту картку, код якої вказав вчитель. Код другої картки відповідає відповіді першої задачі. Тому другу картку можна вибрати лише після розв'язку першого завдання. Код першої картки — це відповідь до задачі на останній картці. Таким чином, виходить ланцюжок чисел, за яким, як по орієнтиру, студент виходить з лабіринту.

Наведемо приклад завдань для проведення лабіринту при вивченні теми: «Границя функції».

Знайти границі:

код: -0,5 $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2x^2+7x+6}{x^2+3}$	*код: 2* $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^2-6x+9}{x^2-9}$	*код: 0* $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{2x^3+x}{x^3-1}$
код: 2 $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2-5x+6}{x-2}$	*код: -1* $\lim\limits_{x\to 5} \dfrac{1-\sqrt{x-4}}{x-5}$	

Таким чином, виходить ланцюжок чисел: 2; 0; 2; -1; -0,5.

4. Поле чудес

Поле чудес також можна використовувати на семінарських заняттях. Правила гри: групу поділяють на 3 команди, кожній з команд пропонується вгадати слово (з однаковою кількістю літер для кожної команди). У вчителя існує стільки завдань, скільки літер у слові. Якщо команда знайшла правильну відповідь до відповідного цій літері завдання, літера вважається вгаданою. Перемагає та команда, яка вгадає усі літери у своєму слові.

5. Заняття «мозкової атаки»

Такого типу уроки проводять після завершення теми чи розділу. Зміст цього методу — в тому, щоб за мінімум хвилин дати максимум ідей.

Бінарне заняття. Такий урок часто називають інтегрованим. Головна перевага бінарного заняття полягає у можливості створити у студентів систему знань, допомогти уявити взаємозв'язок предметів і таким чином підвищити рівень знань студентів. Бінарні заняття вимагають активної діяльності кожного студента, тому клас необхідно готувати до їх проведення: запропонувати літературу з теми заняття, порадити узагальнити практичний досвід, придивитись до конкретного явища.

Інтегроване заняття має такі особливості: по-перше, дозволяє студентам здійснити засвоєння знань з предмета в сукупності з іншими науками; по-друге, сприяє формуванню пізнавального інтересу; по-третє, забезпечує узагальненя наявних знань, уміння використовувати їх у процесі вивчення інших наук.

6. Робота в малих групах

Робота в малих групах (3-5 осіб) слід використовувати тоді, коли необхідно вирішити проблему, якою важко впоратися індивідуально, або ставиться завдання, поряд з іншими, набути навичок роботи у команді. Рольові ігри розвивають професійні, комунікативні навички, відпрацьовують різні варіанти поведінки в пробних ситуаціях. Працюючи в малих групах, студенти отримують більше можливостей брати активну участь у занятті, бути корисним один одному, відчути власні можливості та зміцнити їх, практикувати навички співпраці, між осібного спілкування, учитися один у одного, цінувати різні точки зору, виступати перед аудиторією як спікер, що повідомляє групове рішення. Рульові ігри за своєю ефективністю є одним з основних прийомів на інтерактивних заняттях. Процес роботи групи опирається на розподіл функції серед її учасників, що дозволяє кожному активно включатися у роботу (починаючи роботу, викладач об'єднує студентів в малі групи, доводить до них завдання).

7. Заняття-дискусія

Основні етапи:

<table>
<tr><th>Підготовча частина</th><th>Основа частина</th><th>Заключна частина</th></tr>
<tr><td>Уточнити і записати на дошці тезу заняття-диспуту</td><td>Надати слово «захисникові» стверджувальної сторони</td><td>Надати слово студентам, що записували стверджувальні аргументи</td></tr>
<tr><td>Визначити групи, які братимуть участь у диспуті, та розподілити стверджувальну і заперечувальну сторони</td><td>Надати слово всім учасникам групи підтримки стверджувальної сторони</td><td>Надати слово студентам, що записували заперечувальні аргументи</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Визначити групи інформаційної підтримки стверджувальної сторони і розподілити її учасників за секторами:
«військовий експерт»,
«архівіст»,
«політолог».</td><td>Надати слово «захисникові» заперечувальної сторони</td><td>Надати слово студентам, що бажають висловитись з приводу диспуту</td></tr>
<tr><td>Надати слово всім учасникам інформаційної підтримки заперечувальної сторони.</td><td>Виробити аргументи і контраргументи шляхом спільного обговорення.</td></tr>
<tr><td rowspan="3">Визначити серед решти студентів групи, що будуть записувати аргументи і контраргументи перших двох груп, тобто виконуватимуть завдання.</td><td rowspan="2">Завершальний диспут «захисників» з метою з'ясування, фактів, аргументів, доведень, позицій.</td><td>Обов'язково дати домашнє завдання.</td></tr>
<tr><td>Зробити підсумок уроку.</td></tr>
<tr><td>Використання під час виступів унаочнень, таблиць, схем, стіннівок є обов'язковим.</td><td>Виставити оцінки.</td></tr>
</table>

8. Заняття – брейн-ринг

Заняття – брейн-ринг дозволяє студентам відчути себе ерудитом, частиною команди, згуртовує колектив. «Брейн-ринг» – відома телевізійна гра, де стартом є цікаве запитання, а фінішем -– відповідь. Необхідно швидко зреагувати, адже час для прийняття рішення обмежений.

9. Заняття – прес-конференція

Заняття – прес-конференції розвивають активність, пошукові здібності, вміння розкривати суть певної проблеми, стисло і коротко висвітлювати її, конкретно відповідати на поставлені питання. Вони вчать самостійно здобувати знання. Також на заняттях досить часто застосовуються «незакінчені речення», математичні диктанти, кругові завдання.

Ураховуючи всі вимоги, вік і тип студентів можна розробити таку гру, що вона буде цікава всім учасникам. На заняттях студенти вирішують досить багато завдань, всі вони однакові і не цікаві. Прийшовши на математичну ділову гру, вони побачать, що вирішувати задачі зовсім не нудно, вони бувають не такі складні або навпаки одноманітні, що у завдань можуть бути незвичайні й цікаві формулювання, і не менш цікаві розв'язки. Вирішуючи завдання практичного значення, вони усвідомлюють всю значимість математики як науки. У свою чергу ігрова форма, в якій буде проходити вирішення завдань, додасть всьому заходу зовсім не навчальний, а цікавий характер і студенти не помітять, що вони навчаються.

Висновки

До всього вищесказаного слід додати, що неможливо створювати нове в жодній галузі життя, не маючи творчих здібностей. Щоби бути ефективним педагогом треба бачити, знаходити і створювати нове у професії. А як знайти нове? На думку С. Гіппіуса, так: «Важке зробити звичним, звичне — легким, легке — красивим».

У цій статті розглядається тільки один із методів інноваційних технологій навчання, який несе реальну користь для педагогічного процесу. Стаття призначена для викладачів математики вищих навчальних закладів I-II рівнів акредитації.

Література

1. *Ващенко Л.* Інноваційні процеси в системі загальної середньої освіти особливості управління // Освіта і управління. — 2003. — т. 6. — №3. — С. 97–104.
2. *Віняр Л.* Інновації на уроках // Математика в школах України: науково-методичний журнал. — 2006. — №2. — С. 23–27.
3. *Віняр Л.* Математичне доміно. Інтерактивні ігри для 6-11 класів // Математика в школах України: науково-методичний журнал. — 2006. — №20. — С. 15–18.
4. *Прохорова О.* Впровадження сучасних педагогічних технологій в практику роботи // Математика в школах України: науково-методичний журнал. — 2006. — №14. — 213 с.
5. *Сиротинко Г.* Сучасний урок: інтерактивні технології навчання. — Х.: Видав. гр. «Основа», 2003. — 117 с.
6. *Фирсов. В.* Тайная жизнь чисел. — Москва: Центрполіграф, 2002. — 212 с.
7. *Пометун О., Пироженко Л.* Сучасний урок. Інтерактивні технології навчання: Науково-методичний посібник. — К. : А.С.К., 2007. — 217 с.

Boyevets Natal'ya V.
Slovijans'k college transport infrastructure, Slovijans'k, Ukraine.

Using business game as one of interactive teaching methods in teaching discipline «Mathematics»

One of the priorities of modern education is to create the necessary conditions for full and personal development of each student, the formation of an active position in the classroom. Therefore, the use of business game is the basis of cognitive competence of students.

Keywords: *cognitive competence, interactive exercises, «brainstorming» Labirint, mathematical bingo, tournaments, debates and conferences.*

УДК 37.016:514.113:004

Глазова В.В., Безсмертна А.В.

[1] *кандидат педагогічних наук, доцент кафедри геометрії та МВМ, ДВНЗ «ДДПУ»*

[2] *студентка 4 курсу фізико-математичного факультету, ДВНЗ «ДДПУ»*

e-mail: veraglazova@ukr.net, alina-bessm@ukr.net

ВИКОРИСТАННЯ ПРОГРАМИ GEOGEBRA 5.0 ДЛЯ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ СТЕРЕОМЕТРІЇ

У статті розглядається програма GeoGebra 5.0 та її застосування під час розв'язування задач стереометрії . Наведено приклади стереометричних задач, які доцільно розв'язувати за допомогою інтерактивної геометричної системи GeoGebra 5.0. Задачі супроводжуються методичним коментарем.

Ключові слова: *система динамічної математики; GeoGebra 5.0; стереометрія; тіло обертання; розв'язування задач за допомогою ІКТ.*

Вступ

Останнім часом під час навчання математики часто використовують спеціалізовані програмні засоби, серед яких в окрему групу можна виділити системи динамічної математики. Однією з таких програм є *GeoGebra*. Просторові інструменти цієї програми дозволяють будувати геометричні тіла, їх комбінації, проводити площину через три задані точки (або через дві прямі або через пряму і точку), будувати перетин й інші додаткові елементи геометричних тіл, проводити вимірювання, визначати кути та багато іншого. Окремої уваги заслуговує функція побудови виносних малюнків, завдяки якій можна швидко побудувати креслення будь-якого двовимірного об'єкта (наприклад, зобразити окремо від основного малюнка перетин многогранника або його грань). Можливість креслити в тривимірному просторі відсутня в програмах «Жива геометрія» або «Математичний конструктор». Існує також низка програм для тривимірного моделювання: Компас, 3D Studio Max тощо, але саме GeoGebra дозволяє найбільш яскраво проілюструвати стереометричні аксіоми й теореми, що вивчаються в шкільному курсі.

У роботах М. Жалдака, Ю. Горошка, Є. Вінниченка, С. Ракова, Т. Крамаренко, В. Ракути та ін. розглядаються проблеми, пов'язані з розробкою й упровадженням систем динамічної математики в навчальний процес загальноосвітніх навчальних закладів.

Особливості роботи в динамічному середовищі *GeoGebra*, інтерфейс програми, способи її застосування в навчанні математики, приклади розв'язання окремих задач висвітлено в наукових доробках М. Хохенватера [2], В. Ракути [5], Р. Зіатдинова [3], О. Семеніхіної [6], М. Друшляк [6] та ін.

Мета статті — описати інструменти GeoGebra 5.0 для розв'язування стереометричних задач, а також навести приклади розв'язання задач з їх використанням.

Основна частина

Програма *GeoGebra 5.0* [1] написана Маркусом Хохенватером на мові Java (працює на великій кількості операційних систем), до її розробки долучилися науковці багатьох країн світу. Вона доступна більш як 50 мовами, зокрема й українською, і в цей час активно розробляється.

GeoGebra — найпопулярніша в світі безкоштовна математична програма за допомогою якої можна розв'язувати різноманітні типи математичних задач:обчислення значення виразів; спрощення дробово-раціональних виразів; розкладання на множники многочленів; розкладання на прості множники числа; побудова графіків функцій і рівнянь, заданих аналітично; графічне розв'язування рівнянь і їх систем; знаходження координат точок перетину графіків двох функцій на заданому проміжку; графічне розв'язування нерівностей і їх систем; побудова різноманітних геометричних фігур тощо. Також GeoGebra має великий набір інструментів для створення динамічних комп'ютерних моделей.

Процес навчання наочний завдяки візуальній формі використання програми. Наведемо приклади використання *GeoGebra* для розв'язування задач стереометрії.

Приклад 1. Побудувати фігуру утворену при обертанні кривої $y = \frac{4}{x}$, $x \in [1, 4]$ навколо: а) осі Oy; б) осі Ox [4].

Методичний коментар: для кращого розуміння учнями фігури утвореної обертанням кривої навколо прямої доцільно застосувати середовище *GeoGebra*, що дає змогу розглянути отриману фігуру в 3D форматі.

Побудова. Встановимо додаткове полотно *Вид/Полотно 3D*, на якому побудуємо необхідну нам фігуру.

В рядку *Введення* записуємо рівняння кривої $f(x) = \frac{4}{x}$.

Задаємо команду: Функція $[f, 1, 4]$ (*На полотні іншим кольором буде відображатися функція:* $h(x) = \frac{4}{x}, (1 \leqslant x \leqslant 4)$).

В *Панелі об'єктів* викликаємо контекстне меню функції $f(x) = \frac{4}{x}$ та обираємо інструмент *Показувати об'єкт (Графік функції не буде відображатися на полотні).*

Побудуємо фігуру утворену при обертанні отриманої кривої $h(x)$ навколо осі Oy. В панелі інструментів в групі *Спеціальні лінії* обираємо *Паралельні прямі* та будуємо пряму $(i : x = 0)$, яка проходить через точку $A(0,3)$ паралельно Oy. Використовуючи інструмент *Повзунок*, будуємо його на полотні. У вікні яке з'явилося задаємо ім'я (α), значення повзунка *(кут)* та інтервал. На *Полотні 3D* в панелі задач обираємо інструмент *Обертати об'єкт навколо прямої*. Вказуємо об'єкт обертання $h(x)$, потім пряму та вводимо значення кута обертання (α) *(Ми отримали функцію* h_1*)*. В *Панелі об'єктів* викликаємо контекстне меню функції h_1 та обираємо – *Залишати слід*. Викликавши контекстне меню повзунка α обираємо – *Анімація (Ми отримали тіло обертання Рис.1)*.

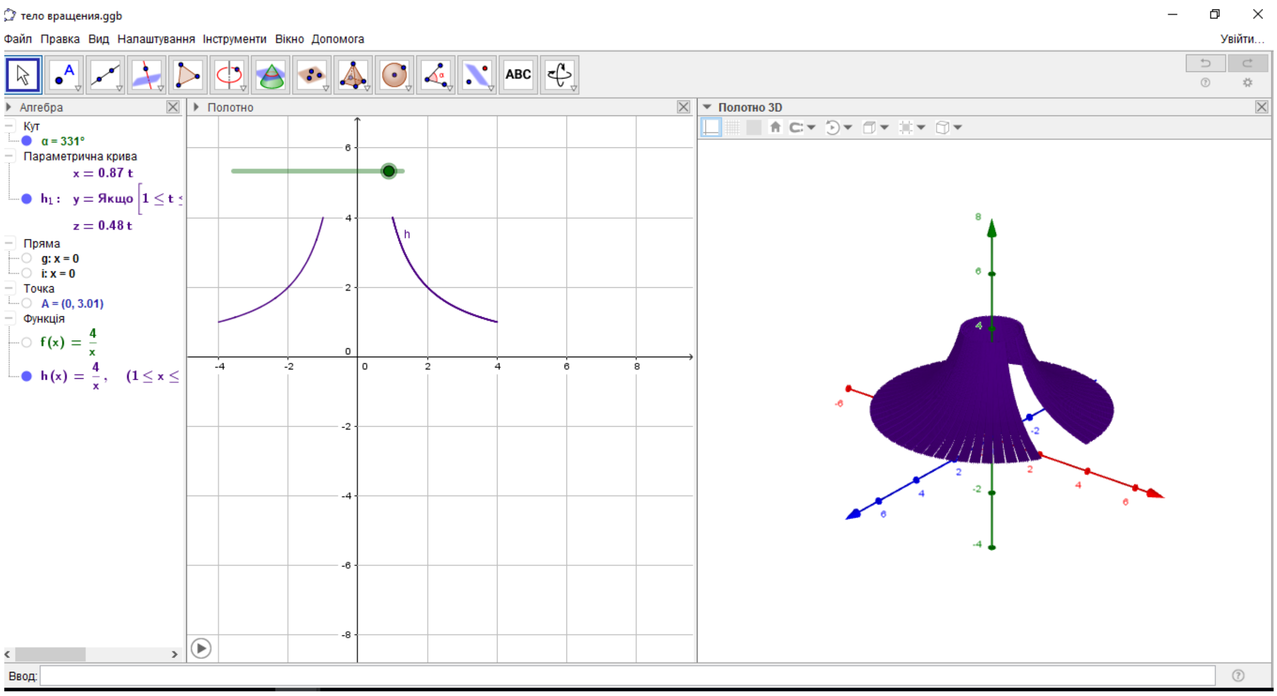


Рис. 1: 3D зображення фігури утвореної обертанням кривої навколо осі Oy

Побудова фігури утвореної при обертанні навколо осі Ox виконується аналогічно.

Однією з особливостей програми *GeoGebra* є можливість побудови динамічного сліду для 3D-об'єктів. Отриманий слід є статичним об'єктом, який не можна динамічно змінювати в подальшому. На жаль, розробниками цієї версії програми не передбачено інструмент *3D-Локус*. Нагадаємо, що для двовимірних об'єктів інструмент *Локус* автоматично будує ГМТ, яке сприймається як самостійний повноцінний об'єкт (до нього можна прив'язати точку, знайти перетин з іншими об'єктами тощо). Але використання саме інструмента *Слід* з позицій методики навчання математики може бути більш ефективним через потребу фіксувати проміжні результати пошуку, чого не дозволяє інструмент *Локус*.

Приклад 2. Обчисліть площу поверхні тіла, утвореного обертанням рівнобедреного трикутника з бічною стороною a та кутом при вершині $120°$ навколо прямої, що містить сторону трикутника [4].

Методичний коментар: задача вимагає від учнів розвиненої просторової уяви й бачення складної тривимірної конструкції, тому доцільним є застосування прийому «відхід на площину», який із залученням середовища *GeoGebra* є результативним завдяки передбаченій розробниками одночасній демонстрації тривимірних об'єктів і їх плоского перерізу площиною.

Розв'язування. Встановимо додаткове полотно *Вид/Полотно 3D*, на якому побудуємо необхідну нам фігуру. В *Полотні* на осі Ox побудуємо дві точки B і C та відрізок BC. За допомогою інструмента *Кут заданої величини* побудуємо $\angle ABC = 120°$ (повертаємо точку B навколо точки C на $120°$). Обираємо інструмент *Паралельні прямі* та будуємо пряму (p), яка проходить через точку $P(2,0)$ паралельно Ox та пряму c, яка проходить через точку A паралельно осі Oy. Використовуючи інструмент *Відрізок* будуємо ΔABC та відрізок AO. За допомогою інструмента *Повзунок*, створюємо повзунок на полотні. У вікні яке з'явилося задаємо ім'я (α), значення повзунка *(кут)* та його інтервал. На *Полотно 3D* вибираємо інструмент *Обертати об'єкт навколо прямої* та обертаємо прямі BA і AC навколо прямої p.

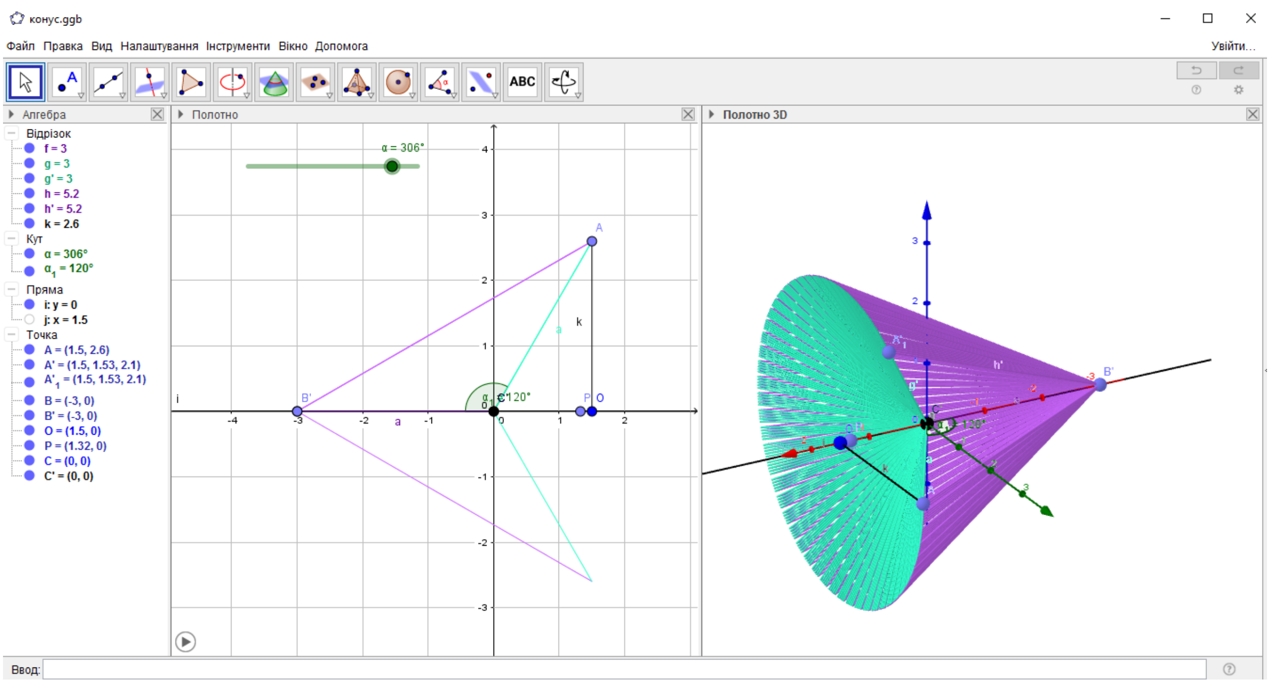


Рис. 2: Інтерактивне поєднання $2D$ і $3D$ зображень під час розв'язання задач

Використовуючи рис. 2 приходимо до висновку що утворена фігура є конусом радіуса OA і висотою BO, з якого вирізали конус радіуса OA і висотою CO. Тоді площа утвореної фігури дорівнює сумі площ бічних поверхонь цих конусів, тобто $S = S_{BO} + S_{CO}$, де $S_{BO} = \pi \cdot AO \cdot AB$ і $S_{CO} = \pi \cdot AO \cdot AC$.

Висновки

При традиційному проведенні уроків з геометрії потрібні численні побудови з використанням креслярських інструментів, які займають багато часу. Використання комп'ютерних інструментів системи динамічної математики *GeoGebra* під час навчання геометрії уможливлює підвищення інтересу до вивчення предмету, відображує максимальну наочність розв'язування задач, урізноманітнює форми і методи роботи на уроках з метою підвищення їх ефективності, оптимізує навчальний процес.

Література

1. GeoGebra. [Елект. ресурс]. — Режим доступу : https://www.geogebra.org.
2. *Hohenwarter M.* Введение в GeoGebra (версия 4.2) [Електронний ресурс] / Markus Hohenwarter, Judith Hohenwarter. — 153 с. — Режим доступу : https://static.geogebra.org/book/intro-ru.pdf.
3. *Ziatdinov R.* Dynamic geometry environments as a tool for computer modeling in thesystem of modern mathematics education. [Electronic resource] / RushanZiatdinov, Valery M. Rakuta. // European Journal of Contemporary Education. — 2012. — № 1(1). — P. 93–100. — Режим доступу : http://ejournal1.com/journals_n/1348513764.pdf.
4. Геометрія : 11 кл. : підруч. для загальноосвіт. навч. закл. : академ. рівень, профіл. рівень / Г. П. Бевз, В. Г. Бевз, Н. Г. Владімірова, В. М. Владіміров. — К. : Генеза, 2011. — 336 с.
5. *Ракута В. М.* Система динамічної математики GeoGebra як іноваційний засіб для вивчення математики / В. М. Ракута // Інформаційні технології і засоби навчання. — 2012. — № 4 (30).
6. *Семеніхіна О.В.* Інструментарій програми Geogebra 5.0 і його використання для розв'язування задач стереометрії / О.В. Семеніхіна, М.Г. Друшляк // Інформаційні технології і засоби навчання. — 2014. — Т. 44, вип. 6. — С. 124–133. — Режим доступу : http://nbuv.gov.ua/UJRN/ITZN_2014_44_6_14.

Hlazova Vira V., Bezsmertna A. V.
Donbas State Teachers' Training University, Slovijans'k, Ukraine.

Using the GeoGebra 5.0 for solving stereometry tasks

The article considers GeoGebra 5.0 and its using in solving stereometry tasks. The article contains examples of solving stereometry tasks which are expedient to solve with the help of an interactive geometric system GeoGebra 5.0. Tasks are accompanied by a methodological commentary.

Keywords: *dynamic mathematics system; GeoGebra 5.0; stereometry; solid of revolution; the use of ICT to solving stereometry tasks.*

УДК 37.016:514.113:004

Глазова В.В., Горзова С.А.

[1] *кандидат педагогічних наук, доцент кафедри геометрії та МВМ, ДВНЗ «ДДПУ»*

[2] *студентка 4 курсу фізико-математичного факультету, ДВНЗ «ДДПУ»*

e-mail: veraglazova@ukr.net, yorzova.svetlana@gmail.com

GEOGEBRA — ІННОВАЦІЙНИЙ ЗАСІБ ДЛЯ ВИВЧЕННЯ СТЕРЕОМЕТРІЇ

У статті розглянуто проблему навчання школярів за допомогою інноваційних систем динамічної математики та застосування їх у навчанні математики. Проаналізовано програму GeoGebra та її інструментарій для розв'язування задач стереометрії, зокрема з теми «Многогранники».

Ключові слова: *система динамічної математики; GeoGebra; стереометрія; розв'язування задач; многогранники.*

Вступ

Останнім часом у освітній процес шкіл запроваджуються нові засоби навчання. Стає все важче підтримувати зацікавленість «школярів XXI сторіччя» на уроках. Діти більше уваги звертають на комп'ютерні та інформаційні технології, швидко пристосовуються до нового. Одним з найважчих завдань вчителя є підготовка учня набувати, сприймати, перетворювати та застосовувати знання отримані в стінах школи. Для підвищення інтересу учнів до навчання застосовуються різноманітні програми, динамічні середовища, навчальні платформи.

GeoGebra — вільно-розповсюджуване динамічне геометричне середовище, яке надає можливість створювати креслення в планіметрії й стереометрії, крім того, у програми великі можливості роботи з функціями (побудова графіків, обчислення коренів, екстремумів, інтегралів та ін.) за рахунок команд вбудованої мови.

Аналіз досліджень сучасної педагогічної науки свідчить, що склалися певні теоретичні передумови до використання інтерактивних засобів навчання. Авторами М. Жалдаком, Ю. Горошком, Є. Вінниченком, С. Раковим, Т. Крамаренко, В. Ракутою та ін. виконані численні дослідження в галузі застосування електронних освітніх ресурсів та інтерактивних технічних засобів у навчальному процесі. Питання особливостей роботи в динамічному середовищі GeoGebra, його застосування під час навчання математики в загальноосвітній школі досліджували М. Хохенватер [2], В. Ракута [6], Р. Зіатдинов [3], О Семеніхіна [7], М. Друшляк [7] та ін.

Метою статті є розкриття можливостей застосування динамічного середовища GeoGebra для навчання стереометрії.

Основна частина

Програма GeoGebra використовується для підтримки науки, технологій, освіти та інновацій у викладанні та навчанні в усьому світі, вона написана мовою програмування Java й розповсюджується безкоштовно, має простий інтерфейс та україномовну версію [1].

GeoGebra дозволяє створювати різні конструкції з точок, відрізків, векторів, прямих, кіл, математичних функцій та інших базових елементів, а потім динамічно змінювати їх і будувати анімації. Завдяки тому, що в програмі реалізована можливість безпосередньо вводити рівняння й працювати з координатами, можна наочно будувати графіки функцій, працювати з повзунками для підбору параметрів. Створені в цьому динамічному середовищі креслення можна переглядати в режимі презентації на комп'ютері або проектувати їх на екран за допомогою мультимедійного проектора. У зв'язку з цим особливо ефективно можна використовувати програму на уроках геометрії при вивченні розділу стереометрії. Демонстраційні креслення та $3D$ моделі допомагають учням детально розібратися в основних поняттях стереометрії.

Існує бібліотека створених моделей, які можна переглянути й використати для проведення уроків [4].

Розглянемо практичне застосування GeoGebra під час розв'язування задач з курсу геометрія 11 класу, тема: «Многогранники».

Приклад 1. Побудувати всередині куба правильний октаедр так, щоб його вершини належали граням або ребрам куба [5].

Методичний коментар: задача вимагає від учнів знання властивостей квадрату, розвиненої просторової уяви й бачення складної тривимірної конструкції. Для кращого сприйняття учнями отриманої 3D моделі доцільно застосувати середовище GeoGebra.

Побудова: встановимо математичний додаток GeoGebra «3D Графіка», на якому побудуємо необхідну нам фігуру. Для точності виміру з допомогою «Панелі налаштування стилю» накладемо сітку на площину.

Зауваження 1.1 Октаедр — правильний многогранник, який має 8 граней (трикутних), 6 вершин (у кожній вершині сходиться 4 ребра) та 12 ребер.

1. Побудуємо куб $ABCDEFGH$.

2. З допомогою інструмента «Відрізок» поступово побудуємо діагоналі кожної грані куба: $AC, BD, CH, DG, CF, BG, AF, BE, EG, FH, AH, DE$.
3. Відмітимо точки їх перетину: $AC \cap BD = L$, $CH \cap DG = J$, $CF \cap BG = M$, $AF \cap BE = N$, $EG \cap FH = I$, $AH \cap DE = K$.
   Зауваження 1.2 Для зручності й для того щоб не нагромаджувати модель доцільно буде зробити діагоналі невидимими об'єктами.
4. Сполучимо відрізками центри суміжних граней куба: IJ, IK, IM, IN, JK, KM, MN, JN, LJ, LK, LN, LM
5. Отримали каркас октаедра.

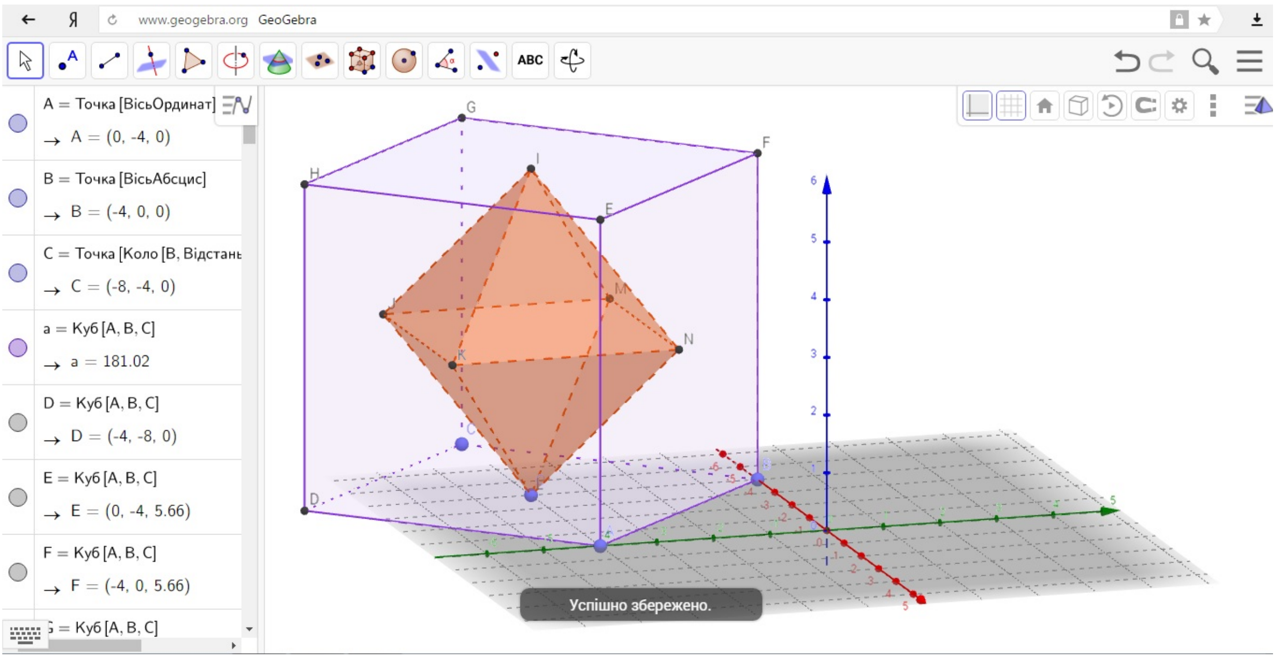


Рис. 1: Октаедр в кубі

Зауваження 1.3 Для кращої наочності бажано виконати наступні побудови.

6. З допомогою інструмента «Многокутник» відмітимо грані октаедра та змінимо їх колір на будь-який відмінний від кольору граней куба: IJM, IMN, INK, IJK, LJM, LMN, LNK, LJK.
7. $IJMNKL$ — шуканий октаедр.

Приклад 2. Побудуйте переріз площиною, що проходить через данні точки I, J, K [5].

Методичний коментар: задача вимагає від учнів знання плану побудову перерізу за даними точками та розвиненої просторової уяви. Для кращого сприйняття учнями отриманої $3D$ моделі доцільно застосувати середовище GeoGebra.

Перенесення умови задачі на полотно середовища GeoGebra: Для розв'язання задачі необхідно встановити математичний додаток GeoGebra «3D Графіка», на якому побудуємо необхідну нам фігуру. Для точності виміру за допомогою «Панелі налаштування стилю» накладемо сітку на площину. Побудувати куб $ABCDEFGH$ та обрати на ньому задані точки. Для побудови куба скористаємося інструментом «Куб» і обравши інструмент «Точка» оберемо точки $I \in [GF]$, $J \in [GH]$, $K \in [HD]$.

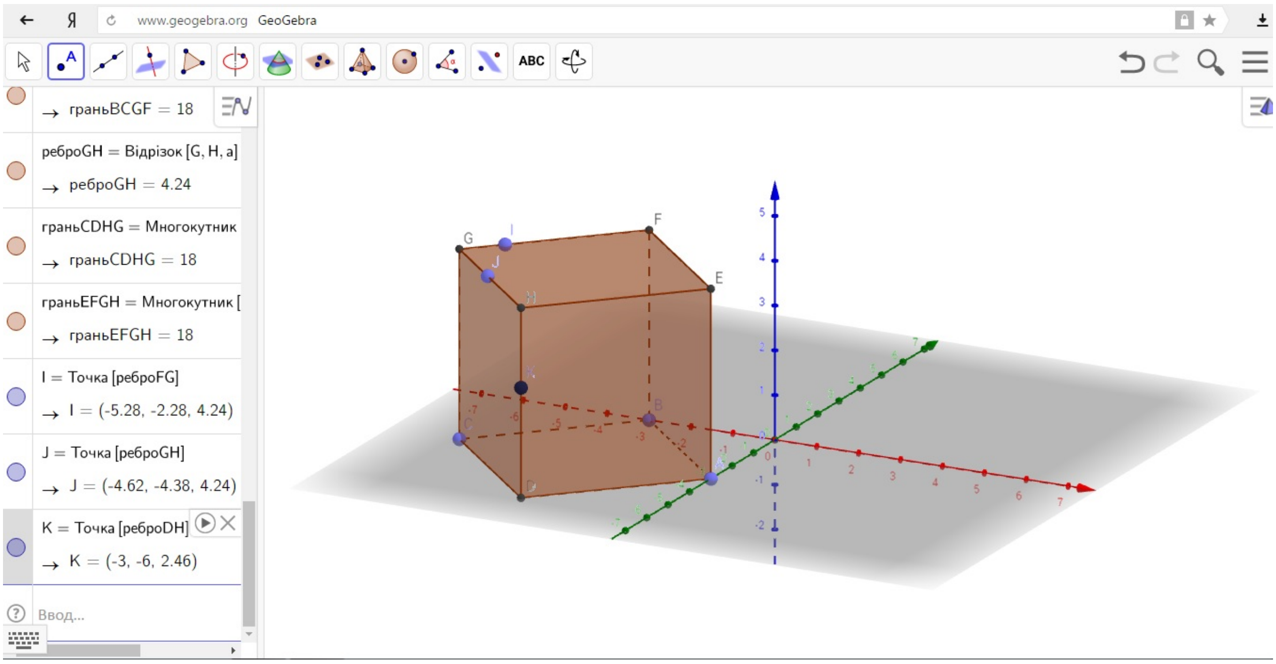


Рис. 2: Умова задачі

Побудова:

1. З'єднаємо точки, що лежать в одній площині: $[IJ], [JK]$.
2. Побудуємо прямі (JK) та (CD). Для цього скористаємося інструментом «Пряма», а для визначення точки їх перетину інструментом «Точка». $L = (JK) \cap (CD)$.
3. Скориставшись інструментом «Паралельна пряма» побудуємо пряму, що проходить через точку L паралельно до $[IJ]$.
4. Для задання точок перетину побудованої прямої з сторонами основи куба скористаємося інструментом «Точка»: $j \cap [AD] = N, j \cap [BC] = M$.
5. З'єднаємо точки що лежать в одній площині: $[HN], [IM]$
6. З допомогою відповідного інструмента визначимо многокутник $IJKNM$ та змінимо для наочності його колір на колір відмінний від кольору куба. Многокутник $IJKNM$ — шуканий переріз.

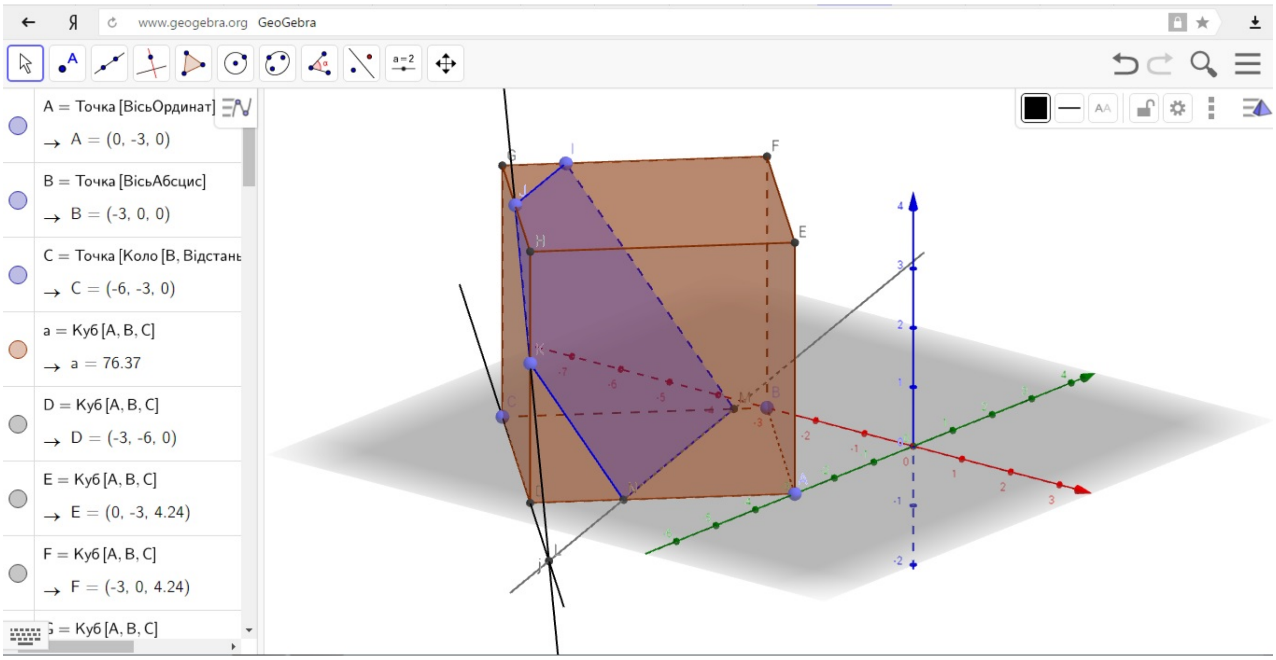


Рис. 3: Розв'язок задачі

Висновки

Беручи до уваги те, що навчання геометрії базується на створенні образів математичних об'єктів й оперування ними, спеціалізоване динамічне середовище GeoGebra акцентує увагу на таких можливостях цього середовища як наочність, моделювання, динаміка, використання яких привносить інновації в традиційну методику викладання геометрії.

Програма дозволяє виконувати креслення будь-якого ступеня складності, створювати візуальне уявлення навчального матеріалу, роблячи його цікавим, більш інформативним, зрозумілим. Допомагає організовувати самостійну дослідницьку роботу учнів, підвищує різноманітність форм роботи, значно збільшує частку активної творчої роботи в їх навчальній діяльності, підвищує інтерес до вивчення математики та дослідницької діяльності за рахунок використання інтерактивності побудов.

Література

1. GeoGebra. [Елект. ресурс]. — Режим доступу : https://www.geogebra.org.
2. *Hohenwarter M.* Введение в GeoGebra (версия 4.2) [Електронний ресурс] / Markus Hohenwarter, Judith Hohenwarter. — 153 с. — Режим доступу : https://static.geogebra.org/book/intro-ru.pdf.
3. *Ziatdinov R.* Dynamic geometry environments as a tool for computer modeling in thesystem of modern mathematics education. [Electronic resource] / RushanZiatdinov, Valery M. Rakuta. // European Journal of Contemporary

Education. — 2012. — № 1(1). — P. 93–100. — Режим доступу : http://ejournal1.com/journals_n/1348513764.pdf.
4. Бібліотека комп'ютерних моделей [Електронний ресурс]. – Режим доступу: https://sites.google.com/site/biblkompmod/.
5. Геометрія : 11 кл.: підруч. для загальноосвіт. навч. закл.: академ. рівень, профіл. рівень / Г. П. Бевз, В. Г. Бевз, Н. Г. Владімірова, В. М. Владіміров. — К.: Генеза, 2011. — 336 с.
6. Система динамічної математики GeoGebra як іноваційний засіб для вивчення математики / В. М. Ракута // Інформаційні технології і засоби навчання. — 2012. — № 4 (30).
7. *Семеніхіна О.В.* Інструментарій програми Geogebra 5.0 і його використання для розв'язування задач стереометрії / О. В. Семеніхіна, М.Г. Друшляк // Інформаційні технології і засоби навчання. — 2014. — Т. 44, вип. 6. — С. 124–133.

Hlazova Vira V., Gorzova S.A.
Donbas State Teachers' Training University, Slovijans'k, Ukraine.

GEOGEBRA – INNOVATION WAY FOR STUDYING STEREOMETRY

The article considers the problem of teaching schoolchildren with the help of innovative system of dynamic mathematics and their applying in teaching mathematics. The GeoGebra program and its tools for solving stereometry problems, in particular on the topic "Polyhedra", have been analyzed.

Keywords: *system of dynamic mathematics; GeoGebra; stereometry; solving tasks; polyhedra.*

УДК 378.147.88:004.4

Кайдан Н.В., Тураненко Х.О.

[1] *кандидат фізико-математичних наук, доцент, доцент кафедри алгебри, ДВНЗ «ДДПУ»*

[2] *студентка 4 курсу фізико-математичного факультету, ДВНЗ «ДДПУ»*

e-mail: kaydannv@gmail.com

ВИКОРИСТАННЯ СИСТЕМ КОМП'ЮТЕРНОЇ МАТЕМАТИКИ ПРИ РОЗВ'ЯЗАННІ ЗАВДАНЬ ТЕОРІЇ ГРАФІВ

У статті обговорюються особливості систем комп'ютерної математики при розв'язанні завдань теорії графів. Наводяться загальні характеристики систем комп'ютерної математики для вирішення задач дискретної оптимізації. Представлені основні функції сервісу MathPartner для вирішення завдань теорії графів. Представлено опис розв'язку завдання про знаходження найкоротшого шляху між вершинами графу.

Ключові слова: *комп'ютерна математика, MathPartner, математична освіта, теорія графів, хмарна математика.*

Вступ

Особистісна орієнтація освіти, впровадження освітніх інновацій, інформаційно-комунікаційних технологій, ґрунтовне використання окремих компонентів комп'ютерно-орієнтованих систем навчання у поєднанні з традиційними методами, формами та засобами навчання студентів, створення сучасних засобів навчання та виховання, забезпечення ними навчальних закладів є пріоритетними напрямами в навчально-виховному процесі. [9] У контексті навчання інформатичних дисциплін важливою запорукою реалізації цієї освітньої парадигми є фундаменталізація навчання. Як інноваційна педагогічна технологія можуть бути використані системи комп'ютерної математики (СКМ), оскільки вони є середовищем для проектування та використання програмних засобів підтримки навчання фундаментальних дисциплін.

Засоби ІКТ невпинно вдосконалюються, причому змінюються не лише окремі програмні продукти та системи, платформи їх реалізації, а також розвиваються принципи та методи їх проектування та використання, концептуальні засади впровадження. Саме тому набуття глибоких фундаментальних знань з інформатичних дисциплін дає змогу студенту самостійно підвищувати рівень своєї компетентності, адаптуватися до умов швидкої зміни технологічних парадигм, знайти своє місце на ринку праці. Показником інтелектуальної потужності комп'ютерів стали новітні системи комп'ютерної математики. СКМ випускаються різного рівня складності – від гнучкої системи Mathcad, зручної для символьних обчислень системи Derive до систем Mathematika, Mathlab, Maple із можливістю графічної візуалізації обчислень.

Використання в навчанні здобувачів вищої освіти спеціальності 014.04 Середня освіта (математика) програмного забезпеченням спеціального призначення, до якого належать і системи комп'ютерної математики, є надзвичайно важливим, оскільки їх вивчення та використання буде сприяти розширенню та поглибленню знань студентів як з інформатики, так і з математичних дисциплін, оволодінню студентами вміннями розв'язувати задачі різноманітного характеру та формуванню навичок застосування сучасних математичних пакетів у процесі вивчення фізико-математичних дисциплін і в майбутній професійній діяльності.

Проблема застосування в навчальному процесі комп'ютерних технологій та інформаційного методичного забезпечення ретельно досліджується вітчизняними й зарубіжними науковцями та методистами. Зокрема, питання впровадження комп'ютерних освітніх технологій розглядали у своїх роботах М. Жалдак, С. Рибак, В. Клочко, Ю. Рамський, М. Львов та інші дослідники.

Поширення набувають різноманітні засоби комп'ютерної математики, зокрема програмні, які, на думку М.І. Жалдака [7], доцільно умовно поділити на дві великі групи: програмне забезпечення навчально-дослідницького призначення та програмне забезпечення науково-дослідницького призначення.

Науково-дослідницьке програмне забезпечення за призначенням, структурою та функціями науковці умовно поділяють на кілька груп, а саме: математичні пакети вузької спеціалізації (GAP, Macaulay, Singular та ін.), програмні засоби візуалізації математичних даних (GnuPlot, JMol, LaTeX), системи геометричного моделювання (Autodesk 3ds Max, ANSYS та ін.), системи комп'ютерної математики (Derive, Maple, Matlab, Mathematica, MathCAD, Maxima, Sage, MathPartner та ін.)

Основна частина.

У практиці прийняття рішень в самих різних областях людської діяльності доводиться стикатися з завданнями, які належать до задач дискретної оптимізації, багато з яких, як відомо, належать класу NP. Існує безліч методів, алгоритмів і програмних засобів вирішення цих завдань. У зв'язку з цим справедливо очікувати можливості їх вирішення системами комп'ютерної математики. Вони являють собою спеціалізовані програмні пакети розв'язування математичних завдань різного характеру. До числа найбільш популярних СКМ належать пакети Maxima, Matlab, Mathematica, Maple, Mathcad.

Програма Maxima призначена для символьних обчислень і має безкоштовне розповсюдження з відкритим вихідним кодом. Вивчення програми Maxima та реалізація в ній графів, орграфів і розв'язання на основі них прикладних задач допомагає студентам у вивченні теорії графів. Система комп'ютерної математики Matlab, має потужний набір засобів для розв'язання різноманітних задач неперервної оптимізації у вигляді пакетів Optimization Toolbox та Global Optimization Toolbox, але не містить вбудованих функцій для розв'язування задач комбінаторної оптимізації. [3]

Використання вбудованого розширення Combinatorica системи комп'ютерної математики Mathematica дозволяє використовувати близько 450 функцій для побудови та дослідження графів, і як наслідок, представлені функції розв'язання задач дискретної оптимізації, інтерпретованих як задачі теорії графів, серед яких Dijkstra, ShortestPath, MinimumSpanningTree, NetworkFlow, TravelingSalesman. [6]

Програмний продукт Maple (від компанії MapleSoft) є потужним інструментом, що містить в собі більше двох тисяч команд, що дозволяють користувачу вирішувати безліч математичних задач. Вирішення завдань оптимізації в даній СКМ реалізовані за допомогою таких пакетів як Global Optimization, Optimization, Simplex, а також у випадку розв'язування задач на графах - Network, Graph Theory. [2]

Система комп'ютерної математики Mathcad орієнтована на побудову інтерактивних документів для проведення розрахунків з візуалізованим супроводом. Для чисельного розв'язку задач пошуку локального мінімуму або максимуму в Mathcad представлені вбудовані функції – Minner, Minimize і Maximize. Однак в Mathcad не передбачено спеціальне розширення для роботи з графами, однак користувач може досить гнучко використовувати вбудований потужний графічний редактор. [5]

Однак, в останнє десятиліття інформаційні технології зазнають серйозних змін, швидкими темпами розвиваються хмарні технологій. Це призводить до появи нового покоління систем комп'ютерної математики, а саме до математичних сервісів широкого призначення. Одним з таких сервісів є система комп'ютерної математики Math Partner, який доступний за адресою mathpar.cloud.unihub.ru. [1] Новий сервіс є безкоштовним. Кожен може створювати в ньому свій хмарний математичний зошит і робити в ньому необхідні розрахунки. Мовою цього сервісу є мова Mathpar, в основі якої лежить широко використовувана математиками та фізиками мова TeX, яка зазвичай використовується для набору математичних текстів. Є можливість зберегти як постановку задачі, так і її розв'язок. При цьому можна зберігати й текстовий вигляд (Mathpar, TeX або MathML) і зображення (pdf, jpg).

Для роботи з графами використовується команда $\backslash\mathrm{searchLeastDistances}(A)$, яка дозволяє знайти найменші відстані між усіма вершинами графа. В результаті буде отримана матриця найкоротших відстаней між вершинами. Команда $\backslash\mathrm{findTheShortestPath}(A, i, j)$ дозволяє знайти найкоротший шлях між вершинами i та j.

Розглянемо приклад: Зважений граф $G = (V, E)$, у якого $V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ задано матрицею ваг:

$$A = \begin{pmatrix} - & 11 & 6 & - & 9 & 8 & - & 10 & - \\ 11 & - & - & 3 & -2 & 3 & - & 2 & 1 \\ 6 & - & - & - & 2 & 1 & 4 & - & 2 \\ - & 3 & - & - & - & 5 & - & 1 & 2 \\ 9 & - & 2 & - & - & 1 & 2 & - & 3 \\ 8 & 3 & 1 & 5 & 1 & - & 3 & 4 & - \\ - & - & 4 & - & 2 & 3 & - & - & 1 \\ 10 & 2 & - & 1 & - & 4 & -2 & - & 5 \\ - & 1 & 2 & 2 & 3 & - & 1 & 5 & - \end{pmatrix}$$

Якщо за допомогою алгоритму Форда-Белмана знаходити для цього графа найкоротші шляхи від вершини 0 до усіх інших вершин, то хід виконання цього алгоритму зручно ілюструвати у вигляді таблиці:

1	2	3	4	5	6	7	8
11 10 9	6	12 10	9 8 7	8 7	10 9 8	10	8
$0,1$ $0,2,5,1$ $0,2,8,1$	$0,2$	$0,2,5,3$ $0,2,8,3$	$0,4$ $0,2,4$ $0,2,8,1,4$	$0,5$ $0,2,5$	$0,2,6$ $0,2,8,6$ $0,7,6$	$0,7$	$0,2,8$

Процес отримання результату наведеного прикладу в системі комп'ютерної математики Math Partner має наступний вигляд: записуємо матрицю ваги

$SPACE = R64MinPlus[x, y];$

$$A = [$$

$$
\begin{array}{lllllllll}
[\backslash\text{infty}, & 11, & 6, & \backslash\text{infty}, & 9, & 8, & \backslash\text{infty}, & 10, & \backslash\text{infty}], \\
[11, & \backslash\text{infty}, & \backslash\text{infty}, & 3, & -2, & 3, & \backslash infty, & 2, & 1], \\
[6, & \backslash\text{infty}, & \backslash\text{infty}, & \backslash\text{infty}, & 2, & 1, & 4, & \backslash\text{infty}, & 2], \\
[\backslash\text{infty}, & 3, & \backslash\text{infty}, & \backslash\text{infty}, & \backslash\text{infty}, & 5, & \backslash\text{infty}, & 1, & 2], \\
[9, & \backslash\text{infty}, & 2, & \backslash\text{infty}, & \backslash\text{infty}, & 1, & 2, & \backslash\text{infty}, & 3], \\
[8, & 3, & 1, & 5, & 1, & \backslash\text{infty}, & 3, & 4, & \backslash\text{infty}], \\
[\backslash\text{infty}, & \backslash\text{infty}, & 4, & \backslash\text{infty}, & 2, & 3, & \backslash\text{infty}, & \backslash\text{infty}, & 1], \\
[10, & 2, & \backslash\text{infty}, & 1, & \backslash\text{infty}, & 4, & -2, & \backslash\text{infty}, & 5], \\
[\backslash\text{infty}, & 1, & 2, & 2, & 3, & \backslash\text{infty}, & 1, & 5, & \backslash\text{infty}]
\end{array}
$$

$$];$$

Потім команду $\backslash\text{findTheShortestPath}(A, i, j)$, яка дозволяє знайти найкоротший шлях між вершинами i та j

$X = \backslash\text{findTheShortestPath}(A, 0, 1); \backslash print(X);$

$Y = \backslash\text{findTheShortestPath}(A, 0, 2); \backslash print(Y);$

$Z = \backslash\text{findTheShortestPath}(A, 0, 3); \backslash print(Z);$

$Q = \backslash\text{findTheShortestPath}(A, 0, 4); \backslash print(Q);$

$W = \backslash\text{findTheShortestPath}(A, 0, 5); \backslash print(W);$

$R = \backslash\text{findTheShortestPath}(A, 0, 6); \backslash print(R);$

$T = \backslash\text{findTheShortestPath}(A, 0, 7); \backslash print(T);$

$P = \backslash\text{findTheShortestPath}(A, 0, 8); \backslash print(P);$

Результат виконання розрахунків, який збігається з таблицею, виглядає наступним чином:

$X = [0, 2, 8, 1]$

$Y = [0, 2]$

$Z = [0, 2, 8, 3]$

$Q = [0, 2, 8, 1, 4]$

$W = [0, 2, 5]$

$R = [0, 7, 6]$

$T = [0, 7]$

$P = [0, 2, 8]$

Застосування цієї СКМ дає змогу швидко та зручно зробити перевірку громіздких математичних розрахунків.

Висновки

Коли ми обираємо математичний пакет серед усієї різноманітності систем комп'ютерної математики, слід враховувати декілька факторів: потреби для яких необхідна СКМ (для наукових досліджень чи все-таки для супроводу навчального процесу), вартість математичного пакету (якщо система є комерційною) та тип задач, які необхідно розв'язувати.

Використання «хмарних» засобів є перспективним напрямом розвитку СКМ, коли виникає більше можливостей адаптації середовища навчання до рівня навчальних досягнень студентів, їх індивідуальних потреб та мети. Звернення до програмного забезпечення, яке вже знаходиться на віртуальному робочому місці студента, не потребує витрачання навчального часу на інсталяцію й оновлення, створює умови для більш диференційованого підходу до організації навчання, дає можливість зосередитися на вивченні основного матеріалу.

Math Partner – це система комп'ютерної математики нового покоління. Поява таких систем позначиться на всіх прикладних сферах: в науці, техніці, економіці. Відкритий математичний сервіс «Math Partner» представляє нове покоління систем символьно-чисельних розрахунків. На відміну від відомих представників систем комп'ютерної алгебри, таких як Mathematica і Maple, даний сервіс є вільно доступним, їм можна скористатися з будь-якого пристрою, який має в своєму розпорядженні сучасний браузер.

Що стосується можливостей вирішення оптимізаційних задач, то існуючі СКМ мають в своєму складі вбудовані функції, переважно орієнтовані на розв'язання задач безперервної оптимізації. Однак в рамках СКМ створені та створюються розширення та окремі функції для вирішення задач дискретної оптимізації, які перш за все допускають трактування в термінах теорії графів.

Література

1. *Malaschonok G.I.* Way to Parallel Symbolic Computations / G.I.Malaschonok — International conference «Cloud computing. Education. Research. Development» — Moscow, 2011.
2. *Maple. Online Help* [Электронный ресурс]. — Режим доступа: http://www.maplesoft.com/support/help/Maple
3. *Matlog: Logistics Engineering MATLAB Toolbox* [Электронный ресурс]. — Режим доступа: http://www.ise.ncsu.edu/kay/matlog.
4. *Morgan M.* Introduction to Maple's GraphTheory Package / Morgan M. — MapleSoft. Maple Conference 2013 Proceedings, 2013. — P. 1-22.
5. *PTC User's Guide. Mathcad 14.0* [Электронный ресурс]. — Режим доступа: http://ru.scribd.com/doc/3239532/Mathcad-14-Users-Guide.
6. *Wolfram Mathematica 9 Documentation center* [Электронный ресурс]. — Режим доступа: http://reference.wolfram.com/mathematica
7. *Жалдак М.І.* Математика з комп'ютером: посібник для вчителів. — 2-ге вид. / М.І.Жалдак, Ю.В.Горошко, Є.Ф.Вінниченко — К.: НПУ імені

Драгоманова, 2009. — 282 с.
8. *Львов М.С.* Концепція програмної системи підтримки математичної діяльності / М.С.Львов // Комп'ютерно-орієнтовані системи навчання: зб. наук. пр. — К.: НПУ ім. М.П. Драгоманова, 2003. — Вип. 7. — С. 36–48.
9. *Рамський Ю.С.* Місце і роль математичної освіти в інформаційному суспільстві / Ю.С.Рамський, К.І.Рамська // Інформатика та інформаційні технології в навчальних закладах. — 2008. — № 6 (18). — С. 53–59.

Kaydan Nataliya V., Turanenko Christina A.
Donbas State Teachers' Training University, Slovijans'k, Ukraine.

Using of the system of computer mathematics in solving the problem of graph theory

The article discusses the features of the systems of computer mathematics in solving problems of the theory of graphs. The general characteristics of the systems of computer mathematics are given. The basic service functions for solving MathPartner graph theory are presented. The description of the solution of the problem of finding the shortest path between graph peaks is submitted.

Keywords: *computer mathematics, MathPartner, mathematical education, graph theory, cloudy mathematics.*

УДК 37.016:514.112.4

Кадубовська В.М., Кадубовський О.А.

[1] *вчитель математики вищої категорії, вчитель-методист, Олександрівська ЗОШ I-III ступенів*

[2] *кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри геометрії та МВМ, ДВНЗ «ДДПУ»*

e-mail: kadubovs@ukr.net

СИСТЕМАТИЗАЦІЯ ТА УЗАГАЛЬНЕННЯ ФАКТІВ ГЕОМЕТРІЇ ПАРАЛЕЛОГРАМІВ

В статті висвітлюється авторський досвід щодо одного з можливих підходів до систематизації та узагальнення фактів геометрії паралелограмів. Шляхом укрупнення дидактичних одиниць та розширення кола основних лінійних елементів паралелограма викладено низку як добре, так і мало відомих метричних співвідношень у паралелограмі, властивостей-тверджень, зокрема афінних, ознак рівності та подібності та ознак паралелограма тощо.

Ключові слова: *опуклий чотирикутник, паралелограм, властивості, ознаки, основні та маловідомі твердження, систематизація та узагальнення.*

Вступ

Добре відомо (напр., [10]), що цілісна теорія паралелограмів була розроблена ще наприкінці середніх віків але з'явилась у підручниках лише у XVII ст. Слід відзначити, що з викладом «паралелограмів» у вітчизняній навчальній літературі пов'язані імена професора математики Харківського університету Тимофія Федоровича Осиповського («Курс математики. Ч. 2. Геометрия, прямолинейная и сферическая тригонометрия и введение в криволинейную геометрию», 1820 р.) та його учня — одного з найвидатніших математиків XIX століття, українського вченого, академіка Михайла Васильовича Остроградського («РУКОВОДСТВО НАЧАЛЬНОЙ ГЕОМЕТРІЙ», 1855 р.).

Змістова лінія «Чотирикутники» є невід'ємною складовою сучасного шкільного курсу геометрії. Традиційно, тема «паралелограми» є своєрідним «містком» між геометрією трикутників та окремими видами чотирикутників. Її вивчення пропонується більшістю з діючих підручників за хронологією «визначення – основні властивості – ознаки – додаткові властивості-твердження»; рідше супроводжується найпростішими «задачами на побудову» та ще рідше — відповідними задачами з «елементів векторної алгебри» [1, 2, 10, 15, 20, 21].

Серед посібників, присвячених дидактичному забезпеченню вивчення теми «паралелограми», хочемо виділити посібники [13], [15], [19] і [4].

Серед навчальних посібників з елементарної геометрії, в яких наведено яскраві геометричні факти (зокрема про паралелограм), що не ввійшли до шкільних підручників, маємо своїм приємним обов'язком виділити посібники І.А. Кушніра [11, 12], В.Ф. Бутузова [3], Р.К. Гордіна [5] та двотомне видання Я.П. Понаріна [16]. Серед збірників задач, які містять доволі широке коло задач (на паралелограми) різного рівня складності, зокрема теоретичного характеру, — чудові збірники В.В. Прасолова [17], І.Ф. Шаригіна [22], загально відомий збірник задач за редакцією М.І. Сканаві [18] та збірники [7], [23].

Загально визнано, що одним із основних завдань в будь-якій сфері людської діяльності, зокрема математиці та дидактиці математики, є систематизація та узагальнення накопиченого досвіду. І хоча зазначені вище навчальні посібники і збірники задач (в певному розумінні) «цілком закривають» тему задачників з планіметрії, проте якісний аналіз змісту запропонованих в них задач саме «на паралелограми» дозволяє констатувати наступне:

— до «основних» елементів паралелограма переважно відносять *сторони*, *діагоналі*, *висоти*, *бісектриси кутів*, *перпендикуляри, опущені з вершин на діагоналі*, рідше – *середні лінії* й «медіани» (відрізки, що сполучають вершину паралелограма із серединою несуміжної сторони) та *кути між ними*;

— *відомості про паралелограми*, за винятком тих, які викладено у підручниках, та найбільш типових задач і класичних результатів, що не ввійшли до підручників, *суттєво різняться за обсягами* та *носять доволі розрізнений характер* в залежності від способу їх класифікації й уподобань авторів;

— цілу низку задач на обчислення (наведених у представленій статті в загальному вигляді), або взагалі не пропонують, або ж (незначну їх частину) пропонують в якості задач виключно з числовими даними;

— накопилася значна кількість задач зі спільними вихідними даними / умовою але різними вимогами / завданнями, які носять змістовно (та, як з'ясувалося, «по-джерельно») відокремлений характер.

Крім того, більшість запропонованих у шкільних підручниках задач на обчислення «пропедевтично заточені» саме під окремі види паралелогамів. Можливо тому поза увагою залишаються яскраві факти «власної метричної теорії» паралелограмів. Але ж, як зазначається в [6], «Навчальні задачі є ефективним засобом реалізації і формою втілення змісту навчання. Викладач повинен постійно вирішувати проблему відбору навчальних задач, щоб забезпечити системне засвоєння змісту навчальної дисципліни. Тому, необхідною є вдала і обґрунтована систематизація задач. Проблемою в цьому випадку є вибір засад для такої систематизації».

Пропонований у даній статі підхід до систематизації та узагальнення фактів геометрії паралелограмів орієнтований саме на структурно-компонентний склад задачі та зміст і структуру досліджуваного матеріалу.

Питанням систематизації та узагальнення фактів з окремих тем курсу планіметрії, в тому числі й властивостей основних геометричних фігур та їх елементів, присвячена велика кількість навчально-методичних посібників і статей. Проте, як зазначає Г.П. Бевз (маючи на увазі книжки Д.Д. Єфрємова[1], О.С. Смогоржевського[2] та С.І. Зетеля[3]), «... книжки, в яких усі такі теми висвітлюються в певній системі і повно, давно стали бібліографічною рідкістю». Дану статтю слід вважати продовженням циклу статей співавтора [9] і [10], а її основним завданням — привернення уваги майбутніх і молодих вчителів математики до наведеного матеріалу та *спроба* продовжити «традицію», закладену ще за часів *Д.Д. Єфрємова*, *О.С. Смогоржевського* та *С.І. Зетеля*, «естафету» якої не менш яскраво перейняли сучасники *Шаригін І.Ф.*[4]; *Кушнір І.А.*[4], *Мякішев О.Г.*[6], *Бевз Г.П.*[7], *Юзбашев А.В.*[8], *Понарін Я.П.*[9], *Смірнова І.М., Смірнов В.О.*[10], *Акопян А.*[11] та багато інших фахівців в галузі елементарної геометрії.

З урахуванням зазначеного, метою статті є:
з одного боку — звести в цілісну систему, як найвідоміші й найважливіші факти із «сучасної» геометрії паралелограмів, так і маловідомі проте яскраві властивості паралелограма, які (на превеликий жаль) залишаються поза увагою не лише підручників, а й перевидань загально визнаних збірників задач різного рівня складності, в тому числі олімпіадних;
з іншого боку — надати вчителям можливість вибору задач цікавого, саме теоретичного змісту/характеру, зокрема задач різного рівня складності.

Звісно ж, що більшість із наведених далі властивостей давно є відомими й досконало вивчені, викладені в багатьох виданнях, починаючи від шкільних підручників та закінчуючи олімпіадними збірниками задач. Проте деякі властивості-твердження та ціла низка метричних співвідношень паралелограма виявлені авторами та наведені вперше.

---

[1] «Новая геометрия треугольника», 1903

[2] «Елементи геометрії трикутника», 1939

[3] «Новая геометрия треугольника», 1962

[4] Страница Игоря Федоровича Шарыгина — http://eek.diary.ru/p148941323.htm

[5] «Трикутник і тетраедр у задачах», 1991; «Повернення втраченої геометрі», 2000; «Триумф школьной геометрии», 2005; «Геометрія трапеції в задачах», 2009; «Емоції різницевого трикутника», 2016

[6] «Элементы геометрии треугольника», 2000

[7] «Геометрія чотирикутника», 2003; «Геометрія кіл», 2004; «Геометрія трикутника», 2005

[8] «Свойства геометрических фигур — ключ к решению любых задач по планиметрии», 2005

[9] «Элементарная геометрия. Том 3. Треугольники и тетраэдры», 2006

[10] «50 задач о равенстве треугольников», 2007

[11] «Геометрия в картинках», 2011

Маючи на меті саме цілісний виклад матеріалу, який (на нашу думку) допоможе при комплексній підготовці випускників до ДПА та ЗНО, в першій та частково другій частині статті авторами цілком свідомо наведено «загальновідомий теоретичний мінімум», засвоєння та розуміння суті якого є необхідною складовою при формуванні відповідних компетентностей.

1. Основні поняття та загальні відомості

Означення 1. *Чотирикутник називають опуклим, якщо він лежить в одній півплощині відносно кожної прямої, яка містить його сторону.*

Означення 2. *Відрізки (а також прямі), що сполучають середини протилежних сторін чотирикутника, називають його середніми лініями.*

Означення 3. *Центром симетрії фігури F називають таку точку O, центральна симетрія відносно якої відображає цю фігуру на себе.*

Означення 4. *Паралелограмом називають чотирикутник, у якого протилежні сторони паралельні.*

Означення 5. *Ромбом називають паралелограм, у якого всі сторони рівні.*

Прямокутником називають паралелограм, у якого всі кути прямі.

Квадратом називають прямокутник, у якого всі сторони рівні; або ж ромб, у якого всі кути прямі.

Означення 6. *Висотою паралелограма називають спільний перпендикуляр до прямих, які містять протилежні сторони паралелограма (інколи висотою паралелограма називають також і довжину перпендикуляра).*

Зауваження 1. *Паралелограм є опуклим чотирикутником. І тому він має всі властивості опуклого чотирикутника. Зокрема: кожна діагональ поділяє його на трикутники, діагоналі перетинаються в точці, яка є внутрішньою відносно паралелограма, а сума всіх його кутів становить 360^0.*

? Чи можуть усі кути паралелограма бути: гострими, тупими, прямими, негострими, нетупими? (Відповідь: ні; ні; так; так; так.)

Добре відомо, що

Твердження 1. *Середні лінії опуклого чотирикутника (зокрема паралелограма) перпендикулярні тоді і лише тоді, коли його діагоналі є рівними.*

Твердження 2. *Навколо паралелограма можна описати коло тоді і лише тоді, коли він є прямокутником (зокрема квадратом).*

Твердження 3. *В паралелограм можна вписати коло тоді і лише тоді, коли він є ромбом (зокрема квадратом).*

Твердження 4. *З усіх (опуклих) чотирикутників з даними діагоналями d_1, d_2 та кутом φ між ними найменший периметр має паралелограм.*

Зауваження 2. *Заради визначеності в подальшому вершини паралелограма завжди будемо іменувати літерами* A, B, C, D *за годинниковою стрілкою та вважати, що* $AD = a \geqslant b = AB$ *(*AD *– «нижня основа»),* $\angle DAB = \alpha$ *– нетупий кут між його сторонами («паралелограм не нахилено ліворуч»),* O *– точка перетину діагоналей* AC *і* BD*,* d_1, d_2 *– довжини діагоналей, причому* $d_1 \geqslant d_2$*, а* φ *– нетупий кут між ними — рис. 1.*

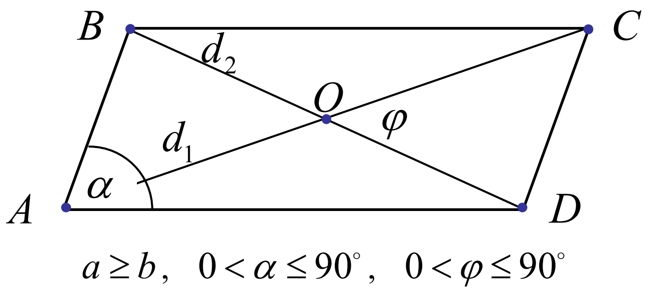


Рис. 1:

2. Основна частина

2.1. «Найпростіші» властивості паралелограма

У паралелограма ...

1) сума кутів, прилеглих до кожної зі сторін, становить 180^0;
   (a) бісектриси внутрішніх (зовнішніх) кутів, прилеглих до певної сторони, перетинаються під прямим кутом;
   (b) кут між висотами, опущеними з вершини тупого кута, дорівнює гострому куту між його сторонами;
   (c) кут між висотами, опущеними з вершини гострого кута, дорівнює тупому куту між його сторонами;
2) кожна діагональ утворює з протилежними (паралельними) сторонами дві пари рівних («внутрішніх різносторонніх») кутів;
   (a) протилежні кути рівні;
   (b) бісектриси протилежних кутів паралельні або належать одній прямій;
3) висоти, опущені на паралельні сторони (або ж їх продовження) рівні;
4) сума відстаней від будь-якої точки всередині паралелограма до його сторін є величиною сталою (та дорівнює сумі довжин його висот);
5) бісектриса внутрішнього кута відтинає від нього рівнобедрений трикутник;
6) довжина кожної з діагоналей менша за суму довжин його непаралельних сторін та більша за модуль різниці довжин зазначених сторін.

? Чи можуть два даних гострих кути бути кутами паралелограма? (Відповідь: якщо рівні — так; якщо нерівні — ні, не можуть.)

2.2. «Основні» властивості паралелограма

У паралелограма ...

1) кожна з діагоналей ділить його на два рівні трикутники;
   (a) протилежні сторони рівні;
      i. середня лінія паралельна та рівна довжині відповідних сторін;
      ii. кожна середня лінія ділить його на два рівних паралелограма;
   (b) висоти, опущені з протилежних вершин на діагональ, є рівними;
2) відрізки діагоналей (на які вони діляться точкою їх перетину) разом з його сторонами утворюють дві пари рівних трикутників;
   (a) діагоналі точкою перетину діляться навпіл;
      i. кожна середня лінія проходить через точку перетину діагоналей;
      ii. будь-який відрізок, який проходить через точку перетину діагоналей і кінці якого належать паралельним його сторонам, ділиться цією точкою навпіл;
      тобто, **точка перетину діагоналей є центром його симетрії**;
      iii. точки перетину бісектрис кутів між діагоналями зі сторонами паралелограма є вершинами ромба.
3) точка перетину бісектрис внутрішніх (зовнішніх) кутів, прилеглих до певної сторони, належить прямій, що містить відповідну середню лінію;
   (a) бісектриси внутрішніх кутів, прилеглих до меншої сторони, точкою перетину діляться навпіл;
4) відрізки, які сполучають певну вершину із серединами несуміжних сторін, ділять відповідну діагональ на три відрізки однакової довжини;

Також добре відомим є наступне твердження

Твердження 5. *Нехай вершини паралелограма $A_1B_1C_1D_1$ належать сторонам паралелограма $ABCD$ (точка A_1 належить стороні AB, B_1 — стороні BC, C_1 — стороні CD, D_1 — стороні DA). Тоді центри симетрії (точки перетину їх діагоналей) обох паралелограмів співпадають.*

? Скільки на площині існує паралелограмів з вершинами в трьох даних точках, які не належать одній прямій? (Відповідь: три.)

? Чи однозначно визначається паралелограм своїм центром симетрії та двома своїми вершинами? (Відповідь: якщо вершини симетричні відносно центра — ні; якщо сусідні — так.)

? Чи визначається паралелограм своїми: сторонами; кутами; діагоналями; стороною, кутом і діагоналлю?
(Відповідь: ні; ні; ні; так, причому в залежності від співвідношень, в яких перебувають величини даних елементів: два, один або жодного паралелограма.)

2.3. «Розташуваня» основ висот та бісектрис паралелограма

1) Нехай $\angle A$ – гострий кут паралелограма $ABCD$, $\overline{\overline{A}}$, $\overline{A}$ – основи висот опущених з вершини гострого кута A на прямі, що містять більшу (BC) та відповідно меншу (CD) сторони паралелограма — рис. 2 a); $\overline{\overline{B}}$, $\overline{B}$ – основи висот опущених з вершини тупого кута B на прямі, що містять більшу (AD) та відповідно меншу (CD) сторони паралелограма — рис. 2 c)–d). Тоді мають місце твердження:

   (a) $\overline{\overline{A}}$ **завжди** належить продовженню сторони CB (за точку B);
   (b) $\overline{A}$ **завжди** належить продовженню сторони CD (за точку D);
   (c) $\overline{\overline{B}}$ **завжди** належить стороні AD ($\overline{\overline{B}} \in [AD]$);
   (d) $\overline{B}$ належить стороні CD тоді і лише тоді, коли $\angle ABD = \angle CDB$ є гострим (або, що теж саме, тоді і лише тоді, коли $a \cdot \cos\alpha < b < a$);
   (e) $\overline{B}$ співпадає з вершиною D тоді і лише тоді, коли $\angle ABD = \angle CDB$ є прямим (або, що теж саме, тоді і лише тоді, коли $a \cdot \cos\alpha = b < a$);
   (f) $\overline{B}$ належить продовженню сторони CD (за точку D) тоді і лише тоді, коли $\angle ABD = \angle CDB$ є тупим (або, що теж саме, тоді і лише тоді, коли $b < a \cdot \cos\alpha < a$).

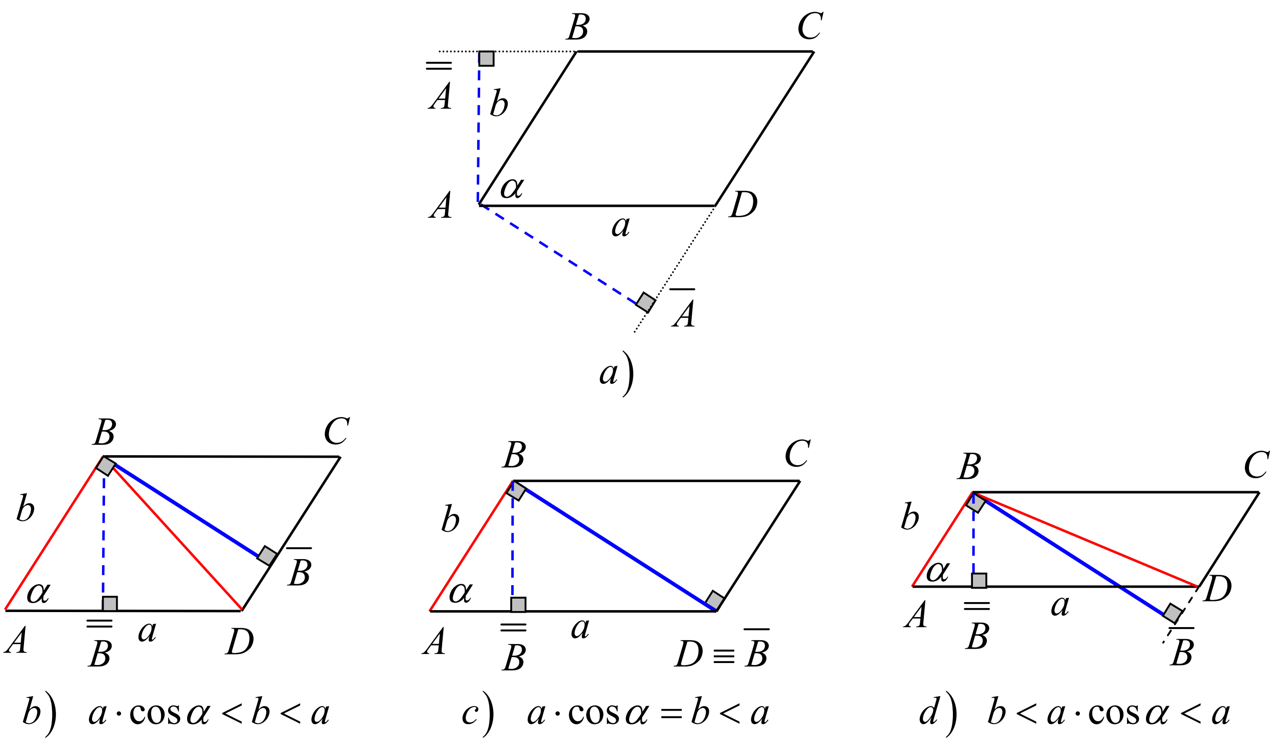


Рис. 2:

? Чи існує такий паралелограм, що основи всіх його висот належать сторонам (співпадають з його вершинами)? (Відповідь: так.)

2) Нехай $\angle A$ – гострий кут паралелограма $ABCD$, A', B', C', D' – основи бісектрис кутів A, B, C і D відповідно, $AD = a \geqslant b = AB$. Тоді мають місце твердження:

   (a) якщо $a = b$, то $A' \equiv C$, $C' \equiv A$, $B' \equiv D$, $D' \equiv B$ (і навпаки);

   (b) якщо $a > b$, то $A' \in [BC]$, $B' \in [AD]$ (і навпаки);
   а «точка перетину бісектрис внутрішніх кутів при меншій стороні завжди є внутрішньою відносно паралелогрма»;

   (c) якщо $b < a < 2b$, то $A' \in [BC]$, $D' \in [BC]$, причому саме точка D' «лежить» між точками B та A' (і навпаки);
   а «точка Q перетину бісектрис внутрішніх кутів при більшій стороні є внутрішньою відносно паралелогрма»;

   (d) якщо $a = 2b$, то $A' \equiv D' \equiv Q \in [BC]$ (і навпаки);
   а «точка Q перетину бісектрис внутрішніх кутів при більшій стороні співпадає із серединою протилежної сторони паралелогрма»;

   (e) якщо $a > 2b$, то $A' \in [BC]$, $D' \in [BC]$, причому саме точка A' «лежить» між точками B та D' (і навпаки);
   а «точка Q перетину бісектрис внутрішніх кутів при більшій стороні є зовнішньою відносно паралелогрма».

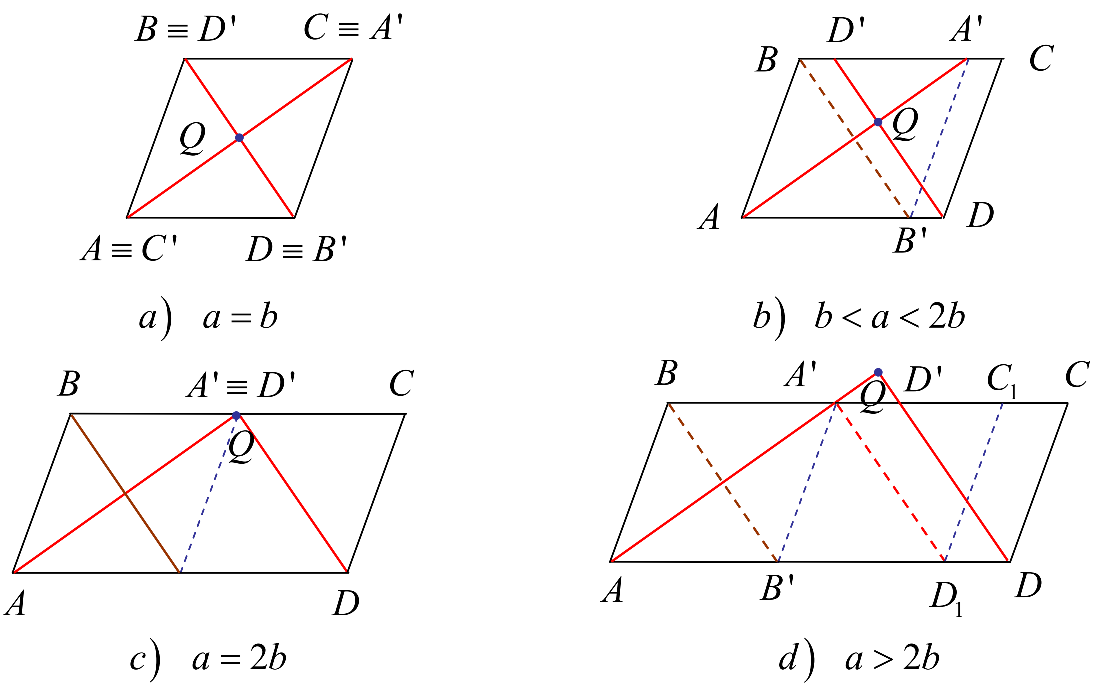


Рис. 3:

? Чи існує такий паралелограм, що всі точки попарних перетинів бісектрис його внутрішніх кутів лежать зовні паралелограма? (Відповідь: ні.)

2.4. Навколо «середніх ліній» та «медіан» паралелограма

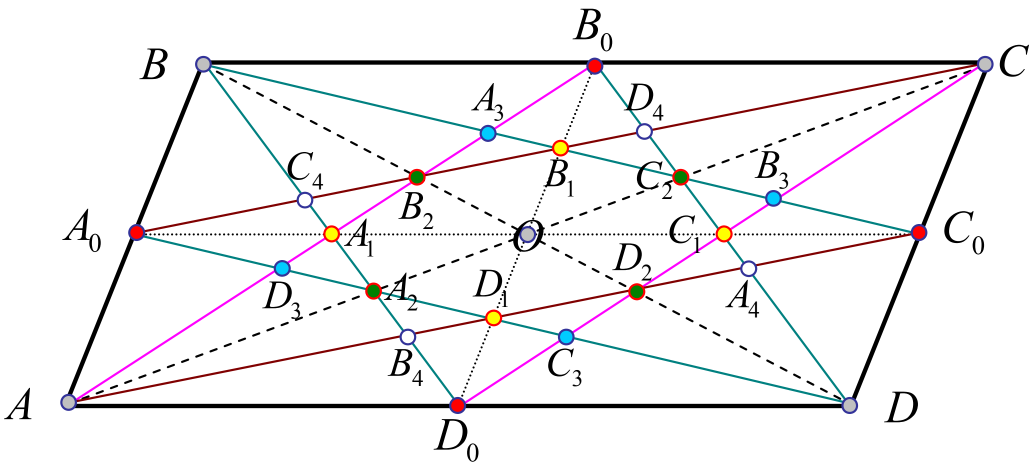


Рис. 4:

Нехай A_0, B_0, C_0 і D_0 — середини сторін AB, BC, CD і DA (відповідно) паралелограма $ABCD$ — рис. 4. Тоді:

1) чотирикутник $A_0B_0C_0D_0$ є паралелограмом:

   (a) $P_{A_0B_0C_0D_0} = AC + BD$; (b) $2S_{A_0B_0C_0D_0} = S_{ABCD}$.

2) **дві «чудові» точки на діагоналі** AC:
   (a) прямі BC_0 і BD_0 ділять діагональ AC на три рівні частини;
   (b) прямі DA_0 і DB_0 ділять діагональ AC на три рівні частини;
   (c) прямі BD_0 і DB_0 ділять діагональ AC на три рівні частини;
   (d) точки $A_2 = BD_0 \cap A_0D$ і $C_2 = BC_0 \cap DB_0$ належать діагоналі AC та ділять її на три рівні частини;

3) **дві «чудові» точки на діагоналі** BD:
   точки $B_2 = AB_0 \cap A_0C$ і $D_2 = CD_0 \cap C_0A$ належать діагоналі BD та ділять її на три рівні частини;

4) **три «чудові» точки на середній лінії** A_0C_0:
   точки $A_1 = AB_0 \cap BD_0$, $O = AC \cap BD$ і $C_1 = B_0D \cap CD_0$ належать середній лінії A_0C_0 та ділять її на чотири рівні частини;

5) **три «чудові» точки на середній лінії** B_0D_0:
   точки $B_1 = A_0C \cap BC_0$, $O = AC \cap BD$ і $D_1 = C_0A \cap DA_0$ належать середній лінії B_0D_0 та ділять її на чотири рівні частини;

6) **точки перетину «медіан» – 1-2**:
   (a) точки A_1, B_1, C_1 і D_1 є серединами «медіан» AB_0, BD_0; BC_0, CA_0; CD_0, DB_0 і DA_0, AC_0 відповідно;
   (b) точки A_2, B_2, C_2 і D_2 ділять кожну з відповідних медіан (BD_0 і DA_0; AB_0 і CA_0; BC_0 і DB_0; CD_0 і AC_0) у відношенні 2 : 1

(рухаючись від вершини паралелограма), тобто:

$$BA_2 : A_2D_0 = 2:1\,,\ DA_2 : A_2A_0 = 2:1 \text{ і т.д.}$$

7) **точки перетину «медіан» – 3-4**:
   (a) $AA_3 : A_3B_0 = BB_3 : B_3C_0 = CC_3 : C_3C_0 = DD_3 : D_3A_0 = 4:1$;
   (b) $AA_4 : A_4C_0 = BB_4 : B_4D_0 = CC_4 : C_4A_0 = DD_4 : D_4B_0 = 4:1$;
   (c) $AD_3 : D_3B_0 = BA_3 : A_3C_0 = CB_3 : B_3D_0 = DC_3 : C_3A_0 = 2:3$;
   (d) $AB_4 : B_4C_0 = BC_4 : C_4D_0 = CD_4 : D_4A_0 = DA_4 : A_4B_0 = 2:3$;
8) **Теорема** [чудова властивість «медіан» паралелограма] *На кожній з 8-ми медіан паралелограма розташовано* 4 *точки її перетину з 4-ма іншими медіанами. Кожна із 8-ми зазначених четвірок точок ділить відповідну медіану, рухаючись від вершини паралелограма, у відношенні*

$$12:3:5:4:6\,.$$

   Наприклад: $AD_3 : D_3A_1 : A_1B_2 : B_2A_3 : A_3B_0 = 12:3:5:4:6$ і т.д.
9) Чотирикутники AB_0CD_0, BB_0DD_0, AA_0CC_0, BC_0DA_0 та $A_1B_0C_1D_0$, $B_1C_0D_1A_0$ є паралелограмами:
   (a) $S_{AB_0CD_0} = S_{BB_0DD_0} = S_{AA_0CC_0} = S_{BC_0DA_0} = \frac{1}{2}S_{ABCD}$;
   (b) $S_{A_1B_0C_1D_0} = S_{B_1C_0D_1A_0} = \frac{1}{4}S_{ABCD}$.
10) Чотирикутники $A_1B_1C_1D_1$, $A_2B_2C_2D_2$ є паралелограмами:
   (a) $2P_{A_1B_1C_1D_1} = AC + BD$,
   (b) $8S_{A_1B_1C_1D_1} = S_{ABCD}$;
   (c) $3P_{A_2B_2C_2D_2} = P_{ABCD}$,
   (d) $9S_{A_2B_2C_2D_2} = S_{ABCD}$.
11) Чотирикутники $A_3B_3C_3D_3$, $A_4B_4C_4D_4$ є паралелограмами:
   (a) $5S_{A_3B_3C_3D_3} = S_{ABCD}$;
   (b) $5S_{A_4B_4C_4D_4} = S_{ABCD}$.
12) Чотирикутники $D_3C_4B_3A_4$, $B_4A_3D_4C_3$ є паралелограмами:
   (a) $P_{D_3C_4B_3A_4} = \frac{3}{5}AD + \frac{1}{5}AB$,
   (b) $S_{D_3C_4B_3A_4} = \frac{3}{25}S_{ABCD}$;
   (c) $P_{B_4A_3D_4C_3} = \frac{1}{5}AD + \frac{3}{5}AB$,
   (d) $S_{B_4A_3D_4C_3} = \frac{3}{25}S_{ABCD}$;
13) Чот-ки $AD_3B_3C_3$, $BA_3C_3D_3$, $CB_3D_3A_3$ і $DC_3A_3B_3$ є паралелограмами:
   (a) $S_{AD_3B_3C_3} = S_{BA_3C_3D_3} = S_{CB_3D_3A_3} = S_{DC_3A_3B_3} = \frac{1}{5}S_{ABCD}$.
14) Чот-ки $AC_4D_4B_4$, $BD_4A_4C_4$, $CA_4B_4D_4$ і $DB_4C_4A_4$ є паралелограмами:
   (a) $S_{AC_4D_4B_4} = S_{BD_4A_4C_4} = S_{CA_4B_4D_4} = S_{DB_4C_4A_4} = \frac{1}{5}S_{ABCD}$.
15) Якщо S – площа паралелограма, то площа трикутника, вершинами якого є одна з вершин паралелограма та ...
   (a) середини двох несуміжних із нею сторін, становить $\frac{3}{8}S$;
   (b) середини двох суміжних із нею сторін, становить $\frac{1}{8}S$;
   (c) середини двох послідовних за нею сторін, становить $\frac{1}{8}S$;
   (d) середини двох паралельних сторін, становить $\frac{1}{4}S$;
16) $6 \cdot S_{A_1B_2B_1C_2C_1D_2D_1A_2} = S_{ABCD}$.

2.5. Ознаки рівності паралелограмів

? Чи можуть два нерівних паралелограма мати по рівній стороні й по рівній діагоналі? (Відповідь: так, можуть.)

Теореми-ознаки рівності паралелограмів (та ті, що до них зводяться). *Якщо виконується одна з наступних умов*

1) `дві сторони та кут між ними` одного паралелограма дорівнюють двом сторонам та куту між ними іншого паралелограма;
   (a) середні лінії та кут між ними одного паралелограма дорівнюють середнім лініям та куту між ними іншого паралелограма;
   (b) сторона, нерівна їй середня лінія та кут між ними одного паралелограма дорівнюють стороні, нерівній їй середній лінії та куту між ними іншого паралелограма;
2) `дві сторони та кут між діагоналями` одного паралелограма дорівнюють двом сторонам та куту між діагоналями іншого паралелограма;
3) `дві діагоналі та кут між сторонами` одного паралелограма дорівнюють двом діагоналям та куту між сторонами іншого паралелограма;
4) `діагоналі та кут між ними` одного паралелограма дорівнюють діагоналям та куту між ними іншого паралелограма;
5) `сторона, діагональ та кут між ними` одного паралелограма дорівнюють стороні, діагоналі та куту між ними іншого паралелограма;
6) `сторона та дві діагоналі` одного паралелограма дорівнюють стороні та двом діагоналям іншого паралелограма;
7) `непаралельні сторони та діагональ` одного паралелограма дорівнюють непаралельним сторонам та діагоналі іншого паралелограма;
   (a) середні лінії та діагональ одного паралелограма дорівнюють середнім лініям та діагоналі іншого паралелограма;
   (b) діагональ та два кути, які вона утворює з непаралельними сторонами одного паралелограма дорівнюють діагоналі та двом кутам, які вона утворює з непаралельними сторонами іншого паралелограма;
8) `лінійний елемент, кут між діагоналями та кут між сторонами` одного паралелограма дорівнюють відповідному лінійному елементу, куту між діагоналями та куту між сторонами іншого паралелограма;

то такі паралелограми є рівними.

2.6. Ознаки подібності паралелограмів

? Чи можуть два неподібних паралелограма мати відповідно паралельні сторони? (Відповідь: так, можуть.)

Теореми-ознаки подібності паралелограмів (ті, що до них зводяться). *Якщо виконується одна з наступних умов*

1) два кути, які більша (менша) діагональ утворює з непаралельними сторонами одного паралелограма, відповідно дорівнюють двом кутам, які більша (менша) діагональ утворює з непаралельними сторонами іншого паралелограма;
2) дві (непаралельні) сторони одного паралелограма відповідно пропорційні двом (непаралельним) сторонам іншого паралелограма і кути між цими сторонами рівні між собою;
3) дві діагоналі одного паралелограма відповідно пропорційні двом діагоналями іншого паралелограма і кути між цими діагоналями рівні;
4) більша (менша) сторона та більша (менша) діагональ відповідно пропорційні більшій (меншій) стороні та більшій (меншій) діагоналі іншого паралелограма і кути між ними рівні між собою;
5) дві (непаралельні) сторони та діагональ одного паралелограма відповідно пропорційні двом (непаралельним) сторонам та діагоналі іншого паралелограма;
6) нетупий кут між сторонами та нетупий кут між діагоналями одного паралелограма відповідно дорівнюють нетупому куту між сторонами та нетупому куту між діагоналями іншого паралелограма;

то такі паралелограми є подібними.

2.7. Паралелограм: задачі на обчислення.

Перелік умовних позначень:

a і b – довжини сторін паралелограма, причому $a \geqslant b$;

α – нетупий, а β – негострий кут між його сторонами;

d_1, d_2 – довжини діагоналей ($d_1 \geqslant d_2$), а φ – нетупий кут між ними;

h_a, h_b – довжини висот, проведених до сторін a і b відповідно;

h_1, h_2 – довжини перпендикулярів, опущених із вершин паралелограма на діагоналі d_1 і d_2 відповідно;

l_a, l_b – довжини бісектрис нетупого та негострого кутів відповідно;

m_a, m_a' – довжини («медіан») відрізків, що сполучають *середину більшої сторони* з вершинами нетупого та негострого кутів відповідно;

m_b, m_b' – довжини («медіан») відрізків, що сполучають *середину меншої сторони* з вершинами нетупого та негострого кутів відповідно;

α_1, α_2 – кути, які утворює *більша діагональ* з більшою та меншою сторонами паралелограма відповідно; β_1, β_2 – кути, які утворює *менша діагональ* з більшою та меншою сторонами паралелограма відповідно;

P, S – периметр та площа паралелограма відповідно.

2.7.1. «Основні метричні співвідношення» в паралелограмі

1) $h_b = a\sin\alpha$, $h_a = b\sin\alpha$, звідки: $h_a : h_b = b : a$;

   (a) $\sin^2\alpha = \dfrac{h_a h_b}{ab}$, звідки: $ab \geqslant h_a h_b$, $\cos^2\alpha = \dfrac{ab - h_a h_b}{ab}$;

2) $h_1 = \frac{1}{2}d_2\sin\varphi$, $h_2 = \frac{1}{2}d_1\sin\varphi$, звідки: $h_1 : h_2 = d_2 : d_1$;

   (a) $\sin^2\varphi = \dfrac{4h_1h_2}{d_1d_2}$, звідки: $d_1d_2 \geqslant 4h_1h_2$, $\cos^2\varphi = \dfrac{d_1d_2 - 4h_1h_2}{d_1d_2}$;

3) $l_a = 2b\cos\frac{\alpha}{2}$, $l_b = 2b\sin\frac{\alpha}{2}$, звідки:

$$l_a^2 - l_b^2 = 4b^2\cos\alpha, \quad l_a^2 + l_b^2 = 4b^2, \quad l_a \cdot l_b = 2b^2\sin\alpha, \quad \operatorname{ctg}\alpha = \frac{l_a^2 - l_b^2}{2l_al_b}.$$

4) **кути, що утворені діагоналями зі сторонами паралелограма**:

   (a) $h_a = d_1\sin\alpha_1$, $h_b = d_1\sin\alpha_2$, звідки: $h_a : h_b = \sin\alpha_1 : \sin\alpha_2$;

   (b) $\dfrac{a}{\sin\alpha_2} = \dfrac{b}{\sin\alpha_1} = \dfrac{d_1}{\sin\alpha}$, $\dfrac{a}{\sin\beta_2} = \dfrac{b}{\sin\beta_1} = \dfrac{d_2}{\sin\alpha}$;

   (c) $\cos\alpha_1 = \frac{a+b\cos\alpha}{d_1}$, $\cos\alpha_2 = \frac{b+a\cos\alpha}{d_1}$, $\cos\beta_1 = \frac{a-b\cos\alpha}{d_2}$, $\cos\beta_2 = \frac{b-a\cos\alpha}{d_2}$;

   (d) $\operatorname{ctg}\alpha_1 = \dfrac{a+b\cos\alpha}{b\sin\alpha}$, $\operatorname{ctg}\alpha_2 = \dfrac{b+a\cos\alpha}{a\sin\alpha}$;

   $\operatorname{ctg}\beta_1 = \dfrac{a-b\cos\alpha}{b\sin\alpha}$, $\operatorname{ctg}\beta_2 = \dfrac{b-a\cos\alpha}{a\sin\alpha}$.

5) $S = \dfrac{1}{2}d_1d_2\sin\varphi$; $S = a\cdot h_a = b\cdot h_b$; $S = d_1\cdot h_1 = d_2\cdot h_2$;

   (a) $S = ab\sin\alpha$;

   (b) $S = \dfrac{d_1^2\sin\alpha_1\sin\alpha_2}{\sin(\alpha_1+\alpha_2)}$;

   (c) $S = \sqrt{abh_ah_b}$;

   (d) $S = \dfrac{h_a\cdot h_b}{\sin\alpha}$;

   (e) $S = \sqrt{d_1d_2h_1h_2}$;

   (f) $S = \dfrac{2h_1\cdot h_2}{\sin\varphi}$;

   (g) $\sin\alpha\cdot\sin\varphi = \dfrac{2h_ah_b}{d_1d_2} = \dfrac{2h_1h_2}{ab}$, $\dfrac{\sin\alpha}{\sin\varphi} = \dfrac{d_1d_2}{2ab} = \dfrac{h_ah_b}{2h_1h_2}$;

«**навколо теореми косинусів**»:

6) $d_1^2 = a^2 + b^2 + 2ab\cos\alpha$, $d_2^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha$:

   (a) $d_1^2 + d_2^2 = 2\left(a^2 + b^2\right)$ — «**рівність паралелограма**»;

   (b) «проти більшого кута лежить більша діагональ і навпаки»;

   (c) «проти меншого кута лежить менша діагональ і навпаки»;

(d) «до нерівностей паралелограма»:
$\sqrt{a^2+b^2} \leqslant d_1 < a+b, \quad a-b < d_2 \leqslant \sqrt{a^2+b^2}\,;$

(e) $d_1^2-d_2^2 = 4ab\cos\alpha\,$:

i. «до нерівностей паралелограма»:
$4ab > d_1^2-d_2^2\,, \quad \cos\alpha \geqslant \dfrac{d_1^2-d_2^2}{d_1^2+d_2^2}\,, \quad \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} = \dfrac{l_a}{l_b} \geqslant \dfrac{d_1}{d_2}\,;$

ii. $d_1 = d_2 \Leftrightarrow \alpha = 90^0\,,$

iii. $d_1^2-d_2^2 = 2ab \Leftrightarrow \alpha = 60^0\,,$

iv. $d_1^2-d_2^2 = 2ab\sqrt{2} \Leftrightarrow \alpha = 45^0\,,$

v. $d_1^2-d_2^2 = 2ab\sqrt{3} \Leftrightarrow \alpha = 30^0\,,$

vi. $\left(d_1^2-d_2^2\right)\cdot\sin\alpha = 4S\cdot\cos\alpha\,,$

vii. $a\left(l_a^2-l_b^2\right) = b\left(d_1^2-d_2^2\right),$

viii. $\sin\alpha = \frac{1}{4ab}\sqrt{16a^2b^2-\left(d_1^2-d_2^2\right)^2}\,, \quad S = \frac{1}{4}\sqrt{16a^2b^2-\left(d_1^2-d_2^2\right)^2}\,;$

(f) $d_1^2d_2^2 = \left(a^2+b^2\right)^2 - 4a^2b^2\cos^2\alpha =$
$= \left(a^2-b^2\right)^2 + 4abh_ah_b = \left(a^2-b^2\right)^2 + 4S^2\,$:

i. $d_1\cdot d_2 = a^2+b^2 \Leftrightarrow \alpha = 90^0\,;$

ii. $d_1^2\cdot d_2^2 = a^4+b^4 \Leftrightarrow \alpha = 45^0\,;$

iii. $d_1^2\cdot d_2^2 = a^4+b^4+a^2b^2 \Leftrightarrow \alpha = 60^0\,;$

iv. $d_1^2\cdot d_2^2 = a^4+b^4-a^2b^2 \Leftrightarrow \alpha = 30^0\,;$

7) $a^2 = \dfrac{1}{4}d_1^2 + \dfrac{1}{4}d_2^2 + \dfrac{1}{2}d_1d_2\cos\varphi, \qquad b^2 = \dfrac{1}{4}d_1^2 + \dfrac{1}{4}d_2^2 - \dfrac{1}{2}d_1d_2\cos\varphi\,;$

(a) «до нерівностей паралелограма»:
$\dfrac{1}{2}\sqrt{d_1^2+d_2^2} \leqslant a < \dfrac{1}{2}(d_1+d_2), \quad \dfrac{1}{2}(d_1-d_2) < b \leqslant \dfrac{1}{2}\sqrt{d_1^2+d_2^2}\,;$

(b) $a^2-b^2 = d_1d_2\cos\varphi\,$:

i. «до нерівностей паралелограма»:
$d_1d_2 > a^2-b^2\,, \quad \cos\varphi \geqslant \dfrac{a^2-b^2}{a^2+b^2}\,, \quad \operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2} \geqslant \dfrac{a}{b}\,;$

ii. $a = b \Leftrightarrow \varphi = 90^0\,,$

iii. $a^2-b^2 = \frac{1}{2}d_1d_2 \Leftrightarrow \varphi = 60^0\,,$

iv. $a^2-b^2 = \frac{\sqrt{2}}{2}d_1d_2 \Leftrightarrow \varphi = 45^0\,,$

v. $a^2-b^2 = \frac{\sqrt{3}}{2}d_1d_2 \Leftrightarrow \varphi = 30^0\,,$

vi. $a^2-b^2 = 2S\cdot\operatorname{ctg}\varphi\,,$

vii. $\sin\varphi = \frac{1}{d_1d_2}\sqrt{d_1^2d_2^2-\left(a^2-b^2\right)^2}\,, \quad S = \frac{1}{2}\sqrt{d_1^2d_2^2-\left(a^2-b^2\right)^2}\,;$

(c) $16a^2b^2 = \left(d_1^2+d_2^2\right)^2 - 4d_1^2d_2^2\cos^2\varphi =$
$= \left(d_1^2-d_2^2\right)^2 + 16d_1d_2h_1h_2 = \left(d_1^2-d_2^2\right)^2 + 16S^2\,$:

i. $4ab = d_1^2+d_2^2 \Leftrightarrow a = b \Leftrightarrow \varphi = 90^0\,,$

ii. $16a^2b^2 = d_1^4+d_2^4+d_1^2d_2^2 \Leftrightarrow \varphi = 60^0\,,$

iii. $16a^2b^2 = d_1^4+d_2^4-d_1^2d_2^2 \Leftrightarrow \varphi = 30^0\,,$

iv. $16a^2b^2 = d_1^4+d_2^4 \Leftrightarrow \varphi = 45^0\,,$

«**навколо рівності паралелограма**»:

8) $2\left(\dfrac{1}{h_a^2}+\dfrac{1}{h_b^2}\right)=\dfrac{1}{h_1^2}+\dfrac{1}{h_2^2}\,;$

9) $4m_a^2=2(b^2+d_1^2)-a^2\,,\;\;4m_a'^2=2(b^2+d_2^2)-a^2\,;$
$4m_b^2=2(a^2+d_1^2)-b^2\,,\;\;4m_b'^2=2(a^2+d_2^2)-b^2\,;$

(a) $2(m_a^2-m_a'^2)=d_1^2-d_2^2=4ab\cos\alpha$, звідки $m_a\geqslant m_a'$;

(b) $2(m_b^2-m_b'^2)=d_1^2-d_2^2=4ab\cos\alpha$, звідки $m_b\geqslant m_b'$;

(c) $m_a^2+m_b'^2=m_b^2+m_a'^2$;

(d) $2(m_a^2+m_a'^2)=4b^2+a^2\,,\;\;2(m_b^2+m_b'^2)=4a^2+b^2$;

(e) $m_a^2+m_a'^2+m_b^2+m_b'^2=\frac{5}{2}(a^2+b^2)=\frac{5}{4}(d_1^2+d_2^2)$,
$m_a^2+m_b'^2=m_b^2+m_a'^2=\frac{5}{4}(a^2+b^2)=\frac{5}{8}(d_1^2+d_2^2)$;

(f) $4(m_b^2-m_a^2)=3(a^2-b^2)=3d_1d_2\cos\varphi$, звідки $m_b\geqslant m_a$;

(g) $4(m_b'^2-m_a'^2)=3(a^2-b^2)=3d_1d_2\cos\varphi$, звідки $m_b'\geqslant m_a'$;

10) «**навколо формули Герона**»:

(a) $$4S^2=\left[(a+b)^2-d_i^2\right]\left[d_i^2-(a-b)^2\right]=$$
$$=\left[2ab+\left(a^2+b^2-d_i^2\right)\right]\left[2ab-\left(a^2+b^2-d_i^2\right)\right]=$$
$$=4a^2b^2-\left(a^2+b^2-d_i^2\right)^2=4a^2b^2-\tfrac{1}{4}\left(d_1^2-d_2^2\right)^2=d_1^2d_2^2-\left(a^2-b^2\right)^2;$$

(b) $$16S^2=\left[(d_1+d_2)^2-4a^2\right]\left[4a^2-(d_1-d_2)^2\right]=$$
$$=\left[2d_1d_2-\left(4a^2-d_1^2-d_2^2\right)\right]\left[2d_1d_2+\left(4a^2-d_1^2-d_2^2\right)\right]=$$
$$=4d_1^2d_2^2-\left(4a^2-d_1^2-d_2^2\right)^2=4d_1^2d_2^2-\left(d_1^2+d_2^2-4b^2\right)^2=$$
$$=4d_1^2d_2^2-4\left(a^2-b^2\right)^2=16a^2b^2-(d_1^2-d_2^2)^2\,.$$

11) «**додаткові формули для знаходження площі паралелограма**»:

(a) якщо m — добуток довжин непаралельних сторін, n — добуток довжин двох непаралельних висот паралелограма ($m\geqslant n$), то
$$S=\sqrt{mn}\,.$$

(b) якщо m — добуток довжин діагоналей, а n — добуток довжин двох непаралельних перпендикулярів, опущених на діагоналі ($m\geqslant 4n$), то
$$S=\sqrt{mn}\,.$$

(c) якщо $a\neq b\Leftrightarrow\varphi<90^0$, то $S=\frac{1}{2}\left(a^2-b^2\right)\operatorname{tg}\varphi=\dfrac{2h_a^2h_b^2}{h_b^2-h_a^2}\operatorname{ctg}\varphi$;

(d) якщо $d_1\neq d_2\Leftrightarrow\alpha<90^0$, то $S=\frac{1}{4}\left(d_1^2-d_2^2\right)\operatorname{tg}\alpha=\dfrac{4h_1^2h_2^2}{h_2^2-h_1^2}\operatorname{ctg}\alpha$;

(e) $S=\frac{Ph_ah_b}{2(h_a+h_b)}\,,\quad S=\frac{1}{8}\sqrt{(P^2-4d_1^2)\,(P^2-4d_2^2)}\,;$

(f) $S=\dfrac{d_1^2}{\operatorname{ctg}\alpha_2+\operatorname{ctg}\alpha_1}=\dfrac{d_1^2h_ah_b}{h_a\sqrt{d_1^2-h_b^2}+h_b\sqrt{d_1^2-h_a^2}}\,;$

12) **«навколо тригонометричних тотожностей»**:

(a) $\dfrac{h_a h_b}{ab}+\dfrac{\left(a^2+b^2\right)^2-d_1^2d_2^2}{4a^2b^2}=1\,;\quad \dfrac{4h_1h_2}{d_1d_2}+\dfrac{\left(d_1^2+d_2^2\right)^2-16a^2b^2}{4d_1^2d_2^2}=1\,;$

(b) $\sin(\alpha\mp\varphi)=\dfrac{S}{2abd_1d_2}\cdot\left(2(a^2-b^2)\mp(d_1^2-d_2^2)\right);$

i. якщо $\alpha+\varphi=90^0$, то $\quad S=\dfrac{2abd_1d_2}{2(a^2-b^2)+(d_1^2-d_2^2)}\,;$

ii. якщо $\alpha=\varphi$, то $\quad d_1^2-d_2^2=2a^2-2b^2\Leftrightarrow d_1=a\sqrt{2}\Leftrightarrow d_2=b\sqrt{2}\,;$

(c) $\cos(\alpha\mp\varphi)=\dfrac{(a^2-b^2)(d_1^2-d_2^2)\pm 8abh_ah_b}{4abd_1d_2}=\dfrac{(a^2-b^2)(d_1^2-d_2^2)\pm 8S^2}{4abd_1d_2}\,;$

i. якщо $\alpha+\varphi=90^0$, то $\quad 8S^2=(d_1^2-d_2^2)(a^2-b^2)\,;$

ii. якщо $\alpha=\varphi$, то $8S^2=4abd_1d_2-(d_1^2-d_2^2)(a^2-b^2)=12a^2b^2-2(a^4+b^4)\,;$

13) **«навколо рівності кутів між сторонами та діагоналями»**:

(a) Якщо $d_1=a\sqrt{2}\Leftrightarrow d_2=b\sqrt{2}\Leftrightarrow d_1^2-d_2^2=2a^2-2b^2$, то:
$\cos\alpha=\dfrac{d_1^2-d_2^2}{4ab}=\dfrac{a^2-b^2}{2ab}$, $\cos\varphi=\dfrac{a^2-b^2}{d_1d_2}=\dfrac{a^2-b^2}{2ab}$, звідки $\alpha=\varphi$.

(b) Якщо α — гострий кут паралелограма, а φ — гострий кут між його діагоналями, то має місце рівність

$$\operatorname{ctg}\varphi\left(d_1^2-d_2^2\right)=\operatorname{ctg}\alpha\left(2a^2-2b^2\right):$$

i. якщо ж $\alpha=\varphi$, то $d_1^2-d_2^2=2a^2-2b^2\Leftrightarrow d_1=a\sqrt{2}\Leftrightarrow d_2=b\sqrt{2}\,;$

(c) Якщо довжини діагоналей пропорційні довжинам непаралельних сторін, то кути між сторонами та діагоналями рівні ($\alpha=\varphi$).

14) **якщо у паралелограма одна з діагоналей перпендикулярна до його сторони**, то мають місце рівності:

(a) $\varphi=90^0-\alpha_2\,;$	(e) $a^2=b^2+d_2^2\,;$	(i) $S=b\sqrt{a^2-b^2}\,;$
(b) $h_b=d_2\,;$	(f) $4b^2=d_1^2-d_2^2\,;$	(j) $\cos\alpha=\frac{b}{a}\,;$
(c) $h_2=b\,;$	(g) $4a^2=d_1^2+3d_2^2\,;$	(k) $\cos\beta_1=\frac{d_2}{a}\,;$
(d) $ah_a=b\cdot d_2\,;$	(h) $S=\frac{1}{2}d_2\sqrt{d_1^2-d_2^2}\,;$	(l) $\cos\varphi=\sin\alpha_2=\frac{d_2}{d_1}\,;$

15) **залежність між сторонами** $a\geqslant b$ **та** нетупими **кутами** φ,α:

$$\frac{b}{a}=\sin\alpha(\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2\alpha+\operatorname{ctg}^2\varphi}-\operatorname{ctg}\varphi)\,,$$

$$\frac{a}{b}=\sin\alpha(\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2\alpha+\operatorname{ctg}^2\varphi}+\operatorname{ctg}\varphi)\,;$$

16) **залежність між діагоналями** $d_1\geqslant d_2$ **та** нетупими **кутами** φ,α:

$$\frac{d_2}{d_1}=\sin\varphi(\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2\alpha+\operatorname{ctg}^2\varphi}-\operatorname{ctg}\alpha)\,,$$

$$\frac{d_1}{d_2}=\sin\varphi(\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2\alpha+\operatorname{ctg}^2\varphi}+\operatorname{ctg}\alpha)\,.$$

2.7.3. «Зведені таблиці» для величин основних елементів паралелограма

за відомими $a,\ b,\ \alpha\ (a \geqslant b)$:

1) $P = 2(a+b)$;
2) $S = ab\sin\alpha$;
3) $h_a = b\sin\alpha,\quad h_b = a\sin\alpha$;
4) $l_a = 2b\cos\frac{\alpha}{2},\quad l_b = 2b\sin\frac{\alpha}{2}$;
5) $d_1 = \sqrt{a^2+b^2+2ab\cos\alpha},\quad d_2 = \sqrt{a^2+b^2-2ab\cos\alpha}$;
6) $h_1 = \dfrac{ab\sin\alpha}{\sqrt{a^2+b^2+2ab\cos\alpha}},\ h_2 = \dfrac{ab\sin\alpha}{\sqrt{a^2+b^2-2ab\cos\alpha}}$;
7) $\cos\varphi = \dfrac{a^2-b^2}{\sqrt{a^4+b^4-2a^2b^2\cos 2\alpha}},\ \sin\varphi = \dfrac{2ab\sin\alpha}{\sqrt{a^4+b^4-2a^2b^2\cos 2\alpha}}$;
8) $m_a = \frac{1}{2}\sqrt{4b^2+a^2+4ab\cos\alpha},\quad m'_a = \frac{1}{2}\sqrt{4b^2+a^2-4ab\cos\alpha}$;
9) $m_b = \frac{1}{2}\sqrt{4a^2+b^2+4ab\cos\alpha},\quad m'_b = \frac{1}{2}\sqrt{4a^2+b^2-4ab\cos\alpha}$;
10) $\cos\alpha_1 = \dfrac{a+b\cos\alpha}{\sqrt{a^2+b^2+2ab\cos\alpha}},\quad \cos\alpha_2 = \dfrac{b+a\cos\alpha}{\sqrt{a^2+b^2+2ab\cos\alpha}}$;
11) $\cos\beta_1 = \dfrac{a-b\cos\alpha}{\sqrt{a^2+b^2-2ab\cos\alpha}},\quad \cos\beta_2 = \dfrac{b-a\cos\alpha}{\sqrt{a^2+b^2-2ab\cos\alpha}}$;

за відомими $d_1,\ d_2,\ \varphi\ (d_1 \geqslant d_2)$:

1) $S = \frac{1}{2}d_1 d_2\sin\varphi$;
2) $h_1 = \frac{d_2}{2}\sin\varphi,\ h_2 = \frac{d_1}{2}\sin\varphi$;
3) $a = \frac{1}{2}\sqrt{d_1^2+d_2^2+2d_1d_2\cos\varphi},\quad b = \frac{1}{2}\sqrt{d_1^2+d_2^2-2d_1d_2\cos\varphi}$;
4) $P = \sqrt{d_1^2+d_2^2+2d_1d_2\cos\varphi} + \sqrt{d_1^2+d_2^2-2d_1d_2\cos\varphi}$;
5) $h_a = \dfrac{d_1d_2\sin\varphi}{\sqrt{d_1^2+d_2^2+2d_1d_2\cos\varphi}},\quad h_b = \dfrac{d_1d_2\sin\varphi}{\sqrt{d_1^2+d_2^2-2d_1d_2\cos\varphi}}$;
6) $\cos\alpha_1 = \dfrac{d_1+d_2\cos\varphi}{\sqrt{d_1^2+d_2^2+2d_1d_2\cos\varphi}},\quad \cos\alpha_2 = \dfrac{d_1-d_2\cos\varphi}{\sqrt{d_1^2+d_2^2-2d_1d_2\cos\varphi}}$;
7) $\cos\beta_1 = \dfrac{d_2+d_1\cos\varphi}{\sqrt{d_1^2+d_2^2+2d_1d_2\cos\varphi}},\quad \cos\beta_2 = \dfrac{d_2-d_1\cos\varphi}{\sqrt{d_1^2+d_2^2-2d_1d_2\cos\varphi}}$;
8) $\cos\alpha = \dfrac{d_1^2-d_2^2}{\sqrt{\left(d_1^2+d_2^2\right)^2-4d_1^2d_2^2\cos^2\varphi}},\quad \sin\alpha = \dfrac{2d_1d_2\sin\varphi}{\sqrt{\left(d_1^2+d_2^2\right)^2-4d_1^2d_2^2\cos^2\varphi}}$;
9) $m_a = \frac{1}{4}\sqrt{9d_1^2+d_2^2-6d_1d_2\cos\varphi},\quad m'_a = \frac{1}{4}\sqrt{9d_2^2+d_1^2-6d_1d_2\cos\varphi}$;
10) $m_b = \frac{1}{4}\sqrt{9d_1^2+d_2^2+6d_1d_2\cos\varphi},\quad m'_b = \frac{1}{4}\sqrt{9d_2^2+d_1^2+6d_1d_2\cos\varphi}$;
11) $l_a^2 = 2b^2 + \dfrac{2b^2(d_1^2-d_2^2)}{\sqrt{\left(d_1^2+d_2^2\right)^2-4d_1^2d_2^2\cos^2\varphi}},\ l_b^2 = 2b^2 - \dfrac{2b^2(d_1^2-d_2^2)}{\sqrt{\left(d_1^2+d_2^2\right)^2-4d_1^2d_2^2\cos^2\varphi}}$;

за відомими $a,\ b,\ d_1\ (a \geqslant b)$**:**

1) $P = 2(a+b)$; 2) $d_2 = \sqrt{2(a^2+b^2)-d_1^2}$;

3) $S = \frac{1}{2}\sqrt{4a^2b^2-(a^2+b^2-d_1^2)^2}$;

4) $h_a = \frac{1}{2a}\sqrt{4a^2b^2-(a^2+b^2-d_1^2)^2}, \quad h_b = \frac{1}{2b}\sqrt{4a^2b^2-(a^2+b^2-d_1^2)^2}$;

5) $h_1 = \dfrac{\sqrt{4a^2b^2-(a^2+b^2-d_1^2)^2}}{2d_1}, \quad h_2 = \dfrac{\sqrt{4a^2b^2-(a^2+b^2-d_1^2)^2}}{2\sqrt{2(a^2+b^2)-d_1^2}}$;

6) $\cos\alpha = \frac{1}{2ab}(d_1^2-a^2-b^2), \quad \sin\alpha = \frac{1}{2ab}\sqrt{4a^2b^2-(a^2+b^2-d_1^2)^2}$;

7) $\cos\varphi = \dfrac{a^2-b^2}{d_1\sqrt{2(a^2+b^2)-d_1^2}}, \quad \sin\varphi = \dfrac{\sqrt{4a^2b^2-(a^2+b^2-d_1^2)^2}}{d_1\sqrt{2(a^2+b^2)-d_1^2}}$;

8) $l_a^2 = 2b^2\left(1+\dfrac{d_1^2-a^2-b^2}{2ab}\right), \quad l_b^2 = 2b^2\left(1-\dfrac{d_1^2-a^2-b^2}{2ab}\right)$;

9) $m_a^2 = \frac{1}{4}(2d_1^2+2b^2-a^2), \quad m_b^2 = \frac{1}{4}(2d_1^2+2a^2-b^2)$;

10) $m_a'^2 = \frac{1}{4}(3a^2+6b^2-2d_1^2), \quad m_b'^2 = \frac{1}{4}(6a^2+3b^2-2d_1^2)$;

11) $\cos\alpha_1 = \frac{1}{2ad_1}(a^2+d_1^2-b^2), \quad \cos\alpha_2 = \frac{1}{2bd_1}(b^2+d_1^2-a^2)$;

12) $\cos\beta_1 = \dfrac{3a^2+b^2-d_1^2}{2a\sqrt{2(a^2+b^2)-d_1^2}}, \quad \cos\beta_2 = \dfrac{a^2+3b^2-d_1^2}{2a\sqrt{2(a^2+b^2)-d_1^2}}$.

за відомими $d_1,\ d_2,\ a\ (d_1 \geqslant d_2)$**:**

1) $b = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{d_1^2+d_2^2-2a^2}$; 2) $P = 2a+\sqrt{2}\sqrt{d_1^2+d_2^2-2a^2}$;

3) $S = \frac{1}{4}\sqrt{4d_1^2d_2^2-(4a^2-d_1^2-d_2^2)^2}$;

4) $h_a = \frac{1}{4a}\sqrt{4d_1^2d_2^2-(4a^2-d_1^2-d_2^2)^2}, \ h_b = \frac{1}{2\sqrt{2}}\sqrt{\dfrac{4d_1^2d_2^2-\left(4a^2-d_1^2-d_2^2\right)^2}{d_1^2+d_2^2-2a^2}}$;

5) $h_1 = \frac{1}{4d_1}\sqrt{4d_1^2d_2^2-(4a^2-d_1^2-d_2^2)^2}, \quad h_2 = \frac{1}{4d_2}\sqrt{4d_1^2d_2^2-(4a^2-d_1^2-d_2^2)^2}$;

6) $4m_a^2 = 3d_1^2+d_2^2-3a^2, \quad 4m_a'^2 = d_1^2+3d_2^2-3a^2$;

7) $4m_b^2 = 3a^2+\frac{3}{2}d_1^2-\frac{1}{2}d_2^2, \quad 4m_b'^2 = 3a^2-\frac{1}{2}d_1^2+\frac{3}{2}d_2^2$;

8) $\sin\varphi = \frac{1}{2d_1d_2}\sqrt{4d_1^2d_2^2-(4a^2-d_1^2-d_2^2)^2}, \quad \cos\varphi = \frac{1}{2d_1d_2}(4a^2-d_1^2-d_2^2)$;

9) $\sin\alpha = \frac{1}{2\sqrt{2}a}\sqrt{\dfrac{4d_1^2d_2^2-\left(4a^2-d_1^2-d_2^2\right)^2}{d_1^2+d_2^2-2a^2}}, \quad \cos\alpha = \frac{1}{2\sqrt{2}}\dfrac{d_1^2-d_2^2}{a\sqrt{d_1^2+d_2^2-2a^2}}$;

10) $l_a^2 = 2b^2+\frac{1}{\sqrt{2}}\dfrac{b^2(d_1^2-d_2^2)}{a\sqrt{d_1^2+d_2^2-2a^2}}, \quad l_b^2 = 2b^2-\frac{1}{\sqrt{2}}\dfrac{b^2(d_1^2-d_2^2)}{a\sqrt{d_1^2+d_2^2-2a^2}}$;

11) $\cos\alpha_1 = \frac{1}{4ad_1}(4a^2+d_1^2-d_2^2), \quad \cos\beta_1 = \frac{1}{4ad_2}(4a^2+d_2^2-d_1^2)$;

12) $\cos\alpha_2 = \dfrac{3d_1^2+d_2^2-4a^2}{2\sqrt{2}d_1\sqrt{d_1^2+d_2^2-2a^2}}, \quad \cos\beta_2 = \dfrac{d_1^2+3d_2^2-4a^2}{2\sqrt{2}d_2\sqrt{d_1^2+d_2^2-2a^2}}$.

2.7.3. «Найбільш типові задачі на обчислення»

Якщо у паралелограма відомими є:

1) відношення кутів $m:n$ $(m>n)$, то $\alpha=\frac{n}{m+n}\cdot 180^0$, $\beta=\frac{m}{m+n}\cdot 180^0$;
2) різниця кутів q $(q>0)$, то $\alpha=\frac{1}{2}(180^0-q)$, $\beta=\frac{1}{2}(180^0+q)$;
3) сума кутів q $(q<180^0)$, то $\alpha=\frac{q}{2}$, $\beta=180^0-\frac{q}{2}$;
4) сума кутів q $(q\geqslant 180^0)$, то $\alpha=180^0-\frac{q}{2}$, $\beta=\frac{q}{2}$;
5) кут ψ між бісектрисою тупого кута та висотою, опущеної з цієї вершини, то $\alpha=2\psi$, $\beta=180^0-2\psi$;
6) кути ω_1 і ω_2, які утворюють (непаралельні) висоти паралелограма з певною діагоналлю, то його кути становлять
$$\omega_1+\omega_2 \text{ та } 180^0-(\omega_1+\omega_2);$$
7) гострий кут α та довжини m і n відрізків, на які основа бісектриси тупого (гострого) кута ділить сторону рухаючись від вершини гострого (відповідно тупого) кута, то $S=m(m+n)\sin\alpha$;
8) **периметр P та ...**
   (a) сторона a (сторона b), то
   $$b=\frac{P-2a}{2}\ \left(a=\frac{P-2b}{2}\right);$$
   (b) різниця (нерівних) сторін q, то
   $$a=\frac{P+2q}{4},\quad b=\frac{P-2q}{4};$$
   (c) відношення сторін $m:n$ $(m>n)$, то
   $$a=\frac{P\cdot m}{2(m+n)},\quad b=\frac{P\cdot n}{2(m+n)};$$
   (d) відношення $m:n$, у якому основа бісектриси тупого кута ділить сторону рухаючись від вершини гострого кута, то
   $$a=\frac{P(m+n)}{2(2m+n)},\quad b=\frac{Pm}{2(2m+n)};$$
   (e) довжини відрізків m і n $(m\leqslant n)$, на які бісектриса гострого кута ділить діагональ рухаючись від вершини тупого кута, то
   $$a=\frac{Pn}{2(m+n)},\quad b=\frac{Pm}{2(m+n)};$$
   (f) довжини m і n $(m<n)$ відрізків, на які основа висоти, опущеної з вершини гострого кута, ділить (меншу) діагональ, то
   $$a=\frac{1}{P}\left(\frac{P^2}{4}+n^2-m^2\right),\quad b=\frac{1}{P}\left(\frac{P^2}{4}-n^2+m^2\right);$$
   (g) діагоналі d_1, d_2, то
   $$a=\frac{1}{4}\left(P+\sqrt{4(d_1^2+d_2^2)-P^2}\right),\quad b=\frac{1}{4}\left(P-\sqrt{4(d_1^2+d_2^2)-P^2}\right);$$
   (h) висоти h_a, h_b $(h_a\leqslant h_b)$, то
   $$a=\frac{P\cdot h_b}{2(h_a+h_b)},\ b=\frac{P\cdot h_a}{2(h_a+h_b)},\ S=\frac{Ph_ah_b}{2(h_a+h_b)},\ \sin\alpha=\frac{2(h_a+h_b)}{P};$$

(i) відношення висот $m:n$ $(m>n)$, то
$$a=\frac{P\cdot m}{2(m+n)}\,,\quad b=\frac{P\cdot n}{2(m+n)}\,;$$
(j) площа S і висота h_a (висота h_b), то
$$h_b=\frac{2Sh_a}{Ph_a-2S}\quad\left(h_a=\frac{2Sh_b}{Ph_b-2S}\right);$$

9) **сторони a, b та ...**

(a) більша (менша) діагональ d_i $(i=1,2)$, то
$$d_j=\sqrt{2(a^2+b^2)-d_i},\ j\neq i\,;$$
(b) відношення діагоналей $m:n$ $(m>n)$, то
$$d_1=m\sqrt{\frac{2a^2+2b^2}{m^2+n^2}}\,,\quad d_2=n\sqrt{\frac{2a^2+2b^2}{m^2+n^2}}\,;$$
(c) різниця діагоналей q, то
$$d_1=\tfrac{1}{2}\left(\sqrt{4(a^2+b^2)-q^2}+q\right),\quad d_2=\tfrac{1}{2}\left(\sqrt{4(a^2+b^2)-q^2}-q\right);$$
(d) висота h_a (висота h_b), то
$$\operatorname{ctg}\varphi=\frac{a^2-b^2}{2ah_a}\quad\left(\operatorname{ctg}\varphi=\frac{a^2-b^2}{2bh_b}\right);$$
(e) гострий кут φ між діагоналями $(\varphi<90^0\Leftrightarrow a\neq b)$, то:

i. $S=\frac{1}{2}\left(a^2-b^2\right)\operatorname{tg}\varphi\,;\quad h_a=\dfrac{a^2-b^2}{2a}\operatorname{tg}\varphi\,,\quad h_b=\dfrac{a^2-b^2}{2b}\operatorname{tg}\varphi\,;$

ii. $d_1^2=a^2+b^2+\frac{1}{\cos\varphi}\sqrt{(a^2+b^2)^2\cos^2\varphi-(a^2-b^2)^2}\,,$
$d_2^2=a^2+b^2-\frac{1}{\cos\varphi}\sqrt{(a^2+b^2)^2\cos^2\varphi-(a^2-b^2)^2}\,;$

iii. $\cos\alpha=\dfrac{\sqrt{(a^2+b^2)^2\cos^2\varphi-(a^2-b^2)^2}}{2ab\cos\varphi}\,,\quad \sin\alpha=\dfrac{a^2-b^2}{2ab}\cdot\operatorname{tg}\varphi\,;$

(f) гострий кут β_1, який менша діагональ утворює з більшою стороною між діагоналями, причому з меншою стороною вона утворює саме тупий кут, то
$$d_1^2=a^2+b^2+2a(\cos\beta_1\sqrt{b^2-a^2\sin^2\beta_1}+a\sin^2\beta_1)\,;$$
(g) непрямий кут ψ, під яким із середини більшої сторони a видно протилежну до неї сторону, то
$$S_{ABCD}=\tfrac{1}{2}(4b^2-a^2)\operatorname{tg}\psi\,;$$

10) менша сторона b та довжини m і n відрізків, на які основа висоти, опущеної з точки перетину діагоналей, ділить більшу сторону рухаючись від вершини гострого кута, то
$$h_a=\sqrt{b^2-(m-n)^2},\quad S=(m+n)\sqrt{b^2-(m-n)^2}\,;$$

11) різниця сторін q та довжини m і n $(m<n)$ відрізків, на які основа висоти, опущеної з вершини тупого кута, ділить (більшу) діагональ, то
$$a=\tfrac{1}{2q}\left(n^2-m^2+q^2\right),\quad b=\tfrac{1}{2q}\left(n^2-m^2-q^2\right);$$

12) **діагоналі** d_1**,** d_2 **та ...**
   (a) сторона a (сторона b), то
$$b=\sqrt{\tfrac{d_1^2+d_2^2-2a^2}{2}},\quad \left(a=\sqrt{\tfrac{d_1^2+d_2^2-2b^2}{2}}\right);$$
   (b) відношення сторін $m:n$ ($m>n$), то
$$a=m\sqrt{\frac{d_1^2+d_2^2}{2m^2+2n^2}},\quad b=n\sqrt{\frac{d_1^2+d_2^2}{2m^2+2n^2}};$$
   (c) різниця сторін q, то
$$a=\tfrac{1}{2}\left(\sqrt{d_1^2+d_2^2-q^2}+q\right),\quad b=\tfrac{1}{2}\left(\sqrt{d_1^2+d_2^2-q^2}-q\right);$$
   (d) перпендикуляр h_1 (перпендикуляр h_2), то
$$\operatorname{ctg}\alpha=\frac{d_1^2-d_2^2}{4d_1h_1}\quad\left(\operatorname{ctg}\alpha=\frac{d_1^2-d_2^2}{4d_2h_2}\right);$$
   (e) гострий кут α між сторонами ($\alpha<90^0\Leftrightarrow d_1\neq d_2$), то:
      i. $S=\frac{1}{4}\left(d_1^2-d_2^2\right)\operatorname{tg}\alpha;\quad h_1=\dfrac{d_1^2-d_2^2}{4d_1}\operatorname{tg}\alpha,\quad h_2=\dfrac{d_1^2-d_2^2}{4d_2}\operatorname{tg}\alpha;$
      ii. $a^2=\frac{1}{4}(d_1^2+d_2^2)+\frac{1}{4\cos\alpha}\sqrt{(d_1^2+d_2^2)^2\cos^2\alpha-(d_1^2-d_2^2)^2},$
      $b^2=\frac{1}{4}(d_1^2+d_2^2)-\frac{1}{4\cos\alpha}\sqrt{(d_1^2+d_2^2)^2\cos^2\alpha-(d_1^2-d_2^2)^2};$
      iii. $\cos\varphi=\dfrac{\sqrt{(d_1^2+d_2^2)^2\cos^2\alpha-(d_1^2-d_2^2)^2}}{2d_1d_2\cos\alpha},\quad \sin\varphi=\dfrac{d_1^2-d_2^2}{2d_1d_2}\cdot\operatorname{tg}\alpha;$

13) **відношення сторін** $m:n$ (більшої до меншої) **та відношення діагоналей** $p:q$ (більшої до меншої), то
$$\cos\alpha=\frac{(p^2-q^2)(m^2+n^2)}{2mn(p^2+q^2)},\quad \cos\varphi=\frac{(m^2-n^2)(p^2+q^2)}{2pq(m^2+n^2)};$$

14) **висоти** $h_a,\ h_b$ **та ...**
   (a) перпендикуляр h_1 (перпендикуляр h_2), то
$$\tfrac{1}{h_2}=\sqrt{\tfrac{2}{h_a^2}+\tfrac{2}{h_b^2}-\tfrac{1}{h_1^2}}\quad\left(\tfrac{1}{h_1}=\sqrt{\tfrac{2}{h_a^2}+\tfrac{2}{h_b^2}-\tfrac{1}{h_2^2}}\right);$$
   (b) гострий кут α між сторонами ($\alpha<90^0\Leftrightarrow d_1\neq d_2$), то:
      i. $a=\dfrac{h_b}{\sin\alpha},\quad b=\dfrac{h_a}{\sin\alpha};\quad S=\dfrac{h_ah_b}{\sin\alpha};$
      ii. $d_1=\dfrac{\sqrt{h_b^2+h_a^2+2h_bh_a\cos\alpha}}{\sin\alpha},\quad d_2=\dfrac{\sqrt{h_b^2+h_a^2-2h_bh_a\cos\alpha}}{\sin\alpha};$
      iii. $\cos\varphi=\dfrac{h_b^2-h_a^2}{\sqrt{h_a^4+h_b^4-2h_a^2b_a^2\cos2\alpha}},\sin\varphi=\dfrac{2h_bh_a\sin\alpha}{\sqrt{h_a^4+h_b^4-2h_a^2b_a^2\cos2\alpha}};$
   (c) площа S, то:
$$a=\frac{S}{h_a},\quad d_1^2=\frac{S^2}{h_a^2h_b^2}\left(h_a^2+h_b^2\right)+\frac{2S}{h_ah_b}\sqrt{S^2-h_a^2h_b^2};$$
$$b=\frac{S}{h_b},\quad d_2^2=\frac{S^2}{h_a^2h_b^2}\left(h_a^2+h_b^2\right)-\frac{2S}{h_ah_b}\sqrt{S^2-h_a^2h_b^2};$$

(d) гострий кут φ між діагоналями $(\varphi < 90^0 \Leftrightarrow a \neq b)$, то:

i. $S = \dfrac{2h_a^2 h_b^2}{h_b^2 - h_a^2} \operatorname{ctg}\varphi$; $\quad a = \dfrac{2h_a h_b^2}{h_b^2 - h_a^2} \operatorname{ctg}\varphi$, $\quad b = \dfrac{2h_a^2 h_b}{h_b^2 - h_a^2} \operatorname{ctg}\varphi$;

ii. $$d_1^2 = \frac{4h_a^2 h_b^2}{(h_b^2 - h_a^2)^2} \cdot \operatorname{ctg}^2\varphi \cdot \left(h_a^2 + h_b^2 + \sqrt{(h_b^2 + h_a^2)^2 - \left(\tfrac{h_b^2 - h_a^2}{\cos\varphi}\right)^2} \right),$$
$$d_2^2 = \frac{4h_a^2 h_b^2}{(h_b^2 - h_a^2)^2} \cdot \operatorname{ctg}^2\varphi \cdot \left(h_a^2 + h_b^2 - \sqrt{(h_b^2 + h_a^2)^2 - \left(\tfrac{h_b^2 - h_a^2}{\cos\varphi}\right)^2} \right);$$

iii. $\cos\alpha = \dfrac{\sqrt{(h_b^2 + h_a^2)^2 \cos^2\varphi - (h_b^2 - h_a^2)^2}}{2h_a h_b \cos\varphi}$, $\quad \sin\alpha = \dfrac{h_b^2 - h_a^2}{2h_a h_b} \cdot \operatorname{tg}\varphi$;

15) менша висота h_a та довжини m і n відрізків, на які основа висоти, опущеної з вершини тупого кута, ділить більшу сторону рухаючись від вершини гострого кута, то
$$b = \sqrt{m^2 + h_a^2}, \quad S = h_a(m+n), \quad h_b = \frac{h_a(m+n)}{\sqrt{m^2 + h_a^2}};$$

16) площа S та довжини m і n відрізків, на які основа висоти, опущеної з вершини тупого кута, ділить більшу сторону рухаючись від вершини гострого кута, то
$$h_a = \frac{S}{m+n}, \quad \operatorname{tg}\alpha = \frac{S}{m(m+n)}.$$

17) **перпендикуляри** h_1, h_2 **та ...**

(a) висота h_a (висота h_b), то
$$\tfrac{1}{h_b} = \sqrt{\tfrac{1}{2h_1^2} + \tfrac{1}{2h_2^2} - \tfrac{1}{h_a^2}} \quad \left(\tfrac{1}{h_a} = \sqrt{\tfrac{1}{2h_1^2} + \tfrac{1}{2h_2^2} - \tfrac{1}{h_b^2}} \right);$$

(b) гострий кут φ між діагоналями $(\varphi < 90^0 \Leftrightarrow a \neq b)$, то:

i. $d_1 = \dfrac{2h_2}{\sin\varphi}$, $\quad d_2 = \dfrac{2h_1}{\sin\varphi}$; $\quad S = \dfrac{2h_1 h_2}{\sin\varphi}$.

ii. $a = \frac{1}{\sin\varphi}\sqrt{h_2^2 + h_1^2 + 2h_1 h_2 \cos\varphi}$,
$b = \frac{1}{\sin\varphi}\sqrt{h_2^2 + h_1^2 - 2h_1 h_2 \cos\varphi}$;

iii. $$\cos\alpha = \frac{h_2^2 - h_1^2}{\sqrt{h_1^4 + h_2^4 - 2h_1^2 h_2^2 \cos 2\varphi}},$$
$$\sin\alpha = \frac{2h_1 h_2 \sin\varphi}{\sqrt{h_1^4 + h_2^4 - 2h_1^2 h_2^2 \cos 2\varphi}};$$

(c) площа S, то:
$$d_1 = \frac{S}{h_1}, \quad a^2 = \frac{S^2}{4h_1^2 h_2^2}\left(h_1^2 + h_2^2\right) + \frac{S}{2h_1 h_2}\sqrt{S^2 - 4h_1^2 h_2^2};$$
$$d_2 = \frac{S}{h_2}, \quad b^2 = \frac{S^2}{4h_1^2 h_2^2}\left(h_1^2 + h_2^2\right) - \frac{S}{2h_1 h_2}\sqrt{S^2 - 4h_1^2 h_2^2};$$

(d) гострий кут α між сторонами $(\alpha < 90^0 \Leftrightarrow d_1 \neq d_2)$, то:

i. $S = \dfrac{4h_1^2h_2^2}{h_2^2 - h_1^2}\operatorname{ctg}\alpha$; $\quad d_1 = \dfrac{4h_1h_2^2}{h_2^2 - h_1^2}\operatorname{ctg}\alpha$, $\quad d_2 = \dfrac{4h_1^2h_2}{h_2^2 - h_1^2}\operatorname{ctg}\alpha$;

ii. $$a^2 = \frac{4h_1^2h_2^2}{(h_2^2 - h_1^2)^2}\cdot\operatorname{ctg}^2\alpha\cdot\left(h_1^2 + h_2^2 + \sqrt{(h_1^2 + h_2^2)^2 - \left(\tfrac{h_2^2 - h_1^2}{\cos\alpha}\right)^2}\right),$$

$$b^2 = \frac{4h_1^2h_2^2}{(h_2^2 - h_1^2)^2}\cdot\operatorname{ctg}^2\alpha\cdot\left(h_1^2 + h_2^2 - \sqrt{(h_1^2 + h_2^2)^2 - \left(\tfrac{h_2^2 - h_1^2}{\cos\alpha}\right)^2}\right);$$

iii. $\cos\varphi = \dfrac{\sqrt{(h_1^2 + h_2^2)^2\cos^2\alpha - (h_2^2 - h_1^2)^2}}{2h_1h_2\cos\alpha}$, $\quad \sin\varphi = \dfrac{h_2^2 - h_1^2}{2h_1h_2}\cdot\operatorname{tg}\alpha$;

18) **бісектриси** $l_a,\ l_b$ $(l_a \neq l_b)$ —

(a) $\sin\alpha = \frac{2l_al_b}{l_a^2 + l_b^2}$;

(b) $\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} = \frac{l_a}{l_b}$;

(c) $\cos\alpha = \frac{l_a^2 - l_b^2}{l_a^2 + l_b^2}$;

(d) $h_a = \frac{l_al_b}{\sqrt{l_a^2 + l_b^2}}$;

(e) $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{l_a^2 - l_b^2}{2l_al_b}$;

(f) $b = \frac{1}{2}\sqrt{l_a^2 + l_b^2}$;

та ...

(g) сторона a, то:

i. $P = 2a + \sqrt{l_a^2 + l_b^2}$, $\quad S = \dfrac{al_al_b}{\sqrt{l_a^2 + l_b^2}}$,

ii. $d_1^2 = a^2 + \frac{1}{4}(l_a^2 + l_b^2) + \dfrac{a(l_a^2 - l_b^2)}{\sqrt{l_a^2 + l_b^2}}$, $\quad d_2^2 = a^2 + \frac{1}{4}(l_a^2 + l_b^2) - \dfrac{a(l_a^2 - l_b^2)}{\sqrt{l_a^2 + l_b^2}}$;

iii. $\operatorname{ctg}\varphi = \dfrac{4a^2 - l_a^2 - l_b^2}{8al_al_b}\sqrt{l_a^2 + l_b^2}$;

(h) висота h_b, то:

i. $a = \dfrac{h_b(l_a^2 + l_b^2)}{2l_al_b}$, $\quad P = \dfrac{h_b(l_a^2 + l_b^2)}{l_al_b} + \sqrt{l_a^2 + l_b^2}$, $\quad S = \frac{1}{2}h_b\sqrt{l_a^2 + l_b^2}$;

ii. $$d_1^2 = \frac{h_b^2(l_a^2 + l_b^2)^2}{4l_a^2l_b^2} + \tfrac{1}{4}(l_a^2 + l_b^2) + \frac{h_b(l_a^2 - l_b^2)}{2l_al_b}\sqrt{l_a^2 + l_b^2},$$

$$d_2^2 = \frac{h_b^2(l_a^2 + l_b^2)^2}{4l_a^2l_b^2} + \tfrac{1}{4}(l_a^2 + l_b^2) - \frac{h_b(l_a^2 - l_b^2)}{2l_al_b}\sqrt{l_a^2 + l_b^2};$$

iii. $\operatorname{ctg}\varphi = \dfrac{h_b^2(l_a^2 + l_b^2)^2 - l_a^2l_b^2(l_a^2 + l_b^2)}{4h_al_al_b\sqrt{l_a^2 + l_b^2}}$.

(i) гострий кут φ між діагоналями $(\varphi < 90^0 \Leftrightarrow a \neq b)$, то:

i. $$a = \frac{1}{2\sqrt{l_a^2 + l_b^2}}\left(2l_al_b\operatorname{ctg}\varphi + \sqrt{4l_a^2l_b^2\operatorname{ctg}^2\varphi + (l_a^2 + l_b^2)^2}\right);$$

ii. $$S = \frac{l_al_b}{2(l_a^2 + l_b^2)}\left(2l_al_b\operatorname{ctg}\varphi + \sqrt{4l_a^2l_b^2\operatorname{ctg}^2\varphi + (l_a^2 + l_b^2)^2}\right);$$

iii. $$h_b = \frac{l_al_b}{(l_a^2 + l_b^2)^{\frac{3}{2}}}\left(2l_al_b\operatorname{ctg}\varphi + \sqrt{4l_a^2l_b^2\operatorname{ctg}^2\varphi + (l_a^2 + l_b^2)^2}\right).$$

19) **нетупий кут α між сторонами, нетупий кут φ між діагоналями паралелограма та найбільша його сторона a (висота h_b), то**:

(a) $b = a\sin\alpha(\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2\alpha+\operatorname{ctg}^2\varphi}-\operatorname{ctg}\varphi) = a\sin\alpha\cdot\Delta = h_b\cdot\Delta$, де

$$\boxed{\Delta = \Delta(\alpha,\varphi) = \sqrt{1+\operatorname{ctg}^2\alpha+\operatorname{ctg}^2\varphi}-\operatorname{ctg}\varphi}$$

(b) $P = 2a(1+\Delta\sin\alpha)$;

(c) $S = a^2\sin^2\alpha\cdot\Delta = h_b^2\cdot\Delta$;

(d) $h_a = a\sin^2\alpha\cdot\Delta = h_b\sin\alpha\cdot\Delta$;

(e) $d_1 = a\sin\alpha\sqrt{1+[\Delta+\operatorname{ctg}\alpha]^2} = h_b\sqrt{1+[\Delta+\operatorname{ctg}\alpha]^2}$;

(f) $d_2 = a\sin\alpha\sqrt{1+[\Delta-\operatorname{ctg}\alpha]^2} = h_b\sqrt{1+[\Delta-\operatorname{ctg}\alpha]^2}$;

(g) $l_a = 2\cos\frac{\alpha}{2}\cdot a\sin\alpha\cdot\Delta = 2\cos\frac{\alpha}{2}\cdot h_b\cdot\Delta$;

(h) $l_b = 2\sin\frac{\alpha}{2}\cdot a\sin\alpha\cdot\Delta = 2\sin\frac{\alpha}{2}\cdot h_b\cdot\Delta$;

(i) $h_1 = \frac{1}{2}a\sin\alpha\sin\varphi\sqrt{1+[\Delta-\operatorname{ctg}\alpha]^2} = \frac{1}{2}h_b\sin\varphi\sqrt{1+[\Delta-\operatorname{ctg}\alpha]^2}$;

(j) $h_2 = \frac{1}{2}a\sin\alpha\sin\varphi\sqrt{1+[\Delta+\operatorname{ctg}\alpha]^2} = \frac{1}{2}h_b\sin\varphi\sqrt{1+[\Delta+\operatorname{ctg}\alpha]^2}$;

(k) $m_a = \frac{1}{2}a\sin\alpha\sqrt{1+[2\Delta+\operatorname{ctg}\alpha]^2} = \frac{1}{2}h_b\sqrt{1+[2\Delta+\operatorname{ctg}\alpha]^2}$,

(l) $m_a' = \frac{1}{2}a\sin\alpha\sqrt{1+[2\Delta-\operatorname{ctg}\alpha]^2} = \frac{1}{2}h_b\sqrt{1+[2\Delta-\operatorname{ctg}\alpha]^2}$;

(m) $m_b = \frac{1}{2}a\sin\alpha\sqrt{4+[\Delta+2\operatorname{ctg}\alpha]^2} = \frac{1}{2}h_b\sqrt{4+[\Delta+2\operatorname{ctg}\alpha]^2}$,

(n) $m_b' = \frac{1}{2}a\sin\alpha\sqrt{4+[\Delta-2\operatorname{ctg}\alpha]^2} = \frac{1}{2}h_b\sqrt{4+[\Delta-2\operatorname{ctg}\alpha]^2}$;

Зауваження 3. *Наведеними формулами зручно користуватися в обох напрямках, бо за трійкою a $(h_b), \alpha, \varphi$ легко знайти довжини решти лінійних елементів; з іншого боку – за кутами α, φ та одним з лінійних елементів можна знайти довжину сторони a, а потім довжини решти лінійних елементів.*

20) **нетупий кут α між сторонами та нетупий кут φ між діагоналями, то**:

(a) $\operatorname{ctg}\alpha_1 = \Delta + 2\operatorname{ctg}\varphi+\operatorname{ctg}\alpha = \sqrt{1+\operatorname{ctg}^2\alpha+\operatorname{ctg}^2\varphi}+\operatorname{ctg}\varphi+\operatorname{ctg}\alpha$,

(b) $\operatorname{ctg}\alpha_2 = \Delta+\operatorname{ctg}\alpha = \sqrt{1+\operatorname{ctg}^2\alpha+\operatorname{ctg}^2\varphi}-\operatorname{ctg}\varphi+\operatorname{ctg}\alpha$;

(c) $\operatorname{ctg}\beta_1 = \Delta + 2\operatorname{ctg}\varphi-\operatorname{ctg}\alpha = \sqrt{1+\operatorname{ctg}^2\alpha+\operatorname{ctg}^2\varphi}+\operatorname{ctg}\varphi-\operatorname{ctg}\alpha$,

(d) $\operatorname{ctg}\beta_2 = \Delta-\operatorname{ctg}\alpha = \sqrt{1+\operatorname{ctg}^2\alpha+\operatorname{ctg}^2\varphi}-\operatorname{ctg}\varphi-\operatorname{ctg}\alpha$.

Зауваження 4. *Безпосереднім наслідком з чотирьох останніх співвідношень є досить яскравий факт геометрії паралелограмів, а саме —* ознака подібності двох паралелограмів за рівністю нетупих кутів між їх сторонами та діагоналями.

2.8. Паралелограм: задачі на доведення.

2.8.1. «Навколо бісектрис» в паралелограмі

Доведіть, що:

1) бісектриси внутрішніх та зовнішніх кутів, прилеглих до певної сторони, утворюють прямокутник, діагоналі якого паралельні сторонам паралелограма і довжини яких дорівнюють довжині зазначеної сторони;
2) бісектриси внутрішніх кутів паралелограма (що не є ромбом) при перетині утворюють прямокутник, діагоналі якого паралельні сторонам паралелограма і довжина яких дорівнює модулю різниці двох нерівних його сторін;
3) якщо Q — площа прямокутника, утвореного бісектрисами внутрішніх кутів паралелограма, а S — площа паралелограма, то відношення сторін $(a \geqslant b)$ паралелограма становить
$a : b = (S + Q + \sqrt{Q^2 + 2SQ}) : S$, $\quad b : a = (S + Q - \sqrt{Q^2 + 2SQ}) : S$;
4) бісектриси зовнішніх кутів паралелограма при перетині утворюють прямокутник, діагоналі якого паралельні сторонам паралелограма і довжини яких дорівнюють сумі довжин двох нерівних сторін;
5) якщо точка перетину бісектрис двох сусідніх кутів паралелограма належить його стороні, то відношення довжин його сторін становить $2 : 1$;
6) якщо більша сторона паралелограма вдвічі більша за меншу сторону, то бісектриси протилежних кутів ділять діагональ на три рівні відрізки.
7) Бісектриса зовнішнього кута при вершині A гострого кута паралелограма $ABCD$ перетинає продовження сторін CB і CD у точках B' і D' відповідно, а периметр паралелограма становить P. Доведіть що сума довжин відрізків CB' і CD' також становить P.
8) Бісектриси кутів A і D при більшій стороні $AD = a$ паралелограма $ABCD$ перетинаються в точці I та перетинають протилежну сторону BC у точках M і N відповідно, $b \neq \frac{a}{2}$ — менша сторона. Доведіть, що:
   (a) довжина відрізка $MN = |a - 2b|$;
   (b) має місце відношення $AI : IM = DI : IN = a : |a - 2b|$.
9) Бісектриса $\angle A$ паралелограма $ABCD$ перетинає сторону BC в точці K, а продовження сторони DC – в точці M. Відомо, що $BK = n$, $CM = m$. Доведіть, що $AB = n$, $AD = m + n$.
10) Дано паралелограм $ABCD$. Пряма l, яка паралельна до прямої AB, перетинає бісектриси кутів A і C в точках P і Q відповідно. Доведіть, що $\angle ADP = \angle ABQ$.
11) На сторонах BC і DC паралелограма $ABCD$ обрано точки D_1 и B_1 так, що $BD_1 = DB_1$. Відрізки BB_1 і DD_1 перетинаються в точці Q. Доведіть, що AQ — бісектриса кута BAD.

12) Бісектриса кута A паралелограма $ABCD$ перетинає сторону BC в точці A', а діагональ BD – в точці Q. Відомо, що $AB : AD = m : n < 1$. Доведіть, що $S_{BQA'} : S_{ABCD} = m^2 : 2n(m+n)$.

2.8.2. «Навколо перпендикулярів» в паралелограмі

1) Доведіть, що якщо висоти BB_1 і DD_1, опущені із вершин тупих кутів паралелограма, перетинаються в точці H, то $BH \cdot HB_1 = DH \cdot HD_1$.
2) Доведіть, що якщо на сторони BC і CD паралелограма $ABCD$ (або ж на їх продовження) опустити висоти AM і AN відповідно, то $\triangle MAN \backsim \triangle ABC$.
3) Через вершини A, B і D паралелограма $ABCD$ проведено прямі перпендикулярно до прямих BD, BC і CD відповідно. Доведіть, що проведені прямі перетинаються в одній точці.
4) З вершини B паралелограма $ABCD$ опустили перпендикуляр BE на діагональ AC. Через точку A проведено пряму m перпендикулярно до прямої AD, а через точку C — пряму n перпендикулярно до прямої CD. Доведіть, що точка перетину прямих m і n належить прямій BE.
5) Через кожну вершину паралелограма проведено пряму, перпендикулярну до діагоналі, яка не проходить через цю вершину. Доведіть, що діагоналі чотирикутника, утвореного перетинами чотирьох проведених прямих, перпендикулярні до сторін паралелограма.
6) Нехай AC — більша з діагоналей паралелограма $ABCD$. З довільної точки P променя AC на прямі, що містять сторони AB та AD, опущено перпендикуляри PE і PF відповідно. Доведіть, що $AB \cdot PE = AD \cdot PF$.
7) Нехай AC — більша з діагоналей паралелограма $ABCD$. З точки C на продовження сторін AB та AD опущено перпендикуляри CE і CF відповідно. Доведіть, що виконується рівність
$$AB \cdot AE + AD \cdot AF = AC^2.$$
8) Довести, що відстані від довільної точки діагоналі паралелограма до непаралельних сторін обернено пропорційні довжинам цих сторін.
9) Точка Q належить прямій, що містить діагональ AC паралелограма $ABCD$. Доведіть, що площі трикутників AQB і AQD є рівними.
10) З вершини B паралелограма $ABCD$ проведено його висоти BK і BH. Відомо, що $KH = t$ і $BD = d$. Доведіть, що відстань від точки B до точки перетину висот трикутника BKH становить $\sqrt{d^2 - t^2}$.
11) У паралелограмі $ABCD$ CC_1 – перпендикуляр, опущений на діагональ BD. Доведіть, що перпендикуляри до сторін BC і CD, проведені з вершин D і B відповідно, перетинаються на прямій CC_1.

12) Діагоналі AC і BD паралелограма $ABCD$ перетинаються в точці O. Точка M належить прямій AB, причому $\angle AMO = \angle MAD$. Доведіть, що точка M є рівновіддаленою від точок C і D.
13) Всередині паралелограма $ABCD$ обрали таку точку E, що $CD = CE$. Доведіть, що пряма DE перпендикулярна до прямої, яка проходить через середини відрізків AE і BC.
14) Пряма l має з паралелограмом $ABCD$ єдину спільну точку B. Вершини A і C віддалені від прямої l на відстанях a і c відповідно. Доведіть, що вершина D відстоїть від цієї прямої на відстані $d = a + c$.
15) Дано паралелограм $ABCD$ з гострим $\angle A = \alpha$ та сторонами $AD = a$, $AB = b$; BK – висота, а KM – перпендикуляр, опущений на продовження сторони CD. Доведіть, що
$$S_{BKM} = \tfrac{1}{2} b(a - b\cos\alpha)\sin^3\alpha\,.$$
16) Доведіть, що якщо прямі, які містять вершини тупих кутів і є перпендикулярними до сторін паралелограма (зі сторонами a, b та гострим кутом α), утворюють паралелограм подібний до даного, то $\cos\alpha = \dfrac{2ab}{a^2+b^2}$.

2.8.3. «Мішаного» типу

1) В паралелограмі відношення сторін та відношення діагоналей співпадають і становлять $m : n$ ($m \geqslant n$). З вершини тупого кута B опущено висоту BB' на більшу сторону AD. Доведіть, що
$$AA' : A'D = (m^2 - n^2)(m^2 + n^2)\,.$$
2) Дано паралелограм $ABCD$ з гострим кутом α при вершині A. На променях AB і CB відмічено точки H і K відповідно так, що $CH = BC$ і $AK = AB$. Доведіть, що:

   (a) $DH = DK$; (b) $\triangle\, DKH \backsim \triangle\, ABK$.
3) Сторона BC паралелограма $ABCD$ вдвічі більша за сторону CD, P — проекція вершини C на прямую AB, M — середина сторони AD. Доведіть, що $\angle DMP = 3\angle APM$.
4) Всередині паралелограма $ABCD$ обрано таку точку O, що $\angle OAD = \angle OCD$. Доведіть, що $\angle OBC = \angle ODC$.
5) На сторонах AB і AD паралелограма $ABCD$ обрано точки M і N так, що прямі CM і CN ділять паралелограм на три фігури рівних площ. Знайдіть MN, якщо $BD = d$.
6) Через довільно обрану точку на одній зі сторін паралелограма та кінці протилежної сторони зроблено два розрізи. Площі «відрізаних» трикутників становлять S_1 та S_2. Доведіть, що площа паралелограма становить
$$2 \cdot (S_1 + S_2)\,.$$

7) Нехай $ABCD$ — паралелограм, точка E належить прямій AB, F — прямій AD (B – на відрізку AE, D – на відрізку AF), K — точка перетину прямих ED і FB. Доведіть, що $S_{ABKD} = S_{CEKF}$.
8) На стороні AB паралелограма $ABCD$ обрано таку т. M, що $AD = DM$, а на AD — точку N, таку що $AB = BN$. Доведіть, що $CM = CN$.
9) S — площа чотирикутника. Доведіть, що площа паралелограма, сторони якого паралельні та рівні діагоналям цього чотирикутника, становить $2S$.
10) Через вершину C паралелограма $ABCD$ проведено пряму, яка перетинає продовження сторін (промені) AB і AD в точках B' і D' відповідно. Доведіть, що

    (a) $BB' \cdot DD' = BC \cdot CD$; (b) $S^2_{ABCD} = 4S_{\triangle BB'C} \cdot S_{\triangle DD'C}$.

11) На діагоналі BD паралелограма $ABCD$ обрано точку K. Пряма AK перетинає прямі BC і CD в точках L і M відповідно. Доведіть, що
$$AK^2 = LK \cdot KM.$$
12) Пряма l перетинає сторони AB і AD в точках E і F відповідно. Нехай G — точка перетину прямої l з діагоналлю AC. Доведіть, що
$$\frac{AB}{AE} + \frac{AD}{AF} = \frac{AC}{AG}.$$

«Класичні задачі на доведення»:

13) Нехай X — довільна точка в площині паралелограма $ABCD$. Доведіть справедливість наступних тверджень:

    (a) має місце рівність $AX^2 + CX^2 - BX^2 - DX^2 = AC^2 - BD^2$;

    (b) якщо X є внутрішньою відносно паралелограма, то має місце рівність
$$S_{ABX} + S_{CDX} = S_{BCX} + S_{ADX}.$$

14) Нехай M — довільна точка площини паралелограма $ABCD$. Доведіть справедливість наступних тверджень:

    (a) якщо M є внутрішньою відносно паралелограма, то має місце рівність
$$S_{ACM} = |S_{ABM} - S_{ADM}|;$$

    (b) якщо M є зовнішньою відносно паралелограма, то має місце рівність
$$S_{ACM} = |S_{ABM} + S_{ADM}|.$$

15) [2 теорема Тебо] На сторонах BC і CD паралелограма $ABCD$ зовнішнім чином побудовано правильні трикутники BCK і CDL. Доведіть, що трикутник ALK є правильним.
16) На сторонах AB і BC паралелограма $ABCD$ зовнішнім чином побудовано квадрати $ABFE$ і $BCKM$. Доведіть, що $\angle EDK = 90^0$.
17) [1 теорема Тебо] На сторонах паралелограма зовнішнім чином побудовано квадрати. Доведіть, що їх центри утворюють квадрат.

18) Доведіть, що якщо два паралелограма рівних площ мають спільну сторону, то один з них можна розрізати на частини та «скласти» з них інший.

2.9. Задачі на: «паралельність», «інцидентність» та «відношення»

1) Через вершину A паралелограма $ABCD$ проведено пряму, яка перетинає пряму BD та промені CD і CB у точках M, N і P відповідно. Доведіть, що відрізок AM є середнім геометричним для відрізків MN і MP.
2) Доведіть, що прямі, які містять сторони паралелограма, відтинають на прямій, яка є паралельною до однієї з його діагоналей, рівні відрізки.
3) В паралелограмі $ABCD$ проведено пряму l паралельно до AB; l перетинає сторону BC і діагональ AC у точках N і K відповідно. Доведіть, що трикутники ADK і ABN мають рівні площі.
4) На кожній стороні паралелограма взято по одній точці. Одна з діагоналей чотирикутника з вершинами в цих точках є паралельною до сторони паралелограма. Доведіть, що площа одержаного чотирикутника дорівнює половині площі паралелограма.
5) Через точку Q на діагоналі AC паралелограма $ABCD$ проведено дві прямі l і m паралельно до його сторін; пряма l перетинає сторони AB і CD у точках A' і C' відповідно, а пряма m перетинає сторони BC і DA — у точках B' і D' відповідно. Доведіть, що:

   (a) $S_{A'BB'Q} = S_{C'DD'Q}$,

   (b) $S_{A'BCC'} = S_{D'DCB'}$,

   (c) $S_{A'BB'D'} = S_{ADC'A'}$,

   (d) $S_{AA'QD'} : S_{QB'CC'} = AQ^2 : QC^2$;
6) Сторону AB паралелограма $ABCD$ продовжено на відрізок BE, а сторону AD — на відрізок DK, причому точка C не належить прямій KE. Прямі ED і BK перетинаються в точці Q. Доведіть, що
$$S_{ABQD} = S_{CEQK}\,.$$
7) Через середину M сторони BC паралелограма $ABCD$ та вершину A проведено пряму, яка перетинає діагональ BD в точці Q. Доведіть, що
$$S_{QMCD} : S_{ABCD} = 5 : 12\,.$$
8) В паралелограмі $ABCD$ точки P і K ділять діагональ BD на три рівні частини, а M і E — середини сторін CD і BC відповідно. Доведіть, що
$$S_{MEPK} : S_{ABCD} = 5 : 24\,.$$
9) В паралелограмі $ABCD$ точки M і K — середини сторін CD і AD відповідно, P — точка перетину відрізків AM і BK. Доведіть, що
$$S_{APK} : S_{ABCD} = 1 : 20\,.$$
10) Доведіть, що якщо через вершини опуклого чотирикутника провести прямі паралельно до його діагоналей, то площа паралелограма, який визначається цими прямими, вдвічі більша за площу даного чотирикутника.

11) На сторонах AD і CD паралелограма $ABCD$ обрано точки M і N так, що $MN||AC$. Доведіть, що має місце рівність $S_{ABM} = S_{CBN}$.
12) На діагоналі AC паралелограма $ABCD$ обрано точки P і Q так, що $AP = CQ$. Точка M така, що $PM||AD$ и $QM||AB$. Доведіть, що точка M належить діагоналі BD.
13) На сторонах AB, BC і CD паралелограма $ABCD$ обрано точки K, L і M, які ділять ці сторони в однакових відношеннях. Прямі b, c, d проходять через точки B, C, D паралельно до прямих KL, KM і ML відповідно. Доведіть, що прямі b, c, d проходять через одну точку.
14) Дано паралелограм $ABCD$ і точка M. Через точки A, B, C і D проведено прямі паралельно до прямих MC, MD, MA і MB відповідно. Доведіть, що вони перетинаються в одній точці.
15) В паралелограмі $ABCD$ точка M ділить сторону AD у відношенні $m:n$ ($AM : MD = m : n$) а точка N ділить сторону DC у відношенні $p:q$ ($DN : NC = p : q$). Відрізки BM і AN перетинаються у точці Q. Доведіть, що мають місце відношення
$$AQ : QN = \frac{m(p+q)}{mp+n(p+q)}, \quad BQ : QM = \frac{nq(m+n)(p+q)}{mp}.$$
16) В паралелограмі $ABCD$ точки P і K ділять сторони BC і CD у відношенні $m : n$, рухаючись від вершин B і C відповідно. Знайдіть відношення, у якому відрізки PD і AK діляться точкою їх перетину.
17) Через точку M, яка належить стороні AB паралелограма $ABCD$, проведено пряму MP паралельно до AC ($P \in (BC)$), а через точку B — пряму BN паралельно до MD ($N \in (DC)$). Доведіть, що точки D, P і $Q = (AC) \cap (BN)$, належать одній прямій.
18) Дано паралелограм $ABCD$. Точки K, L, M і N належать сторонам AB, BC, CD і DA відповідно, причому відрізки KM і LN паралельні до сторін паралелограма та перетинаються в точці Q. Доведіть, що:
    (a) прямі BN, DK і CQ перетинаються в одній точці;
    (b) NK, DB і ML перетинаються в одній точці або ж є паралельними;
    (c) площі паралелограмів $KBLQ$ і $MDNQ$ рівні тоді і лише тоді, коли точка Q належить діагоналі AC.
19) Дано паралелограм $ABCD$. На прямій AB обрано точку M. Пряма, що проходить через M і середину BC, перетинає пряму AC в точці K. Пряма, що проходить через K і середину AD, перетинає пряму CD в точці P. Доведіть, що прямі BC та MP є паралельними.
20) Точка M центрально-симетрично відображається послідовно відносно вершин паралелограма $ABCD$ в точки M_1, M_2, M_3, M_4. Доведіть, що точка M_4 співпадає з точкою M.

2.10. Ознаки паралелограма

2.10.1. «Паралелограми в паралелограмі та навколо нього»

1) Через точку O перетину діагоналей паралелограма $ABCD$ проведено дві прямі, які перетинають сторони AB, CD і BC, DA у точках A', C' і B', D' відповідно. Доведіть, що:
   (a) чотирикутник $A'B'C'D'$ є паралелограмом, а його центр симетрії співпадає з точкою O;
   (b) чотирикутник, утворений прямими AB', BC', CD' і DA', є паралелограмом, а його центр симетрії співпадає з точкою O.
2) На сторонах AB, BC, CD і DA паралелограма $ABCD$ відмічено відповідно точки E, F, K і L так, що $AE : EB = CK : KD$, $BF : FC = DL : LA$. Доведіть, що $EFKL$ є паралелограмом.
   (a) На сторонах AB, BC, CD і DA паралелограма $ABCD$ відклали рівні відрізки AE, BF, CK і DL. Доведіть, що чотирикутники $BKDE$ та $EFKL$ є паралелограмами.
3) На діагоналі AC паралелограма $ABCD$ відклали відрізки $AM = CK$ ($2AM < AC$). Доведіть, що чотирикутник $MBKD$ є паралелограмом.
4) З вершин тупих кутів B і D паралелограма $ABCD$ опущено перпендикуляри BM і DK до діагоналі AC. Доведіть, що чотирикутник $BKDM$ є паралелограмом.
5) З вершин тупих кутів паралелограма опущено висоти на його сторони. Доведіть, що основи зазначених висот є вершинами паралелограма.
6) Бісектриси кутів A і C паралелограма $ABCD$ перетинають сторони BC і AD в точках A' і C', а діагональ BD — в точках A'' і C'' відповідно. Доведіть, що $AA'CC'$ та $AA''CC''$ є паралелограмами.
7) Через вершини A і C паралелограма $ABCD$ проведено дві паралельні прямі, які перетинають діагональ BD в точках A' і C', а сторони CD і AB — в точках A'' і C'' відповідно. Доведіть, що чотирикутники $AC'CA'$ та $AC''CA''$ є паралелограмами.
8) З точки перетину діагоналей паралелограма опущено перпендикуляри на всі його сторони. Доведіть, що чотирикутник, вершинами якого є основи зазначених перепендикулярів, є паралелограмом та обидва вони мають спільний центр симетрії.
9) На продовженнях сторін AB, BC, CD, DA паралелограма $ABCD$ відклали відрізки $BM = AB$, $CN = BC$, $DK = CD$, $AL = DA$. Доведіть, що чотирикутник $MNKL$ є паралелограмом.
10) Чотирикутники $ABCD$, $AEFG$, $ADFH$, $FIJE$ і $BIJC$ є паралелограмами. Доведіть, що чотирикутник $AFHG$ також є паралелограмом.

2.10.2. Основні та найбільш поширені ознаки паралелограма

Теореми-ознаки паралелограма (та ті, що до них зводяться).

Якщо для опуклого чотирикутника виконана одна з наступних з умов

1) протилежні кути попарно рівні,
   (a) сума кутів, прилеглих до кожної з двох сусідніх сторін, — 180^0,
   (b) бісектриси двох протилежних кутів перпендикулярні бісектрисі третього кута,
2) протилежні сторони попарно рівні,
   (a) кожна з діагоналей ділить його периметр навпіл,
3) діагоналі точкою перетину діляться навпіл,
   (a) дві протилежні сторони паралельні, а одна з діагоналей ділить іншу діагональ навпіл,
   (b) вершини протилежних кутів однаково віддалені від відповідних діагоналей,
   (c) дві сторони паралельні та однаково віддалені від точки перетину діагоналей,
   (d) діагоналі ділять його на чотири трикутники рівних площ,
   (e) два протилежні кути рівні, а діагональ з кінцями в їх вершинах ділить іншу діагональ навпіл,
   (f) кожна з діагоналей ділить його на два трикутники рівних площ,
4) дві протилежні сторони паралельні і рівні,
   (a) дві протилежні сторони паралельні, а одна з діагоналей ділить його периметр навпіл,
   (b) дві протилежні сторони паралельні та два протилежні кути рівні,
   (c) середина середньої лінії співпадає з точкою перетину діагоналей,
5) має центр симетрії,
6) сума квадратів сторін дорівнює сумі квадратів діагоналей,
7) сума довжин середніх ліній дорівнює напівпериметру,
8) сума відстаней від вершини до сторін є однаковою для всіх його вершин,

то такий чотирикутник є паралелограмом.

? В опуклому чотирикутнику $ABCD$ сторони AB і CD рівні, кути A і C також рівні. Чи обов'язково такий чотирикутник буде паралелограмом? (Відповідь: ні, не обов'язково.)

? Чи обов'язково чотирикутник, у якого дві сторони паралельні а дві інші рівні, буде паралелограмом? (Відповідь: ні, не обов'язково.)

? Чи обов'язково чотирикутник $ABCD$, у якого $\angle ABC = \angle ADC$ та $\angle BAD = \angle BCD$, буде паралелограмом? (Відповідь: ні, не обов'язково.)

Теорема 1. (Варіньона) *Середини сторін довільного (в тому числі неопуклого та просторового) чотирикутника є вершинами паралелограма (який називають паралелограмом Варіньона).*

Наслідок 1. *Якщо чотирикутник $ABCD$ не є просторовим, $A_0B_0C_0D_0$ — його паралелограм Варіньона, то:*

1) сторони паралелограма $A_0B_0C_0D_0$ є паралельними до відповідних діагоналей чотирикутника $ABCD$;

2) периметр паралелограма $A_0B_0C_0D_0$ дорівнює сумі довжин діагоналей чотирикутника $ABCD$;

3) площа паралелограма $A_0B_0C_0D_0$ дорівнює половині площі чотирикутника $ABCD$.

Наслідок 2. *Якщо чотирикутник є* прямокутником, ромбом *або ж* квадратом, *то його паралелограм Варіньона є* ромбом, прямокутником *та* квадратом *відповідно.*

Наслідок 3. *Якщо чотирикутник не є паралелограмом, то середини двох протилежних сторін та середини діагоналей є вершинами паралелограма.*

2.10.3. Додаткові ознаки паралелограма

1) В опуклому чотирикутнику $ABCD$ AE і CF – перпендикуляри, опущені на діагональ BD. Доведіть, що якщо $AE = CF$ і $\angle BAC = \angle ACD$, то $ABCD$ є паралелограмом.
2) Чотирикутник розрізано діагоналями на чотири трикутника. Доведіть, що їх точки перетину медіан утворюють паралелограм.
3) В опуклому чотирикутнику $ABCD$ $BC||AD$, C_0 і D_0 – середини сторін CD і DA відповідно. Доведіть, що якщо точка перетину відрізків AC_0 і CD_0 належить діагоналі BD, та $ABCD$ є паралелограмом.

Прикінцеві висновки та зауваження

Наведена система фактів геометрії паралелограмів, звісно ж, носить орієнтовно-суб'єктивний характер. Проте автори мають щиру надію, що запропонований матеріал допоможе майбутнім та молодим вчителям математики під час цілісного усвідомлення змістової лінії «Паралелограми» в курсі елементарної геометрії та сприятиме формуванню необхідних фахових компетентностей взагалі.

Також слід зазначити, що подальша робота в цьому напрямку потребує: *по-перше* — доповнення наведеної системи фактів задачами на побудову паралелограма за його елементами, відповідними задачами з векторної алгебри та задачами на комбінації кіл та паралелограма;
по-друге — перегляду та виокремлення нової низки (опорних) ключових задач;

по-третє — класифікацій поповненої системи задач за: темами, методами розв'язання, ступенем складності.

Також вважаємо, що наведену систему фактів доцільно не лише пропагувати як (в певному розумінні) цілісний матеріал, а й пропонувати (принаймні фрагментарно) для ознайомлення під час проведення курсів підвищення кваліфікації вчителів математики.

Література

1. *Апостолова Г.В.* Геометрія : 8 : дворівневий підручник для загальноосвітніх навчальних закладів. — К. : Генеза, 2008. — 272 с.
2. *Бурда М.І., Тарасенкова Н.А.* Геометрія : підручник для 8 класів загальноосвітніх навчальних закладів. — К. : «Зодіак ЕКО», 2010. — 239 с.
3. *Бутузов В.Ф.* Планиметрия. Пособие для углубленного изучения математики / В.Ф. Бутузов, С.Б. Кадомцев, Э.Г. Позняк, С.А. Шестаков, И.И. Юдина. — М. : ФИЗМАТЛИТ, 2005. — 488 с.
4. *Габович И.Г.* Алгоритмический подход к решению геометрических задач : Кн. для учащихся. — М. : Просвещение, 1996. — 192 с.
5. *Гордин Р.К.* Геометрия. Планиметрия. 7—9 классы. — 3-е изд., испр. — М. : МЦНМО, 2006. — 416 с.
6. *Дзундза А.І.* Особистісний підхід до систематизації навчальних задач / А.І. Дзундза, С.Г. Цапова // Дидактика математики: проблеми і дослідження. — Міжнародний збірник наукових робіт. — Донецьк: Вид-во ДонНУ. — 2012. — Вип. 38. — С. 150–164.
7. *Жаров В.А., Марголите П.С., Скопец З.А.* Вопросы и задачи по геометрии. Пособие для учителей. — М.: Просвещение, 1965. — 113 с.
8. *Кадубовський О.А.* До питання про формування навичок при систематизації та класифікації метричних задач шкільного курсу геометрії / О.А. Кадубовський, О.Л. Кадубовська // Проблеми трудової і професійної підготовки: Науково-методичний збірник. — 2009. — Вип. 14. — С. 46–54.
9. *Кадубовський О.А.* До питань про систематизацію фактів геометрії трапецій та їх класифікацію / О.А. Кадубовський, О.І. Цвєткова, М.І. Полюга // Збірник наукових праць фізико-математичного факультету ДДПУ. — 2015. — Випуск 5. — С. 114–140.
10. *Капіносов А., Кондратьєва Л.* Геометрія: Пробний підручник для 8 кл. — Тернопіль: Підручники і посібники, 2008. — 240 с.
11. *Кушнір І.А.* Методи розв'язання задач з геометрії : кн. для вчителя / І.А. Кушнір. — К. : Абрис, 1994. — 464 с.
12. *Кушнир И.А.* Геометрия: теоремы и задачи : учебное пособие. Т. 1. Планиметрия / И. А. Кушнир. — Киев : Астарта, 1996. — 475 с.

13. *Кушнир И., Финкельштейн Л.* Геометрия 7–9. Школа боевого искусства. Сборник задач. — Киев: Факт, 2000. — 384 с.
14. *Мерзляк А.Г., Полонський В.Б., Якір М.С.* Геометрія : підруч. для 8 кл. з поглибл. вивченням математики. — Х.: Гімназія, 2009. — 240 с.
15. *Мерзляк А.Г., Полонский В.Б., Рабинович Е.М., Якир М.С.* Сборник задач и контр. работ по геометрии для 8 кл. – Х.: Гимназия, 2008. – 112 с.
16. *Понарин Я.П.* Элементарная геометрия: В 2 т. — Т. 1: Планиметрия, преобразования плоскости. — М.: МЦНМО, 2004. — 312 с.
17. *Прасолов В.В.* Задачи по планиметрии: Учебное пособие. — 5-е изд., испр. и доп. — М. : МЦНМО, 2006. — 640 с.
18. Сборник задач по математике для поступающих во втузы (с решениями). В 2-х книгах. Кн. 2. Геометрия / Егерев В.К., Кордемский Б.А., Зайцев В.В. и др. Под ред. М.И. Сканави. — 7-е изд., перераб. и доп. — М. : Высшая школа, 1995. — 368 с.
19. *Федченко Л.Я.* Збірник завдань для тематичних і підсумкових атестацій з геометрії для 7–9 класів : Мет. пос. — Донецьк: «Каштан», 2009. — 304 с.
20. *Шарыгин И.Ф.* Геометрия: 9—11 кл. : От учебной задачи к творческой: Учебное пособие. — М. : Дрофа, 1996. — 400 с.
21. *Шарыгин И.Ф.* Геометрия. 7–9 кл. : учеб. для общеобразовательных учреждений / И.Ф. Шарыгин. — М. : Дрофа, 2012. — 462 с.
22. *Шарыгни И.Ф.* Сборник задач по геометрии. 5000 задач с ответами / И.Ф. Шарыгин, Р.К. Гордин. — М.: ООО «Издательство Астрель»: ООО «Издательство АСТ», 2001. — 400 с.
23. *Юзбашев А.В.* Свойства геометрических фигур — ключ к решению любых задач по планиметрии. М.: МАТИ, 2005. — 210 с.

Kadubovs'ka V.M., Kadubovs'kyi O.A.
Donbas State Teachers' Training University, Slovijans'k, Ukraine.

Systematization and generalization of facts of parallelograms' geometry.

The article highlights the author's experience to a possible approach of systematization and generalization of facts of parallelograms' geometry. Series of well known and little-known metric relations in a parallelogram, properties and statements, in particular affine, signs of equality and similarity and signs of parallelogram, etc is stated in the work through consolidation of didactic units and extension of basic linear elements of a parallelogram.

Keywords: *convex quadrangle, parallelogram, properties, signs, well known and little-known statements, systematization and generalization.*

УДК 37.014.3:373.5:51](477)

Шулик Т.В., Новіков О.О., Волік С.В.

[1] *кандидат педагогічних наук, асистент кафедри геометрії та МВМ, ДВНЗ «ДДПУ»*

[2] *кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри математики, ДВНЗ «ДДПУ»*

[3] *студентка 4 курсу фізико-математичного факультету, ДВНЗ «ДДПУ»*

e-mail: schulik111@gmail.com, novikov_o@meta.ua

ОСОБЛИВОСТІ МАТЕМАТИЧНОЇ ОСВІТИ В КОНТЕКСТІ «НОВОЇ УКРАЇНСЬКОЇ ШКОЛИ»

У статті окреслено основні причини необхідності реформування сучасної освіти, висвітлено особливості концептуальних засад реформування середньої школи «Нова українська школа», наведено рекомендації щодо адаптування сучасної математичної освіти до вимог «Нової української школи».

Ключові слова: *Нова українська школа, реформування середньої освіти, математична освіта, компетентності, рекомендації.*

Вступ

Зміни в соціально-економічному та політичному житті нашої країни, зростаючі вимоги суспільства до якісної освіти виступають каталізаторами як радикальних реформ в українській освіті, так і поступових кроків до її удосконалення. У зв'язку з цим перед освітянами стоїть завдання формування в молодих українців таких якостей, як прагнення до навчання впродовж життя, уміння правильно застосовувати знання в практичних ситуаціях та отримувати в результаті нові знання, постійний пошук найоптимальніших шляхів розв'язання життєвих проблем, вміння використовувати інформаційні та комунікаційні технології, вміння працювати в команді, спілкуватися в багатокультурному середовищі тощо.

Міністерством освіти і науки України спільно із різними цільовими аудиторіями (учителі, батьки, директори шкіл, представники районних управлінь освіти тощо) розроблено проект «Нова українська школа», який містить концептуальні засади реформування середньої освіти.

Проект «Нова українська школа» є достатньо новим документом (17 серпня 2016 р. МОН оприлюднило для широкого обговорення першу версію «Концептуальних засад реформування середньої освіти», 27 жовтня 2016 р. зазначений проект (доопрацьований) було ухвалено рішенням колегії МОН, 8 грудня 2016 р. тією ж колегією було ухвалено політичну пропозицію до проекту Концепції реалізації державної політики у сфері реформування загальної середньої освіти «Нова українська школа» на період до 2029 р.). Протягом усього цього періоду проект був предметом обговорення в колективах навчальних закладів. Свої пропозиції могли надсилати як педагогічні колективи, так і окремі освітяни.

Мета статті – висвітлити основні особливості концептуальних засад реформування середньої школи «Нова українська школа», навести рекомендації щодо адаптування сучасної математичної освіти до вимог «Нової української школи», спираючись на її ключові компоненти.

Основна частина

Розбудова Нової української школи – це довга термінова реформа, яка розпочалася в 2016 році. Її реалізація передбачає 3 фази:

1. Перша фаза (2016 – 2018 рр.).
2. Друга фаза (2019 – 2022 рр.).
3. Третя фаза (2023 – 2029 рр.).

Із метою максимального врахування фізичних, психологічних, розумових здібностей дитини кожної вікової групи реформа передбачає суттєву зміну структури середньої школи, виокремлюючи три рівні повної загальної середньої освіти: початкова освіта (тривалість чотири роки); базова середня освіта, яка здобувається в гімназії (тривалість п’ять років); профільна середня освіта, яка здобувається в ліцеї або закладах професійної освіти (тривалість три роки) [1, с. 20].

Керуючись «Рекомендаціями Європейського парламенту та Ради Європи щодо формування ключових компетентностей освіти впродовж життя» [3], у Концепції сформульовано ключові компетентності для життя, формування яких сприятиме успішній самореалізації особистості, розвитку активної громадянської позиції, здійсненню подальшої навчальної та професійної діяльності:

– спілкування державною (і рідною у разі відмінності) мовами;
– спілкування іноземними мовами;
– математична компетентність;
– основні компетентності у природничих науках і технологіях;
– інформаційно-цифрова компетентність;
– уміння вчитися впродовж життя;
– ініціативність і підприємливість;
– соціальна та громадянська компетентності;

– обізнаність та самовираження у сфері культури;
– екологічна грамотність і здорове життя.

До змісту математичної грамотності включено: культуру логічного і алгоритмічного мислення, уміння застосовувати математичні (числові та геометричні) методи для вирішення прикладних завдань у різних сферах діяльності, здатність до розуміння і використання простих математичних моделей, уміння будувати такі моделі для вирішення проблем [1, с. 11].

Першими кроками у новий освітній простір можна вважати прийняття Верховною Радою України у першому читанні за основу законопроекту №3481-д «Про освіту» (6 жовтня 2016 р.), а також започаткування розроблення нової редакції Державного стандарту початкової загальної освіти (наказ МОН від 5 жовтня 2016 р. №1196). Крім того, сьогодні на сайті МОН усі бажаючі можуть долучитися до онлайн обговорення програм на платформі EdEra, зміст яких також відповідатиме сучасним освітнім нововведенням.

Формула Нової школи складається з дев'яти ключових компонентів:

1. Новий зміст освіти, заснований на формуванні компетентностей.
2. Умотивований учитель, який має свободу творчості й розвивається професійно.
3. Наскрізний процес виховання, який формує цінності.
4. Децентралізація та ефективне управління, що надасть школі реальну автономію.
5. Педагогіка, що ґрунтується на партнерстві між учнем, учителем і батьками.
6. Орієнтація на потреби учня в освітньому процесі.
7. Нова структура школи.
8. Справедливий розподіл публічних коштів, який забезпечить рівний доступ усіх дітей до якісної освіти.
9. Сучасне освітнє середовище, яке забезпечить необхідні умови, засоби і технології для навчання учнів, освітян, батьків не лише в приміщенні навчального закладу [1, с. 7].

У контексті цих складових Нової української школи нами сформульовані деякі рекомендації для вчителів математики, упровадження яких, за нашими переконаннями, буде доцільним на першому етапі реалізації (2016 – 2018 рр.) зазначеної Концепції. Зауважимо, що наведені рекомендації не охоплюватимуть усіх її компонентів, оскільки деякі з них не належать до компетенції вчителів.

Рекомендації щодо адаптування математичної освіти до вимог Нової української школи:

1. Оскільки сучасна освіта потребує більшого зв'язку із практикою, тому для забезпечення варіативної складової навчальних планів загальноосвітніх навчальних закладів доречно розробляти *програми елективних курсів* (спецкурсів, курсів за вибором, факультативних курсів), які б дозволили максимально продемонструвати та реалізувати цей зв'язок (реалізація компоненту – «Новий зміст освіти»).
2. *Методи та прийоми викладання, засновані на співпраці* (ігри, експерименти, групові завдання). Так, наприклад для етапу уроку «Закріплення нового матеріалу, відпрацювання вмінь» учитель математики може використати такі прийоми: гра-тренінг, взаємоопитування, гра у випадковість, прес-конференція [2, с. 40]. Крім того, відмітимо, що використання наведених методів сприятиме частковому вирішенню проблеми перевантаженості, стомлюваності учнів на уроці, адже, як відомо, зміна видів діяльності учнів на уроці є одним із факторів, який визначає ефективність його проведення (реалізація компонентів – «Новий зміст освіти», «Педагогіка партнерства», «Орієнтація на учня»).
3. Використання в навчально-виховному процесі *новітніх інформаційно-комунікаційних технологій.* Сучасний випускник школи повинен мати інформаційно-комунікаційну компетентність. Запровадження ІКТ в освітній галузі має перейти від одноразових проектів у системний процес, який охоплює всі види діяльності. ІКТ суттєво розширять можливості педагога, оптимізують управлінські процеси, таким чином, формуючи в учня важливі для нашого сторіччя технологічні компетентності [1, с. 8]. Використання ІКТ на уроках математики дозволить моделювати різноманітні об'єкти та процеси; підвищить рівень наочності; оптимізує процеси організації колективної та індивідуальної дослідницької роботи та диференціювання роботи учнів у залежності від рівня їх підготовки, пізнавальних інтересів; дозволить організувати оперативний контроль і допомогу з боку вчителя; сприятиме підвищенню інтересу в учнів до предмету шляхом використання на уроках математики сучасних засобів навчання, які урізноманітнять виклад нового матеріалу та форми представлення інформації, звільнять від рутинної роботи та наблизять подачу цього матеріалу до теперішніх уподобань підростаючого покоління (реалізація компонентів – «Новий зміст освіти», «Сучасне освітнє середовище»).

4. *Технологічний підхід до математичної освіти*, який передбачає використання у навчально-виховному процесі педагогічних технологій, спрямованих на урізноманітнення змісту і методів навчання та проектування педагогічних процесів. Такі види технологій організації уроків математики на методичному рівні вирішують проблему конструювання процесу навчання, спрямованого на досягнення запланованих результатів. Зокрема, доцільним буде використання на уроках математики таких технологій: укрупнення дидактичних одиниць (П. Ерднієв), алгоритмізації навчальних дій учнів (М. Волович), поетапного формування розумових дій (П. Гальперін), «Педагогічних майстерень» (П. Ланжевен, А.Валлон та ін.), системи ефективних уроків (А. Окунєв), розв'язання задач (Р. Хазанкін), паркової технології навчання математики (А. Гольдін) тощо (реалізація компонентів – «Новий зміст освіти», «Педагогіка партнерства», «Орієнтація на учня»).
5. *Систематична робота вчителів математики щодо самоосвіти*, адже стрімке реформування системи освіти в Україні, перехід до нових державних стандартів вимагає, по-перше, участі вчителів в оновленні навчальних програм, яке періодично анонсується МОН, по-друге, досконального вивчення оновлених навчальних програм, критеріїв оцінювання, методичних рекомендацій про викладання навчальних предметів у загальноосвітніх навчальних закладах, по-третє, постійної самоосвітньої діяльності, спрямованої на власний розвиток, підвищення кваліфікації тощо (реалізація компонентів – «Умотивований учитель», «Сучасне освітнє середовище»).

Висновки

Отже, підсумовуючи вищевикладене, зауважимо, що оновлення освіти в Україні, безумовно, матиме вплив на розвиток і математичної освіти. Це, у першу чергу, пов'язано із орієнтуванням нововведень на зв'язок із практикою, можливостями застосування набутих компетентностей саме у реальних життєвих ситуаціях. Також учителі математики мають особливу увагу звернути на реалізацію в навчальному процесі таких компонентів Концепції як «Педагогіка партнерства» та «Орієнтація на учня». Безумовно, сьогодні ми знаходимося лише на першому етапі реформування, проте це не означає, що зміни ще не відбуваються. Тому сучасний учитель в умовах швидкоплинних освітніх реформ постійно має моніторити ситуацію, бути готовим до нових перетворень в освіті України.

Література

1. Концептуальні засади реформування середньої школи «Нова українська школа» [Електронний ресурс] / [Л. Гриневич, О. Елькін, С. Калашнікова та ін.; Міністерство освіти і науки України]. – Режим доступу : http://mon.gov.ua/activity/education/zagalna-serednya/ua-sch-2016/. – 2016 р.
2. Моделювання сучасного уроку математики в школі : навчальний посібник / [Н. І. Труш, Б. Б. Беседін, Г. М. Бірюкова, Л. Г. Плесканьова]. – Слов'янськ, 2009. – 103 с.
3. Рекомендація 2006/962/ЄС Європейського Парламенту та Ради (ЄС) «Про основні компетенції для навчання протягом усього життя» [Електронний ресурс]. – Режим доступу : http://zakon3.rada.gov.ua/laws/show/994_975. – 18.12.2006.

Shulik T. V., Novikov O. O., Volik S. V.
State Higher Educational Institution «Donbass State Teacher's Training University», Slovijans'k, Ukraine.

The Features of Mathematics Education in the Context of the «New Ukrainian School»

The main reasons for the need for reform of modern education are outlined in this article, the features of the conceptual foundations of reforming the secondary school «New Ukrainian School» are illuminated, the recommendations on adapting modern mathematical education with the requirements of the «New Ukrainian school» are given.

Keywords: *New Ukrainian School, reform of secondary education, Mathematical education, competence, recommendations.*

ЗМІСТ

`При підготовці статті необхідно дотримуватись наступних вимог:`

1. Рукописи подаються в одному примірнику, надруковані українською або російською мовою на одній стороні аркуша через один інтервал з широкими полями, старанно вичитані і розмічені. Примірник повинен бути оформлений відповідно до зазначених нижче вимог з обов'язковим підписом автора (усіх авторів) статті.

2. Стаття повинна включати:

   (a) прізвище та ініціали автора (авторів) та назва установи (де виконана робота) *українською* та *англійською* мовами;

   (b) назву статті (якщо заголовок статті довгий, то подати також його короткий варіант, не більше 40 знаків) *українською* та *англійською* мовами;

   (c) індекс УДК;

   (d) анотацію (до 5 рядків) *українською* та *англійською* мовами;

   (e) короткий вступ: постановку задачі, одержані результати;

   (f) формулювання одержаних автором нових результатів і повне їх доведення, які раніше ніде не були опубліковані або подані до розгляду в інший журнал;

3. До (друкованого варіанту) статті обов'язково додається електронний варіант, підготовлений у форматі LaTeX (*.tex) (та його копія у форматі PDF) з використанням стильового файлу (znp-fizmat-ddpu.sty) журналу та макетного файлу (priklad-oform-statti.tex) з дотриманням встановлених параметрів (znp-01-preambula.tex).

4. Адреса для листування: 84116, м. Слов'янськ, Донецька обл., вул. Г.Батюка, 19, Деканат фізико-математичного факультету ДДПУ;

   e-mail: znpfizmatsdpu@ukr.net, телефони: (06262) 3-26-59.

5. У випадку авторського колективу вказати прізвище та e-mail того з авторів, з ким редколегія може вести листування.

6. Файли прикладу оформлення статей та вимоги можна завантажити за адресою http://slavdpu.dn.ua/fizmatzbirnyk/znpFizmat2017.zip.

7. Статті, підготовлені в порушення зазначених вимог, до розгляду редакційною колегією журналу НЕ приймаються.

8. Статті до восьмого випуску приймаються до 15 квітня 2018 року.

Наукове видання

Збірник наукових праць фізико-математичного факультету ДДПУ

Випуск №7

Для студентів, аспірантів та науковців в галузі фізико-математичних наук; вчителів та викладачів фізико-математичних дисциплін в ЗОШ та ВНЗ.

Комп'ютерна верстка
та підготовка оригінал-макету О.А. Кадубовський
Відповідальні за випуск О.А. Кадубовський, В.Є. Величко

Підписано до друку 27.04.2017 р.
Формат 60×84 1/16. Ум. др. арк. 11,25.
Тираж 100 прим. Зам. № 866.

Підприємець Маторін Б.І.
84116, м. Слов'янськ, вул. Г. Батюка, 19.
Тел./факс +38 06262 3-20-99. Email: matorinb@ukr.net

Свідоцтво про внесення суб'єкта видавничої справи до Державного реєстру видавців, виготівників і розповсюджувачів видавничої продукції ДК №3141, видане Державним комітетом телебачення та радіомовлення України від 24.03.2008 р.