УДК 551.466.8

Билюнас М.В., Доценко С.Ф.

[1] *кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математики, физики и информатики, «Керченский морской технологический университет», г. Керчь*

[2] *доктор физико-математических наук, профессор, главный научный сотрудник, «Морской гидрофизический институт», г. Севастополь*

e-mail: biliunas_mv@mail.ru, sf_dotsenko@mail.ru

ПОВЕРХНОСТНЫЕ ПОДВЕТРЕННЫЕ ВОЛНЫ В СДВИГОВЫХ ТЕЧЕНИЯХ

В работе рассмотрена задача о генерации поверхностных волн при обтекании потоком с вертикальным сдвигом скорости неровности дна. Получены аналитические решения задачи в виде выражения смещения уровня свободной поверхности для модельных распределений скорости в зависимости от различной формы подводного препятствия

Ключевые слова: *сдвиговые течения, однородная жидкость, поверхностные волны, подветренные волны*

Вступление

Волны, образующиеся при обтекании потоком с вертикальным сдвигом скорости неровностей поверхности земли, – крайне распространенное явление как в атмосфере, так и в океане [1, 2]. Они обнаруживаются вниз по потоку от препятствия и поэтому известны как подветренные или волны за препятствиями. Например, когда воздушный поток натекает на перпендикулярный к нему горный хребет, то, по мере усиления ветра до 9-10 м/с и более, ламинарное обтекание переходит в волнообразное или в возникновение за хребтом подветренных вихрей. Аналогичные явления наблюдаются и в жидкости при обтекании течением подводного препятствия. Отличительной особенностью таких волн является неизменность волновой картины с течением времени: гребни волн всегда остаются на одних и тех же местах при движении потока. Такие волны, форма которых не зависит от времени, называют стационарными. Исследованию характеристик таких волн в зависимости от параметров течения и неровности дна и посвящена данная работа.

Постановка задачи. Предположим, что поток идеальной несжимаемой жидкости $U(z)$ постоянной глубины H, обтекает неровность дна, форма которой задается функцией $D(x)$ (рис. 1). Толщина слоя выражается как $H - D(x)$.

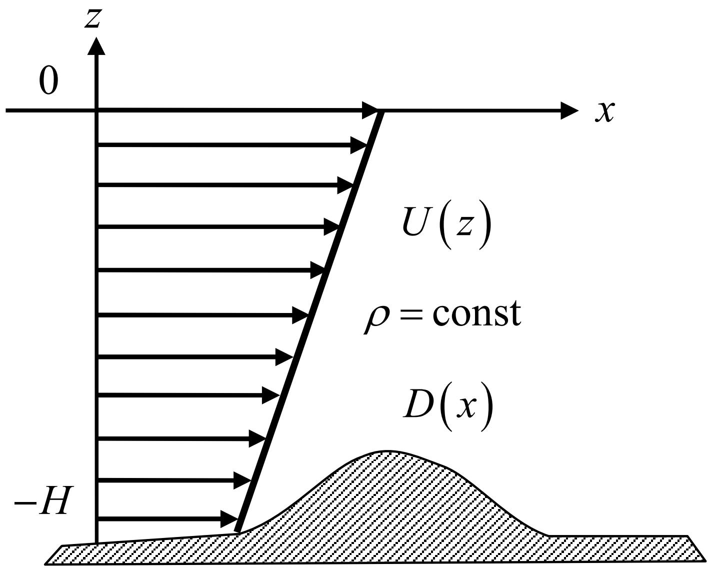

Рис. 1: Обтекание неровностей дна течением с вертикальным сдвигом скорости

Система уравнений, описывающая стационарные волны в таком потоке, будет описана системой трех линеаризованных относительно среднего течения $u = U(z), w = 0$ уравнений с зависящими от z коэффициентами (они получены из системы уравнений Эйлера и уравнения неразрывности [3])

$$U\frac{\partial u}{\partial x} + w\frac{\partial U}{\partial z} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x},$$

$$U\frac{\partial w}{\partial x} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z},$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0,$$

где $u(x,z)$, $w(x,z)$ — малые возмущения поля скорости сдвигового течения; $p(x,z)$ — динамические возмущения гидростатического давления в жидкости; $\rho = \mathrm{const}$ — плотность жидкости.

Вышеописанную систему уравнений необходимо дополнить кинематическим и динамическим условиями на свободной поверхности $(z = 0)$ и условием скольжения на дне бассейна $(z = -H)$ [3]

$$U(0)\frac{\partial \zeta}{\partial x} = w, \quad p - \rho g\zeta = 0 \quad (z = 0),$$

$$w = u\frac{\partial D}{\partial x} \quad (z = -H + D(x)),$$

где $\zeta(x)$ — смещение свободной поверхности жидкости; g — ускорение свободного падения.

Переход к краевой задаче для системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Применяя к сформулированной задаче преобразование Фурье по переменной x с параметром m, приходим к неоднородной краевой задаче

$$\overline{w}'' - [m^2 + \alpha(z)]\overline{w} = 0 \quad (-H < z < 0),$$
$$\overline{w}'(0) - \nu\overline{w}(0) = 0,$$
$$\overline{w}(-H) = imU(-H)\overline{D}(m),$$

где штрих означает производную по переменной z,

$$\alpha = \frac{U''(z)}{U(z)}, \quad \nu = \frac{g}{U^2(0)} + \frac{U'(0)}{U^2(0)},$$

$$\overline{f}(m) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-imx}dx$$

— трансформанта Фурье.

Будем предполагать, что скорость течения не изменяет своего направления ($U(z) > 0$) при всех $-H \leqslant z \leqslant 0$. Далее рассматриваются волны вдали от неровности дна конечной ширины, то есть, считаем, что $|x| \to +\infty$. Решение вышеописанной задачи находим в следующем виде

$$\overline{w}(z) = A_1 \sinh k(z+H) + A_2 \cosh k(z+H),$$

где $k^2 = m^2 + \alpha$, A_1, A_2 — константы, которые определяются из граничных условий. В итоге, можно записать

$$\overline{\zeta}(m) = \frac{U(-H)}{U(0)} \frac{k}{\cosh kH} \frac{\overline{D}(m)}{\Delta},$$

где $\Delta = k - \nu \tanh kH$. Следовательно, по формуле обратного преобразования Фурье, имеем

$$\zeta(x) = \frac{1}{2\pi} \frac{U(-H)}{U(0)} \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(m)e^{imx}dm,$$

где $f(m) = \frac{k}{\cosh kH}\frac{\overline{D}(m)}{\Delta}$.

Далее, преобразовывая контуры интегрирования и применяя теорию вычетов [4], а также учитывая, что $\Delta'(-m) = \Delta'(m)$, а $\overline{D}(-m) = \overline{D}(m)$, получим

$$\zeta(x) = -2\frac{U(-H)}{U(0)} \frac{k_0}{\cosh k_0 H} \frac{\overline{D}(m_0)}{\Delta'(m_0)} \sin m_0 x + o(1) \ (x \to \infty), \text{ где } k_0 = k(m_0).$$

Изучая различные профили течения (например, рассмотренные в [5]) и модельные функции, задающие форму подводного препятствия, находим соответствующие им амплитуды смещения свободной поверхности. Для наглядности приведем некоторые рассмотренные модельные распределения $D(x)$, задающие рельеф неровности дна, и соответствующие им амплитуды смещения свободной поверхности A в таблице 1, где формулы, упорядочены по мере увеличения кривизны склона препятствия.

	$D(x)$	A
1	$\begin{cases} 0 & (-\infty < x < -L) \\ D_0 & (-L \leqslant x \leqslant L) \\ 0 & (L < x < \infty) \end{cases}$	$-4D_0 \frac{U(-H)}{U(0)} \frac{k_0}{\cosh k_0 H} \frac{\sin m_0 L}{m_0 \Delta_0'}$
2	$D_0 \left(\frac{x^2+L^2}{L^2} \right)^{-2}$	$-D_0 L\pi \frac{U(-H)}{U(0)} \frac{k_0}{\cosh k_0 H} \frac{(\lvert m_0\rvert L+1) e^{-\lvert m_0\rvert L}}{\Delta_0'}$
3	$\begin{cases} 0 & (-\infty < x < -L) \\ D_0 \left(\frac{-\lvert x\rvert+L}{L} \right) & (-L \leqslant x \leqslant L) \\ 0 & (L < x < \infty) \end{cases}$	$-\frac{4D_0}{L} \frac{U(-H)}{U(0)} \frac{k_0}{\cosh k_0 H} \frac{1-\cos m_0 L}{m_0^2 \Delta_0'}$
4	$D_0 e^{-qx^2}$	$-2D_0 \sqrt{\frac{\pi}{q}} \frac{U(-H)}{U(0)} \frac{k_0}{\cosh k_0 H} \frac{e^{-\frac{m_0^2}{4q}}}{\Delta_0'}$
5	$\frac{D_0}{1+\left(\frac{x}{L_1}\right)^2}$	$-2\pi D_0 L_1 \frac{U(-H)}{U(0)} \frac{k_0}{\cosh k_0 H} \frac{e^{-\lvert m_0\rvert L_1}}{\Delta_0'}$

Табл. 1: Модельные распределения неровности дна и соответствующие им амплитуды подветренных поверхностных волн.

В формулах q и L_1 — произвольные параметры, характеризующие кривизну препятствия.

Из приведенных выражений следует, что для всех рассмотренных неровностей амплитуда смещения свободной поверхности пропорциональна высоте препятствия и отношению скорости течения у дна к скорости течения на поверхности, но не зависит от кривизны профиля течения. Чем больше высота обтекаемого препятствия и отношение скоростей потока, тем больше амплитуда смещения свободной поверхности.

Подветренные волны в потоке будут возникать при выполнении условия

$$\nu H > 1.$$

Для параметров течения, близких к реальным значениям, генерирующиеся на потоке поверхностные волны получаются короткими и будут иметь очень незначительную амплитуду в сравнении с внутренними волнами. Это объясняется тем, что для выведения из положения равновесия границы раздела вода-воздух требуется гораздо большая возмущающая сила, чем для нарушения гидродинамического равновесия во внутренних слоях океана.

При выполнении условия $\nu H \to 1$ при обтекании неровности дна сдвиговым течением будут генерироваться поверхностные волны большей длины и амплитуды.

Выводы

Рассмотрена задача о поверхностных подветренных волнах в сдвиговых течениях однородной жидкости. Показано, что для параметров течения, близких к реальным значениям, генерирующиеся на потоке поверхностные волны получаются короткими и будут иметь очень незначительную амплитуду в сравнении с внутренними волнами. При $\nu H \to 1$ будут генерироваться поверхностные волны на сдвиговом течении большей длины и амплитуды. В линейном приближении показано, что амплитуда возникающих в течении волн в значительной степени будет зависеть от высоты подводного препятствия и отношения скорости течения на поверхности и на дне потока.

Литература

1. *Durran D.R.* Lee waves and mountain waves. Encyclopedia of Atmospheric Sciences. Holton, J.R., J. Pyle and J.A. Curry eds. Elsevier Science Ltd., 2003. — P. 1161–1170.
2. *Makarenko N.I., Maltseva J.L.* Interference of lee waves over mountain ranges // Nat. Hazards Earth Syst. Sci. — 2011. — Vol. 11. — P. 27–32.
3. *Ле Блон П., Майсек Л.* Волны в океане. Т. 1. — М.: Мир, 1981. — 478 с.
4. Математический анализ. Продолжение курса / В.А. Ильин, В.А. Садовничий, Б.Х. Сендов. Под ред. Тихонова. — М.: Изд-во МГУ, 1987. — 358 с.
5. *Билюнас М.В., Доценко С.Ф.* Стационарные волны в потоке однородной жидкости с вертикальным сдвигом скорости // Морской гидрофизический журнал. — Севастополь. — 2010. — № 4. — С. 15–29.

Biliunas Marianna V., Dotsenko Sergey P.
Kerch Marine Technological University, Kerch;
Marine Hydrophysical Institute, Sevastopol.

Surface lee waves in shear flows

The paper considers the problem of the generation of surface stationary waves formed in a stream of vertical sheared flow on the leeward side of bottom irregularities. The analytical solution of the problem in the form of expression of the free surface shifting level are obtained for some model distributions speed depending on the different forms of underwater obstacles.

Keywords: *shear flow, homogeneous liquid, surface waves, lee waves.*