

¹ кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри геометрії та МВМ, ДВНЗ «ДДПУ»

² студентка 5 курсу фізико-математичного факультету, ДВНЗ «ДДПУ»; лаборант кафедри природничо-математичних дисциплін та методики їх викладання, ДонОблІІПО

e-mail: kadubovs@ukr.net, balyasa@ippo.dn.ua

ПЕРЕРАХУВАННЯ ДВОКОЛЬОРОВИХ ХОРДОВИХ O -ДІАГРАМ РОДУ 1, ЯКІ МАЮТЬ ОДИН ЧОРНИЙ (АБО СІРИЙ) ЦИКЛ, ВІДНОСНО ДІЇ ЦИКЛІЧНОЇ ТА ДІЕДРАЛЬНОЇ ГРУП

Для натуральних $n \geq 3$ встановлено формули підрахунку числа нееквівалентних 2-кольорових хордових O -діаграм (з n хордами), які мають лише один чорний (сірий) та $(n - 2)$ сірих (відповідно чорних) циклів відносно дії дієдральної групи (порядку $2n$). Крім того, для початкових $3 \leq n \leq 10$ в явному вигляді наведено всі неізоморфні та нееквівалентні діаграми із зазначених класів, а для $3 \leq n \leq 40$ — точні значення числа неізоморфних та відповідно нееквівалентних таких діаграм.

Ключові слова: 2-кольорова хордова O -діаграма з n хордами, род діаграми, цикл діаграми, група дієдра.

Вступ

Добре відомо, що хордові діаграми ефективно використовують в багатьох галузях науки, зокрема математиці (топології, теорії вузлів), фізиці, біології, генетиці тощо.

Нагадаємо, що хордовою діаграмою порядку n або, коротко, n -діаграмою називають конфігурацію на площині, що складається з кола, $2n$ точок на ньому (які є вершинами правильного $2n$ -кутника) та n хорд, що сполучають вказані точки. Хордові діаграми називають *ізоморфними*, якщо одну можна одержати з іншої в результаті повороту. Діаграми називають *еквівалентними*, якщо їх можна сумістити за допомогою повороту, дзеркального відбиття, або ж їх композиції.

Питаннями переліку певних класів хордових n -діаграм (відносно дії циклічної групи порядку $2n$ та дієдральної групи порядку $4n$) займалась ціла низка відомих математиків та сучасників, зокрема автори робіт [10], [8], [3], [7], [2], [9], [6], [1]. Задачі про підрахунок числа неізоморфних та нееквівалентних n -діаграм були повністю розв'язані в роботах [7], [2], [9], [6].

Слід відзначити, що вперше число хордових n -діаграм фіксованого роду g було підраховано ще у 1972 р. в [10], більш елегантну рекурентну формулу для підрахунку числа таких діаграм було встановлено у 1986 р. в [3]. Проте, формули для підрахунку числа неізоморфних планарних (роду 0), торойдальних (роду 1) n -діаграм та $2m$ -діаграм максимального роду m було встановлено лише у 2000 р. в роботі [2]. Інші результати, крім зазначених випадків, авторам статті є невідомими.

Крім того, слід констатувати, що одержання явних формул для підрахунку числа неізоморфних (а тому і нееквівалентних), зокрема двокольорових, n -діаграм фіксованого роду виявилось досить складною задачею і в загальному випадку до сьогодні нерозв'язаною проблемою.

Для двокольорових діаграм найбільш вагомими є наступні результати: задачі про підрахунок числа неізоморфних та нееквівалентних O - і N -діаграм (відповідно) повністю розв'язано в роботі [13];

формули для підрахунку числа неізоморфних та нееквівалентних O -діаграм (відповідно N -діаграм), які мають точно один цикл певного кольору (чорний або ж сірий) одержано в [14] та відповідно в [15];

формули для підрахунку числа неізоморфних та нееквівалентних планарних O -діаграм (з n хордами) було встановлено у 2000 р. в [1]; проте питання про узагальнення цієї задачі на випадок фіксованого числа чорних (або ж сірих) циклів було повністю розв'язано лише у 2014 р. в [16];

задача про підрахунок числа неізоморфних O -діаграм максимального роду (з одним чорним та одним сірим циклом) була розв'язана у 2006 р. в [12], а про число нееквівалентних таких діаграм — лише у 2015 р. в [17].

Навіть для випадку O -діаграм (з n хордами) фіксованого роду $g \geq 1$ (крім O -діаграм максимального роду), які мають точно один чорний (або ж сірий) цикл питання залишається відкритим.

Встановленню формул для підрахунку числа неізоморфних та нееквівалентних O -діаграм роду $g = 1$, які мають точно один чорний (або ж сірий) цикл й присвячена дана стаття.

1. Основні поняття та попередні відомості

Означення 1. Коло з $2n$ точками на ньому (що є вершинами правильного $2n$ -кутника), дуги якого по чергово розфарбовані у два кольори (чорний і сірий) та фіксованою нумерацією вершин за годинниковою стрілкою, будемо називати двокольоровим $2n$ -шаблоном — рис. 1 а).

2-кольоровою хордовою n -діаграмою будемо називати n -діаграму, побудовану на основі двокольорового $2n$ -шаблону.

Означення 2. 2-кольорову n -діаграму, яка не містить (містить) хорди, що сполучає вершини з номерами однакової парності, називають O -діаграмою (N -діаграмою) – рис. 1 с), b).

Означення 3. «Чорним» («сірим») циклом 2-кольорової діаграми називатимемо послідовність хорд та чорних (сірих) дуг, які утворюють гомеоморфний образ (орієнтованого) кола – рис. 1 b) – с).

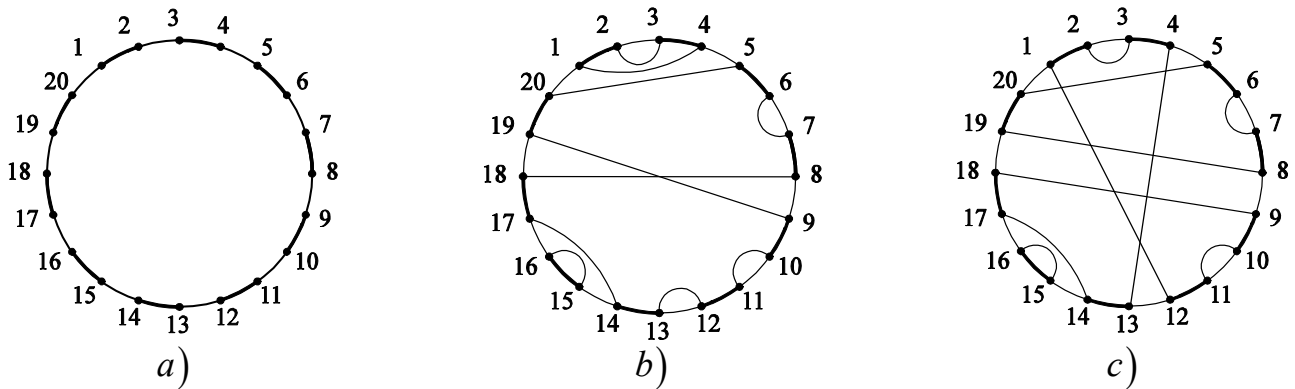


Рис. 1:

- a) двокольоровий 20-шаблон;
- b) N -діаграма (з 10 хордами), яка має 7 сірих та 3 чорних циклів;
- c) O -діаграма (з 10 хордами), яка має 6 сірих та 3 чорних циклів

Якщо проігнорувати колір, то кожен чорний (сірий) цикл 2-кольорової O -діаграми співпадає з відповідним циклом непофарбованої діаграми. Тоді наслідуючи [2], природнім чином визначається рід O -діаграми, а саме

Означення 4. Родом 2-кольорової O -діаграми будемо називати ціле число g , яке визначається рівністю

$$g = \frac{n + 1 - \lambda}{2}, \tag{1}$$

де λ – сумарне число чорних і сірих циклів діаграми.

Означення 5. Множину O -діаграм з n хордами (побудованих на 2-кольоровому $2n$ -шаблоні), які мають точно 1 чорний та k сірих циклів будемо позначати $\mathfrak{S}_{1,k;n}^O$.

Зауваження 1. З урахуванням рівності (1) та введених позначень, діаграми з класу $\mathfrak{S}_{1,n-2;n}^O$ є O -діаграмами (з n хордами) роду 1. Тобто, для O -діаграм роду 1 з одним чорним (або ж сірим) циклом число k сірих (відповідно чорних) циклів визначається однозначно і становить $k = n - 2$.

2. Основна частина

2.1. Число діаграм з класу $\mathfrak{S}_{1,n-2;n}^O$

Приклад 1. При $n = 3$ існує **єдина** діаграма з класу $\mathfrak{S}_{1,1;3}^O$ – рис. 2 а); при $n = 4$ – **п'ять** діаграм з класу $\mathfrak{S}_{1,2;4}^O$ – рис. 2 б).

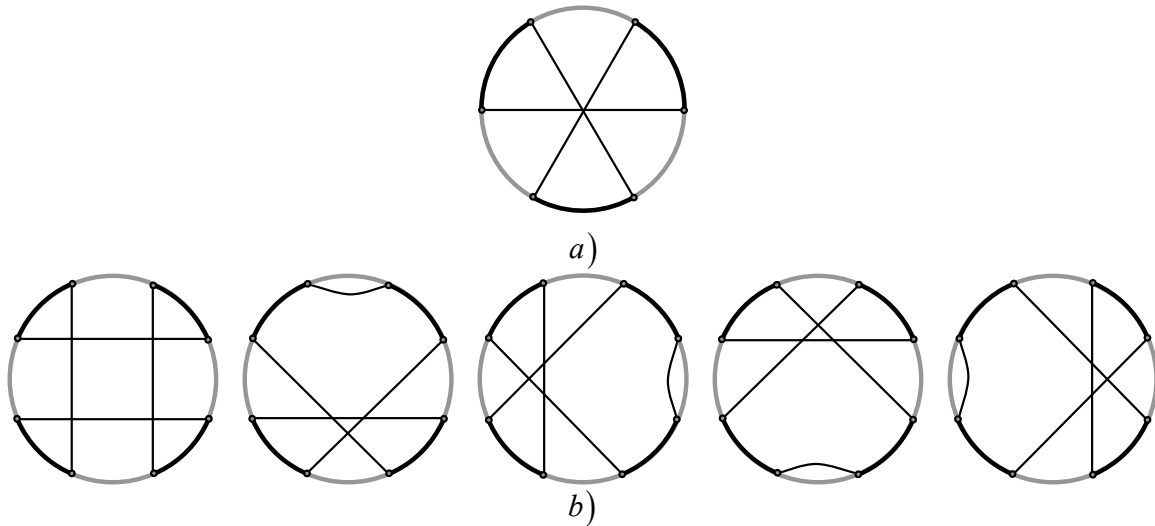


Рис. 2: а) єдина діаграма з класу $\mathfrak{S}_{1,1;3}^O$, б) всі діаграми з класу $\mathfrak{S}_{1,2;4}^O$

Лема 1. Число $d(n)$ діаграм з класу $\mathfrak{S}_{1,n-2;n}^O$ можна знайти за формулою

$$d(n) = C_{n+1}^4 = \frac{(n-2) \cdot (n-1) \cdot n \cdot (n+1)}{24}. \quad (2)$$

Доведення. За визначенням кожна діаграма з класу $\mathfrak{S}_{1,n-2;n}^O$ має точно 1 чорний та $n - 2$ сірих циклів. Очевидно, що кожен з $(n - 2)$ сірих циклів містить щонайменше 1 сіру дугу, решта (2 сірі дуги) можуть потрапити або до 2 різних циклів та сформувати точно два 2-цикли, або ж до одного циклу сформувавши точно один 3-цикл. Таким чином, всі O -діаграми (з n хордами) які мають $(n - 2)$ сірі цикли можна умовно розділити дві множини:

перша множина діаграм характеризується наявністю точно двох 2-циклів та $(n - 4)$ 1-циклів – рис. 3 а), б);

друга множина діаграм – наявністю точно одного 3-циклу та $(n - 3)$ 1-циклів – рис. 3 с), д).

Проте:

1) якщо хорди, які утворюють два 2-цикли не перетинаються (так, як це показано на рис. 3 б)), то така діаграма має точно три чорні цикли, і тому не належить класу $\mathfrak{S}_{1,n-2;n}^O$;

2) якщо хорди, які утворюють єдиний 3-цикл не перетинаються (так, як це показано на рис. 3 d)), то така діаграма також має точно три чорні цикли, і тому не належить класу $\mathfrak{S}_{1,n-2;n}^O$.

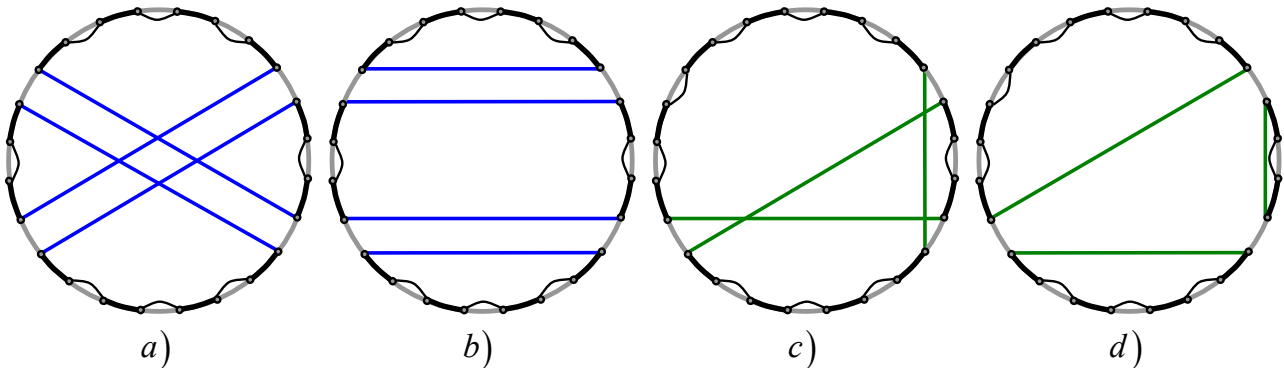


Рис. 3: $a), b)$ — два можливі типи O -діаграм (з n хордами), які мають два сірі 2-цикли та $(n - 4)$ сірих 1-циклів, $c), d)$ — два можливі типи O -діаграм (з n хордами), які мають один сірий 3-цикл та $(n - 3)$ сірих 1-циклів

З урахуванням зазначеного, всі діаграми з класу $\mathfrak{S}_{1,n-2;n}^O$ можна розділити на два характеристичні підкласи A і B , а саме:

діаграми з множини A характеризуються наявністю точно $(n - 4)$ сірих 1-циклів та двох сірих 2-циклів, утворених хордами, що перетинаються – рис. 3 a), а

діаграми з множини B — наявністю точно $(n - 3)$ сірих 1-циклів та одного сірого 3-циклу, утвореного хордами, що перетинаються – рис. 3 c).

Очевидно, що кожна діаграма з підкласу A однозначно визначається вибором 4-ох (з n) сірих дуг, і тому $|A| = C_n^4$;

так само, кожна діаграма з підкласу B однозначно визначається вибором 3-ох (з n) сірих дуг, і тому $|B| = C_n^3$.

Таким чином $|\mathfrak{S}_{1,n-2;n}^O| = |A| + |B| = C_n^4 + C_n^3 = C_{n+1}^4$. □

Зауваження 2. Як з'ясувалося, для натуральних $n = n' + 1$ початкові значення величини $d(n) = |\mathfrak{S}_{1,n-2;n}^O|$ співпадають зі значеннями величини $S_H(n'; n' - 1)$ — «Hultman number» [4] (послідовність **A164652** в [11]).

Більше того, з урахуванням результатів роботи [17], має місце

Теорема 1. [17] Для натуральних g та $n \geq 2g + 1$ має місце рівність

$$|\mathfrak{S}_{1,n-2g;n}^O| = S_H(n - 1; n - 2g), \tag{3}$$

а величину $S_H(n - 1; n - 2g)$ можна обчислити так, як це зроблено в [4] (Theorem 14) або ж в [5] (Theorem 4.1).

2.2. Ілюстративні приклади до числа нееквівалентних діаграм з класу $\mathfrak{S}_{1,n-2;n}^O$ для початкових n

Нижче для натуральних $n = 5; 6; 7; 8$ в явному вигляді наведено всі неізоморфні діаграми з відповідних класів $\mathfrak{S}_{1,n-2;n}^O$.

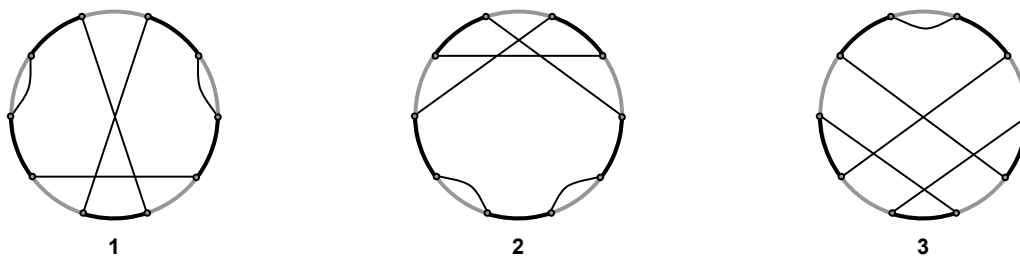


Рис. 4: всі неізоморфні діаграми з класу $\mathfrak{S}_{1,3;5}^O$

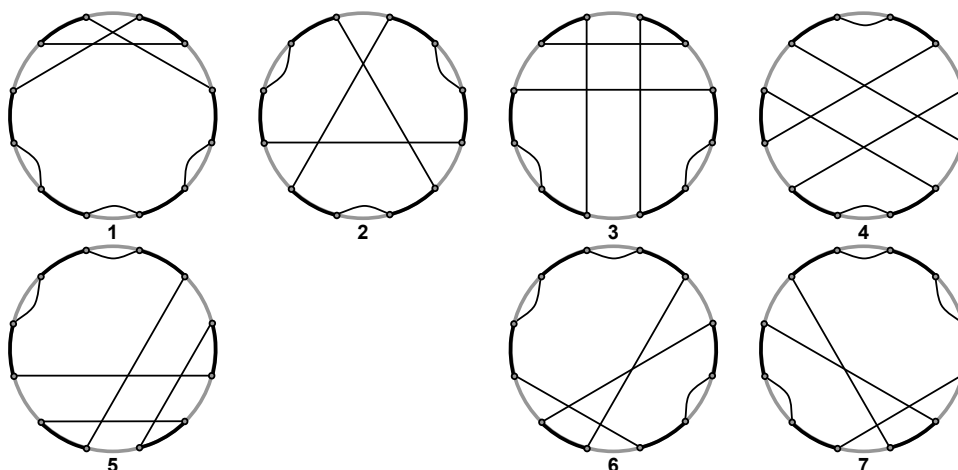


Рис. 5: всі неізоморфні діаграми з класу $\mathfrak{S}_{1,4;6}^O$

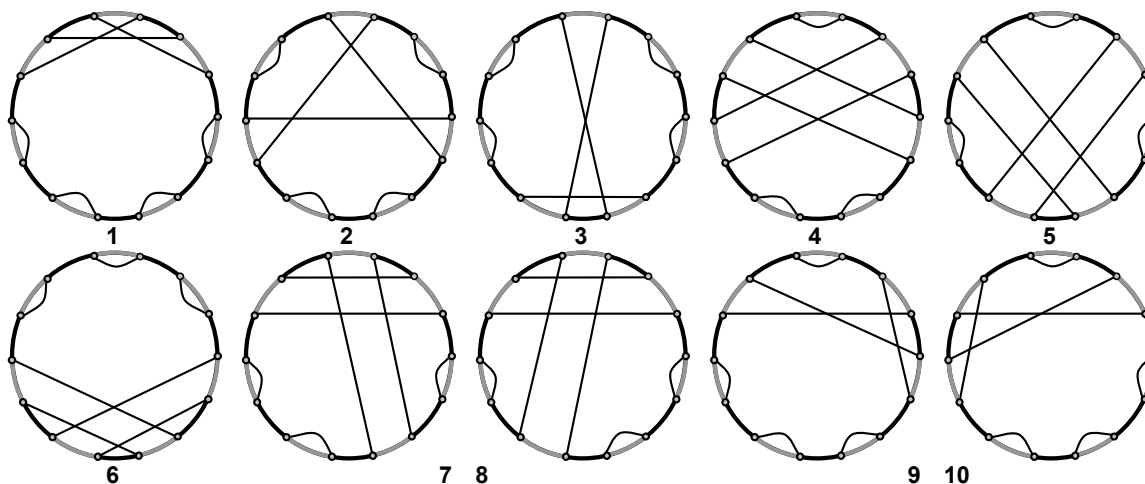


Рис. 6: всі неізоморфні діаграми з класу $\mathfrak{S}_{1,5;7}^O$

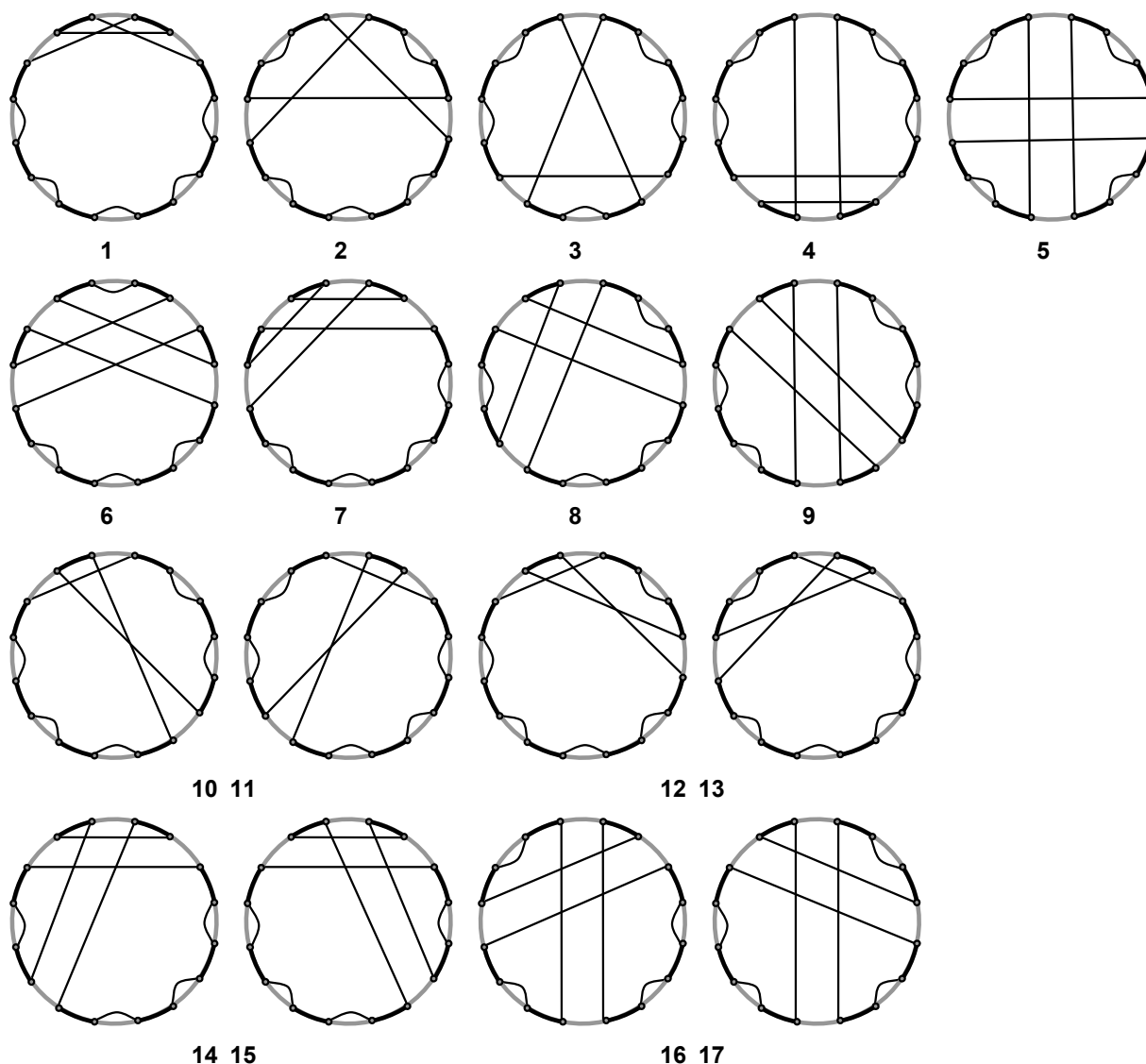


Рис. 7: всі неізоморфні діаграми з класу $\mathfrak{S}_{1,6;8}^O$

Не важко бачити, що:

у випадку $n = 5$ (рис. 4 вище) всі неізоморфні (відносно повороту) діаграми є також і нееквівалентними (відносно дії дієдральної групи);

у випадку $n = 6$ (рис. 5) серед 7 неізоморфних діаграми 6 і 7 є еквівалентними, а тому існує лише $7 - 2 + 1 = 6$ нееквівалентних діаграм з класу $\mathfrak{S}_{1,4;6}^O$;

у випадку $n = 7$ (рис. 6) серед 10 неізоморфних діаграми 7 і 8 та 9 і 10 є еквівалентними, а тому існує лише $10 - 4 + 2 = 8$ нееквівалентних діаграм з класу $\mathfrak{S}_{1,5;7}^O$;

у випадку $n = 8$ (рис. 7) серед 17 неізоморфних діаграми 10 і 11, 12 і 13, 14 і 15 та 16 і 17 є еквівалентними, а тому існує лише $17 - 8 + 4 = 13$ нееквівалентних діаграм з класу $\mathfrak{S}_{1,6;8}^O$.

2.3. Число неізоморфних діаграм з класу $\mathfrak{S}_{1,n-2;n}^O$

За лемою Бернсайда (див. напр. [2], [13], [14]) число $d^*(n)$ неізоморфних (нееквівалентних відносно дії циклічної групи) діаграм з класу $\mathfrak{S}_{1,n-2;n}^O$ можна знайти за допомогою співвідношення

$$d^*(n) = \frac{1}{n} \left(d(n) + \sum_{i|n, i \neq n} \phi\left(\frac{n}{i}\right) \cdot \rho(n, i) \right), \quad (4)$$

де $d(n) = |\mathfrak{S}_{1,n-2;n}^O|$; $\phi(q)$ — функція Ейлера (кількість натуральних менших за q чисел, взаємнопростих із ним), а $\rho(n, i)$ — число тих діаграм з класу $\mathfrak{S}_{1,n-2;n}^O$, які самосуміщуються при повороті (за годинниковою стрілкою) на кут $\omega(n, i) = \frac{2\pi}{2n} \cdot 2i = 2\pi \cdot \frac{i}{n}$.

Очевидно, що для дільників $i \neq n$ числа n кут $\omega(n, i) \leq \pi$. Більше того, поклавши $j = \frac{n}{i}$, співвідношення (4) можна подати у вигляді

$$d^*(n) = \frac{1}{n} \left(d(n) + \sum_{j|n, j \neq 1} \phi(j) \cdot \rho\left(n, \frac{n}{j}\right) \right), \quad (5)$$

де $\rho\left(n, \frac{n}{j}\right)$ — число тих діаграм з класу $\mathfrak{S}_{1,n-2;n}^O$, які самосуміщуються при повороті (за годинниковою стрілкою) на кут $\omega\left(n, \frac{n}{j}\right) = \frac{2\pi}{j}$.

Теорема 2. Для натуральних $n \geq 3$ число $d^*(n)$ неізоморфних (нееквівалентних відносно дії циклічної групи) діаграм з класу $\mathfrak{S}_{1,n-2;n}^O$ можна обчислити за формулами

$$d^*(n) = \frac{1}{n} \left(C_{n+1}^4 + \sum_{\substack{j|n, \\ j \in \{2,3,4\}}} \phi(j) \cdot \rho\left(n, \frac{n}{j}\right) \right), \quad (6)$$

$$\rho\left(n, \frac{n}{2}\right) = \frac{n(n-2)}{8}, \quad \rho\left(n, \frac{n}{3}\right) = \frac{n}{3}, \quad \rho\left(n, \frac{n}{4}\right) = \frac{n}{4}. \quad (7)$$

Доведення. Як було показано вище, всі діаграми з класу $\mathfrak{S}_{1,n-2;n}^O$ поділяються на два характеристичні підкласи A (рис. 8 а), б) і B (рис. 8 с)).

Діаграми з підкласу B самосуміщуються при повороті на певний кут

$$\omega\left(n, \frac{n}{j}\right) = \frac{2\pi}{j}, \quad j \in \{2, \dots, n\} \quad (8)$$

лише за умов, коли n ділиться на 3, а поворот здійснюється на кут кратний куту $\omega = \frac{2\pi}{3}$ (при $j = 3$) — рис. 8 с).

Для $n = 3k$ число таких діаграм становить C_k^1 , або, що теж саме, для цілих $\frac{n}{3}$ число зазначених діаграм становить $\rho\left(n, \frac{n}{3}\right) = C_{\frac{n}{3}}^1 = \frac{n}{3}$.

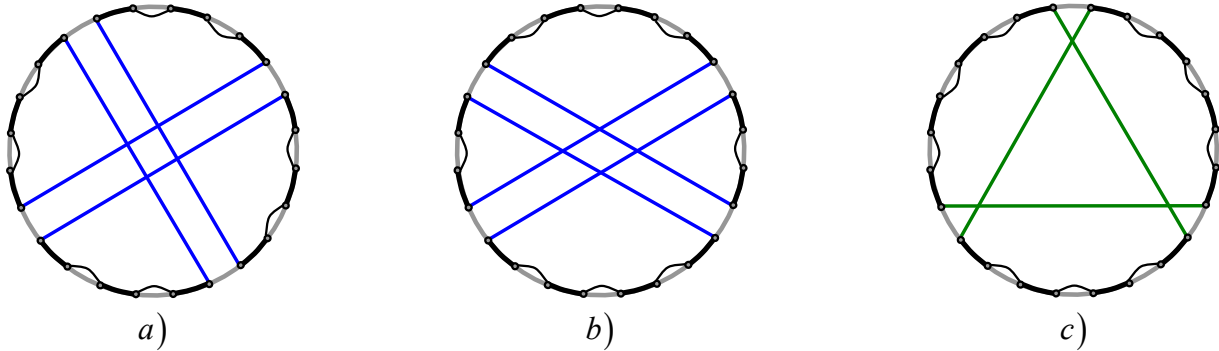


Рис. 8: всі типи діаграм з класу $\mathfrak{S}_{1,n-2;n}^O$, які самосуміщуються при повороті на кути $\frac{\pi}{2}$, π та $\frac{2\pi}{3}$ відповідно

Діаграми з підкласу A самосуміщуються при повороті на певний кут (8) лише за умов, коли n ділиться на 4 або ж на 2. Причому:

в першому випадку поворот здійснюється на кут кратний куту $\omega = \frac{\pi}{2}$ (при $j = 4$) — рис. 8 a),

в другому випадку — на кут кратний куту $\omega = \pi$ (при $j = 2$) — рис. 8 b).

Крім того, не важко перевірити, що:

в першому випадку для $n = 4k$ число відповідних діаграм становить C_k^1 ; звідки для цілих $\frac{n}{4}$ число зазначених діаграм становить $\rho\left(n, \frac{n}{4}\right) = \frac{n}{4}$,

в другому випадку для $n = 2k$ число відповідних діаграм також становить C_k^1 ; звідки для цілих $\frac{n}{2}$ число зазначених діаграм становить $\rho\left(n, \frac{n}{2}\right) = \frac{n}{2}$. \square

2.4. Число нееквівалентних діаграм з класу $\mathfrak{S}_{1,n-2;n}^O$

Застосовуючи лему Бернсайда (див. напр. [2], [13], [14]), не важко встановити, що число $d^{**}(n)$ нееквівалентних (відносно дії дієдральної групи) діаграм з класу $\mathfrak{S}_{1,n-2;n}^O$ можна визначити за допомогою співвідношення

$$d_n^{**} = \frac{1}{2} (d^*(n) + S(n)), \tag{9}$$

де $d^*(n)$ — число неізоморфних діаграм з класу $\mathfrak{S}_{1,n-2;n}^O$,

$$S(n) = \begin{cases} s_0(n), & n = 2m + 1 \\ \frac{1}{2}(s_1(n) + s_2(n)), & n = 2m, \end{cases} \tag{10}$$

$s_0(n)$ — число тих діаграм з класу $\mathfrak{S}_{1,n-2;n}^O$, що є симетричними відносно **фіксованої осі симетрії**, яка проходить через середини протилежних чорної та сірої дуг 2-кольорового $2n$ -шаблону;

$s_1(n)$ ($s_2(n)$) — число тих діаграм з класу $\mathfrak{S}_{1,n-2;n}^O$, що є симетричними відносно **фіксованої осі симетрії**, яка проходить через середини протилежних чорних (відповідно сірих) дуг 2-кольорового $2n$ -шаблону.

Таким чином, з урахуванням співвідношень (9), (10) та встановлених формул (6), (7) для обчислення величини $d^*(n)$, задача про підрахунок числа $d^{**}(n)$ нееквівалентних діаграм з класу $\mathfrak{S}_{1,n-2;n}^O$ зводиться до задач про підрахунок величин $s_0(n)$, $s_1(n)$, $s_2(n)$.

Зауваження 3. В подальшому з метою більшої наочності та уникнення непотрібних нагромаджень (при візуалізації відповідних типів діаграм) дуги діаграми, які містять виключно сірі 1-цикли, будемо зображати у вигляді «прозорої» дуги, яку стягує пунктирна «дуга-хорда» – рис. 9 с).

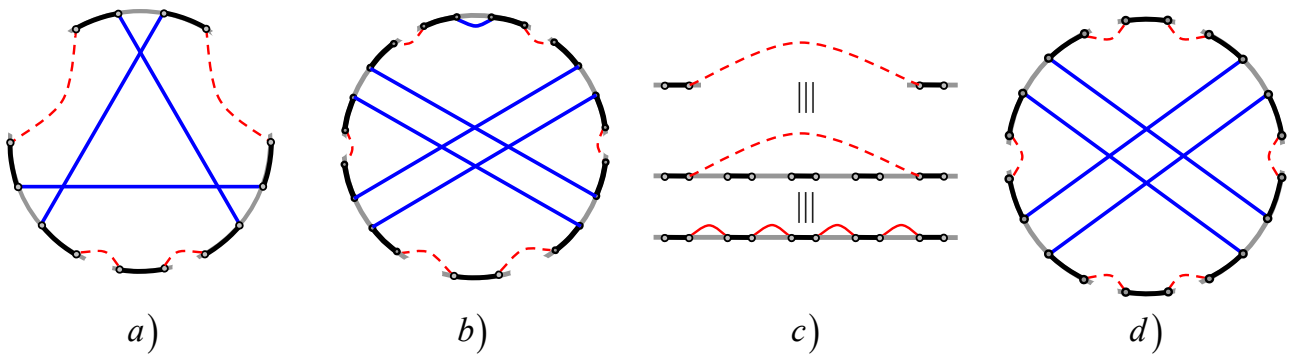


Рис. 9:

Лема 2. Нехай $n = 2m + 1$. Тоді число $s_0(n)$ діаграм з класу $\mathfrak{S}_{1,n-2;n}^O$, що є симетричними відносно фіксованої осі симетрії, яка проходить через середини протилежних чорної та сірої дуг 2-кольорового $2n$ -шаблону, можна обчислити за формулою.

$$s_0(n) = \frac{1}{8}(n - 1)(n + 1). \quad (11)$$

Доведення. Всі діаграми з класу $\mathfrak{S}_{1,n-2;n}^O$, що є симетричними відносно фіксованої осі симетрії, яка проходить через середини протилежних чорної та сірої дуг 2-кольорового $2n$ -шаблону ($n = 2m + 1$), вичерпуються діаграмами двох типів – першого і другого, зображених на рис. 9 а) та рис. 9 б) відповідно.

Оскільки $n = 2m + 1$, то число діаграм першого типу становить $C_{\frac{(2m+1)-1}{2}}^1 = C_m^1$. Число діаграм другого типу становить $C_{\frac{(2m+1)-1}{2}}^2 = C_m^2$.

І тому $s_0(n) = s_0(2m + 1) = C_m^1 + C_m^2 = C_{m+1}^2 = \frac{m \cdot (m+1)}{2} = \frac{1}{8}(n - 1)(n + 1)$.

Лема 3. Нехай $n = 2m$. Тоді мають місце рівності

$$s_1(n) = C_{\frac{n}{2}}^2 = \frac{1}{8}n(n - 2), \quad s_2(n) = \frac{1}{8}(n - 2)(n + 8); \quad (12)$$

$$\frac{1}{2}(s_1(n) + s_2(n)) = \frac{1}{8}(n - 2)(n + 4). \quad (13)$$

Доведення. Всі діаграми з класу $\mathfrak{S}_{1,n-2;n}^O$, що є симетричними відносно фіксованої осі симетрії, яка проходить через середини протилежних чорних дуг 2 -кольорового $2n$ -шаблону ($n = 2m$), вичерпуються діаграмами виду, зображених на рис. 9 *d*). Число таких діаграм становить $C_{\frac{2m}{2}}^2 = C_m^2$.

Звідки $s_1(n) = C_{\frac{n}{2}}^2 = \frac{1}{8}n(n - 2)$.

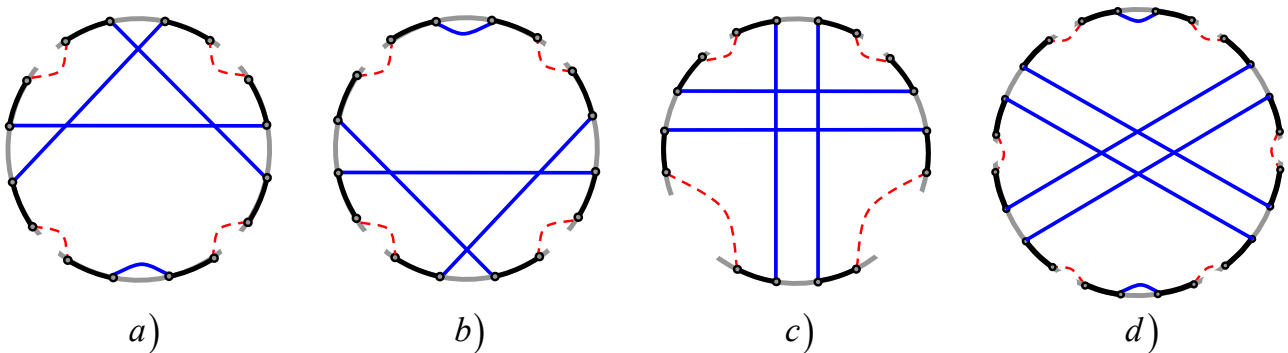


Рис. 10:

Діаграми з класу $\mathfrak{S}_{1,n-2;n}^O$, що є симетричними відносно фіксованої осі симетрії, яка проходить через середини протилежних сірих дуг 2 -кольорового $2n$ -шаблону, вичерпуються діаграмами чотирьох типів – першого, другого, третього і четвертого, зображених на рис. 10 *a*), *b*), *c*) і *d*) відповідно.

Оскільки $n = 2m$, то

число діаграм першого типу становить $C_{\frac{2m-2}{2}}^1 = C_{m-1}^1$;

число діаграм другого типу також становить C_{m-1}^1 ;

число діаграм третього типу – $C_{\frac{2m-2}{2}}^1 = C_{m-1}^1$, а

четвертого типу – $C_{\frac{2m-2}{2}}^2 = C_{m-1}^2$.

І тому

$$s_2(n) = s_2(2m) = 3C_{m-1}^1 + C_{m-1}^2 = 2C_{m-1}^1 + C_m^2 = \frac{1}{8}(n - 2)(n + 8).$$

Крім того,

$$\frac{1}{2}(s_1(n) + s_2(n)) = \frac{1}{16}(n - 2)(n + n + 8) = \frac{1}{8}(n - 2)(n + 4).$$

□

З урахуванням співвідношень (9), (10) та лем 1 і 2, має місце

Теорема 3. Для натуральних $n \geq 3$ число $d^{**}(n)$ нееквівалентних (відносно дії дієдральної групи) діаграм з класу $\mathfrak{S}_{1,n-2;n}^O$ можна обчислити за формулою

$$d^{**}(n) = \frac{1}{2} (d^*(n) + S(n)), \quad (14)$$

де $d^*(n)$ визначається за формулами (6), (7), а

$$S(n) = \begin{cases} \frac{1}{2}m(m+1), & n = 2m + 1 \\ \frac{1}{2}(m-1)(m+2), & n = 2m. \end{cases} \quad (15)$$

3. Додатки та прикінцеві зауваження

Нижче (на рис. 11 та 12) в явному вигляді наведено всі неізоморфні діаграми з класів $\mathfrak{S}_{1,7;9}^O$ та $\mathfrak{S}_{1,8;10}^O$ відповідно.

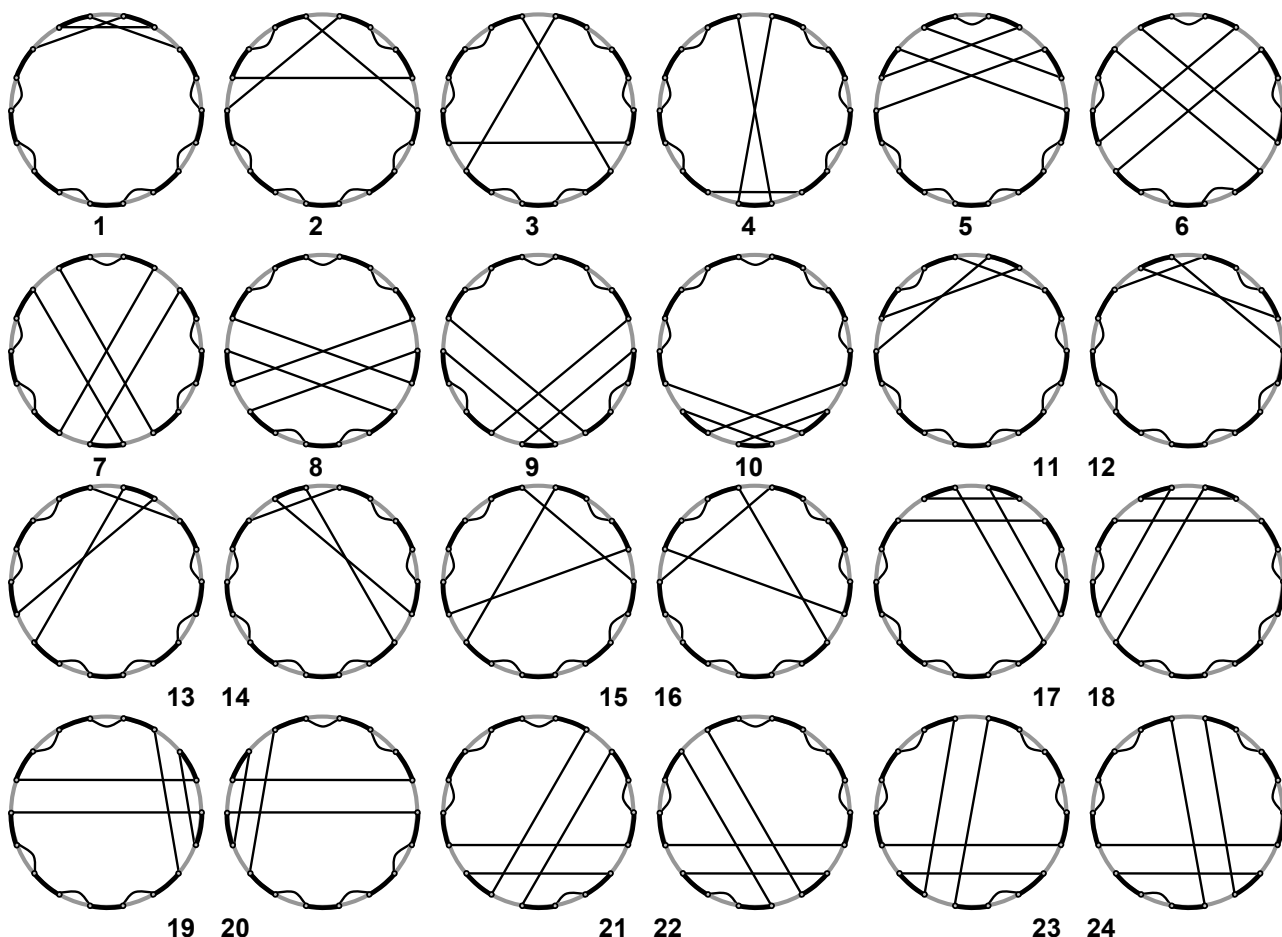


Рис. 11: всі неізоморфні діаграми з класу $\mathfrak{S}_{1,7;9}^O$

Не важко перевірити, що серед 24 неізоморфних діаграм з класу $\mathfrak{S}_{1,7;9}^O$ є 7 пар еквівалентних діаграм. І тому $d^{**}(9) = 17$.

Серед 34 неізоморфних діаграм з класу $\mathfrak{S}_{1,8;10}^O$ є 10 пар еквівалентних діаграм. І тому $d^{**}(10) = 24$.

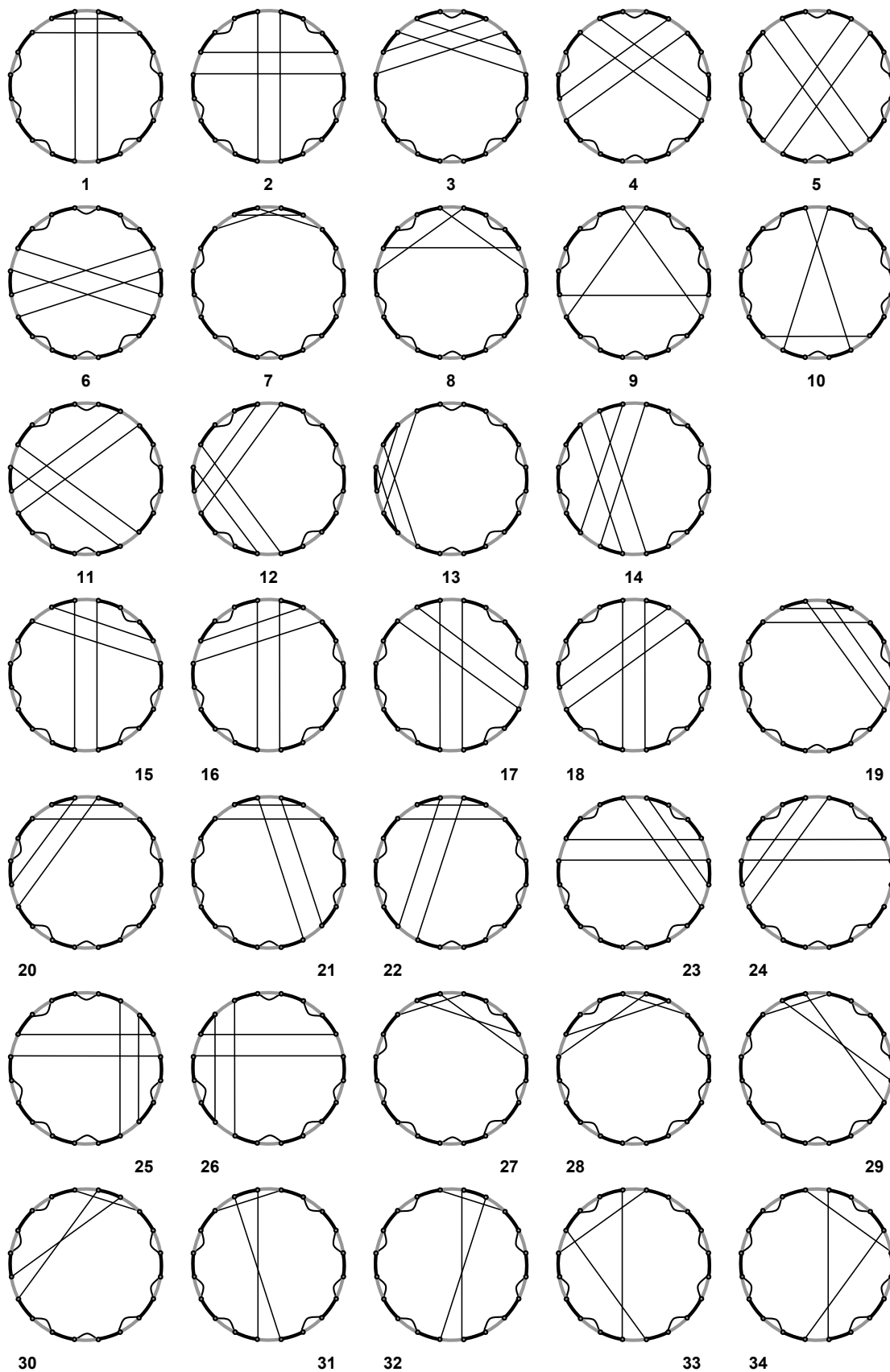


Рис. 12: всі неізоморфні діаграми з класу $\mathfrak{S}_{1,8;10}^O$

Повторюючи міркування, аналогічні наведеним в роботі [6], не важко встановити справедливність наступного твердження

Твердження 1. При $n \rightarrow \infty$ величини $d^{**}(n)$ та $\frac{d(n)}{2n} = \frac{(n-2) \cdot (n-1) \cdot (n+1)}{48}$ є еквівалентними нескінченно великими величинами.

n	$d(n)$	$d^*(n)$	$s(n)$	$d^{**}(n)$	$\overline{d^{**}(n)} = \left\lfloor \frac{d(n)}{2n} \right\rfloor$
4	5	2	2	2	1
5	15	3	3	3	2
6	35	7	5	6	3
7	70	10	6	8	5
8	126	17	9	13	8
9	210	24	10	17	12
10	330	34	14	24	17
11	495	45	15	30	23
12	715	62	20	41	30
13	1 001	77	21	49	39
14	1 365	99	27	63	49
15	1 820	122	28	75	61
16	2 380	151	35	93	74
17	3 060	180	36	108	90
18	3 876	218	44	131	108
19	4 845	255	45	150	128
20	5 985	302	54	178	150
21	7 315	349	55	202	174
22	8 855	405	65	235	201
23	10 626	462	66	264	231
24	12 650	531	77	304	264
25	14 950	598	78	338	299
26	17 550	678	90	384	338
27	20 475	759	91	425	379
28	23 751	852	104	478	424
29	27 405	945	105	525	473
30	31 465	1 053	119	586	524
40	101 270	2 537	209	1 377	1 266
100	4 082 925	40 842	1 274	21 058	20 415
200	65 998 350	330 017	5 049	167 533	164 996
300	335 246 275	1 117 526	11 324	564 425	558 744
400	1 061 326 700	2 653 367	20 099	1 336 733	1 326 658
500	2 593 739 625	5 187 542	31 374	2 609 458	2 593 740
1 000	41 583 291 750	41 583 417	125 249	20 854 333	20 791 646
2 000	665 999 833 500	333 000 167	500 499	166 750 333	166 499 958
3 000	3 372 749 625 250	1 124 250 251	1 125 749	562 688 000	562 124 938
4 000	10 661 332 667 000	2 665 333 667	2 000 999	1 333 667 333	1 332 666 583
5 000	26 031 248 958 750	5 206 250 417	3 126 249	2 604 688 333	2 603 124 896

Табл. 1: початкові значення величин $d(n)$, $d^*(n)$ та $d^{**}(n)$

Висновки

Таким чином, в представленій роботі для натуральних $n \geq 3$ повністю розв'язана задача про підрахунок числа *неізоморфних* (нееквівалентних відносно дії циклічної групи) та *нееквівалентних* (відносно дії дієдральної групи) діаграм з класу $\mathfrak{S}_{1,n-2;n}^O$. Крім того, для початкових $n \in \{3, 5, \dots, 10\}$ в явному вигляді наведено всі неізоморфні та нееквівалентні діаграми з відповідних класів, а для $n \in \{3, 5, \dots, 40\}$ – точні значення числа неізоморфних та нееквівалентних таких діаграм.

Більше того, з урахуванням зауваження 2. та теореми 1., існує тісний зв'язок між діаграмами з класу $\mathfrak{S}_{1,n-2g;n}^O$ та перестановками певного виду, чий «breakpoint» графі розкладаються у $k = n - 2g$ циклів [4, 5, 17].

На нашу думку, цілком досяжною здається подальша робота, пов'язана з одержанням аналогічних результатів для діаграм з класу $\mathfrak{S}_{1,n-4;n}^O$ (роду 2).

Література

1. *Callan D.* Non-crossing Partitions under Rotation and Reflection [Electronic resource] / D. Callan, L. Smiley // Arxiv: math. — 2000. — 15 p. — Access mode: <http://arxiv.org/abs/math.CO/0510447>.
2. *Cori R.* Counting non-isomorphic chord diagrams / R. Cori, M. Marcus // Theoretical Computer Science. — 1998. — Vol. 204. — P. 55–73.
3. *Harer J.* The Euler characteristic of the moduli space of curves / J. Harer, D. Zagier // Inventiones mathematical. — 1986. — No. 85. — P. 457–485.
4. *Doignon J.P.* On Hultman Numbers / J.P. Doignon, A. Labarre // Journal of Integer Sequences 10 (6), article 07.6.2, 13 pages.
5. *Grusea S.* The distribution of cycles in breakpoint graphs of signed permutations / S. Grusea, A. Labarre // Discrete Applied Mathematics. — 2013. — Vol. 161. — P. 1448–1466.
6. *Khruzin A.* Enumeration of chord diagrams, arXiv:math/0008209v1.
7. *Li B.* Exact number of chord diagrams and an estimation of the number of spine diagrams of order n / B. Li, H. Sun // Chinese Science Bulletin. — 1997. — Vol. 42, No. 9. — P. 705–720.
8. *Riordan J.* The distribution of crossings of chords joining pairs of $2n$ points on a circle // Math. Comp. — 1975. — Vol. 29, No. 129. — P. 215–222.
9. *Stoimenov A.* Enumeration of chord diagrams and an upper bound for Vassiliev invariants // Journal of Knot and its Ramifications. — 1998. — Vol. 7, No. 1. — P. 93–114.
10. *Walsh T.R.S., Lehman A.B.* Counting rooted maps by genus I, II // J. Combin. Theory (B). — 1972. — Vol. 13, Issue 2. — P. 192–218, 122–141.

11. The OEIS Foundation Inc., «The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences», published electronically at <http://oeis.org>.
12. *Кадубовський О.* Про один клас хордових діаграм максимального роду / О. Кадубовський // Вісник Київського університету Серія: фізико-математичні науки. — 2006. — Вип. 1. — С. 17–27.
13. *Кадубовський О.А.* Двокольорові O - і N -діаграми / О.А. Кадубовський, О.В. Сторожилова, Н.В. Сторожилова // Пошуки і знахідки. Серія: фізико-математичні науки. — 2010. — Том I, Вип. 10. — С. 41–50.
14. *Кадубовський О.А.* Двокольорові O -діаграми з одним чорним циклом / О.А. Кадубовський, Ю.С. Саприкіна, С.Ю. Мазур // Пошуки і знахідки. Серія: фізико-математичні науки. — 2010. — Том I, Вип. 10. — С. 51–60.
15. *Кадубовський А.А.* Двухцветные хордовые N -диаграммы с одним черным циклом // Труды института прикладной математики и механики НАН Украины. — 2012. — Том 24. — С. 134–146.
16. *Кадубовский А.А.* О числе топологически неэквивалентных функций с одной вырожденной критической точкой типа седло на двумерной сфере, II / А.А. Кадубовский / Труды международного геометрического центра. — 2015. — Том 8, № 1. — С. 46–61.
17. *Кадубовський О.А.* Перерахування топологічно нееквівалентних гладких мінімальних функцій на замкнених поверхнях // Топологія відображень маловимірних многовидів : Збірник праць Інституту математики НАН України. — 2015. — Том 12, № 6. — С. 105–145.

Kadubovs'kyi Oleksandr A., Balyasa Nataliya P.

Donbas State Teachers' Training University, Slovians'k, Ukraine.

Enumeration of 2-color chord O -diagrams of the genus one that have one black (or grey) face under rotation and reflection

In this paper we consider 2-color chord O -diagrams (of order n) with one black and $(n - 2)$ grey faces under the action of (i) the rotation group (cyclic of the order n) and of (ii) the rotation/reflection group (dihedral of the order $2n$).

For natural $3 \leq n \leq 10$ we have illustrated all non-isomorphic and non-equivalent of such diagrams. We have established explicit formulas for counting the number of non-isomorphic and non-equivalent diagrams from the specified class. In addition, for natural $3 \leq n \leq 40$ we have also listed the exact value of the number of non-isomorphic and non-equivalent such diagrams accordingly.

Keywords: 2-color chord O -diagrams, genus of a diagram, faces of a diagram, cyclic and dihedral groups.