МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ДЕРЖАВНИЙ ВИЩИЙ НАВЧАЛЬНИЙ ЗАКЛАД
«ДОНБАСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ ПЕДАГОГІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ»

ЗБІРНИК НАУКОВИХ ПРАЦЬ фізико-математичного факультету ДДПУ

Заснований у 2010 році

Випуск №3

Рекомендовано вченою радою Донбаського державного педагогічного університету

Слов'янськ – 2013

УДК 51+53+37.016:[51+53+004].
ББК 22.1+22.3+74.262.21+74.262.22.

З – 414

Збірник наукових праць фізико-математичного факультету ДДПУ. — Слов'янськ: ДДПУ, 2013. — № 3 — 256 с.

Для студентів, аспірантів та науковців в галузі фізико-математичних наук; вчителів та викладачів фізико-математичних дисциплін в ЗОШ та ВНЗ.

РЕКОМЕНДОВАНО ДО ДРУКУ

вченою радою державного вищого навчального закладу «Донбаський державний педагогічний університет», протокол № 9 від 25.04.2013р.

За достовірність посилань, цитат і результатів експериментів відповідальність несуть автори.

ISBN 978-966-1554-82-4

Від редакційної колегії

Шановні читачі!
Ви тримаєте в руках третій випуск «Збірника наукових праць фізико-математичного факультету» державного вищого навчального закладу «Донбаський державний педагогічний університет». Видання наукових праць викладачів, студентів та молодих науковців фізико-математичного факультету ДДПУ започатковано у 2010 році, коли результати наукових досліджень було опубліковано окремою серією «Фізико-математичні науки» в збірнику наукових праць «Пошуки і знахідки» за матеріалами науково-практичної конференції СДПУ «Актуальні питання сучасної науки і освіти» (СДПУ, 20-22 квітня 2010р.).

Метою збірника є підтримка наукової активності як серед студентів, так і серед молодих викладачів ДДПУ та інших ВНЗ.

Основу збірника складають повнотекстові статті доповідей на цьогорічній Всеукраїнській науково-практичній конференції «Актуальні питання сучасної науки і освіти» (Слов'янськ, ДДПУ, 23-25 квітня 2013р.). Основні результати доповідались на секційних засіданнях та були рекомендовані до друку головами секцій, завідувачами випускових кафедр та науковими керівниками випускових робіт.

Засновники збірника мають намір зробити його максимально відкритим як для авторів, так і для читачів. Він виходить один раз на рік у друкованому та електронному вигляді. Електронна версія журналу та інформація щодо співпраці з авторами доступна на сторінках офіційного сайту збірника за адресою `http://slavdpu.dn.ua/fizmatzbirnyk/begin.htm`.

Запрошуємо до співпраці. Наснаги та творчих успіхів!
Члени редакційної колегії.

До 75-річчя Шуригіної Лідії Семенівни

Цими сонячними весняними днями святкує свій ювілей Лідія Семенівна Шуригіна – кандидат педагогічних наук, доцент кафедри фізики державного вищого навчального закладу «Донбаський державний педагогічний університет», відмінник освіти України.

Фахівець у галузі теоретичної фізики, методики викладання фізики, вона є автором понад семидесяти наукових праць, присвячених актуальним питанням гуманітаризації та гуманізації природничо-наукової освіти, вдосконалення змісту освіти та професійної підготовки вчителя фізики, впровадженню ідей синергетики в підготовку майбутніх вчителів. Все своє життя Лідія Семенівна пов'язала з наукою і викладанням. Упродовж восьми років (1997-2005 рр.) Лідія Семенівна була деканом фізико-математичного факультету.

Лідія Семенівна навчалась в Кабардино-Балкарському державному університеті на фізико-математичному факультеті. Саме там були зроблені перші кроки на науковій ниві, на заняттях студентського наукового гуртка під керівництвом видатного фізика Франкля Ф.І.[1]

Після закінчення університету в 1959 році Лідія Семенівна 4 роки пропрацювала вчителем фізики в місті Слов'янську, а потім була прийнята на посаду асистента кафедри фізики Слов'янського державного педагогічного інституту, а ще через два роки одержала посаду старшого викладача.

[1] ФРАНКЛЬ ФЕЛІКС ІСИДОРОВИЧ [28.02(12.03).1905, м. Вена (Австрія) – 7.04.1961, м. Нальчик] – спеціаліст в галузі математики, механіки, математичної і теоретичної фізики, доктор філософії (1927), доктор технічних наук (1934), доктор фізико-математичних наук (1936), член-кореспондент Академії артилерійських наук (1947-1953). Народився в Австрії, в 1929 приїхав до СРСР. Автор фундаментальних досліджень по трансзвуковій газовій динаміці, методів розв'язування широкого класу газодинамічних задач тощо. В 1950 році за політичні погляди був виключений із ВКП(б) і висланий до м. Фрунзе, а потім у 1957 р. за станом здоров'я переїхав до м. Нальчик, де до кінця життя керував кафедрою експериментальної і прикладної фізики в Кабардино-Балкарському державному університеті.

Лідія Семенівна поєднувала викладацьку роботу з науковими дослідженнями. Курси підвищення кваліфікації з загальної фізики на ФПК Московського державного університету дали новий поштовх в науковій діяльності. Під керівництвом доктора педагогічних наук Пінського А.А.[2] Лідія Семенівна занялась дослідженнями ролі та місця релятивістських, квантових і статистичних ідей у викладанні фізики в середній та вищій школі. В 1979 році в науково-дослідному інституті змісту та методів навчання АПН СРСР (м. Москва) відбувся захист кандидатської дисертації на тему «Развитие статистических представлений школьников при изучении молекулярной, атомной и ядерной физики».

У 1986 році Шуригіній Л.С. присуджено вчене звання доцента по кафедрі фізики. Впродовж багатьох років Лідія Семенівна читала лекційні курси на фізико-математичному факультеті: методи математичної фізики, теоретична фізика, основи синергетики, актуальні проблеми сучасної фізики.

Упродовж 1997-2005 років Шуригіна Л.С. обіймала посаду декана фізико-математичного факультету СДПУ. Виняткова працездатність і діяльний характер, що спонукає до постійного творчого пошуку, знаходження нових нестандартних рішень, до застосування раціонального підходу у вирішенні будь-якої проблеми, допомагали поєднувати адміністративну і науково-педагогічну роботу.

Висока результативність науково-педагогічної діяльності Лідії Семенівни оцінена і відзначена рядом нагород:
- медаллю «Ветеран праці»,
- почесним знаком «Відмінник освіти України»,
- почесним дипломом від Донецької облдержадміністрації за вагомий внесок у створення «Золотого інтелектуального фонду» Донбасу,
- почесними грамотами Міністерства освіти і науки України.

У день ювілею нашої колеги кожен із нас хоче засвідчити шану та вдячність.

Щиросердно вітаємо Вас, шановна Лідія Семенівно, зі знаменною датою у Вашому житті! Бажаємо Вам міцного здоров'я на довгі роки, щастя, добробуту, творчого натхнення та плідної праці на науковій ниві!

[2] ПІНСЬКИЙ АРКАДІЙ АРОНОВИЧ (1922, Речиця Мінської губ. – 1997, Москва), доктор педагогічних наук (1977), професор (1983), член-кореспондент РАО (1995). З 1971 працював в АПН СРСР, головним науковим співробітником НДІ змісту і методів навчання. Автор навчальних посібників: Задачи по физике. М., 1977; Основы физики, т. 1–2. 3-е изд. М., 1981 (в співавторстві з Б.М. Яворським); Методика преподавания физики в средней школе. М., 1989.

Основні та найбільш вагомі праці Л.С. Шуригіної

1. *Шурыгина Л.С.* Значение структуры содержания учебного материала в формировании методов познавательной деятельности / Л.С. Шурыгина // Формирование умений и навыков в области познавательной деятельности в процессе изучения основ наук: Всесоюзная конференция: тезисы материалов. — Мин. просвещения УССР, 1974.
2. *Шурыгина Л.С.* О легко наблюдаемом релятивистском эффекте / Л.С. Шурыгина // Физика в школе, 1975. — № 3.
3. *Шурыгина Л.С.* Вероятностно-статистические идеи в курсе физики / Л.С. Шурыгина // Программа Всесоюзного совещания по проблемам преподавания физики в пединституте. — Чернигов, 1975.
4. *Шурыгина Л.С.* Статистические идеи в школьном курсе физики и проблемы формирования коммунистического мировоззрения / Л.С. Шурыгина // Воспитание учащихся в процессе обучения основ наук: сборник. — НИИ СиМО АПН СССР, 1977.
5. *Шурыгина Л.С.* Модельный эксперимент по молекулярной и ядерной физике / Л.С. Шурыгина, А.А. Пинский // Физика в школе. — Педагогика, 1977. — № 5.
6. *Шурыгина Л.С.* О развитии статистического мышления школьников в курсе физики / Л.С. Шурыгина, А.А. Пинский // Новые исследования в педагогических науках. — Педагогика, 1978. — № 1.
7. *Шурыгина Л.С.* К методике изучения явления фотоэффекта / Л.С. Шурыгина // Исследования по методике преподавания физики. — НИИ СиМО АПН СССР, 1978.
8. *Шурыгина Л.С.* К вопросу о взаимосвязи курсов теории вероятности и физики / Л.С. Шурыгина // Проблемы межпредметных связей в подготовке учителей математики и физики в пединститутах: Всесоюзная научная конференция: тезисы материалов. — Душанбе, 1978.
9. *Шурыгина Л.С.* Необратимость тепловых процессов / Л.С. Шурыгина // Учебный диафильм для факульт. курса в 9 классе. — Студия «Диафильм» Госкино СССР, 1979.
10. *Шурыгина Л.С.* Статистические идеи в курсе физики и формирование мировоззрения / Л.С. Шурыгина // Радянська школа. — Радянська школа, 1979. — № 3.

11. *Шурыгина Л.С.* Развитие статистических представлений школьников при изучении молекулярной, атомной и ядерной физики: автореф. дис. на здобуття наук. ступеня канд. пед. наук: спец. 13.00.02 «Методика навчання фізики» / Л.С. Шурыгина. — 1979.
12. *Шурыгина Л.С.* Изучение необратимости тепловых процессов / Л.С. Шурыгина // Физика в школе. — Педагогика, 1983. — № 5.
13. *Шурыгина Л.С.* Методические указания к изучению раздела «Квантовая физика» в средней школе (для студентов специальностей 2105, 2104) / Л.С. Шурыгина. — Мин. просв. УССР, Славянский госпединститут, 1987.
14. *Шурыгина Л.С.* К изучению эффекта Комптона / Л.С. Шурыгина // Физика в школе. — Педагогика, 1987. — № 2.
15. *Шурыгина Л.С.* О профессиональном становлении будущего учителя / Л.С. Шурыгина // Психологические условия профессионального становления личности в свете реформы общеобразовательной и профессиональной школы: Всесоюзная конференция: тезисы. — Славянск, 1988.
16. *Шурыгина Л.С.* Методические указания к курсу «Квантовая механика» (для студентов специальностей 2105, 2104) / Л.С. Шурыгина. — Мин. просв. УССР, Славянский госпединститут, 1988.
17. *Шурыгина Л.С.* Вопросы гуманитаризации преподавания физики / Л.С. Шурыгина // научно-методическая конференция: тезисы докладов. — Донецк, 1990.
18. *Шурыгина Л.С.* Пути реализации проблемного обучения на лекциях / Л.С. Шурыгина // Методические, дидактические и психологические аспекты проблемного обучения физике: Всесоюзная конференция: тезисы докладов. — Донецк, 1990.
19. *Шурыгина Л.С.* Проблемное обучение как условие развития творческого мышления / Л.С. Шурыгина // Всесоюзная конференция: тезисы. — Донецк, 1990.
20. *Шурыгина Л.С.* Проблемы гуманитаризации преподавания / Л.С. Шурыгина // Учитель и общество. Опыт, проблемы, поиски: сборник. — Измаил, 1990.
21. *Шурыгина Л.С.* О гуманитаризации преподавания физики / Л.С. Шурыгина // Личность и познавательные процессы: сборник. — Москва, 1991.
22. *Шурыгина Л.С.* Проблемные ситуации при изучении необратимости / Л.С. Шурыгина // Всесоюзная конференция. — Донецк, 1991.

23. *Шурыгина Л.С.* Психологические основы творчества и проблемное обучение / Л.С. Шурыгина, В.А. Надточий // Методологические, дидактические и психологические аспекты проблемного обучения: тезисы докладов 2-й всесоюзной научно-методологической конференции. — 1991.
24. *Шурыгина Л.С.* Об одном способе подготовки проблемных ситуаций / Л.С. Шурыгина, В.Н. Ткаченко // Международная научно-методическая конференция: тезисы. — Донецк, 1993. — С. 38 – 39.
25. *Шурыгина Л.С.* Проблемные ситуации при формировании понятия температуры / Л.С. Шурыгина, М.К. Нечволод // 3-я Международная конференция: тезисы. — Донецк, 1993. — С. 70 – 80.
26. *Шурыгина Л.С.* Численное моделирование процессов самоорганизации / Л.С. Шурыгина, Н.Н. Голоденко, Ю.Н. Гриценко // Компьютерные программы учебного назначения: 1-я Международная конференция: тезисы докладов. — Донецк, 1993. — С. 293 – 294.
27. *Шурыгина Л.С.* Автоматизированная установка на базе микроЭВМ для определения концентрации примесей в полупроводниках / Л.С. Шурыгина, В.Н. Ткаченко, В.А. Надточий // Компьютерные программы учебного назначения: 1-я Международная конференция: тезисы докладов. — Донецк, 1993. — С. 270 – 271.
28. *Шуригіна Л.С.* Задача як спосіб створення проблемної ситуації / Л.С. Шуригіна // Проблеми використання задач у процесі викладання природничо-математичних дисциплін: Збірник статей. — Чернігів, 1993. — С. 134 – 135.
29. *Шуригіна Л.С.* Ідеї інтеграції в підготовці учителя фізики / Л.С. Шуригіна // Регіональна науково-практична конференція: тези доповідей. — Запоріжжя, 1993. — С. 28 – 29.
30. *Шуригіна Л.С.* До проблеми розвитку творчого мислення / Л.С. Шуригіна, В.М. Ткаченко, О.П. Каменєв // Формування творчої особистості для оновлюваної національної школи: Всеукраїнської науково-практичної конференції: тези доповідей. — Умань, 1993.
31. *Шурыгина Л.С.* О междисциплинарном семинаре «Принцип дополнительности» / Л.С. Шурыгина // Международная научная конференция: тезисы докладов. — Тернополь, 1993.
32. *Шуригіна Л.С.* Математичне моделювання як метод формування інтегративного мислення / Л.С. Шуригіна, М.М. Голоденко // Інтегративні ідеї у викладанні природознавчих наук: Міжнародна конференція: тези доповідей. — Тернопіль, 1993.

33. *Шуригіна Л.С.* Информатизация системы образования как условие совершенствования его содержания / Л.С. Шуригіна, М.М. Голоденко, В.О. Надточій // Комп'ютерні програми учбового призначення: II Міжнародна конференція: тези доповідей. — Донецьк: ДонДУ, 1994. — С. 35.
34. *Шуригіна Л.С.* Шляхи гуманітаризації викладання фізики / Л.С. Шуригіна, М.М. Голоденко, М.К. Нечволод // Шляхи удосконалення фундаментальної і професійної підготовки вчителів фізики: II Всеукраїнська конференція: II Всеукраїнської конференції: тези доповідей, — Київ, 1995. — Ч. 1. — С. 10.
35. *Шуригіна Л.С.* Зміст освіти і можливості НІТ / Л.С. Шуригіна, В.О. Надточій // Шляхи удосконалення фундаментальної і професійної підготовки вчителів фізики: II Всеукраїнська конференція: тези доповідей. — Київ, 1995. — Ч. 1. — С. 11.
36. *Шуригіна Л.С.* Шляхи гуманітаризації викладання фізики / Л.С. Шуригіна, М.К. Нечволод, М.М. Голоденко // Проблеми удосконалення фундаментальної та професійної підготовки вчителів фізики: збірник. — Київ: Укр. держ. педуніверситет, 1996. — С. 33 – 37.
37. *Шуригіна Л.С.* Про вдосконалення змісту шкільної фізичної освіти / Л.С. Шуригіна, В.О. Надточій // Методичні особливості викладання фізики на сучасному етапі: II міжвузівська науково-практична конференція: матеріали доповідей. — Кіровоград, 1996 — Ч. 1. — С. 92 – 93.
38. *Шурыгина Л.С.* Проблемные ситуации в разделе «Квантовая физика» / Л.С. Шурыгина, Е.Г. Шурыгин // Методологические, дидактические и психологические аспекты проблемного обучения: материалы 4-й международной научно-методологической конференции. — Донецк: ДонГУ, 1996.
39. *Шуригіна Л.С.* Фізика як засіб гуманітаризації освітньо-професійної підготовки вчителя технологій / Л.С. Шуригіна // Проблеми трудової і професійної підготовки: науково-методичний збірник. — Київ-Слов'янськ, 1997. — Вип 1. — С. 51 – 53.
40. *Шуригіна Л.С.* Фізика як фундаментальна наука в освітньо-професійній підготовці вчителя технологій освіти / Л.С. Шуригіна, М.К. Нечволод, В.О. Надточій // Трудова підготовка учнів та підготовка вчителів трудового навчання: історія, сучасність, перспективи розвитку : матеріали доповідей науково-практичної конференції. — Слов'нськ: СДПІ, 1997.
41. *Шурыгина Л.С.* Использование аналогии для создания проблемных ситуаций / Л.С. Шурыгина, В.А. Надточий // Современные проблемы дидактики высшей школы: тезисы Междун. конф. — Донецк: ДонГУ, 1997.

42. *Шурыгина Л.С.* Интегративные курсы как средство совершенствования содержания образования / Л.С. Шурыгина, Н.К. Нечволод // Современные проблемы дидактики высшей школы: тезисы Международной конференции. — Донецк: ДонГУ, 1997.
43. *Шуригіна Л.С.* До методики формування ймовірнісно-статистичного стилю мислення / Л.С. Шуригіна, Є.Г. Шуригін, О.М. Ладика // Методичні особливості викладання фізики на сучасному етапі: науково-методичний збірник. — Кіровоград, 1998. — С. 120 – 121.
44. *Шуригіна Л.С.* Шляхи гуманітаризації викладання прикладних наук / Л.С. Шуригіна, Є.Г. Шуригін, М.М. Голоденко // Гуманітаризація навчально-виховного процесу: Науково-методичний збірник. — Слов'янськ, 1998. — Вип. 4. — С. 38 – 44.
45. *Шуригіна Л.С.* До методики вивчення електричних машин / Л.С. Шуригіна, М.К. Нечволод, В.О. Надточій, М.М. Голоденко // Методичні особливості викладання фізики на сучасному етапі: науково-методичний збірник. — Кіровоград, 1998. — С. 116 – 117.
46. *Шуригіна Л.С.* Про критерії відбору змісту фізичної освіти / Л.С. Шуригіна, М.М. Голоденко, Є.Г. Шуригін // Дидактичні проблеми вдосконалення фізичної освіти в Україні. — Чернігів, 1998.
47. *Шуригіна Л.С.* Комп'ютерне моделювання досліду Франка-Герца / Л.С. Шуригіна, В.О. Надточій, В.Н. Ткаченко, М.М. Голоденко // Дидактичні проблеми вдосконалення фізичної освіти в Україні. — Чернігів, 1998.
48. *Шуригіна Л.С.* Про гуманітарізацію і гуманізацію природничо-наукової освіти / Л.С. Шуригіна, М.К. Нечволод, М.М. Голоденко // Гуманізація навчально-виховного процесу у вищій школі: наукові праці міжнародної науково-практичної конф. — Слов'янськ: СДПІ, 1999. — С. 32 – 34.
49. *Шуригіна Л.С.* Визначення коефіцієнту тертя кочення / Л.С. Шуригіна, М.К. Нечволод, В.О. Надточій, М.М. Голоденко // Науково-методичний збірник з проблем навчального фізичного експерименту. — Чернігівський державний педагогічний університет, 1999.
50. *Шуригіна Л.С.* Про вивчення законів еволюції / Л.С. Шуригіна, Є.Г. Шуригін // Фундаментальна та професійна підготовка фахівця з фізики: V Всеукраїнська наукова конференція, 6 – 7 черв. 2000 р.. — Київ: Національний педуніверситет ім. М.П. Драгоманова, 2000.
51. *Шуригіна Л.С.* Емоційний фактор у викладанні фізики / Л.С. Шуригіна, М.К. Нечволод, В.О. Надточій, М.М. Голоденко // Активізація навчальної діяльності в школі та вузі: Всеукраїнська науково-практична

конференція. — Криворізький держ. педуніверситет, 2000.
52. *Шурыгина Л.С.* О гуманитаризации естественнонаучного образования / Л.С. Шурыгина, Е.Г. Шурыгин // Наука и образование на пороге III-го тысячелетия. — 2000. — С. 212.
53. *Шуригіна Л.С.* Елементи синергетики в курсі фізики / Л.С. Шуригіна, Ю.М. Рибянський // Проблеми методики викладання фізики на сучасному етапі: матеріали всеукранської науково-практичної конференції. — Кіровоград, 2000.
54. *Шуригіна Л.С.* Проблеми сучасних освітніх технологій / Л.С. Шуригіна, М.К. Нечволод, М.М. Голоденко, В.О. Надточій, А.М. Берестовий // Управління якістю професійної освіти: міжнародна науково-методична конференція: збірник наукових праць. — Донецьк: Либідь, 2001. — С. 265 – 268.
55. *Шуригіна Л.С.* Людина як об'єкт пізнання в точних науках / Л.С. Шуригіна, Є.Г. Шуригін, Т.С. Савченко // Гуманізація навчально-виховного процесу: Збірник наукових праць. — Слов'янськ, 2001. — Вип. XII. — С. 62 – 67.
56. *Шуригіна Л.С.* Інтегровані курси як засіб фундаменталізації освіти / Л.С. Шуригіна, Є.Г. Шуригін // Фундаментальна та професійна підготовка фахівців з фізики: VII Всеукраїнська наукова конференція: тези доповідей. — Київ, 2002. — С. 46.
57. *Шуригіна Л.С.* Еволюція як трансдисциплінарна категорія / Л.С. Шуригіна, Є.Г. Шуригін // Теорія та методика навчання математики, фізики, інформатики. — Т. 2. — Кривий Ріг. — 2002. — С. 357 – 362.
58. *Шуригіна Л.С.* Інтегровані курси як засіб фундаменталізації освіти / Л.С. Шуригіна, Є.Г. Шуригін, Т.С. Савченко // Наукові записки: збірник наукових статей Національного педагогічного університету ім. М.П. Драгоманова. — К.: НПУ. — 2002. — Випуск 48. — С. 204 – 207.
59. *Шуригіна Л.С.* Об изучении антропного принципа / Л.С. Шурыгина, К.В. Ларин // Пошуки і знахідки. — Слов'янськ, 2003. — С. 17 – 21.
60. *Шуригіна Л.С.* К проблеме совершенствования содержания физического образования / Л.С. Шурыгина, М.Л. Захаров, Н.В. Линник // Пошуки і знахідки. — Слов'янськ, 2003. — С. 17 – 21.
61. *Шуригіна Л.С.* Синергетика в системі педагогічної освіти / Л.С. Шуригіна, Є.Г. Шуригін // Стратегічні напрями реформування системи освіти: Матеріали VII Міжнародної науково-практичної конференції. — Дніпропетровськ: Наука і освіта, 2004. — Том 40. — С. 68 – 69.

62. *Шуригіна Л.С.* Шляхи вдосконалення змісту освіти / Л.С. Шуригіна, Є.Г. Шуригін // Фундаментальна та професійна підготовка фахівців з фізики: IX Всеукраїнська наукова конференція: матеріали конференції. — Київ: НПУ, 2004. — С. 14.
63. *Шуригіна Л.С.* Шляхи вдосконалення змісту освіти / Л.С. Шуригіна, Є.Г. Шуригін // Науковий вісник НПУ імені М.П. Драгоманова Серія: педагогічні науки. — 2004. — Вип. 1.
64. *Шуригіна Л.С.* О формировании нелинейного стиля мышления / Л.С. Шурыгина, Е.Г. Шурыгин // Наукові дослідження — теорія та експеримент 2006: Матеріали другої міжнародної науково-практичної конференції. — Полтава, 2006. — Т. 4 — С. 151 – 153.
65. *Шуригіна Л.С.* Операторы квантовой механики / Л.С. Шурыгина, Е.Г. Шурыгин // Учебное пособие. — Славянск: СДПУ, 2008. — 66 с.
66. *Шуригіна Л.С.* К проблеме формирования современной научной картины мира / Л.С. Шурыгина, Е.Г. Шурыгин // Якісна освіта XXI століття: проблеми і пошуки : збірник матеріалів Всеукраїнської науково-методичної конференції, 14 березня 2009 р., Донецк. Т. 1. / Ред. Н.М. Лосєва. — Донецк: ДонНУ. — 2009. — С. 123 – 128.
67. *Шуригіна Л.С.* Про вивчення поняття необоротності / Л.С. Шуригіна, С.В. Павлов // Пошуки і знахідки. — Слов'янськ, 2009. — Вип. 3. — С. 119 – 121.
68. *Шуригіна Л.С.* Синергетика и образование / Л.С. Шуригіна // Проблеми трудової професійної підготовки. — Слов'янськ: СДПУ, 2011. — С. 3 – 11.
69. *Шуригіна Л.С.* Идеи синергетики в содержании образования будущих учителей / Л.С. Шурыгина, Е.Г. Шурыгин, Н.В. Скворцова // Теорія та методологія фундаментальних дисциплін у вищій школі: збірник наукових праць. — Кривий Ріг: НметАу, 2012. — С. 229 – 237.
70. *Шуригіна Л.С.* Антропный принцип в науке и в содержании образования / Л.С. Шурыгина, Е.Г. Шурыгин // Збірник наукових праць фізико-математичного факультету СДПУ. — Слов'янськ, 2012. — Вип. 2. — С. 208 – 215.

Шановній Лідії Семенівні бажаємо міцного здоров'я, творчої наснаги і подальших успіхів у науці та викладацькій роботі!

Професорсько-викладацький склад
фізико-математичного факультету ДДПУ.

МАТЕМАТИКА

УДК 517.5

Новиков О.А., Ровенская О.Г., Шулик Т.В., Шаповалов М.С.

[1] *кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математики, ГВУЗ «ДГПУ»*

[2] *кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей математики, ДГМА*

[3] *секретарь научного отдела, ГВУЗ «ДГПУ»*

[4] *студент 3 курса физико-математического факультета, ГВУЗ «ДГПУ»*

e-mail: sgpi@slav.dn.ua

ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ПОВТОРНИХ МЕТОДОВ ВАЛЛЕ ПУССЕНА В ВИДЕ λ–МЕТОДОВ

Получены элементы суммирующих треугольных матриц операторов повторных методов Валле Пуссена.

Ключевые слова: *ряды Фурье, повторные суммы Валле Пуссена*

Введение

Пусть L — множество суммируемых 2π–периодических функций, $f \in L$ и

$$S[f] = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k(f)\cos kx + b_k(f)\sin kx) \equiv \sum_{k=0}^{\infty} A_k(f;x) \qquad (1)$$

— ряд Фурье функции f,

$$a_k(f) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos kt\ dt, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots,$$

$$b_k(f) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin kt\ dt, \qquad k = 1, 2, \ldots,$$

— коэффициенты Фурье функции f.

Обозначим через $S_n(f;x)$ частичные суммы ряда Фурье

$$S_n(f;x) = \sum_{k=0}^{n} a_k \cos kx + b_k \sin kx. \qquad (2)$$

Суммы Валле Пуссена функции $f \in L$ (см. [1, с. 47]) могут быть заданы соотношением

$$V_{n,p}(f,x) = \frac{1}{p} \sum_{k=n-p}^{n-1} S_k(f,x). \tag{3}$$

Пусть p_1, p_2 — произвольные натуральные числа такие, что $p_1 + p_2 < n$. Повторными суммами Валле Пуссена [2] называются тригонометрические многочлены, которые задаются следующим соотношением

$$V_{n,p_1,p_2}(f,x) = V^{(2)}_{n,\overline{p}}(f,x) = \frac{1}{p_1} \sum_{k=n-p_1}^{n-1} \frac{1}{p_2} \sum_{m=k-p_2+1}^{k} S_m(f,x). \tag{4}$$

Для применения методов изучения интегральних представлений при исследовании свойств приближающих операторов эти операторы следует представить в виде так называемых λ–методов, которые порождаются бесконечными треугольными матрицами следующим образом.

При помощи бесконечной треугольной матрицы чисел $\Lambda = \{\lambda_k^{(n)}\}$, $k,n = 0,1,2,\ldots$, $\lambda_0^{(n)} = 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\lambda_k^{(n)} = 0$ при $k \geqslant n$, каждой функции f, имеющей ряд Фурье (1), поставим в соответствие последовательность тригонометрических полиномов:

$$U_n(f;x;\Lambda) = \frac{a_0}{2}\lambda_0^{(n)} + \sum_{k=1}^{n-1} \lambda_k^{(n)}(a_k(f)\cos kx + b_k(f)\sin kx). \tag{5}$$

В виде тригонометрических полиномов (5) суммы Валле Пуссена $V_{n,p}(f;x)$ функции $f(x)$, задаваемые соотношением (3), можно задать при помощи матрицы $\Lambda = \{\lambda_k^{(n)}\}$, элементы которой задаются следующим соотношением

$$\lambda_k^{(n)} = \begin{cases} 1, & 1 \leqslant k \leqslant n-p; \\ 1 - \frac{k-n+p}{p}, & n-p < k \leqslant n,\ n,\ p \in \mathbb{N},\ p < n. \end{cases}$$

Задача представления повторных методов Валле Пуссена в виде λ–методов состоит в том, чтобы построить матрицу $\Lambda = \{\lambda_k^{(n,\overline{p})}\}$, при помощи которой суммы $V_{n,p_1,p_2}(f,x)$ задаются соотношением (5).

Основна часть

Теорема 1. *Пусть* $p_1, p_2 \in \mathbb{N}$, $p_1 \leqslant p_2 < n$. *Тогда если*

$$\lambda_k^{(n,\overline{p})} = \begin{cases} 1, & 1 \leqslant k \leqslant n-p_1-p_2+1; \\ 1 - \frac{(k-n+p_1+p_2)(k-n+p_1+p_2-1)}{2p_1p_2}, & n-p_1-p_2+1 \leqslant k \leqslant n-p_2; \\ 1 - \frac{2k-2n+2p_2+p_1-1}{2p_2}, & n-p_2 \leqslant k \leqslant n-p_1; \\ 1 - \frac{2p_1p_2-(n-k)(n-k+1)}{2p_1p_2}, & n-p_1 \leqslant k \leqslant n-1. \end{cases} \tag{6}$$

то повторные методы Валле Пуссена задаются соотношением

$$V_{n,p_1,p_2}(f,x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} \lambda_k^{(n,\overline{p})}(a_k(f)\cos kx + b_k(f)\sin kx).$$

Доказательство.

Пусть $p_1 \leqslant p_2$. Тогда требуемые числа $\lambda_k^{(n,\overline{p})}$ удовлетворяют условие

$$\frac{1}{p_1p_2}\sum_{k=n-p_1}^{n-1}\sum_{m=k-p_2+1}^{k} S_m(f,x) =$$

$$\frac{1}{p_1p_2}\left(\begin{array}{ccccccc} S_{n-p_1-p_2+1}+ & S_{n-p_1-p_2+2}+ & S_{n-p_1-p_2+3}+ & ... & S_{n-p_2}+ & ... & S_{n-p_1}+ \\ S_{n-p_1-p_2+2}+ & S_{n-p_1-p_2+3}+ & S_{n-p_1-p_2+4}+ & ... & S_{n-p_2+1}+ & ... & S_{n-p_1+1}+ \\ S_{n-p_1-p_2+3}+ & S_{n-p_1-p_2+4}+ & S_{n-p_1-p_2+5}+ & ... & S_{n-p_2+2}+ & ... & S_{n-p_1+2}+ \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ S_{n-p_2}+ & S_{n-p_2+1}+ & S_{n-p_2+2}+ & ... & S_{n-p_2+p_1}+ & ... & S_{n-1} \end{array}\right)$$

$$= 1\cdot S_{n-p_1-p_2+1} + 2\cdot S_{n-p_1-p_2+2} + 3\cdot S_{n-p_1-p_2+3} + ... + p_1\cdot S_{n-p_2} + p_1\cdot S_{n-p_2+1} + ...$$

$$... + p_1\cdot S_{n-p_1} + (p_1-1)\cdot S_{n-p_1+1} + ... + 1\cdot S_{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1}\lambda_k^{(n)} A_k(f;x).$$

Гармоники $A_k(f;x)$, у которых $0 \leqslant k \leqslant n-p_1-p_2+1$, содержатся по одной в каждой из сумм S_m, $n-p_1-p_2+1 \leqslant m \leqslant n-1$. Поэтому для $0 \leqslant k \leqslant n-p_1-p_2+1$ выполнено $\lambda_k^{(n)} = 1$. Гармоника $A_{n-p_1-p_2+2}(f;x)$ не содержится в одной сумме $1\cdot S_{n-p_1-p_2+1}$, поэтому $\lambda_{n-p_1-p_2+2}^{(n)} = \frac{p_1p_2-1}{p_1p_2} = 1-\frac{1}{p_1p_2}$. Гармоника $A_{n-p_1-p_2+3}(f;x)$ не содержится в трех суммах в $1\cdot S_{n-p_1-p_2+1}$ и в $2\cdot S_{n-p_1-p_2+2}$, поэтому $\lambda_{n-p_1-p_2+3}^{(n)} = \frac{p_1p_2-(1+2)}{p_1p_2} = 1-\frac{(1+2)}{p_1p_2}$. Продолжая по аналогии получаем, что для $1 \leqslant i \leqslant p_1$ выполняется

$$\lambda_{n-p_1-p_2+i}^{(n)} = \frac{p_1p_2-(1+2+3+...+i-1)}{p_1p_2} = \frac{p_1p_2-\frac{(i-1)i}{2}}{p_1p_2} = 1-\frac{(i-1)i}{2p_1p_2}.$$

Поэтому, применяя замену $i = k-n+p_1+p_2$, для $n-p_1-p_2+1 \leqslant k \leqslant n-p_2$ получаем

$$\lambda_k^{(n,\overline{p})} = 1-\frac{(k-n+p_1+p_2)(k-n+p_1+p_2-1)}{2p_1p_2}.$$

Гармоника A_{n-p_2+1} содержится в суммах

$$p_1\cdot S_{n-p_2+1} + ... + p_1\cdot S_{n-p_1} + (p_1-1)\cdot S_{n-p_1+1} + ... + 1\cdot S_{n-1}.$$

Поэтому $\lambda^{(n)}_{n-p_2+1} = \frac{(p_2-p_1)p_1+\frac{(p_1-1)p_1}{2}}{p_1p_2}$.

Гармоника $A_{n-p_2+2}(f;x)$ содержится по одной в каждой из сумм

$$p_1 \cdot S_{n-p_2+2} + ... + p_1 \cdot S_{n-p_1} + (p_1-1)\cdot S_{n-p_1+1} + ... + 1 \cdot S_{n-1}$$

поэтому $\lambda^{(n,\overline{p})}_{n-p_2+2} = \frac{(p_2-p_1-1)p_1+\frac{(p_1-1)p_1}{2}}{p_1p_2}$. Для $0 \leqslant i \leqslant p_2-p_1$ гармоника $A_{n-p_2+i}(f;x)$ содержится в суммах

$$p_1 \cdot S_{n-p_2+i} + ... + p_1 \cdot S_{n-p_1} + (p_1-1)\cdot S_{n-p_1+1} + ... + 1 \cdot S_{n-1}.$$

Поэтому $\lambda^{(n,\overline{p})}_{n-p_2+i} = \frac{(p_2-p_1-i+1)p_1+\frac{(p_1-1)p_1}{2}}{p_1p_2}$.

Следовательно, применяя замену $i = k-n+p_2$, для $n-p_2+1 \leqslant k \leqslant n-p_1$ получаем

$\lambda^{(n)}_{k} = \frac{(p_2-p_1-k+n-p_2+1)p_1+\frac{(p_1-1)p_1}{2}}{p_1p_2} = \frac{2(n-p_1-k+1)p_1+(p_1-1)p_1}{2p_1p_2} =$

$$= \frac{2(n-p_1-k+1)+(p_1-1)}{2p_2} = 1 - \frac{2p_2+p_1-1-2(n-k)}{2p_2}$$

$$= 1 - \frac{2(k-n+p_2)+p_1-1}{2p_2}.$$

Гармоника $A_{n-p_1+1}(f;x)$ содержится в суммах

$$(p_1-1)\cdot S_{n-p_1+1} + (p_1-2)\cdot S_{n-p_1+2} ... + 1 \cdot S_{n-1}$$

поэтому $\lambda^{(n)}_{n-p_1+1} = \frac{\frac{(p_1-1)p_1}{2}}{p_1p_2}$.

Гармоника $A_{n-p_1+2}(f;x)$ содержатся в суммах

$$(p_1-2)\cdot S_{n-p_1+2} + (p_1-3)\cdot S_{n-p_1+3} ... + 1 \cdot S_{n-1}$$

поэтому $\lambda^{(n,\overline{p})}_{n-p_1+2} = \frac{\frac{(p_1-2)(p_1-1)}{2}}{p_1p_2}$ и по аналогии $\lambda^{(n,\overline{p})}_{n-p_1+i} = \frac{\frac{(p_1-i)(p_1-(i-1))}{2}}{p_1p_2}$. Следовательно, применяя замену $i = k-n+p_1$, для $n-p_2+1 \leqslant k \leqslant n-p_1$ получаем

$$\lambda^{(n,\overline{p})}_{k} = \frac{(p_1-k+n-p_1)(p_1-k+n-p_1+1)}{p_1p_2} = \frac{(n-k)(n-k+1)}{p_1p_2}.$$

Таким образом, для случая $p_1 \leqslant p_2$ элементы суммирующей матрицы повторных методов Валле Пуссена задаются соотношением (2). $\square$

Литература

[1] *Степанец А.И.* Классификация и приближение периодических функций / А.И. Степанец. — К.: Наук. думка, 1987. — 268 с.

[2] *Ровенская О.Г.* Приближение интегралов Пуассона повторными суммами Валле Пуссена / О.Г. Ровенская, О.А. Новиков // Нелінійні коливання. — 2010. — Т. 13, № 1. — С. 96 – 99.

УДК 517.5

Новиков О.А., Кондрашина Г.М., Больбат І.А., Маража О.С., Лащенова А.А.

[1] *кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математики, ГВУЗ «ДГПУ»*

[2–5] *студенты 5 курса физико-математического факультета, ГВУЗ «ДГПУ»*

e-mail: sgpi@slav.dn.ua

ПРИБЛИЖЕНИЕ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Получены элементы суммирующих треугольных матриц операторов повторных методов Валле Пуссена.

Ключевые слова: *ряды Фурье, асимптотические формулы*

Введение

Достаточно общая классификация непрерывных периодических функций по признаку их аппроксимативных свойств на основе учета свойств тригонометрических рядов, полученных преобразованием их рядов Фурье при помощи мультипликатров и сдвигов по аргументу, была построена в работах А.И. Степанца в 1983 году [1].

Аналогичные классификации функций двух и многих переменных были построены в работах П.В. Задерея [2], А.И. Степанца, Н.Л. Пачулиа [3], Р.А. Ласурии [4], В.И. Рукасова, О.А. Новикова, В.И. Бодрой [5]. В этих работах изучаются вопросы приближения прямоугольными линейными методами классов (ψ, β)-дифференцируемых периодических функций многих переменных. Классы (ψ, β)-дифференцируемых функций многих переменных, в этих работах определялись двумя наборами функций-мультипликаторов и сдвигов по аргументу.

В данной статье изучаются аналогичные вопросы на классах (ψ, β)-дифференцируемых функций m переменных, определяемых m наборами мультипликаторов для каждого числа переменных. Получены асимптотические формулы для верхних граней уклонений различных прямоугольных линейных средних рядов Фурье, взятых по классам функций многих переменных малой гладкости в ситуациях, когда доминирующими в определении гладких свойств функций могут оказаться их смешанные производные.

В частности, в таких случаях найдены асимптотические равенства, которые обеспечивают решение задачи Колмогорова–Никольского [1, с. 8] на этих классах для прямоугольных операторов Фурье, классических и обобщенных операторов Зигмунда, методов Валле Пуссена.

Для дальнейшего изложения введем ряд обозначений и определений.

Пусть R^m – пространство m-мерных векторов $\vec{x} = (x_1, x_2, ..., x_m)$, $T^m = \prod_{i=1}^{m} [-\pi; \pi]$ – m-мерный куб с ребром 2π,

$$N^m = \{\vec{x} \in R^m | x_i \in N,\ i = 1, 2, ..., m\},$$
$$N_*^m = \{\vec{x} \in R^m | x_i \in N_* = N \cup \{0\},\ i = 1, 2, ..., m\},$$
$$N_i^m = \{\vec{x} \in R^m | x_i \in N,\ x_j \in N_*,\ i \neq j\}.$$

Через E^m обозначим множество точек из R^m, координаты которых принимают одно из двух значений: 0 или 1.

Через $L(T^m)$ обозначим множество 2π-периодических по каждой переменной, суммируемых на кубе периодов T^m, функций $f(\vec{x}) = f(x_1, x_2, ..., x_m)$.

Пусть $f \in L(T^m)$. Следуя [1], каждой паре точек $\vec{s} \in E^m$, $\vec{k} \in N_*^m$, поставим в соответствие коэффициент Фурье функции f

$$a_{\vec{k}}^{\vec{s}}(f) = \frac{1}{\pi^m} \int_{T^m} f(\vec{x}) \prod_{i=1}^{m} \cos\left(k_i x_i - \frac{s_i \pi}{2}\right) dx_i.$$

Каждому вектору $\vec{k} \in N_*^m$ поставим в соответствие гармонику ряда Фурье функции $f(\vec{x})$

$$A_{\vec{k}}(f; \vec{x}) = \sum_{\vec{s} \in E^m} a_{\vec{k}}^{\vec{s}}(f) \prod_{i=1}^{m} \cos\left(k_i x_i - \frac{s_i \pi}{2}\right).$$

Следуя [3], ряд Фурье функции $f(\vec{x})$ определим следующим соотношением

$$S[f] = \sum_{\vec{k} \in N_*^m} \frac{1}{2^{q(\vec{k})}} A_{\vec{k}}(f; \vec{x}), \tag{1}$$

где $q(\vec{k})$ – количество нулевых координат вектора $\vec{k}$.

Пусть $\overline{m} = \{1, 2, ..., m\}$ и μ – какое-либо подмножество из $\overline{m}$, обозначим через $|\mu|$ количество элементов множества μ и через $\mu(r)$ – всякое r-элементное подмножество из $\overline{m}$ $(|\mu(r)| = r)$.

По аналогии с одномерным случаем, гармоникой, сопряженной с $A_{\vec{k}}(f; \vec{x})$ по переменной x_r, будем называть величину

$$A_{\vec{k}}^{\vec{e}_r}(f; \vec{x}) = \sum_{\vec{s} \in E^m} a_{\vec{k}}^{\vec{s}}(f) \prod_{i \in \overline{m} \setminus \{r\}} \cos\left(k_i x_i - \frac{s_i \pi}{2}\right) \cos\left(k_r x_r - \frac{(s_r + 1)\pi}{2}\right).$$

Определим понятие (ψ,β)-производных функций многих переменных, используя схемы введения (ψ,β)-производных функций одной переменной (см. [1]) и обыкновенных частных производных функций многих переменных.

Пусть $\psi_{i,r}(k_i), i=1,2,...,m, r=1,2,...,m,\ k_i\in N_*$ — фиксированные системы чисел, $\vec{\beta}_r=(\beta_{1,r},\beta_{2,r},...,\beta_{m,r})$ – фиксированный набор векторов ($\beta_{i,r}\in\mathbb{R}$, $i=1,2,...,m$). Пусть для фиксированного $r\in\overline{m}$ существует функция $\varphi_i^{(1)}\in L(T^m)$ такая, что

$$S[\varphi_i^{(1)}]=\sum_{\vec{k}\in N_i^m}\frac{1}{2^{q(\vec{k})}\psi_{i,1}(k_i)}\left[A_{\vec{k}}(f;\vec{x})\cos\frac{\beta_{i,1}\pi}{2}-A_{\vec{k}}^{\vec{e}_i}(f;\vec{x})\sin\frac{\beta_{i,1}\pi}{2}\right]. \qquad (2)$$

Тогда эту функцию $\varphi_i^{(1)}(\vec{x})$ будем называть частной $(\psi_{i,1};\beta_{i,1})$–производной функции $f(\vec{x})$ по переменной x_i и будем ее обозначать $f_{\beta_{i,1}}^{\psi_{i,1}}(\vec{x})$.

Для фиксированного r–элементного множества $\mu(r)\subset\overline{m}$, $\mu=\{i_1,...,i_r\}$, смешанной $(\psi_{\mu(r)};\beta)$–производной по переменным x_i, $i\in\mu(r)$, будем называть функцию $f_{\beta}^{\psi_{\mu(r)}}(\vec{x})$, рядом Фурье которой является результат последовательного применения формулы (2), только с использованием для определения производной по переменной x_i вместо функций $\psi_{i,1}(k_i)$ и чисел $\beta_{i,1}$ соответственно, функций $\psi_{i,r}(k_i)$ и чисел $\beta_{i,r}$, $i\in\mu(r), r=2,3,...,m$,

$$f_{\beta}^{\psi_{\mu(r)}}(\vec{x})=\frac{\partial_{\beta_{i_r,r}}^{\psi_{i_r,r}}\partial_{\beta_{i_{r-1},r}}^{\psi_{i_{r-1},r}}...\partial_{\beta_{i_1,r}}^{\psi_{i_1,r}}f(\vec{x})}{\partial x_{i_r}\partial x_{i_{r-1}}...\partial x_{i_1}}.$$

Множество непрерывных функций $f\in C$ таких, что для всех $i\in\overline{m}$ существуют производные $f_{\beta_{i,1}}^{\psi_{i,1}}(\vec{x})$ и для $r=2,3,...,m,\mu(r)\subset\overline{m}$ существуют смешанные $(\psi_{\mu(r)};\beta)$–производные $f_{\beta}^{\psi_{\mu(r)}}(\vec{x})$, будем обозначать $C_{\beta}^{m\psi}$. Множество функций из $C_{\beta}^{m\psi}$, удовлетворяющих условиям

$$\operatorname{esssup}|f_{\beta_{i,1}}^{\psi_{i,1}}(\vec{x})|\leqslant 1,\ \operatorname{esssup}|f_{\beta}^{\psi_{\mu(r)}}(\vec{x})|\leqslant 1,\ i\in\overline{m},\ \mu\subset\overline{m},$$

будем обозначать $C_{\beta,\infty}^{m\psi}$.

Следуя [1], введем множества $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{M}_0'$, $\mathfrak{M}_C$. Будем полагать, что функции $\psi_{i,r}(v)$, $i,r=1,2,...,m;$ являются функциями непрерывного аргумента $v\geqslant 0$, совпадающими при $v\in N_*$ с элементами одноименных систем чисел $\psi_{i,r}(k)$, которые использовались выше для определения классов $C_{\beta,\infty}^{m\psi}$.

Через $\mathfrak{M}$ обозначим множество функций $\psi(x)$, непрерывных при $x\geqslant 0$, монотонно убывающих, выпуклых вниз при $x\geqslant 1$ и исчезающих на бесконечности: $\lim\limits_{x\to\infty}\psi(x)=0$.

Каждой функции $\psi(x)$ поставим в соответствие функцию $\eta(x) = \eta(\psi, x)$, связанную при $x \geqslant 1$ с $\psi(x)$ соотношением $\psi(\eta(x)) = \frac{1}{2}\psi(x)$.

Положим
$$\mu(t) = \mu(\psi, t) = \frac{t}{\eta(t) - t}.$$

Через $\mathfrak{M}_0'$ обозначим множество функций $\psi \in \mathfrak{M}$, для которых величина $\mu(\psi, t)$ ограничена сверху и выполнено условие
$$\int\limits_1^\infty \frac{\psi(x)}{x} dx < \infty.$$

Следуя [7] (см. также [2–6]), прямоугольные линейные средние рядов Фурье определим следующим образом.

Пусть $\Lambda = \{\Lambda_1, \Lambda_2, ..., \Lambda_m\}$ – фиксированный набор суммирующих бесконечных треугольных числовых матриц, $\Lambda_i = \{\lambda_{k_i}^{(n_i)}\}$, $i = 1, 2, ..., m$, $\vec{n} \in N^m$, $\vec{k} \in N_*^m$, $\lambda_0^{(n_i)} = 1$ и $\lambda_{k_i}^{(n_i)} = 0$ для $k_i \geqslant n_i$. Пусть далее $\lambda_{\vec{k}}^{(\vec{n})} = \prod\limits_{i=1}^m \lambda_{k_i}^{(n_i)}$ и $G_{\vec{n}} = \prod\limits_{i=1}^m [0; n_i - 1]$ – прямоугольный параллелепипед, соответствующий вектору $\vec{n} \in N^m$. Заметим, что $\lambda_{\vec{k}}^{(\vec{n})} = 0$ для любых $\vec{k} \notin G_{\vec{n}}$.

Функции $f \in L(T^m)$, имеющей ряд Фурье (1), поставим в соответствие семейство тригонометрических полиномов
$$U_{\vec{n}}(f; \vec{x}; \Lambda) = \sum_{\vec{k} \in G_{\vec{n}}} 2^{-q(\vec{k})} \lambda_{\vec{k}}^{(\vec{n})} A_{\vec{k}}(f; \vec{x}). \tag{3}$$

Если $\lambda_{k_i}^{(n_i)} = 1$, $\vec{k} \in G_{\vec{n}}$, то соотношение (3) задает прямоугольные частные суммы ряда Фурье $U_{\vec{n}}(f; \vec{x}; \Lambda) = S_{\vec{n}}(f; \vec{x})$. Пусть $\vec{p} = (p_1, p_2, ..., p_m)$, где $p_i \in N_*$, $p_i \leqslant n_i$, $i = 1, 2, ..., m$. Если величины $\lambda_{\vec{k}}^{(\vec{n})}$, $\vec{k} \in G_{\vec{n}}$, $\vec{n} \in N^m$, задаются соотношениями
$$\lambda_{k_i}^{(n_i)} = \begin{cases} 1, & 0 \leqslant k_i \leqslant n_i - p_i, \\ 1 - \frac{k_i - n_i + p_i}{p_i}, & n_i - p_i \leqslant k_i \leqslant n_i - 1, \, p_i \in N, \, p_i \leqslant n_i, \, i \in \{\overline{1, m}\}, \end{cases}$$
то многочлены $U_{\vec{n}}(f; \vec{x}; \Lambda) \stackrel{\mathrm{df}}{=} V_{\vec{n}, \vec{p}}(f; \vec{x})$ являются суммами Валле Пуссена порядка $\vec{p}$.

При $\lambda_{k_i}^{(n_i)} = k_i^{s_i} / n_i^{s_i}$, $s_i > 0$, $i = 1, 2, ..., m$, $\vec{k} \in G_{\vec{n}}$, многочлены $U_{\vec{n}}(f; \vec{x}; \Lambda) = Z_{\vec{n}}(f; \vec{x})$ будем называть прямоугольными суммами Зигмунда.

Пусть $\varphi_i(x), i = 1, 2, ..., m$ – непрерывные, монотонно возрастающие при $x \in [0; +\infty)$ такие, что $\varphi_i(0) = 0$. Если величины $\lambda_{\vec{k}}^{(\vec{n})}$, $\vec{k} \in G_{\vec{n}}$, $\vec{n} \in N^m$, задаются соотношениями
$$\lambda_{k_i}^{(n_i)} = 1 - \frac{\varphi_i(k_i)}{\varphi_i(n_i)},$$

то многочлены $U_{\vec{n}}(f;\vec{x};\Lambda) = Z^{\varphi}_{\vec{n}}(f;\vec{x})$ принято называть обобщенными прямоугольными суммами Зигмунда.

Величины $\delta_{\vec{n}}(f;\vec{x}) = f(\vec{x}) - U_{\vec{n}}(f;\vec{x})$ являются уклонениями тригонометрических многочленов $U_{\vec{n}}(f;\vec{x})$, $\vec{n}\in N^m$, от функции $f(\vec{x})$.

Целью данной работы является изучение асимптотического при $n_i\to\infty$, $i=1,2,...,m$, поведения величин

$$\mathcal{E}(C^{m\psi}_{\beta,\infty};U_{\vec{n}}) = \sup_{f\in C^{m\psi}_{\beta,\infty}} ||\delta_{\vec{n}}(f;\vec{x})||_C$$

при $n_i\to\infty$, $i=1,2,...,m$, где методы $U_{\vec{n}}$ задаются при помощи разнотипных суммирующих матриц.

Основна часть

Теорема 1. *Пусть* $\psi_{i,j}\in\mathfrak{M}'_0$, $\beta_{i,j}\in R$, $i,j=1,2,...,m$, $\mu_1\bigcup\mu_2=\overline{m}$, $\mu_1\bigcap\mu_2=\varnothing$. *Пусть для* $i\in\mu_1$,

$$\lambda^{(n_i)}_{k_i} = \begin{cases} 1, & 0\leqslant k_i\leqslant n_i-p_i,\\ 1-\frac{k_i-n_i+p_i}{p_i}, & n_i-p_i\leqslant k_i\leqslant n_i-1,\ p_i\in N,\ p_i\leqslant n_i,\ i\in\{\overline{1,m}\}, \end{cases}$$

$\lim\limits_{n_i\to\infty}\frac{p_i}{n_i}=$, *а для* $i\in\mu_2$, $\lambda^{(n_i)}_{k_i}=k_i^{s_i}/n_i^{s_i}$, $s_i>0$, $i=1,2,...,m$, $\vec{k}\in G_{\vec{n}}$, *функции* $\psi_{i,j}(x)x^{s_i}$, *монотонно возрастают и сохраняют характер выпуклости при* $x\geqslant 1$.
Тогда при $n_i\to\infty$, $i=1,2,...,m$, *справедлива асимптотическая формула*

$$\mathcal{E}\left(C^{m\psi}_{\beta,\infty};U_{\vec{n}}\right) = \frac{4}{\pi^2}\sum_{i\in\mu_1}\psi_{i,1}(n_i)\ln\frac{n_i}{p_i} + \frac{2}{\pi}\sum_{i\in\mu_2}\frac{\sin\frac{\beta_{i,1}\pi}{2}}{n_i^{s_i}}\int\limits_1^{n_i}\psi_{i,1}(x)x^{s_i-1}dx +$$

$$+\frac{2}{\pi}\sum_{i=1}^{m}\sin\frac{\beta_{i,1}\pi}{2}\int\limits_{n_i}^{\infty}\frac{\psi_{i,1}(x)}{x}dx + O(1)\left(\sum_{i=1}^{m}\psi_{i,1}(n_i)+\right.$$

$$+\sum_{r=2}^{m}\sum_{\mu(r)\subset\overline{m}}\prod_{j\in\mu(r)\bigcap\mu_1}\left\{\psi_{j,r}(n_j)+\psi_{j,r}(n_j)\ln\frac{n_j}{p_j}+\sin\frac{\beta_{j,r}\pi}{2}\int\limits_{n_j}^{\infty}\frac{\psi_{j,r}(x)}{x}dx\right\}\times$$

$$\left.\prod_{j\in\mu(r)\bigcap\mu_2}\left\{\psi_{j,r}(n_j)+\sin\frac{\beta_{j,r}\pi}{2}\left[\int\limits_1^{n_j}\frac{\psi_{j,r}(x)x^{s_j-1}}{n_j^{s_j}}dx+\int\limits_{n_j}^{\infty}\frac{\psi_{j,r}(x)}{x}dx\right]\right\}\right). \quad (4)$$

Доказательство. Через $\{\lambda_{n_i}(v)\}$, $\vec{n}=(n_1,n_2,...,n_m)\in N^m$, обозначим семейство заданных и непрерывных на [0;1] функций таких, что $\lambda_{k_i}^{(n_i)}=\lambda_{n_i}(\frac{k_i}{n_i})$, $\vec{k}\in G_{\vec{n}}$.

Введем функции

$$\tau_{i,r}^{(\mu_1)}(v)=\begin{cases} 0, & 0\leqslant v\leqslant \frac{n_i-p_i}{n_i};\\ \frac{n_i(v-1)+p_1}{p_i}\psi_{i,r}(n_iv), & \frac{n_i-p_i}{n_i}\leqslant v\leqslant 1;\\ \psi_{i,r}(n_iv), & 1\leqslant v, i=1,2,...,m;\end{cases} \tag{5}$$

$$\tau_{i,r}^{(\mu_2)}(v)=\begin{cases} \frac{\varphi_i(1)\psi_{i,r}(1)}{\varphi_i(n_i)}vn_i, & 0\leqslant v\leqslant \frac{1}{n_i};\\ \frac{\varphi_i(n_iv)\psi_{i,r}(n_iv)}{\varphi_i(n_i)}, & \frac{1}{n_i}\leqslant v\leqslant 1;\\ \psi_{i,r}(n_iv), & 1\leqslant v, i=1,2,...,m.\end{cases} \tag{6}$$

Пусть

$$\tau_{i,r}(v)=\begin{cases} \tau_{i,r}^{(\mu_1)}(v), & i\in\mu_1;\\ \tau_{i,r}^{(\mu_2)}(v), & i\in\mu_2.\end{cases}$$

В работе [5] показано, что для верхних граней уклонений многочленов $U_{\vec{n}}(f,\vec{x})$ на класах $C_{\beta,\infty}^{m\psi}$ при помощи функций $\tau_{i,r}^{(\mu_1)}$, $\tau_{i,r}^{(\mu_2)}$, $i,r=1,2,...,m$, заданных соотношениеми (5), (6) при $n_i\to\infty$, $i=1,2,...,m$, можно записать:

$$\mathcal{E}\Big(C_{\beta,\infty}^{m\psi};U_{\vec{n}}\Big)=\sum_{i=1}^{m}\frac{\sin\frac{\beta_{i,1}\pi}{2}}{\pi}\int\limits_{|t|\leqslant 1}\left|\int\limits_{1}^{\infty}\psi_{i,1}(n_ix)\sin xtdx\right|dt+$$

$$+\sum_{i=1}^{m}\frac{1}{\pi}\int\limits_{|t|\geqslant 1}\left|\int\limits_{0}^{\infty}\tau_{i,1}(x)\cos(xt+\frac{\beta_{i,1}\pi}{2})dx\right|dt+O(1)\Big(\sum_{i=1}^{m}\int\limits_{|t|\leqslant 1}\left|\int\limits_{0}^{\infty}\tau_{i,1}(x)\cos xtdx\right|dt+$$

$$+\sum_{i=1}^{m}\sin\frac{\beta_{i,1}\pi}{2}\int\limits_{|t|\leqslant 1}\left|\int\limits_{0}^{1}\tau_{i,1}(x)\sin xtdx\right|dt+\sum_{i=1}^{m}a(\tau_{i,1})+\sum_{r=2}^{m}\sum_{\mu(r)\subset\overline{m}}\prod_{j\in\mu(r)}A(\tau_{j,r})\Big),$$

где

$$a(\tau_{i,1})=\frac{1}{\pi}\int\limits_{|t|\geqslant\frac{\pi n_i}{2}}^{\infty}\left|\int\limits_{0}^{\infty}\tau_{i,1}(x)\cos(xt+\frac{\beta_{i,1}\pi}{2})dx\right|dt.$$

Поэтому

$$\mathcal{E}\Big(C_{\beta,\infty}^{m\psi};U_{\vec{n}}\Big)=\sum_{i=1}^{m}\frac{\sin\frac{\beta_{i,1}\pi}{2}}{\pi}\int\limits_{|t|\leqslant 1}\left|\int\limits_{1}^{\infty}\psi_{i,1}(n_ix)\sin xtdx\right|dt+$$

$$+\sum_{i\in\mu_1}\frac{1}{\pi}\int\limits_{|t|\geqslant 1}\left|\int\limits_0^\infty \tau_{i,1}^{(\mu_1)}(x)\cos(xt+\frac{\beta_{i,1}\pi}{2})dx\right|dt+$$

$$+\sum_{i\in\mu_2}\int\limits_{|t|\geqslant 1}\left|\int\limits_0^\infty \frac{\tau_{i,1}^{(\mu_2)}(x)}{\pi}\cos(xt+\frac{\beta_{i,1}\pi}{2})dx\right|dt+O(1)\Big(\sum_{i\in\mu_1}\int\limits_{|t|\leqslant 1}\left|\int\limits_0^\infty \tau_{i,1}^{(\mu_1)}(x)\cos xtdx\right|dt+$$

$$+\sum_{i\in\mu_2}\int\limits_{|t|\leqslant 1}\left|\int\limits_0^\infty \tau_{i,1}^{(\mu_2)}(x)\cos xtdx\right|dt+\sum_{i\in\mu_1}\sin\frac{\beta_{i,1}\pi}{2}\int\limits_{|t|\leqslant 1}\left|\int\limits_0^1 \tau_{i,1}^{(\mu_1)}(x)\sin xtdx\right|dt+$$

$$+\sum_{i\in\mu_2}\sin\frac{\beta_{i,1}\pi}{2}\int\limits_{|t|\leqslant 1}\left|\int\limits_0^1 \tau_{i,1}^{(\mu_2)}(x)\sin xtdx\right|dt+\sum_{i=1}^m a(\tau_{i,1})+$$

$$+\sum_{r=2}^m\sum_{\mu(r)\subset\overline{m}}\prod_{j\in\mu(r)\bigcap\mu_1}A(\tau_{j,r}^{(\mu_1)})\prod_{j\in\mu(r)\bigcap\mu_2}A(\tau_{j,r}^{(\mu_2)})\Big). \tag{7}$$

Применяя рассуждения работы [8], получаем асимптотические формулы

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{|t|\leqslant 1}\left|\int\limits_1^\infty \psi_{i,1}(n_ix)\sin xtdx\right|dt=\frac{2}{\pi}\int\limits_{n_i}^\infty\frac{\psi_{i,1}(x)}{x}dx+O(1)\psi_{i,1}(n_i),$$

для $i\in\mu_1$

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{|t|\geqslant 1}\left|\int\limits_0^\infty \tau_{i,1}^{(\mu_1)}(x)\cos(xt+\frac{\beta_{i,1}\pi}{2})dx\right|dt=\frac{4}{\pi^2}\psi_{i,r}(n_i)\ln\frac{n_i}{p_i}+O(1)\psi_{i,1}(n_i),$$

$$A(\tau_{i,r}^{(\mu_1)})=O(1)\left(\sin\frac{\beta_{i,r}\pi}{2}\int\limits_{n_i}^\infty\frac{\psi_{i,r}(x)}{x}dx+\psi_{i,r}(n_i)\ln\frac{n_i}{p_i}+\psi_{i,r}(n_i)\right),$$

$$a(\tau_{i,1}^{(\mu_1)})=O(1)\psi_{i,1}(n_i),\quad \int\limits_{|t|<1}\left|\int\limits_0^\infty \tau_{i,1}^{(\mu_1)}(v)\cos vtdv\right|dt=O(1)\psi_{i,1}(n_i),$$

$$\int\limits_{|t|\geqslant 1}\left|\int\limits_0^\infty \tau_{i,1}^{(\mu_1)}(x)\cos xtdx=O(1)\psi_{i,1}(n_i),\quad \int\limits_{|t|\leqslant 1}\left|\int\limits_0^1 \tau_{i,1}^{(\mu_1)}(x)\sin xtdx=O(1)\psi_{i,1}(n_i),\right.\right.$$

для $i \in \mu_2$

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{|t|\geqslant 1}\left|\int\limits_0^{\infty}\tau_{i,1}^{(\mu_2)}(x)\cos(xt+\frac{\beta_{i,1}\pi}{2})dx\right|dt=\frac{\sin\frac{\beta_{i,1}\pi}{2}}{n_i^{s_i}}\int\limits_1^{n_i}\psi_{i,1}(x)x^{s_i-1}dx+O(1)\psi_{i,1}(n_i),$$

$$A(\tau_{i,r}^{(\mu_2)})=O(1)\left(\sin\frac{\beta_{i,r}\pi}{2}\int\limits_{n_i}^{\infty}\frac{\psi_{i,r}(x)}{x}dx+\frac{\sin\frac{\beta_{i,r}\pi}{2}}{n_i^{s_i}}\int\limits_1^{n_i}\psi_{i,r}(x)x^{s_i-1}dx+\psi_{i,r}(n_i)\right),$$

$$\int\limits_{|t|<1}\left|\int\limits_0^{\infty}\tau_{i,1}^{(\mu_2)}(v)\cos vtdv\right|dt=O(1)\psi_{i,1}(n_i), a(\tau_{i,1}^{(\mu_2)})=O(1)\psi_{i,1}(n_i),$$

$$\int\limits_{|t|\geqslant 1}\left|\int\limits_0^{\infty}\tau_{i,1}^{(\mu_2)}(x)\cos xtdx=O(1)\psi_{i,1}(n_i),\int\limits_{|t|\leqslant 1}\right|\int\limits_0^{1}\tau_{i,1}^{(\mu_2)}(x)\sin xtdx=O(1)\psi_{i,1}(n_i).$$

Подставляя эти соотношения в формулу (7), получаем асимптотическую формулу (4). □

Применяя аналогичные рассуждения, получаем следующие утверждения.

Теорема 2. *Пусть* $\psi_{i,r}\in\mathfrak{M}_0'$, $\beta_{i,r}\in R$, $i,r=1,2,...,m$, $\mu_1\bigcup\mu_2=\overline{m}$, $\mu_1\bigcap\mu_2=\varnothing$, *функции* $\psi_{i,r}(x)x^{s_i}$, $i\in\mu_1$, *монотонно возрастают и сохраняют характер выпуклости, а для* $i\in\mu_2, j=1,2,...,m$; *монотонно убывают и выпуклы вниз при* $x\geqslant 1$.
Тогда при $n_i\to\infty$, $i=1,2,...,m$, *справедлива асимптотическая формула*

$$\mathcal{E}\left(C_{\beta,\infty}^{m\psi};Z_{\vec{n}}^{\vec{s}}\right)=\sum_{i\in\mu_2}\frac{1}{n_i^{s_i}}\sup_{f\in C_{\beta_{i,1},\infty}^{\psi_{i,1}}}\left\|f^{(s_i)}\right\|_C+\frac{2}{\pi}\sum_{i\in\mu_1}\frac{\sin\frac{\beta_{i,1}\pi}{2}}{n_i^{s_i}}\int\limits_1^{n_i}\psi_{i,1}(x)x^{s_i-1}dx+$$

$$+\frac{2}{\pi}\sum_{i=1}^{m}\sin\frac{\beta_{i,1}\pi}{2}\int\limits_{n_i}^{\infty}\frac{\psi_{i,1}(x)}{x}dx+O(1)\left(\sum_{i=1}^{m}\psi_{i,1}(n_i)+\right.$$

$$+\sum_{r=2}^{m}\sum_{\mu(r)\subset\overline{m}}\prod_{j\in\mu(r)\bigcap\mu_1}\left[\frac{1}{n_j^{s_j}}\int\limits_1^{n_j}\psi_{j,r}(x)x^{s_j-1}dx+\int\limits_{n_j}^{\infty}\frac{\psi_{j,r}(x)}{x}dx+\psi_{j,r}(n_j)\right]\times$$

$$\left.\times\prod_{j\in\mu(r)\bigcap\mu_2}\left[\frac{1}{n_j^{s_j}}+\int\limits_{n_j}^{\infty}\frac{\psi_{j,r}(x)}{x}dx\right]\right).$$

где $f^{(s_i)}(x)$ *производная функции* $f(x)$ *в смысле Вейля порядка* $s_i>0$.

Теорема 3. *Пусть* $\psi_{i,r} \in \mathfrak{M}'_0$, $\beta_{i,r} \in R$, $i,r = 1,2,...,m$, $\mu_1 \bigcup \mu_2 = \overline{m}$, $\mu_1 \bigcap \mu_2 = \varnothing$, *для* $i \in \mu_1$ *выполнено условие* $\lim_{n_i \to \infty} \frac{p_i}{n_i} = 0$, *а для* $i \in \mu_2$, $p_i = n_i$.
Тогда при $n_i \to \infty$, $i = 1,2,...,m$, *справедлива асимптотическая формула*

$$\mathcal{E}\left(C^{m\psi}_{\beta,\infty}; V_{\vec{n},\vec{p}}\right) = \frac{4}{\pi^2} \sum_{i \in \mu_1} \psi_{i,1}(n_i) \ln \frac{n_i}{p_i} + \sum_{i \in \mu_2} \frac{1}{n_i} \sup_{f \in C^{\psi_{i,1}}_{\beta_{i,1},\infty}} \|f'\|_C +$$

$$+\frac{2}{\pi} \sum_{i=1}^{m} \sin \frac{\beta_{i,1}\pi}{2} \int\limits_{n_i}^{\infty} \frac{\psi_{i,1}(x)}{x} dx + O(1) \left(\sum_{i=1}^{m} \psi_{i,1}(n_i) + \right.$$

$$+\sum_{r=2}^{m} \sum_{\mu(r) \subset \overline{m}} \prod_{j \in \mu(r) \bigcap \mu_1} \left[\psi_{j,r}(n_j) \ln \frac{n_j}{p_j} + \int\limits_{n_j}^{\infty} \frac{\psi_{j,r}(x)}{x} dx + \psi_{j,r}(n_j) \right] \times$$

$$\left. \times \prod_{j \in \mu(r) \bigcap \mu_2} \left[\frac{1}{n_j} + \int\limits_{n_j}^{\infty} \frac{\psi_{j,r}(x)}{x} dx \right] \right).$$

Теорема 4. *Пусть* $\psi_{i,r} \in \mathfrak{M}'_0$, $\beta_{i,r} \in R$, $i,j = 1,2,...,m$, $\mu_1 \bigcup \mu_2 = \overline{m}$, $\mu_1 \bigcap \mu_2 = \varnothing$ *функции* $\psi_{i,r}(x)x^{s_i}$, $i \in \mu_1$, *монотонно возрастают и сохраняют характер выпуклости, а для* $i \in \mu_2, j = 1,2,...,m$; *монотонно убывают и выпуклы вниз при* $x \geqslant 1$.
Тогда при $n_i \to \infty$, $i = 1,2,...,m$, *справедлива асимптотическая формула*

$$\mathcal{E}\left(C^{m\psi}_{\beta,\infty}; Z^{\varphi}_{\vec{n}}\right) = \sum_{i \in \mu_2} \frac{1}{n_i^{s_i}} \sup_{f \in C^{\psi_{i,1}}_{\beta_{i,1},\infty}} \left\| f^{(\varphi_i)} \right\|_C + \frac{2}{\pi} \sum_{i \in \mu_1} \frac{\sin \frac{\beta_{i,1}\pi}{2}}{\varphi_i(n_i)} \int\limits_{1}^{n_i} \frac{\psi_{i,1}(x)\varphi_i(x)}{x} dx +$$

$$+\frac{2}{\pi} \sum_{i=1}^{m} \sin \frac{\beta_{i,1}\pi}{2} \int\limits_{n_i}^{\infty} \frac{\psi_{i,1}(x)}{x} dx + O(1) \left(\sum_{i=1}^{m} \psi_{i,1}(n_i) + \right.$$

$$+\sum_{r=2}^{m} \sum_{\mu(r) \subset \overline{m}} \prod_{j \in \mu(r) \bigcap \mu_1} \left[\frac{1}{\varphi_i(n_j)} \int\limits_{1}^{n_j} \frac{\psi_{j,r}(x)\varphi_j(x)}{x} dx + \int\limits_{n_j}^{\infty} \frac{\psi_{j,r}(x)}{x} dx + \psi_{j,r}(n_j) \right] \times$$

$$\left. \times \prod_{j \in \mu(r) \bigcap \mu_2} \left[\frac{1}{n_j^{s_j}} + \int\limits_{n_j}^{\infty} \frac{\psi_{j,r}(x)}{x} dx \right] \right),$$

где

$$S[f^{\varphi_i}] = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_i(k) A_k(f; x).$$

Литература

[1] *Степанец А.И.* Классификация и приближение периодических функций / А.И. Степанец. — К.: Наук. думка, 1987. — 268 с.

[2] *Задерей П.В.* Интегральные представления уклонений линейных средних рядов Фурье на классах дифференцируемых периодических функций двух переменных / П.В. Задерей // Некоторые вопросы теории аппроксимации функций: Сб. научн. трудов. — К.: Ин-т математики АН УССР, 1985. — С. 16 – 28.

[3] *Степанец А.И.* Кратные суммы Фурье на множествах (ψ, β)-дифференцируемых функций / А.И. Степанец, Н.Л. Пачулиа // Укр. мат. журнал. — 1991. — 43, № 4. — С. 545 – 555.

[4] *Ласурия Р.А.* Кратные суммы Фурье на множествах $\overline{\psi}$-дифференцируемых функций / Р.А. Ласурия // Укр. мат. журнал. — 2003. — 55, № 7. — С. 911 – 918.

[5] *Рукасов В.И.* Приближение классов $\overline{\psi}$-интегралов периодических функций многих переменных прямоугольными линейными средними их рядов Фурье / В.И. Рукасов, О.А. Новиков, В.И. Бодрая // Укр. мат. журнал. — 2005. — 57, № 4. — С. 564 – 570.

[6] *Рукасов В.И.* Приближение классов $\overline{\psi}$-интегралов периодических функций двух переменных линейными методами / В.И. Рукасов, О.А. Новиков, В.И. Бодрая // Проблеми теорії наближення функцій та суміжні питання: зб. праць Ін-ту математики НАН України. — Т. 1, № 1. — Київ: Ін-т математики НАН України, 2004. — С. 250 – 269.

[7] *Степанец А.И.* Равномерные приближения тригонометрическими полиномами / А.И. Степанец. — К.: Наук. думка, 1981. — 340 с.

[8] *Рукасов В.И.* Приближение функций с небольшой гладкостью из классов $C^{\overline{\psi}}_{\infty}$ линейными методами / В.И. Рукасов, О.А. Новиков // Теорія наближень та гармонічний аналіз: праці Українського математичного конгресу. — 2001. — Київ: Ін-т математики НАН України, 2002. — С. 184 – 193.

[9] *Бодрая В.И.* Приближение классов периодических функций многих переменных с малой гладкостью прямоугольными линейными средними их рядов Фурье / В.И. Бодрая // Проблеми теорії наближення функцій та суміжні питання: зб. праць Ін-ту математики НАН України. — Т. 2, № 2. — Київ: Ін-т математики НАН України, 2005. — С. 7 – 26.

УДК 517.5

Бодрая В.И., Новиков О.А., Прокопчук А.Г., Куценко А.А., Кушнир Т.В.

[1] *асистент каф. высшей математики, Киевский национальный университет технологий и дизайна*

[2] *кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математики, ГВУЗ «ДГПУ»*

[3–5] *студенты 5 курса физико-математического факультета, ГВУЗ «ДГПУ»*

e-mail: sgpi@slav.dn.ua

ПРИБЛИЖЕНИЕ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ СУММАМИ ФАВАРА И ФЕЙЕРА

Получены элементы суммирующих треугольных матриц операторов повторных методов Валле Пуссена.

Ключевые слова: *ряды Фурье, асимптотические формулы*

Введение

Классификация непрерывных периодических функций по признаку их аппроксимативных свойств на основе учета свойств тригонометрических рядов, полученных преобразованием их рядов Фурье при помощи мультипликатров и сдвигов по аргументу, была предложена в работах А.И. Степанца в 1983 году [1].

Аналогичные классификации функций многих переменных были построены и применены в работах П.В. Задерея [2], А.И. Степанца, Н.Л. Пачулиа [3], Р.А. Ласурии [4], В.И. Рукасова, О.А. Новикова, В.И. Бодрой [5]. В этих работах изучаются вопросы приближения различными прямоугольными линейными методами классов (ψ, β)-дифференцируемых периодических функций многих переменных. Классы (ψ, β)-дифференцируемых функций многих переменных, в этих работах определялись двумя наборами функций-мультипликаторов и сдвигов по аргументу.

В работе [6] введены классы (ψ, β)-дифференцируемых функций m переменных, определяемых m наборами мультипликаторов (своим для каждого числа переменных).

В данной статье изучаются вопросы приближения элементов таких классов прямоугольными операторами Фавара и Фейера.

Пусть R^m – пространство m-мерных векторов $\vec{x}=(x_1,x_2,...,x_m)$, $T^m=\prod\limits_{i=1}^{m}[-\pi;\pi]$ – m-мерный куб с ребром 2π,

$$\begin{aligned} N^m &= \left\{\vec{x}\in R^m | x_i\in N,\ \ i=1,2,...,m\right\},\\ N^m_* &= \left\{\vec{x}\in R^m | x_i\in N_*=N\cup\{0\},\ \ i=1,2,...,m\right\},\\ N^m_i &= \left\{\vec{x}\in R^m | x_i\in N,\ \ x_j\in N_*,\ \ i\neq j\right\},\\ E^m &= \left\{\vec{x}\in N^m | x_i\in N,\ \ x_i\in\{0;1\}\right\}. \end{aligned}$$

Через $L(T^m)$ обозначим множество 2π-периодических по каждой переменной, суммируемых на кубе T^m, функций $f(\vec{x})=f(x_1,x_2,...,x_m)$.

Следуя [1], каждой паре точек $\vec{s}\in E^m$, $\vec{k}\in N^m_*$, поставим в соответствие коэффициент Фурье функции $f\in L(T^m)$

$$a^{\vec{s}}_{\vec{k}}(f)=\frac{1}{\pi^m}\int\limits_{T^m} f(\vec{x})\prod_{i=1}^{m}\cos\left(k_ix_i-\frac{s_i\pi}{2}\right)dx_i.$$

Каждому вектору $\vec{k}\in N^m_*$ поставим в соответствие величину

$$A_{\vec{k}}(f;\vec{x})=\sum_{\vec{s}\in E^m} a^{\vec{s}}_{\vec{k}}(f)\prod_{i=1}^{m}\cos\left(k_ix_i-\frac{s_i\pi}{2}\right).$$

Тогда, следуя [3], ряд Фурье функции $f(\vec{x})$ задается соотношением

$$S[f]=\sum_{\vec{k}\in N^m_*}\frac{1}{2^{q(\vec{k})}}A_{\vec{k}}(f;\vec{x}), \tag{1}$$

где $q(\vec{k})$ – количество нулевых координат вектора $\vec{k}$.

Пусть $\overline{m}=\{1,2,...,m\}$ и μ – какое-либо подмножество из $\overline{m}$, обозначим через $|\mu|$ количество элементов множества μ и через $\mu(r)$ – всякое r-элементное подмножество из $\overline{m}$ ($|\mu(r)|=r$).

Гармоникой, сопряженной с $A_{\vec{k}}(f;\vec{x})$ по переменной x_r, будем называть величину

$$A^{\vec{e}_r}_{\vec{k}}(f;\vec{x})=\sum_{\vec{s}\in E^m} a^{\vec{s}}_{\vec{k}}(f)\prod_{i\in\overline{m}\setminus\{r\}}\cos\left(k_ix_i-\frac{s_i\pi}{2}\right)\cos\left(k_rx_r-\frac{(s_r+1)\pi}{2}\right).$$

Следуя работе [6] введем понятие (ψ,β)-производных функций многих переменных следующим образом.

Пусть $\psi_{i,r}(k_i), i=1,2,...,m, r=1,2,...,m,$ $k_i\in N_*$ — фиксированные системы чисел, $\vec{\beta}_r=(\beta_{1,r},\beta_{2,r},...,\beta_{m,r})$ – фиксированный набор векторов

($\beta_{i,r} \in \mathbb{R}$, $i = 1, 2, ..., m$). Пусть для фиксированного $r \in \overline{m}$ существует функция $\varphi_i \in L(T^m)$ такая, что

$$S[\varphi_i] = \sum_{\vec{k} \in N_i^m} \frac{1}{2^{q(\vec{k})}\psi_{i,1}(k_i)} \left[A_{\vec{k}}(f;\vec{x}) \cos \frac{\beta_{i,1}\pi}{2} - A_{\vec{k}}^{\vec{e}_i}(f;\vec{x}) \sin \frac{\beta_{i,1}\pi}{2}\right].$$

Тогда будем считать, что $f(\vec{x})$ имеет частную $(\psi_{i,1};\beta_{i,1})$–производную по переменной x_i, функцию $\varphi_i(\vec{x})$, которую будем обозначать $f_{\beta_{i,1}}^{\psi_{i,1}}(\vec{x})$.

Для фиксированного множества $\mu(r) \subset \overline{m}$, $\mu = \{i_1, i_2, ..., i_r\}$, смешанной $(\psi_{\mu(r)};\beta)$–производной по переменным x_i, $i \in \mu(r)$, будем называть функцию

$$f_{\beta}^{\psi_{\mu(r)}}(\vec{x}) = \frac{\partial_{\beta_{i_r,r}}^{\psi_{i_r,r}} \partial_{\beta_{i_{r-1},r}}^{\psi_{i_{r-1},r}} ... \partial_{\beta_{i_1,r}}^{\psi_{i_1,r}} f(\vec{x})}{\partial x_{i_r} \partial x_{i_{r-1}} ... \partial x_{i_1}}.$$

Множество непрерывных функций $f \in C$ таких, что для всех $i \in \overline{m}$ существуют производные $f_{\beta_{i,1}}^{\psi_{i,1}}(\vec{x})$ и для $r = 2, 3, ..., m, \mu(r) \subset \overline{m}$, существуют смешанные $(\psi_{\mu(r)};\beta)$–производные $f_{\beta}^{\psi_{\mu(r)}}(\vec{x})$, которые удовлетворяют условиям

$$\text{esssup}|f_{\beta_{i,1}}^{\psi_{i,1}}(\vec{x})| \leqslant 1, \ \ \text{esssup}|f_{\beta}^{\psi_{\mu(r)}}(\vec{x})| \leqslant 1, \ \ i \in \overline{m}, \ \ \mu \subset \overline{m},$$

будем обозначать $C_{\beta,\infty}^{m\psi}$.

Через $\mathfrak{M}$ обозначим множество функций $\psi(x)$, непрерывных при $x \geqslant 0$, монотонно убывающих, выпуклых вниз при $x \geqslant 1$ и исчезающих на бесконечности: $\lim\limits_{x\to\infty} \psi(x) = 0$.

Через $\mathfrak{M}'$ обозначим подмножество функций $\psi \in \mathfrak{M}$, для которых выполнено $\int\limits_1^{\infty} \psi(x)/x dx < \infty$.

Каждой функции $\psi(x)$ поставим в соответствие функцию $\eta(x)$, связанную при $x \geqslant 1$ с $\psi(x)$ соотношением $\psi(\eta(x)) = \frac{1}{2}\psi(x)$.

Положим

$$\mu(t) = \mu(\psi, t) = \frac{t}{\eta(t) - t}.$$

Через $\mathfrak{M}'_0$ обозначим множество функций $\psi \in \mathfrak{M}'$, для которых величина $\mu(\psi, t)$ ограничена сверху.

Следуя [7], прямоугольные линейные средние рядов Фурье определим следующим образом.

Пусть $\Lambda = \{\Lambda_1, \Lambda_2, ..., \Lambda_m\}$ – фиксированный набор бесконечных треугольных числовых матриц, $\Lambda_i = \{\lambda_{k_i}^{(n_i)}\}$, $i = 1, 2, ..., m$, $\vec{n} \in N^m$, $\vec{k} \in N_*^m$,

$\lambda_0^{(n_i)} = 1$ и $\lambda_{k_i}^{(n_i)} = 0$ для $k_i \geqslant n_i$. Пусть далее $\lambda_{\vec{k}}^{(\vec{n})} = \prod_{i=1}^{m} \lambda_{k_i}^{(n_i)}$ и $G_{\vec{n}} = \prod_{i=1}^{m} [0; n_i - 1]$. Так, что $\lambda_{\vec{k}}^{(\vec{n})} = 0$ для любых $\vec{k} \notin G_{\vec{n}}$.

Функции $f \in L(T^m)$, имеющей ряд Фурье (1), поставим в соответствие семейство тригонометрических полиномов

$$U_{\vec{n}}(f;\vec{x};\Lambda) = \sum_{\vec{k}\in G_{\vec{n}}} 2^{-q(\vec{k})} \lambda_{\vec{k}}^{(\vec{n})} A_{\vec{k}}(f;\vec{x}). \tag{2}$$

При $\lambda_{k_i}^{(n_i)} = k_i/n_i$, $i = 1, 2, ..., m$, $\vec{k} \in G_{\vec{n}}$, многочлены $U_{\vec{n}}(f;\vec{x};\Lambda) = \sigma_{\vec{n}}(f;\vec{x})$ будем называть прямоугольными суммами Фейера.

Суммами Фавара порядка $\vec{r} = (r_1, r_2, ..., r_m)$ будем называть полиномы $U_{\vec{n}}(f;\vec{x};\tilde{\Lambda}) = \Phi_{\vec{n},\vec{r}}(f;\vec{x})$, которые определяются треугольными матрицами $\tilde{\Lambda}_i$, $i = 1, 2, ..., m$, с элементами

$$\tilde{\lambda}_{k_i,r_i}^{(n_i)} = \begin{cases} 1 - k_i^{r_i} \sum\limits_{\nu=1}^{\infty} (-1)^{\nu+1} \left(\frac{1}{(2\nu n_i - k_i)^{r_i}} + \frac{1}{(2\nu n_i + k_i)^{r_i}} \right), & r_i = 2l,\ l \in N, \\ 1 - k_i^{r_i} \sum\limits_{\nu=1}^{\infty} \left(\frac{1}{(2\nu n_i - k_i)^{r_i}} - \frac{1}{(2\nu n_i + k_i)^{r_i}} \right), & r_i = 2l-1,\ l \in N. \end{cases} \tag{3}$$

Величины $\delta_{\vec{n}}(f;\vec{x}) = f(\vec{x}) - U_{\vec{n}}(f;\vec{x})$ являются уклонениями тригонометрических многочленов $U_{\vec{n}}(f;\vec{x})$, $\vec{n} \in N^m$, от функции $f(\vec{x})$.

Целью данной работы является изучение асимптотического при $n_i \to \infty$, $i = 1, 2, ..., m$, поведения величин

$$\mathcal{E}(C_{\beta,\infty}^{m\psi}; U_{\vec{n}}) = \sup_{f \in C_{\beta,\infty}^{m\psi}} ||\delta_{\vec{n}}(f;\vec{x})||_C$$

при $n_i \to \infty$, $i = 1, 2, ..., m$, где методы $U_{\vec{n}}$ задаются при помощи суммирующих матриц разных типов.

Основна часть

Теорема 1. *Пусть $\psi_{i,j} \in \mathfrak{M}_0'$, $\beta_{i,j} \in R$, $\mu_1 \bigcup \mu_2 = \overline{m}$, $\mu_1 \bigcap \mu_2 = \varnothing$. Пусть для $i \in \mu_1$, выполнено $r_i = 1$, величины $\lambda_{k_i}^{(n_i)}$ определяются соотношением (3), функции $\psi_{i,j}(x)x^2$, монотонно возрастают и сохраняют характер выпуклости при $x \geqslant 1$, для $i \in \mu_2$, $\lambda_{k_i}^{(n_i)} = k_i/n_i$, $\vec{k} \in G_{\vec{n}}$, функции $\psi_{i,j}(x)x$, монотонно возрастают и сохраняют характер выпуклости при $x \geqslant 1$. Тогда при $n_i \to \infty$, $i = 1, 2, ..., m$, справедлива асимптотическая формула*

$$\mathcal{E}\left(C_{\beta,\infty}^{m\psi}; U_{\vec{n}}\right) = \frac{\pi}{6} \sum_{i\in\mu_1} \frac{\sin\frac{\beta_{i,1}\pi}{2}}{n_i^2} \int_1^{n_i} \psi_{i,1}(x) x dx + \frac{2}{\pi} \sum_{i\in\mu_2} \frac{\sin\frac{\beta_{i,1}\pi}{2}}{n_i} \int_1^{n_i} \psi_{i,1}(x) dx +$$

$$+\frac{2}{\pi}\sum_{i=1}^{m}\sin\frac{\beta_{i,1}\pi}{2}\int\limits_{n_i}^{\infty}\frac{\psi_{i,1}(x)}{x}dx+O(1)\Bigg(\sum_{i=1}^{m}\psi_{i,1}(n_i)+$$

$$+\sum_{r=2}^{m}\sum_{\mu(r)\subset\overline{m}}\prod_{j\in\mu(r)\bigcap\mu_1}\left\{\psi_{j,r}(n_j)+\sin\frac{\beta_{j,r}\pi}{2}\left[\int\limits_{1}^{n_j}\frac{\psi_{j,r}(x)x}{n_j^2}dx+\int\limits_{n_j}^{\infty}\frac{\psi_{j,r}(x)}{x}dx\right]\right\}\times$$

$$\times\prod_{j\in\mu(r)\bigcap\mu_2}\left\{\psi_{j,r}(n_j)+\sin\frac{\beta_{j,r}\pi}{2}\left[\frac{1}{n_j}\int\limits_{1}^{n_j}\psi_{j,r}(x)dx+\int\limits_{n_j}^{\infty}\frac{\psi_{j,r}(x)}{x}dx\right]\right\}\Bigg). \qquad (4)$$

Доказательство. Через $\{\lambda_{n_i}(v)\}$, $\vec{n}=(n_1,n_2,...,n_m)\in N^m$, обозначим семейство непрерывных на [0;1] суммирующих функций так, что $\lambda_{k_i}^{(n_i)}=\lambda_{n_i}(\frac{k_i}{n_i})$, $\vec{k}\in G_{\vec{n}}$.

Введем функции

$$\tau_{i,r}(v)=\begin{cases}(1-\lambda_{n_i}(v))\psi_{i,r}(n_iv), & \frac{1}{n_i}\leqslant v\leqslant 1;\\ \psi_{i,r}(n_iv), & 1\leqslant v, i=1,2,...,m;\end{cases} \qquad (5)$$

которые на $[0;\frac{1}{n_i}]$ заданы так, что $\tau_{i,r}(v)$ непрерывны на положительной полуоси и выполнено условие $\tau_{i,r}(0)=0$, $i,r=1,2,...,m$.

Известно [5], что функций $\tau_{i,r}$, $i,r=1,2,...,m$, заданных соотношенем (5) в которых для метода Фейера $\lambda_{n_i}(v)=v$ и для метода Фавара при $r_i=1$ $\lambda_{n_i}(v)=\frac{\pi v}{2}\mathrm{ctg}\frac{\pi v}{2}$, таковы, что

$$A(\tau_{i,r})=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left|\int\limits_{0}^{\infty}\tau_{i,r}(x)\cos(xt+\frac{\beta\pi}{2})dx\right|dt<\infty,$$

и при $n_i\to\infty$, $i=1,2,...,m$, справедливо равенство:

$$\mathcal{E}\Big(C_{\beta,\infty}^{m\psi};U_{\vec{n}}\Big)=\sum_{i=1}^{m}\frac{\sin\frac{\beta_{i,1}\pi}{2}}{\pi}\int\limits_{|t|\leqslant 1}\left|\int\limits_{1}^{\infty}\psi_{i,1}(n_ix)\sin xtdx\right|dt+$$

$$+\sum_{i=1}^{m}\frac{1}{\pi}\int\limits_{|t|\geqslant 1}\left|\int\limits_{0}^{\infty}\tau_{i,1}(x)\cos(xt+\frac{\beta_{i,1}\pi}{2})dx\right|dt+O(1)\Big(\sum_{i=1}^{m}\int\limits_{|t|\leqslant 1}\left|\int\limits_{0}^{\infty}\tau_{i,1}(x)\cos xtdx\right|dt+$$

$$+\sum_{i=1}^{m}\sin\frac{\beta_{i,1}\pi}{2}\int\limits_{|t|\leqslant 1}\left|\int\limits_{0}^{1}\tau_{i,1}(x)\sin xtdx\right|dt+\sum_{i=1}^{m}a(\tau_{i,1})+\sum_{r=2}^{m}\sum_{\mu(r)\subset\overline{m}}\prod_{j\in\mu(r)}A(\tau_{j,r})\Big),$$

где

$$a(\tau_{i,1}) = \frac{1}{\pi} \int\limits_{|t|\geqslant \frac{\pi n_i}{2}}^{\infty} \left| \int\limits_0^{\infty} \tau_{i,1}(x) \cos(xt + \frac{\beta_{i,1}\pi}{2}) dx \right| dt.$$

Введем функции

$$\tau_{i,r}^{(\mu_1)}(v) = \begin{cases} n_i v \psi_{i,r}(1) \sum_{j=0}^{\infty} c_j n_i^{-2j}, & 0 \leqslant v \leqslant \frac{1}{n_i}; \\ v^2 \psi_{i,r}(n_i v) \sum_{j=0}^{\infty} c_j v^{2j}, & \frac{1}{n_i} \leqslant v \leqslant 1; \\ \psi_{i,r}(n_i v), & 1 \leqslant v, i = 1, 2, ..., m, \end{cases} \tag{5}$$

где

$$c_j = \frac{\prod_{k=0}^{j}(2j+1)}{(2j+1)!} \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{2}{(2\nu)^{2j+2}};$$

$$\tau_{i,r}^{(\mu_2)}(v) = \begin{cases} \frac{\varphi_i(1)\psi_{i,r}(1)}{\varphi_i(n_i)} v n_i, & \frac{1}{n_i} \leqslant v \leqslant \frac{1}{n_i}; \\ \frac{\varphi_i(n_i x)\psi_{i,r}(n_i v)}{\varphi_i(n_i)}, & \frac{1}{n_i} \leqslant v \leqslant 1; \\ \psi_{i,r}(n_i v), & 1 \leqslant v, i = 1, 2, ..., m. \end{cases} \tag{6}$$

Пусть

$$\tau_{i,r}(v) = \begin{cases} \tau_{i,r}^{(\mu_1)}(v), & i \in \mu_1; \\ \tau_{i,r}^{(\mu_2)}(v), & i \in \mu_2. \end{cases}$$

Тогда

$$\mathcal{E}\left(C_{\beta,\infty}^{m\psi}; U_{\vec{n}}\right) = \sum_{i=1}^{m} \frac{\sin\frac{\beta_{i,1}\pi}{2}}{\pi} \int\limits_{|t|\leqslant 1} \left| \int\limits_1^{\infty} \psi_{i,1}(n_i x) \sin xt dx \right| dt +$$

$$+ \sum_{i\in\mu_1} \frac{1}{\pi} \int\limits_{|t|\geqslant 1} \left| \int\limits_0^{\infty} \tau_{i,1}^{(\mu_1)}(x) \cos(xt + \frac{\beta_{i,1}\pi}{2}) dx \right| dt +$$

$$+ \sum_{i\in\mu_2} \int\limits_{|t|\geqslant 1} \left| \int\limits_0^{\infty} \frac{\tau_{i,1}^{(\mu_2)}(x)}{\pi} \cos(xt + \frac{\beta_{i,1}\pi}{2}) dx \right| dt + O(1) \Bigg(\sum_{i=1}^{m} \int\limits_{|t|\leqslant 1} \left| \int\limits_0^{\infty} \tau_{i,1}(x) \cos xt dx \right| dt +$$

$$+ \sum_{i=1}^{m} \sin\frac{\beta_{i,1}\pi}{2} \int\limits_{|t|\leqslant 1} \left| \int\limits_0^{1} \tau_{i,1}(x) \sin xt dx \right| dt + \sum_{i=1}^{m} a(\tau_{i,1}) + \sum_{r=2}^{m} \sum_{\mu(r)\subset\overline{m}} \prod_{j\in\mu(r)} A(\tau_{j,r}) \Bigg). \tag{6}$$

Применяя рассуждения работ [6], [8], получаем асимптотические формулы

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{|t|\leqslant 1}\left|\int\limits_{1}^{\infty}\psi_{i,1}(n_ix)\sin xt dx\right|dt=\frac{2}{\pi}\int\limits_{n_i}^{\infty}\frac{\psi_{i,1}(x)}{x}dx+O(1)\psi_{i,1}(n_i),$$

для $i\in\mu_1$

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{|t|\geqslant 1}\left|\int\limits_{0}^{\infty}\tau_{i,1}^{(\mu_1)}(x)\cos(xt+\frac{\beta_{i,1}\pi}{2})dx\right|dt=\frac{\pi}{6}\frac{\sin\frac{\beta_{i,1}\pi}{2}}{n_i^2}\int\limits_{1}^{n_i}\psi_{i,1}(x)xdx+O(1)\psi_{i,1}(n_i),$$

$$A(\tau_{i,r}^{(\mu_1)})=$$

$$=O(1)\left(\sin\frac{\beta_{i,r}\pi}{2}\int\limits_{n_i}^{\infty}\frac{\psi_{i,r}(x)}{x}dx+\frac{\pi}{6}\frac{\sin\frac{\beta_{i,r}\pi}{2}}{n_i^2}\int\limits_{1}^{n_i}\psi_{i,r}(x)xdx+O(1)\psi_{i,r}(n_i)\right),$$

$$a(\tau_{i,1}^{(\mu_1)})=O(1)\psi_{i,1}(n_i),\ \int\limits_{|t|<1}\left|\int\limits_{0}^{\infty}\tau_{i,1}^{(\mu_1)}(v)\cos vtdv\right|dt=O(1)\psi_{i,1}(n_i),$$

для $i\in\mu_2$

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{|t|\geqslant 1}\left|\int\limits_{0}^{\infty}\tau_{i,1}^{(\mu_2)}(x)\cos(xt+\frac{\beta_{i,1}\pi}{2})dx\right|dt=\frac{\sin\frac{\beta_{i,1}\pi}{2}}{n_i}\int\limits_{1}^{n_i}\psi_{i,1}(x)dx+O(1)\psi_{i,1}(n_i),$$

$$A(\tau_{i,r}^{(\mu_2)})=O(1)\left(\sin\frac{\beta_{i,r}\pi}{2}\int\limits_{n_i}^{\infty}\frac{\psi_{i,r}(x)}{x}dx+\frac{\sin\frac{\beta_{i,r}\pi}{2}}{n_i}\int\limits_{1}^{n_i}\psi_{i,r}(x)dx+\psi_{i,r}(n_i)\right),$$

$$\int\limits_{|t|<1}\left|\int\limits_{0}^{\infty}\tau_{i,1}^{(\mu_2)}(v)\cos vtdv\right|dt=O(1)\psi_{i,1}(n_i),a(\tau_{i,1}^{(\mu_2)})=O(1)\psi_{i,1}(n_i),$$

$$\int\limits_{|t|\geqslant 1}\left|\int\limits_{0}^{\infty}\tau_{i,1}(x)\cos xtdx=O(1)\psi_{i,1}(n_i),\ \int\limits_{|t|\leqslant 1}\right|\int\limits_{0}^{1}\tau_{i,1}(x)\sin xtdx=O(1)\psi_{i,1}(n_i).$$

Подставляя эти соотношения в формулу (6), получаем асимптотическую формулу (4). $\square$

Литература

[1] *Степанец А.И.* Классификация и приближение периодических функций / А.И. Степанец. — К.: Наук. думка, 1987. — 268 с.

[2] *Задерей П.В.* Интегральные представления уклонений линейных средних рядов Фурье на классах дифференцируемых периодических функций двух переменных / П.В. Задерей // Некоторые вопросы теории аппроксимации функций: сб. научн. трудов. — К.: Ин-т математики АН УССР, 1985. — С. 16 – 28.

[3] *Степанец А.И.* Кратные суммы Фурье на множествах (ψ, β)-дифференцируемых функций / А.И. Степанец, Н.Л. Пачулиа // Укр. мат. журнал. — 1991. — 43, № 4. — С. 545 – 555.

[4] *Ласурия Р.А.* Кратные суммы Фурье на множествах $\overline{\psi}$-дифференцируемых функций / Р.А. Ласурия // Укр. мат. журнал. — 2003. — 55, № 7. — С. 911 – 918.

[5] *Рукасов В.И.* Приближение классов $\overline{\psi}$-интегралов периодических функций многих переменных прямоугольными линейными средними их рядов Фурье / В.И. Рукасов, О.А. Новиков, В.И. Бодрая // Укр. мат. журнал. — 2005. — 57, № 4. — С. 564 – 570.

[6] *Ключникова А.Р.* Приближение классов функций многих переменных прямоугольными линейными операторами / Ключникова А.Р., Леденева А.С., Качина Ю.М. [та ін.] // Зб. наук. праць фіз.-мат. факультету СДПУ. — Слов'янськ: СДПУ, 2012. — № 2. — С. 28 – 36.

[7] *Степанец А.И.* Равномерные приближения тригонометрическими полиномами / А.И. Степанец. — К.: Наук. думка, 1981. — 340 с.

[8] *Рукасов В.И.* Приближение функций с небольшой гладкостью из классов $C^{\overline{\psi}}_{\infty}$ линейными методами / В.И. Рукасов, О.А. Новиков // Теорія наближень та гармонічний аналіз: праці Українського математичного конгресу. — 2001. — Київ: Ін-т математики НАН України, 2002. — С. 184 – 193.

УДК 517.5

Волков С.В.

[1] *старший викладач кафедри «Природничих наук», КІІ ДВНЗ «ДонНТУ»*

e-mail: sergey.v.volkov@mail.ru

НАБЛИЖЕННЯ КЛАСІВ $\overline{\psi}$ ДИФЕРЕНЦІЙОВАНИХ ФУНКЦІЙ БІМАТРИЧНИМ МЕТОДОМ

Стаття присвячена дослідженню питань наближення лінійними методами підсумовування рядів Фур'є класів 2π-періодичних функцій, що задаються мультиплікаторами.

Ключові слова: *ряд Фур'є, лінійний (біматричний) метод наближення, задача Колмогорова-Нікольського, асимптотична рівність, $\overline{\psi}$-похідна, рівномірна збіжність.*

Вступ

Природним апаратом наближення періодичних функцій є частинні суми Фур'є. Але, як добре відомо, суми Фур'є не є рівномірно збіжними на всьому просторі неперервних функцій. Цей факт, у свій час, активізував розробку різноманітних тригонометричних сум, породжених лінійними методами підсумовування рядів Фур'є і позбавлених вказаного недоліку (суми Рогозинського, Стєклова, Фавара, Зигмунда, Фейєра, Рісса, Чезаро, Бернштейна-Рогозинського тощо). Вказані методи породжені застосуванням, так званого, матричного підсумовування, що використовує ідеї підсумовування розбіжних числових рядів.

Суть такого підсумовування полягає у встановленні відповідності між $f \in L(0,2\pi)$ і рядом Фур'є

$$U_n(f;x;\Lambda) = \tfrac{a_0}{2}\lambda_0^{(n)} + \sum_{k=1}^{n-1} \lambda_k^{(n)} (a_k \cos kx + b_k \sin kx),$$

де $a_k = a_k(f)$ і $b_k = b_k(f)$, $k = 0,1,...,$ – коефіцієнти Фур'є функції $f(x)$;

$$\Lambda = \left\| \lambda_k^{(n)} \right\|, n = 0,1,..., \quad k = 0,1,...,n,$$

– довільна нескінчена трикутна матриця чисел

До однієї з основних задач в теорії наближення функцій і підсумовування рядів Фур'є відносять задачу про знаходження асимптотичних при $n \to \infty$ рівностей для величин

$$\mathcal{E}(\mathfrak{N}; U_n(\Lambda))_X := \sup_{f \in \mathfrak{N}} \| f(\cdot) - U_n(f;\cdot;\Lambda) \|$$

де $\mathfrak{N}$ – деякий фіксований клас 2π-періодичних функцій, $\mathfrak{N} \subset X$, X – лінійний нормований простір, а $U_n(f;\cdot;\Lambda)$ – тригонометричний поліном, породжений певним лінійним методом підсумовування рядів Фур'є.

Ця задача має багату історію, яка пов'язана з іменами таких відомих математиків, як А.Н. Колмогоров, С.М. Нікольський, Б. Надь, В.К. Дзядик, М.П. Корнєйчук, С.Б. Стєчкін, О.П. Тіман, М.П. Тіман, О.І. Степанець, О.В. Єфімов, С.О. Теляковський, та інші.

Якщо в явному вигляді знайдено функцію $\varphi(n) = \varphi\left(\mathfrak{N}; U_n(\Lambda); n\right)$ таку, що

$$\mathcal{E}\left(\mathfrak{N}; U_n(\Lambda)\right)_X = \varphi(n) + o\left(\varphi(n)\right), \quad n \to \infty$$

то, наслідуючи О.І. Степанця будемо казати, що розв'язана задача Колмогорова-Нікольського для методу $U_n\left(f; \cdot; \Lambda\right)$ на класі $\mathfrak{N}$ в метриці простору X .

Відомо, що швидкість наближення до нуля відхилення $\left|f(\cdot) - U_n\left(f; \cdot; \Lambda\right)\right|$ залежить від способу побудови $U_n\left(f; \cdot; \Lambda\right)$, вибору матриці Λ . У рамках розвитку ідеї узагальнення лінійних методів підсумовування, в 1991 році О.О. Новіковим був запроваджений більш загальний агрегат наближення, так званий «у-ен-фі-еф» метод (напр. [3]), частинним випадком якого є усі класичні методи. Принцип побудови таких методів оснований на введені мультиплікатора кожної гармоніки тригонометричного ряду, але вплив парної чи непарної складової гармоніки на підсумовування ряду може різнитися.

В роботі розв'язується задача Колмогорова-Нікольського для методу $U_n\left(f; \cdot; \Lambda_{1,2}\right)$, побудованого на основі біматриць, для періодичних функцій з класу $C_\infty^{\overline{\psi}}$ в рівномірній метриці. Класи $C_\infty^{\overline{\psi}}$ були введені у 1996 році О.І.Степанцем. Ці класи при фіксованих значеннях параметрів, що їх визначають, співпадають з відомими класами $C_{\beta,\infty}^{\psi}$.

Метою даної роботи є знаходження асимптотичних рівностей для точних верхніх меж відхилень узагальнених тригонометричних поліномів, що породжені новим методом, на класах $C_\infty^{\overline{\psi}}$ в рівномірній метриці.

Об'єктом дослідження є клас $C_\infty^{\overline{\psi}}$.

Предметом дослідження є швидкість наближення в рівномірній метриці функцій з класів $C_\infty^{\overline{\psi}}$ узагальненими тригонометричними поліномами, що породжені лінійним біматричним методом.

Задачі дослідження:

1) ввести до розгляду більш загальний, біматричний, лінійний метод підсумовування рядів Фур'є;

2) встановити необхідні і достатні умови рівномірної збіжності послідовності поліномів, що породжені новим методом;

3) оцінити знизу відхилення поліному, побудованого на основі нового методу, від функції, що його породжує;

4) отримати асимптотичну рівність для верхніх меж відхилень узагальнених поліномів $U_n\left(f; x; \Lambda_{1,2}\right)$ на класах $C_\infty^{\overline{\psi}}$ в метриці простору C .

Основна частина

Нехай $f \in L(0, 2\pi)$ і

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k(f)\cos kx + b_k(f)\sin kx\right) \tag{1}$$

– ряд Фур'є цієї функції,

$$\begin{aligned} a_k &= a_k(f) = \tfrac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos ktdt, \\ b_k &= b_k(f) = \tfrac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin ktdt, \quad k = 0, 1, ..., \end{aligned} \tag{2}$$

– її коефіцієнти Фур'є.

В напрямку узагальнення лінійних методів підсумовування пропонується нова конструкція поліномів.

За допомогою нескінченних числових матриць $\Lambda_1 = \left\{\lambda_{k,1}^{(n)}\right\}, \Lambda_2 = \left\{\lambda_{k,2}^{(n)}\right\}$ таких, що $\forall n \in \mathrm{N}$ $\lambda_{0,i}^{n} = 1$, $k \geqslant n$, $\lambda_{k,i}^{n} = 0$, $i = 1, 2$ кожній функції $f(x)$ на основі ряду (1) поставимо у відповідність послідовність тригонометричних поліномів $U_n(f; x; \Lambda_{1,2})$ виду

$$U_n(f; x; \Lambda_{1,2}) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} \left(\lambda_{k,1}^{(n)} a_k(f)\cos kx + \lambda_{k,2}^{(n)} b_k(f)\sin kx\right). \tag{3}$$

Неважко переконатися у лінійності методу (3), який називатимемо біматричним методом, а отже, через визначення Λ_1, Λ_2 можна отримати відомі лінійні методи.

Якщо у (3) визначити $\Lambda_1 = \Lambda_2 = 1$, то відповідний поліном, очевидно, співпадає з частинними сумами *Фур'є*

$$U_n(f; x; \Lambda_{1,2}) = S_n(f, x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} (a_k(f)\cos kx + b_k(f)\sin kx). \tag{4}$$

Метод середніх арифметичних (метод Фейєра) буде задано при $\Lambda_1 = \Lambda_2 = \lambda_k^{(n)} = 1 - \frac{k}{n}$, $k = 0, 1, .., n-1$, і (3), при цьому задають суми *Фейєра*:

$$U_n(f; x; \Lambda_{1,2}) = \sigma_n(f; x) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} S_k(f; x). \tag{5}$$

Якщо у (3) прийняти $\Lambda_1=\Lambda_2=\begin{cases}1, & k=0,1,...,n-p\\ 1-\frac{k-n+p}{p}, & k=n-p+1,...,n-1,\end{cases}$
то будуть задані суми *Валле-Пуссена*:

$$U_n\left(f;x;\Lambda_{1,2}\right)=V_{n,p}\left(f;x\right)=\frac{1}{p}\sum_{k=n-p}^{n-1}S_{k+1}\left(f;x\right) \tag{6}$$

Якщо у (3) прийняти $\Lambda_1=\Lambda_2=\cos\frac{k\pi}{2n},\ k=0,1,...,n-1$, то будуть задані, так звані суми *Рогозинского.* Суми *Зигмунда* визначаються при

$$\Lambda_1=\Lambda_2=1-\left(\frac{k}{n}\right)^s,\ s>0,\ k=0,1,...,n-1.$$

Зрозуміло, що апроксимаційні властивості поліномів (3) визначаються матрицями Λ_1,Λ_2. Питання рівномірної збіжності поліномів (3) у випадку $\Lambda=\Lambda_1=\Lambda_2=\lambda_k^{(n)}$ на просторі C (простір неперервних на всій осі $2\pi-$ періодичних функцій з нормою $||f||_C=\max\limits_t|f(t)|$) розкрите у роботі [1]. Використовуючи викладену методику, встановимо умови рівномірної збіжності поліномів (3) у загальному випадку, при $\Lambda_1\neq\Lambda_2$.

Припустимо, що $U_n(f;x;\Lambda_{1,2})$ рівномірно збігаються на просторі C, то вони повинні збігатися і на підпросторі C утвореного тригонометричними поліномами $P_m(x)$ порядку не вище за m, рівномірно по всім $x\in[-\pi,\pi]$ і повинно виконуватися $\lim\limits_{n\to\infty}|U_n\left(P_m;x,\Lambda_{1,2}\right)-P_m|=0$, що можливо, лише коли

$$\lim_{n\to\infty}\lambda_{k,i}^{(n)}=1,\quad i=1,2. \tag{7}$$

Оскільки

$$U_n(P_m;x;\Lambda_{1,2})-P_m=\sum_{k=1}^{m}[(\lambda_{k,1}^{(n)}-1)a_k(f)\cos kx+(\lambda_{k,2}^{(n)}-1)b_k(f)\sin kx]. \tag{8}$$

Тобто система (7) є необхідною умовою рівномірної збіжності на просторі C поліномів $U_n(f;x;\Lambda_{1,2})$.

Згідно з теоремою Вейерштрасса довільну функцію з простру С можна наблизити, з будь-якою точністю, тригонометричним поліномом. Тобто, якщо $f(x)\in C$ то $\forall\varepsilon>0\ \exists\ P_m^{(\varepsilon)}(f,x)\ :\ \left|\left|f(x)-P_m^{(\varepsilon)}(f,x)\right|\right|_C\leqslant\varepsilon$.

Отже, $\forall\ \Lambda_{1,2}$

$$\begin{aligned}&||f(x)-U_n(f;x;\Lambda_{1,2})||_C=\\
&=\left|\left|f(x)-P_m^{(\varepsilon)}(f,x)+P_m^{(\varepsilon)}(f,x)-U_n(f;x;\Lambda_{1,2})\right|\right|_C\leqslant\\
&\leqslant\left|\left|f(x)-P_m^{(\varepsilon)}(f,x)\right|\right|_C+\left|\left|P_m^{(\varepsilon)}(f,x)-U_n(f;x;\Lambda_{1,2})\right|\right|_C\leqslant\\
&\leqslant\varepsilon+\left|\left|P_m^{(\varepsilon)}(f,x)-U_n(P_m^{(\varepsilon)};x;\Lambda_{1,2})\right|\right|_C+\left|\left|U_n((P_m^{(\varepsilon)}-f);x;\Lambda_{1,2})\right|\right|_C\end{aligned}$$

Розглянемо

$$\left\|U_n\left((P_m^{(\varepsilon)}-f);x,\Lambda_{1,2}\right)\right\|_C=\max_x\left|\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}[P_m^{(\varepsilon)}(x+t)-f(x+t)]U_n^{(1)}(t;\Lambda_{1,2})dt+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}[P_m^{(\varepsilon)}(t-x)-f(t-x)]U_n^{(2)}(t;\Lambda_{1,2})dt\right|\leqslant$$

$$\leqslant\frac{2\varepsilon}{\pi}\left[\int\limits_0^{\pi}\left|U_n^{(1)}(t;\Lambda_{1,2})\right|dt+\int\limits_0^{\pi}\left|U_n^{(2)}(t;\Lambda_{1,2})\right|dt\right],$$

де $U_n^{(1)}(t;\Lambda_{1,2})=\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{\lambda_{k,1}^{(n)}+\lambda_{k,2}^{(n)}}{2}\cos kt,\quad U_n^{(2)}(t;\Lambda_{1,2})=\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{\lambda_{k,1}^{(n)}-\lambda_{k,2}^{(n)}}{2}\cos kt\,.$

Значить

$$\|f(x)-U_n(f;x,\Lambda_{1,2})\|_C\leqslant\varepsilon\left(1+\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\left[\left|U_n^{(1)}(t;\Lambda_{1,2})\right|+\left|U_n^{(2)}(t;\Lambda_{1,2})\right|\right]dt\right)+$$

$$+\left\|P-m^{(\varepsilon)}(f,x)-U_n\left(P_m^{(\varepsilon)};x,\Lambda_{1,2}\right)\right\|_C.\tag{9}$$

Послідовність чисел

$$L_n\left(\Lambda_{1,2};i\right)=\sup_{|f|<1}\left|\left|U_n^{(i)}(f;x;\Lambda_{1,2})\right|\right|_C=\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi}\left|U_n^{(i)}(t;\Lambda_{1,2})\right|dt\quad i=1,2$$

є аналогами констант Лебега даного метода.

Обмеженість $L_n\left(\Lambda_{1,2};i\right)$ будемо позначати класично:

$$L_n\left(\Lambda_{1,2};i\right)=O\left(1\right),\quad n\to\infty\ \ i=1,2.\tag{10}$$

Отже (9), (8), (10) свідчать про рівномірну збіжність $U_n(f;x;\Lambda_{1,2})$ до $f(x)$ на C завжди, коли виконано (7).

Таким чином, умови (7), (10) є достатніми умовами рівномірної збіжності $U_n(f;x;\Lambda_{1,2})$ до $f(x)$ на C. Необхідність (7) вже встановлена, необхідність умови (10) слідує з теореми Банаха:
для того, щоб послідовність лінійних операторів $U_n(f)$, що відображають повний лінійний нормований простір C у свою частину, володіла властивістю

$$\lim_{n\to\infty}||f-U_n(f)||_c=0,$$

необхідно і достатньо, щоб $\forall\quad f(x)\in C$ виконувалась умова

$$\sup\{||U_n(f)||_c:||f||\leqslant 1\}=O(1),\quad n\to\infty.$$

Виходячи з (10) можна стверджувати, що поліноми $U_n(f;x,\Lambda_{1,2})$ будуть рівномірно збігатися кожного разу, коли будуть рівномірно збігатися $U_n(f;x;\Lambda_1)$ і $U_n(f;x;\Lambda_2)$, але не навпаки.

В умові (10) можна вимагати лише $L_n(\Lambda_{1,2};1)=O(1)$, при $n\to\infty$ оскільки $L_n\left(\Lambda_{1,2};2\right)=O\left(1\right)$, при $n\to\infty$ випливає із ознаки збіжності рядів, ознаки Дирихле:

ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k b_k$ буде збігатися, якщо ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ обмежений, а послідовність чисел $\{a_k,\ k=1,2..\}$ монотонно прямує до нуля.

Оскільки $\sum\limits_{k=1}^{n} \cos kt = \frac{\sin\frac{nt}{2}\cos\frac{n+1}{2}t}{\sin\frac{t}{2}}, \quad t \neq 2\pi k \quad k \in Z$, є обмеженою при $n \to \infty$, а монотонне зменшення до нуля $a_k = \frac{\lambda_{k,1}^{(n)} - \lambda_{k,2}^{(n)}}{2}$ забезпечується монотонним виконанням (7), то $\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi} \left| \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{\lambda_{k,1}^{(n)} - \lambda_{k,2}^{(n)}}{2} \cos kt \right| dt = O(1)$, при $n \to \infty$.

Теорема 1. *Для рівномірної збіжності послідовності поліномів $U_n\left(f;x;\Lambda_{1,2}\right)$ до функції $f\left(x\right)$ на всьому просторі C, необхідно і достатньо виконання умов:*

$$1) \quad \lim_{n\to\infty} \lambda_{k,i}^{(n)} = 1, \quad i = 1,2$$

$$2) \quad L_n\left(\Lambda_{1,2}\right) = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi} \left| \sum_{k=1}^{n} \frac{\lambda_{k,1}^{(n)} + \lambda_{k,2}^{(n)}}{2} \cos kt \right| dt = O(1), \quad n \to \infty$$

Встановимо нижню межу відхилення поліномів (3) від функції $f(x)$, що їх породжує. Для цього розглянемо величину $I = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} \left[f(x) - U_n(f;x;\Lambda_{1,2})\right] e^{imx} dx$, $m < n$, яку з урахуванням (1), (2), (3) подамо у вигляді

$$I = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} \left[\sum_{k=1}^{n-1} \left[(1-\lambda_{k,1}^{(n)}) a_k(f) \cos kx + (1-\lambda_{k,2}^{(n)}) b_k(f) \sin kx \right] + \right.$$
$$\left. + \sum_{k=n}^{\infty} \left[a_k(f) \cos kx + b_k(f) \sin kx \right] \right] e^{imx} dx.$$

Застосовуючи формулу Ейлера $\cos mx + i \sin mx = e^{mxi}$ та виконавши ряд елементарних перетворень, отримаємо

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{n-1} \left[(1-\lambda_{k,1}^{(n)}) a_k(f) \int\limits_{-\pi}^{\pi} \cos kx (\cos mx + i \sin mx) dx + \right. \\ &+ \left. (1-\lambda_{k,2}^{(n)}) b_k(f) \int\limits_{-\pi}^{\pi} \sin kx (\cos mx + i \sin mx) dx \right] + \\ &+ \sum_{k=n}^{\infty} \left[a_k(f) \int\limits_{-\pi}^{\pi} \cos kx (\cos mx + i \sin mx) dx + \right. \\ &+ \left. b_k(f) \int\limits_{-\pi}^{\pi} \sin kx (\cos mx + i \sin mx) dx \right]. \end{aligned}$$

Виходячи з ортогональності тригонометричної системи

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} \cos kx \sin mx dx = 0 \quad \forall k,m, \qquad \int\limits_{-\pi}^{\pi} \sin kx \sin mx dx = \begin{cases} 0, & k \neq m \\ \pi, & k = m \end{cases}$$

і $\int\limits_{-\pi}^{\pi} \cos kx \cos mx dx = \begin{cases} 0, & k \neq m \\ \pi, & k = m, \end{cases}$ маємо

$I = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\left[f(x) - U_n(f;x;\Lambda_{1,2})\right]e^{imx}dx = (1-\lambda_{k,1}^{(n)})a_k(f) + i(1-\lambda_{k,2}^{(n)})b_k(f).$

Очевидно,

$|I| = \left|(1-\lambda_{k,1}^{(n)})a_k(f) + i(1-\lambda_{k,2}^{(n)})b_k(f)\right| = \left|\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\left[f(x) - U_n(f;x;\Lambda_{1,2})\right]e^{imx}dx\right|,$

і тому має місце

Теорема 2. *Швидкості збіжності будь-якого полінома побудованого лінійним біматричним методом* (3)*, до функції що його породжує, не може бути кращою за величину* $\min\limits_{k\in N}\frac{\sqrt{\left[\left(1-\lambda_{k,1}^{(n)}\right)a_k\right]^2+\left[\left(1-\lambda_{k,2}^{(n)}\right)b_k\right]^2}}{2}$*, тобто*

$$\min_{k\in N}\frac{\sqrt{\left[\left(1-\lambda_{k,1}^{(n)}\right)a_k\right]^2+\left[\left(1-\lambda_{k,2}^{(n)}\right)b_k\right]^2}}{2} \leqslant \left|\left|f\left(x\right) - U_n\left(f;x;\Lambda_{1,2}\right)\right|\right|_C. \quad (11)$$

Дослідимо величину $\sup\limits_{f\in C_\infty^{\overline{\psi}}}\|f(x) - U_n(f;x;\Lambda_{1,2})\|$, а саме асимптотичну її поведінку при $n\to\infty$.

В роботах О.І. Степанця [1, 2] класи функцій $f \in C_\infty^{\overline{\psi}}$ визначаються наступним чином. Нехай (1) ряд Фур'є функції $f \in L\left(0,2\pi\right)$ і $\overline{\psi}(k) = (\psi_1(k),\psi_2(k))$ пара довільних фіксованих систем чисел, що задовольняють умову

$$\overline{\psi}^2(k) = \psi_1^2(k) + \psi_2^2(k) \neq 0, \quad k \in \mathrm{N}.$$

Якщо ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\psi_1(k)}{\overline{\psi}^2(k)}A_k(f,x) + \frac{\psi_2(k)}{\overline{\psi}^2(k)}\overline{A}_k(f,x), \quad \text{де}$$

$A_k(f,x) = a_k(f)\cos kx + b_k(f)\sin kx$, $\overline{A}_k(f,x) = -a_k(f)\sin kx + b_k(f)\cos kx$ є рядом Фур'є деякої функції, то назвемо її $\overline{\psi}$ похідною функції $f(x)$ і позначимо $f^{\overline{\psi}}(x)$.

Нехай $C_\infty^{\overline{\psi}}$ клас функцій $f\in C$, які мають обмежену $\overline{\psi}$ похідну.

Представимо $f(x)-U_n(f;x;\Lambda_{1,2})$ в інтегральному виді. Згідно означення

$$f^{\overline{\psi}}(x) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\psi_1(k)}{\overline{\psi}^2(k)}A_k(f,x) + \frac{\psi_2(k)}{\overline{\psi}^2(k)}\overline{A}_k(f,x) =$$

$$= A_k(f,x) = \sum_{k=1}^{\infty}a_k(f^{\overline{\psi}})\cos kx + b_k(f^{\overline{\psi}})\sin kx,$$

де $\begin{cases} a_k(f^{\overline{\psi}}) = \frac{1}{\overline{\psi}^2(k)}(\psi_1(k)a_k(f) + \psi_2(k)b_k(f)) \\ b_k(f^{\overline{\psi}}) = \frac{1}{\overline{\psi}^2(k)}(\psi_1(k)b_k(f) - \psi_2(k)a_k(f)). \end{cases}$

$$A_k(f,x)=\psi_1(k)\Big[a_k(f^{\overline{\psi}})\cos kx+b_k(f^{\overline{\psi}})\sin kx\Big]-$$
$$-\psi_2(k)\Big[b_k(f^{\overline{\psi}})\cos kx-a_k(f^{\overline{\psi}})\sin kx\Big]=$$
$$=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}f^{\overline{\psi}}(t)[\psi_1(k)\cos k(t-x)-\psi_2(k)\sin k(t-x)]dt=$$
$$=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}f^{\overline{\psi}}(x-t)[\psi_1(k)\cos kt+\psi_2(k)\sin kt]dt$$

Неважко переконатися в тому, що (3) можна записати у вигляді

$$U_n(f;x;\Lambda_{1,2})=\sum_{k=1}^{n-1}\left[\frac{\lambda_{k,1}^{(n)}-\lambda_{k,2}^{(n)}}{2}\left(a_k(f)\cos kx-b_k(f)\sin kx\right)\right]+$$
$$+\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{n-1}\left[\frac{\lambda_{k,1}^{(n)}+\lambda_{k,2}^{(n)}}{2}\left(a_k(f)\cos kx+b_k(f)\sin kx\right)\right].$$

Нехай можливе представлення:

$$\begin{cases}\lambda_{n,1}(x)=1-\frac{\varphi_n(nx)}{\varphi_n(n)}F_n(x)\\ \lambda_{n,2}(x)=1-\frac{g_n(nx)}{g_n(n)}H_n(x)\end{cases},\quad \lambda_{n,i}\left(\frac{k}{n}\right)=\lambda_{k,i}^{n},\quad i=1,2,$$

де $\varphi_n(x),g_n(x)$ послідовність неперервних, додатніх, не спадаючих при $x>0$ функцій таких, що $\varphi_n(0)=g_n(0)=0$; $F_n(x),H_n(x)$ послідовність двічі диференційованих і неперервних функцій, обмежених разом із другою похідною при $x\in[0;1]$ таких, що $F_n(0)\neq 0$, $H_n(0)\neq 0$ і $F_n(1)=H_n(1)$.

Тоді вважатимемо $U_n(f;x,\Lambda_{1,2})\equiv U_n(f;x;\{\varphi,F\};\{g,H\})$, і відхилення запишемо у вигляді

$$\Delta_n\left(f,x,\Lambda_{1,2}\right)=f\left(x\right)-U_n\left(f;x;\{\varphi,F\};\{g,H\}\right)=$$
$$=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}f^{\overline{\psi}}\left(-x-t\right)\left(\sum_{k=1}^{n-1}\left(\nu_{k,1}^{(n)}\left(t\right)\cos kt+\nu_{k,2}^{(n)}\left(t\right)\sin kt\right)\right)dt+$$
$$+\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}f^{\overline{\psi}}\left(x-t\right)\left(\sum_{k=1}^{\infty}\left(\tau_{k,1}^{(n)}\left(t\right)\cos kt+\tau_{k,2}^{(n)}\left(t\right)\sin kt\right)\right)dt,$$

де $\nu_{k,i}^{(n)}(t)=\left\{\left(\lambda_{k,2}^{(n)}(t)-\lambda_{k,1}^{(n)}(t)\right)\psi_i(k),\quad i=1,2\right.$;

$$\tau_{k,i}^{(n)}(t)=\begin{cases}\left(1-\frac{\lambda_{k,2}^{(n)}(t)+\lambda_{k,1}^{(n)}(t)}{2}\right)\psi_i(k), & k<n,\\ \psi_i(k), & k\geqslant n,\end{cases}\qquad i=1,2.$$

Відомо, що за умови коли $\psi_1(v),\psi_2(v)$ неперервні, додатні і випукли вниз при $v\geqslant 1$, і $\lim\limits_{v\to\infty}\psi_i(v)=0,\quad i=1,2$ та $\int\limits_1^{\infty}\frac{\psi_i(v)}{v}dv<\infty$, то можливе інтегральне представлення

$$\Delta_n\left(f,x,\Lambda_{1,2}\right)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}f^{\overline{\psi}}\left(-x-\frac{t}{n}\right)\int\limits_0^1\left(\nu_{n,1}\left(v\right)\cos vt+\nu_{n,2}\left(v\right)\sin vt\right)dvdt+$$
$$+\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}f^{\overline{\psi}}\left(x-\frac{t}{n}\right)\int\limits_0^{\infty}\left(\tau_{n,1}\left(v\right)\cos vt+\tau_{n,2}\left(v\right)\sin vt\right)dvdt=I_1+I_2,$$

де $\nu_{n,i}(v) = \left\{ (\lambda_{n,2}(v) - \lambda_{n,1}(v))\, \psi_i(nv)\,, \quad \frac{1}{n} \leqslant v \leqslant 1, \quad i = 1,2; \right.$

$$\tau_{n,i}(v) = \left\{ \begin{array}{ll} \left(1 - \frac{\lambda_{n,2}(v)+\lambda_{n,1}(v)}{2}\right)\psi_i(nv)\,, & \frac{1}{n} \leqslant v \leqslant 1, \\ \psi_i(nv), & v \geqslant 1, \end{array} \right. \quad i = 1,2.$$

Для випадків $0 \leqslant v \leqslant \frac{1}{n}$ функції $\nu_{n,i}(v)$ і $\tau_{n,i}(v)$ довизначаються довільно з урахуванням неперервності.

При вивченні асимптотичних поведінок $\Delta_n(f,x,\Lambda_{1,2}) = I_1 + I_2$ доданок I_2 завжди присутній та достатньо вивчений і оцінений. Новим є перший доданок, вивчимо його, $I_1 = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f^{\overline{\psi}}(-x - \frac{t}{n})\int\limits_0^1 (\nu_{n,1}(v)\cos vt + \nu_{n,2}(v)\sin vt)dvdt$.

Для його оцінки використаємо *лему Теляковського.*
Якщо: 1) $\nu_{n,i}(v)$ абсолютно неперервні при $v > 0$; 2) $\nu_{n,i}(0) = \nu_{n,i}(1) = 0$; 3) для точок, в яких не існує $\nu_{n,i}(v)$ її можна довизначити так, що інтеграл $\int\limits_0^1 v(1-v)\left|d\nu'_{n,i}(v)\right|$ існує, то $\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left|\int\limits_0^1 (\nu_{n,1}(v)\cos vt + \nu_{n,2}(v)\sin vt)dv\right|dt =$

$$= \frac{1}{\pi}\int\limits_0^1 \frac{|\nu_{n,2}(v)|}{v}dv + O(1)\left(\int\limits_0^1 \frac{\sqrt{\nu_{n,1}^2+\nu_{n,2}^2}}{1-v}dv + \sum_{i=1}^{2}\int\limits_0^1 v(1-v)\left|d\nu'_{n,i}(v)\right|\right).$$

Для I_1 має місце нерівність

$$|I_1| \leqslant \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left|\int\limits_0^1 (\nu_{n,1}(v)\cos vt + \nu_{n,2}(v)\sin vt)dv\right|dt,$$

у якій інтеграл в правій частині задовольняє всім умовам леми Теляковського, якщо $\nu_{n,i}(v)$ довизначити на проміжку $0 \leqslant v \leqslant \frac{1}{n}$ аналогічно проміжку $\frac{1}{n} \leqslant v \leqslant 1$, тобто $\nu_{n,i}(v) = \{(\lambda_{n,2}(v) - \lambda_{n,1}(v))\,\psi_i(nv) \quad 0 \leqslant v \leqslant 1, \quad i = 1,2.$

Перевірка умов леми для таких $\nu_{n,i}(v)$ не є складною. Виконання першої і третьої умови слідує з визначення $\nu_{n,i}(v)$. З визначення випливає виконання і другої умови, згідно представлення $\lambda_{n,i}(v)$

$$\nu_{n,i}(v) = \left\{ \left(\frac{\varphi_n(nv)}{\varphi_n(n)}F_n(v) - \frac{g_n(nv)}{g_n(n)}H_n(v)\right)\psi_i(nv), \right. \qquad 0 \leqslant v \leqslant 1, \quad i = 1,2;$$

звідки

$$\nu_{n,i}(0) = \left\{ \left(\frac{\varphi_n(0)}{\varphi_n(n)}F_n(0) - \frac{g_n(0)}{g_n(n)}H_n(0)\right)\psi_i(0) = \right.$$
$$= \left(\frac{0}{\varphi_n(n)}\cdot F_n(0) - \frac{0}{g_n(n)}\cdot F_n(0)\right)\psi_i(0) = 0, \quad 0 \leqslant v \leqslant 1, \quad i = 1,2;$$

$$\nu_{n,i}(1) = \left\{ \left(\frac{\varphi_n(n)}{\varphi_n(n)}F_n(1) - \frac{g_n(n)}{g_n(n)}H_n(1)\right)\psi_i(1) = \right.$$
$$= (1\cdot F_n(1) - 1\cdot H_n(1))\,\psi_i(n) = 0, \quad 0 \leqslant v \leqslant 1, \quad i = 1,2.$$

Це свідчить про те, що $\nu_{n,i}(0) = \nu_{n,i}(1) = 0$. Вивчимо головну частину.

$$\int\limits_0^1 \frac{|\nu_{n,2}(v)|}{v}dv = \int\limits_0^1 \frac{|(\lambda_{n,2}(v)-\lambda_{n,1}(v))\psi_2(nv)|}{v}dv = \int\limits_0^1 \frac{\left|\left(\frac{\varphi_n(nv)}{\varphi_n(n)}F_n(v) - \frac{g_n(nv)}{g_n(n)}H_n(v)\right)\right|}{v}|\psi_2(nv)|dv =$$

$$= \frac{1}{\varphi_n(n)g_n(n)}\int\limits_0^1 \frac{|(\varphi_n(nv)g_n(n)F_n(v)-g_n(nv)\varphi_n(n)H_n(v))|}{v}|\psi_2(nv)|dv \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{\varphi_n(n)g_n(n)}\int\limits_0^1 \frac{|(\varphi_n(nv)g_n(n)(F_n(v)-F_n(0))-g_n(nv)\varphi_n(n)(H_n(v)-H_n(0)))|}{v}|\psi_2(nv)|dv+$$

$$+\frac{1}{\varphi_n(n)g_n(n)}\int\limits_0^1 \frac{|(\varphi_n(nv)g_n(n)F_n(0)-g_n(nv)\varphi_n(n)H_n(0))|}{v}|\psi_2(nv)|dv = A_1 + A_2.$$

Розглянемо перший доданок $A_1 = \frac{1}{\varphi_n(n)g_n(n)}\times$

$$\times\int\limits_0^1 \frac{|(\varphi_n(nv)g_n(n)(F_n(v)-F_n(0))-g_n(nv)\varphi_n(n)(H_n(v)-H_n(0)))|}{v}|\psi_2(v)|dv\,.$$

Враховуючи визначення $\lambda_{n,i}(v)$ і теорему Лагранжа $F_n(v)-F_n(0) = = F'_n(\xi_F)(v-0)$, $H_n(v)-H_n(0) = H_n(\xi_H)(v-0)$, де $\xi_F, \xi_H \in (0;v)$, маємо

$$A_1 = \frac{1}{\varphi_n(n)g_n(n)}\int\limits_0^1 |(\varphi_n(nv)g_n(n)F'_n(\xi_F) - g_n(nv)\varphi_n(n)H'_n(\xi_H))||\psi_2(nv)|dv =$$

$$= \frac{O(1)}{\varphi_n(n)g_n(n)} \max_{0\leqslant v\leqslant 1}\{|\varphi_n(nv)g_n(n)\psi_2(nv)| + |g_n(nv)\varphi_n(n)\psi_2(nv)|\}.$$

У випадку зростання $\varphi_n(nv)\psi_i(nv)$ і $g_n(nv)\psi_i(nv)$ отримаємо, що $A_1 = O(1)\overline{\psi}(n)$, а отже

$$\int\limits_0^1 \frac{|\nu_{n,2}(v)|}{v}dv = \int\limits_0^n \left|\left(\frac{\varphi_n(v)}{\varphi_n(n)}F_n(0) - \frac{g_n(v)}{g_n(n)}H_n(0)\right)\right|\frac{|\psi_2(v)|}{v}dv + O(1)\overline{\psi}(n).$$

Для оцінки першого доданка більшого порядку малості $\int\limits_0^1 \frac{\sqrt{\nu_{n,1}^2+\nu_{n,2}^2}}{1-v}dv$, врахуємо нерівність $\int\limits_0^1 \frac{\sqrt{\nu_{n,1}^2+\nu_{n,2}^2}}{1-v}dv \leqslant \sum\limits_{i=1}^2\int\limits_0^1 \frac{|\nu_{n,i}(v)|}{1-v}dv$ та отримаємо

$$\int\limits_0^1 \frac{|\nu_{n,i}(v)|}{1-v}dv = \int\limits_0^1 \frac{\left|\left(\frac{\varphi_n(nv)}{\varphi_n(n)}F_n(v)-\frac{g_n(nv)}{g_n(n)}H_n(v)\right)\right|}{1-v}|\psi_i(nv)|dv \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_0^1 \frac{\left|\left(\frac{\varphi_n(nv)}{\varphi_n(n)}(F_n(v)-1)-\frac{g_n(nv)}{g_n(n)}(H_n(v)-1)\right)\right|}{1-v}|\psi_i(nv)|dv + \int\limits_0^1 \frac{\left|\left(\frac{\varphi_n(nv)}{\varphi_n(n)}-\frac{g_n(nv)}{g_n(n)}\right)\right|}{1-v}|\psi_i(nv)|dv =$$

$$= B_1 + B_2\,.$$

Згідно визначення $\lambda_{n,i}(v)$ і теореми Лагранжа запишемо:
для B_1, $F_n(v)-F_n(1) = F'_n(\xi_F)(v-1)$,
а $H_n(v)-H_n(1) = H'_n(\xi_H)(v-1)$ де $\xi_F, \xi_H \in (v;1)$,
для B_2, $\varphi_n(nv)\psi_i(nv) - \varphi_n(n)\psi_i(n) = (\varphi_n(n\xi_\varphi)\psi_i(n\xi_\varphi))'\,n(v-1)$; при $i=1,2$
$g_n(nv)\psi_i(nv) - g_n(n)\psi_i(n) = (g_n(n\xi_g)\psi_i(n\xi_g))'\,n(v-1)$ де $\xi_g, \xi_\varphi \in (nv;n)$

Тоді у випадку зростання $\varphi_n(nv)\psi_i(nv)$ і $g_n(nv)\psi_i(nv)$ отримаємо, що

$$B_1 = \int\limits_0^1 \left|\left(\frac{\varphi_n(nv)}{\varphi_n(n)}F'_n(\xi_F) - \frac{g_n(nv)}{g_n(n)}H'_n(\xi_H)\right)\right||\psi_i(nv)|dv \leqslant$$

$$\leqslant O(1)\max_{0\leqslant v\leqslant 1}\left\{\left|\frac{\varphi_n(nv)}{\varphi_n(n)}\psi_i(nv)\right| + \left|\frac{g_n(nv)}{g_n(n)}\psi_i(nv)\right|\right\},$$

а значить $B_1 = O(1)\overline{\psi}(n)$. Для другого інтегралу $B_2 = \frac{1}{\varphi_n(n)g_n(n)}\cdot$
$\cdot\int\limits_0^1 |(\varphi_n(nv)\psi_i(nv) - \varphi_n(n)\psi_i(n))\, g_n(n) - (g_n(nv)\psi_i(nv) - g_n(n)\psi_i(n))\, \varphi_n(n)| \frac{dv}{1-v}$

$$B_2 \leqslant \frac{1}{\varphi_n}(n)g_n(n)\int\limits_0^1 |\,(\varphi_n(nv)\psi_i(nv))'_{\xi_\varphi}\, n(v-1)g_n(n) -$$
$$-\,(g_n(nv)\psi_i(nv))'_{\xi_g}\, n(v-1)\varphi_n(n)|\frac{dv}{1-v} \leqslant$$
$$\leqslant \frac{1}{\varphi_n(n)g_n(n)}\int\limits_0^1 \Big|(\varphi_n(nv)\psi_i(nv))'_{\xi_\varphi}\, ng_n(n)\Big|dv +$$
$$+\frac{1}{\varphi_n(n)g_n(n)}\int\limits_0^1 \Big|(g_n(nv)\psi_i(nv))'_{\xi_g}\, n\varphi_n(n)\Big|dv =$$
$$= \frac{1}{\varphi_n(n)g_n(n)}\left(|\varphi_n(nv)\psi_i(nv)|g_n(n) + |g_n(nv)\psi_i(nv)|\varphi_n(n)\right)|_0^1 = O(1)\overline{\psi}(n)\,.$$

Враховуючи оцінки B_1 та B_2 отримуємо, що
$\int\limits_0^1 \frac{|\nu_{n,i}(v)|}{1-v}dv = O(1)\overline{\psi}(n)$, і як наслідок $\int\limits_0^1 \frac{\sqrt{\nu_{n,1}^2 + \nu_{n,2}^2}}{1-v}dv = O(1)\overline{\psi}(n).$

Для оцінки другого доданка більшого порядку малості, вивчимо рівність

$$\int\limits_0^1 v(1-v)\big|d\nu'_{n,i}(v)\big| =$$
$$= \int\limits_0^1 v(1-v)\left|d\left(\left(\frac{\varphi_n(nv)}{\varphi_n(n)}F_n(v)\psi_i(nv)\right)' - \left(\frac{g_n(nv)}{g_n(n)}H_n(v)\psi_i(nv)\right)'\right)\right| =$$
$$= O(1)\int\limits_0^1 v(1-v)\left|d\left(\left(\frac{\varphi_n(nv)}{\varphi_n(n)}F_n(v)\psi_i(nv)\right)'\right)\right| +$$
$$+O(1)\int\limits_0^1 v(1-v)\left|d\left(\frac{g_n(nv)}{g_n(n)}H_n(v)\psi_i(nv)\right)'\right| = O(1)C_1 + O(1)C_2.$$

Оцінимо C_1. Позначимо $\dfrac{\varphi_n(nv)}{\varphi_n(n)}\psi_i(nv) = Z_i(nv)$ і розглянемо

$$C_1 = \int\limits_0^1 v(1-v)\big|d\left((Z_i(nv)F_n(v))'\right)\big|\,,$$

де $(Z_i(nv)F_n(v))' = nZ_i'(nv)F_n(v) + Z_i(nv)F_n'(v)$, і

$$d\left((Z_i(nv)F_n(v))'\right) = (nZ_i'(nv)F_n(v) + Z_i(nv)F_n'(v))'\,dv = \\ = \left(n^2 Z_i''(nv)F_n(v) + 2Z_i'(nv)F_n'(v) + Z_i(nv)F_n''(v)\right)dv\,.$$

Тоді $\quad C_1 = \int\limits_0^1 v(1-v)\left|d\left((Z_i(nv)F_n(v))'\right)\right| =$

$$= O(1)\left(\left|\int\limits_0^1 v(1-v)n^2 Z_i''(nv)dv\right| + 2\left|\int\limits_0^1 v(1-v)nZ_i'(nv)dv\right| + \right. \\ \left. + \left|\int\limits_0^1 v(1-v)Z_i(nv)dv\right|\right)$$

$$C_1 = O(1)\left(\left|v(1-v)nZ_i'(nv)\Big|_0^1 - \int\limits_0^1 (1-2v)dZ_i(nv)\right| + \right.$$

$$\left. +2\left|v(1-v)Z_i(nv)\Big|_0^1 - \int\limits_0^1 (1-2v)Z_i(nv)dv\right| + O(1)\max_{0\leqslant v\leqslant 1}\{v(1-v)Z_i(nv)\}\right) =$$

$$= O(1)\left(\left|\int\limits_0^1 (1-2v)dZ_i(nv)\right| + 2\max_{0\leqslant v\leqslant 1}\{|(1-2v)Z_i(nv)|\} + O(1)\overline{\psi}(n)\right) =$$

$$= O(1)\left(\left|(1-2v)Z_i(nv)\Big|_0^1 + 2\int\limits_0^1 Z_i(nv)dv\right| + O(1)\overline{\psi}(n)\right) =$$

$$= O(1)\left(Z_i(n) + O(1)\max_{0\leqslant v\leqslant 1}\{|Z_i(nv)|\} + O(1)\overline{\psi}(n)\right) = O(1)\overline{\psi}(n).$$

Аналогічно, позначивши $\dfrac{g_n(nv)}{g_n(n)}\psi_i(nv) = Z_i(nv)$, можна показати, що $C_2 = O(1)\overline{\psi}(n)$.

Враховуючи оцінки C_1 і C_2, отримали, що $\int\limits_0^1 v(1-v)\left|d\nu_{n,i}'(v)\right| = O(1)\overline{\psi}(n)$.

Теорема 3. *Якщо функції $\varphi_n(nv)\psi_i(nv)$ і $g_n(nv)\psi_i(nv)$ $\quad i = 1,2$ зростають, випуклі вгору або вниз, то при $n\to\infty$ має місто рівність*

$$\sup_{f\in C_\infty^{\overline{\psi}}}\|f(x) - U_n(f;x;\Lambda_{1,2})\| = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left|\int\limits_0^{\infty}(\tau_{n,1}(v)\cos vt + \tau_{n,2}(v)\sin vt)\,dv\right|dt +$$

$$+\int\limits_0^n\left|\left(\frac{\varphi_n(v)}{\varphi_n(n)}F_n(0) - \frac{g_n(v)}{g_n(n)}H_n(0)\right)\right|\frac{|\psi_2(v)|}{v}dv + O(1)\overline{\psi}(n).$$

Висновки

Узагальнено лінійний метод підсумовування рядів Фур'є, шляхом введення біматриць, матриці для кожного доданку гармоніки;

Встановлено необхідні і достатні умови рівномірної збіжності послідовності поліномів, що породжені новим, біматричним, методом;

Знайдено оцінку знизу відхилення поліному, побудованого на основі нового методу, від функції, що його породжує;

Одержано асимптотичну рівності, в інтегральному виді, для точних верхніх меж наближень узагальненими тригонометричними поліномами $U_n(f;x;\Lambda_{1,2})$ в метриці простору C неперервних 2π-періодичних функцій, $\overline{\psi}$-похідні яких обмежені.

Література

[1] *Степанец А.И.* Классификация и приближение периодических функций / А.И. Степанец. — К.: Наук. думка, 1987. — 268 с.

[2] *Степанец А.И.* Равномерные приближения тригонометрическими полиномами / А.И. Степанец. — Киев: Наук. думка, 1981. — 340 с.

[3] *Рукасов В.И.* Приближение непрерывных периодических функций тригонометрическими полиномами / В.И. Рукасов, О.А. Новиков // Учебное пособие для студ. физ. мат. специальностей пед. институтов и университетов. — Славянск, 1995. — 80 с.

УДК 512.552.3, 511.14

Голубкова О.В., Пащенко З.Д.

[1] *студентка 5 курсу фізико-математичного факультету, ДВНЗ «ДДПУ»*

[2] *кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри алгебри, ДВНЗ «ДДПУ»*

e-mail: olgolubko@mail.ru, pashchenko_zd@mail.ru

АРИФМЕТИКА НЕФАКТОРІАЛЬНИХ ОБЛАСТЕЙ ЦІЛІСНОСТІ З «ІДЕАЛЬНИМИ» МНОЖНИКАМИ

В роботі розглядається нефакторіальне кільце $Z[\sqrt{-5}]$ та розклад його елементів на прості множники. Відсутність однозначності такого розкладу порушує окремі властивості подільності факторіальних кілець, зокрема виявляються відсутніми найбільший спільний дільник та найменше спільне кратне для окремих чисел. Дана робота показує шляхи відшукання НСД та НСК для таких чисел за допомогою «ідеальних» множників, які знаходяться за межами $Z[\sqrt{-5}]$.

Ключові слова: *простий елемент, складений елемент, регулярний елемент, дільник одиниці, НСД, НСК.*

Вступ

Однією із задач, яка призвела до побудови теорії кілець, була задача про розклад на прості множники. В деяких кільцях кожний складений елемент володіє однозначним розкладом, в інших кільцях розклад на прості множники існує, але не виконується умова однозначності, в третіх — існують складені елементи, які не мають розкладу на прості множники.

Області цілісності, що володіють однозначним розкладом на прості множники називають факторіальними. Вони є достатньо відомими і глибоко дослідженими. В даній статті розглядаються нефакторіальні кільця. Неоднозначність розкладу окремих її елементів приводить до того, що виникають суперечності з відомими властивостями факторіальних кілець, виникають проблеми із визначенням найбільших спільних дільників та найменших спільних кратних деяких пар елементів нефакторіальних кілець. Дана стаття показує, яким чином можна вирішити окремі з цих проблем.

Поштовхом до відкриття та вивчення областей з неоднозначним розкладом на прості множники стали спроби довести Велику теорему Ферма. В 1844 році німецький математик Ернст Куммер, вивчаючи публікації в Трудах Французької Академії, аналізував доведення Коші і Ламе. На думку Куммера, основна проблема полягала в тому, що доведення Коші і Ламе спиралися на використання властивості цілих чисел, відомої під назвою єдиності розкладу на прості множники. Обидва представлених Академії доведення спиралися на комплексні числа. Куммер звернув увагу на те, що хоча теорема про єдиність розкладу на прості множники виконується для цілих чисел, вона не обов'язково повинна виконуватися, якщо використовуються комплексні числа. Дана проблема розглядається також в [1, 2, 3].

В роботі розглядається кільце $Z[\sqrt{-5}] = \{a + b\sqrt{5}i| \quad a, b \in Z\}$, окремі його числа, що не володіють однозначним розкладом. Приєднуючи до $Z[\sqrt{-5}]$ числа, які названо «ідеальними», вдається одержати однозначні розклади, які і вирішують проблеми визначення НСД та НСК для довільних чисел, хоча ці значення знаходяться за межами кільця $Z[\sqrt{-5}]$

Основні означення та зауваження

Представлення елемента a у вигляді добутку $a = p_1 p_2 \dots p_n$ $(n \geqslant 1)$ простих елементів з умовою, що в кожному такому представленні елемента a число n обмежено зверху натуральним числом, яке залежить тільки від кільця K і елемента a, називається ***факторизацією елемента*** a.

Нагадаємо, що всі ненульові елементи, які не є дільниками одиниці, називаються ***регулярними*** елементами.

Елемент d називають ***найбільшим спільним дільником*** a і b, якщо він є спільним дільником a і b та довільний інший їх спільний дільник ділить d.

Елементи a і b ***взаємно простими***, якщо вони мають тільки оборотні спільні дільники $((a, b) = 1)$.

Теорема 1. (Критерій кільця з факторизацією.) *Область цілісності є кільцем з факторизацією тоді і тільки тоді, коли на множині її регулярних елементів можна визначити функцію* θ *із значенням в множині* $\mathbb{N}$*, що володіє наступною властивістю: для будь-яких регулярних елементів* a *і* b $\theta(ab) > \theta(a)$.

(Таку функцію будемо називати ***нормою***.)

Доведення.

Необхідність. Нехай K – кільце з факторизацією і a – його регулярний елемент. Розглянемо всі різні факторизації елемента a і покладемо $\theta(a)$ рівним максимальному числу простих, не обов'язково різних, співмножників в факторизаціях елемента a. Якщо $a = p_1 p_2 \dots p_{\theta(a)}$ – факторизація елемента a з максимальним числом простих співмножників і $b = q_1 q_2 \dots q_n$ – деяка факторизація елемента b, то $ab = p_1 p_2 \dots p_{\theta(a)} q_1 q_2 \dots q_n$ є деяка факторизація елемента ab і тому $\theta(ab) > \theta(a)$.

Достатність. Множину всіх значень функції θ позначимо через A. Так як A – не порожня множина натуральних чисел, то вона містить мінімальний елемент. Нехай θ_1 – мінімальний елемент множини A. Якщо $A\backslash\{\theta_1\} \neq \emptyset$, то позначимо її мінімальний елемент через θ_2. Продовжуючи ці міркування, отримаємо монотонно зростаючу послідовність $\theta_1, \ldots, \theta_n, \ldots$ всіх значень функції θ. Методом математичної індукції доведемо, що кожний регулярний елемент допускає факторизацію. Індукцію проведемо за номерами значень функції θ.

Якщо для деякого $p \quad \theta(p) = \theta$, то p – простий елемент. Дійсно, нехай $p = p_1p_2$, де p_1, p_2 - регулярні елементи, тоді $\theta(p) = \theta(p_1p_2) > \theta(p_1) > \theta_1$, тобто $\theta(p) > \theta_1$, що суперечить вибору елементу p. Так як простий елемент допускає факторизацію, то будь-який елемент x, для якого $\theta(x) = \theta_1$, допускає факторизацію.

Припустимо, що будь-який елемент a з умовою $\theta(a) < \theta_n$ допускає факторизацію. Нехай $\theta(b) = \theta_n$. Якщо b – простий елемент, то він допускає факторизацію, в протилежному випадку $b = cd$, де c і d – регулярні елементи. Із означення функції θ випливає, що $\theta(c) < \theta_n$ і $\theta(d) < \theta_n$, отже, c і d допускають факторизацію і елемент d можна представити у вигляді скінченого добутку простих множників. Методом від супротивного покажемо, що для всіх можливих представлень елемента b у вигляді добутку простих елементів число співмножників обмежене. Нехай

$$b = p_1p_2 \ldots p_s, \qquad s \geqslant \theta(b) + 1 \tag{1}$$

Має місце тотожність:

$$\begin{gathered} \theta(b) = (\theta(b) - \theta(p_2 \ldots p_s)) + (\theta(p_2 \ldots) - \theta(p_3 \ldots p_s)) + \ldots \\ \cdots + (\theta(p_{s-1}p_s) - \theta(p_s)) + \theta(p_s) \end{gathered} \tag{2}$$

Із означення функції θ випливає, що кожний доданок в правій частині тотожності (2) не менше одиниці, тому із тотожності (2) випливає, що $\theta(b) \geqslant s$, що суперечить умові (1).

$\square$

Основна частина

Розглянемо кільце $Z[\sqrt{-5}] = \{a + b\sqrt{-5} \quad | a, b \in \mathbb{Z}\}$. Неважко перевірити, що $Z[\sqrt{-5}] \simeq Z[x]/(x^2 + 5)$ є областю цілісності. Визначимо функцію θ на $Z[\sqrt{-5}]$ наступним чином: $\theta(a + b\sqrt{5}i) = a^2 + 5b^2$. Легко доводиться, що

$$\theta((a + b\sqrt{5}i)(c + d\sqrt{5}i)) = \theta(a + b\sqrt{5}i)\theta(c + d\sqrt{5}i) \tag{3}$$

Оскільки $\theta(1)=1$, то дільниками одиниці є лише числа $\varepsilon = x + y\sqrt{5}i$, $x, y \in Z$ такі, що $\theta(\varepsilon)=1$, тобто $x^2+5y^2=1 \Rightarrow x=\pm 1, y=0 \Rightarrow \varepsilon=\pm 1$. Так як $\theta(\beta) \in \mathbb{N} \quad \forall \beta \in Z[\sqrt{-5}], \beta \neq 0$, то для регулярного β маємо, що $\theta(\beta) > 1$. Тоді, враховуючи (3) для довільних регулярних α і β виконується умова:

$$\theta(\alpha, \beta) = \theta(\alpha)\theta(\beta) > \theta(\alpha).$$

За критерієм кільця з факторизацією, будь-який ненульовий елемент кільця $Z[\sqrt{-5}]$, що не є дільником одиниці, розкладається в добуток простих елементів, але такий розклад не є єдиним. Наприклад,

$$21 = (1+2\sqrt{5}i)(1-2\sqrt{5}i) = 3 \cdot 7.$$

Покажемо, що цілі числа

$$\alpha = 1+2\sqrt{5}i, \qquad \alpha' = 1-2\sqrt{5}i,$$

$$\beta = 3, \qquad \rho = 7$$

нерозкладні в $Z[\sqrt{-5}]$. Справді, якби $\beta=3$ розкладалось в добуток $\gamma\delta$, в якому обидва множники відмінні від одиниці, то ми мали б

$$9 = \theta(3) = \theta(\gamma)\theta(\delta).$$

Але розклад числа 9 на натуральні множники, із яких жоден не дорівнює одиниці, можливий лише у вигляді $9 = 3 \cdot 3$, так що мало б бути $\theta(\gamma)=\theta(\delta)=3$, і для $\gamma = x + y\sqrt{5}i$ з цілими раціональними x, y ми мали б $x^2+5y^2=3$, $x^2 \leqslant 3$, $y^2 \leqslant 3$, що, очевидно, неможливо. Отже, $\beta=3$ нерозкладне в $Z[\sqrt{-5}]$. Аналогічно впевнюємося в тому, що $\rho=7$ нерозкладне. Нарешті, якби α розкладалося в добуток $\gamma\delta$ з $\theta(\gamma) \neq 1$ і $\theta(\delta) \neq 1$, то ми мали б $\theta(\gamma)\theta(\delta) = \theta(\alpha) = 21$, отже, або $\theta(\gamma)=3, \theta(\delta)=7$, або навпаки. Але ми вище показали, що не може бути ніякого цілого γ з $\theta(\gamma)=3$. Отже, α, а тому і спряжене йому α', нерозкладні.

Таким чином, число 21 двома суттєво різними способами представлене у вигляді добутку нерозкладних в $Z[\sqrt{-5}]$ цілих чисел:

$$21 = (1+2\sqrt{5}i)(1-2\sqrt{5}i) = 3 \cdot 7.$$

$$(21 = \alpha\alpha' = \beta\rho)$$

Отримали суперечність з традиційною теорією подільності, бо нерозкладне число 3 є дільником добутку $(1+2\sqrt{5}i)(1-2\sqrt{5}i)$, але не входить в жоден з його множників $(1+2\sqrt{5}i)$ і $(1-2\sqrt{5}i)$. З усього сказаного маємо, що числа $\alpha = 1+2\sqrt{5}i$ і $\beta=3$ не мають спільних дільників, крім ± 1, бо кожне з них нерозкладне, $\alpha \nmid \beta$ і $\beta \nmid \alpha$. Тобто, $(\alpha, \beta) = 1$ за означенням.

Ми можемо спостерігати суперечності і при знаходженні НСД і НСК. Наприклад, $(21, 7\alpha)$. Нетривіальними дільниками числа 21 є $\pm\alpha, \pm\alpha', \pm 3, \pm 7$, а числа 7α — $\pm 1, \pm\alpha, \pm 7$. 7 і α є спільними дільниками 21 і 7α, причому $(7, \alpha) = 1$. Але $7\alpha \nmid 21$, бо $\frac{21}{7\alpha} = \frac{3}{\alpha}$, а $(3, \alpha) = 1$. Тому $(21, 7\alpha) \neq 7\alpha$. Також $(21, 7\alpha) \neq 7$, бо інший спільний дільник α не ділить 7. З цієї ж причини $(21, 7\alpha) \neq \alpha$. Не може бути $(21, 7\alpha) = 1$, оскільки взаємно прості елементи це ті, які не мають інших спільних дільників, крім дільників одиниці.

Так само не можливо знайти і $[21, 7\alpha]$. Це можна показати двома способами.

1) Формула взаємозв'язку НСД і НСК $\left([a, b] = \frac{ab}{(a,b)}\right)$ має місце завжди, якщо існує (a, b). В даному випадку ми не можемо нею скористатися.

2) За означенням НСК (a, b), це спільне кратне a і b, яке ділить довільне інше спільне кратне a і b. Серед кратних $147\alpha = 21 \cdot 7\alpha$, $147 = 21 \cdot 7$, 21α – не існує НСК:

   а) $\frac{147\alpha}{21} = 7\alpha$, $\frac{147\alpha}{7\alpha} = 21 \in Z[\sqrt{-5}]$, але $\frac{21\alpha}{147\alpha} = \frac{1}{7} \notin Z[\sqrt{-5}]$. Тобто $[21, 7\alpha] \neq 147\alpha$.

   б) $\frac{21\alpha}{21} = \alpha$, $\frac{21\alpha}{7\alpha} = 3 \in Z[\sqrt{-5}]$, але $21\alpha \nmid 147$, оскільки $\frac{147}{21\alpha} = \frac{7}{\alpha} \notin Z[\sqrt{-5}]$, тому $[21, 7\alpha] \neq 21\alpha$

   в) Аналогічно 147 і всі інші спільні кратні не можуть бути НСК $(21, 7\alpha)$.

Відмітимо далі, що хоча нерозкладні в $Z[\sqrt{-5}]$ числа $\alpha = 1 + 2\sqrt{5}i$ і $\beta = 3$, і не мають нетривіального спільного множника, який належав би $Z[\sqrt{-5}]$, але мають спільний множник (який не є одиницею) в іншому кільці. Справді, квадрати $\alpha^2 = -19 + 4\sqrt{5}i$ і $\beta^2 = 9$ діляться на ціле число $\lambda = 2 + \sqrt{5}i$, яке не є одиницею:

$$\alpha^2 = (2 + \sqrt{5}i)(-2 + 3\sqrt{5}i), \qquad \beta^2 = (2 + \sqrt{5}i)(2 - \sqrt{5}i).$$

Отже, $\frac{\alpha^2}{\lambda}$ і $\frac{\beta^2}{\lambda}$ - цілі. Так само квадрати α'^2 і ρ^2 діляться на $\tau = -2 - 3\sqrt{5}i$:

$$\alpha'^2 = (2 - \sqrt{5}i)(-2 - 3\sqrt{5}i), \qquad \rho^2 = 7^2 = (-2 - 3\sqrt{5}i)(-2 + 3\sqrt{5}i),$$

тобто $\frac{\alpha'^2}{\tau}$ і $\frac{\rho^2}{\tau}$ -цілі.

Тепер число $\sqrt{\lambda}$ (яке не належить кільцю $Z(\sqrt{-5})$) має властивості найбільшого спільного дільника чисел α і β.

Подвійний розклад $\alpha\alpha' = \beta\rho$ на нерозкладні в $Z[\sqrt{-5}]$ множники виявляється можливим тому, що

$$\alpha = \sqrt{\lambda}\sqrt{\tau'}, \quad \alpha' = \sqrt{\lambda'}\sqrt{\tau}, \qquad \beta = \sqrt{\lambda}\sqrt{\lambda'}, \qquad \rho = \sqrt{\tau}\sqrt{\tau'}$$

і в добутку $21 = \sqrt{\lambda}\sqrt{\lambda'}\sqrt{\tau}\sqrt{\tau'}$ чотири «ідеальні» множники, які не належать $Z[\sqrt{-5}]$, можуть декількома способами бути з'єднані в пари, які при множенні дають числа із $Z[\sqrt{-5}]$, причому всі вони попарно взаємно прості.

Завдяки введенню «ідеальних» множників вдається відновити закон однозначності розкладу на прості множники і побудувати арифметику, подібну до звичайної. Так, наприклад, оскільки

$$21 = \sqrt{\lambda}\sqrt{\lambda'}\sqrt{\tau}\sqrt{\tau'} \qquad 7\alpha = \sqrt{\tau}\sqrt{\tau'}\sqrt{\lambda}\sqrt{\tau'},$$

то легко знаходяться

$$(21, 7\alpha) = \sqrt{\lambda}\sqrt{\tau}\sqrt{\tau'} = 7\sqrt{\lambda} = \alpha\sqrt{\tau} \notin Z[\sqrt{-5}]$$

$$[21, 7\alpha] = \sqrt{\lambda}\sqrt{\lambda'}\sqrt{\tau}\sqrt{\tau'} = 21\sqrt{\tau'} = 7\alpha\sqrt{\lambda'} \notin Z[\sqrt{-5}].$$

Висновки

Досліджуючи техніку виділення «ідеальних множників» у нефакторіальних областях цілісності, ми зустрілися з фактами, які суперечать властивостям подільності в факторіальних кільцях. Опишемо ці суперечності.

Для факторіальної області цілісності K, якщо $(a, b) = 1 \quad (a, b \in K)$, то $(a^2, b^2) = 1$. В кільці $Z[\sqrt{-5}]$, якщо $\alpha = 1 + 2\sqrt{5}i$, то як було зазначено, $(\alpha, 3) = 1$, але $\alpha^2 = \lambda\tau', \quad 3^2 = \lambda\lambda'$, звідки $(\alpha^2, 3^2) = \lambda \neq 1$.

Наступна суперечність виникає з властивістю простих в K:

$$(a, b) = 1, \quad ac\,\vdots\, b \Rightarrow c\,\vdots\, b,$$

Оскільки $(\alpha, 3) = 1$ і $21\,\vdots\,3$, то розглядаючи $21 = \alpha \cdot \alpha'$ та враховуючи, що α' – просте, отримуємо, що $3 \nmid \alpha'$.

В кільці K маємо властивість НСД: $(ac, bc) = c(a, b)$. В нашому прикладі $(\alpha, 3) = 1$, але $(21, 7\alpha) = (7 \cdot 3, 7 \cdot \alpha) \neq 7$.

При використанні «ідеальних» множників, всі ці суперечності зникають. Та виникає питання, чи можна побудувати таке розширення кільця $Z[\sqrt{-5}]$, яке було б факторіальним. Проста перевірка показує, що розширення $Z[\sqrt{-5}][\sqrt{\lambda}, \sqrt{\lambda'}, \sqrt{\tau}, \sqrt{\tau'}]$ не розв'язує цього питання, оскільки, наприклад

$$6 = 2 \cdot 3 = (1 + \sqrt{5}i)(1 - \sqrt{5}i)$$

$$3^2 = \lambda \cdot \lambda' \qquad (\lambda = 2 + \sqrt{5}i)$$
$$2^2 = 4 = (-2)(-2) \Rightarrow 2 = (\sqrt{2}i)(-\sqrt{2}i)$$
$$(1 + \sqrt{5}i)^2 = -4 + 2\sqrt{5}i = (-2)\lambda'$$
$$(1 - \sqrt{5}i)^2 = -4 - 2\sqrt{5}i = (-2)\lambda,$$

отже

$$6 = \sqrt{\lambda}\sqrt{\lambda'}(\sqrt{2}i)(-\sqrt{2}i),$$

а числа $\sqrt{2}i$ і $-\sqrt{2}i \notin Z[\sqrt{-5}][\sqrt{\lambda}, \sqrt{\lambda'}, \sqrt{\tau}, \sqrt{\tau'}]$.

Також цікаво, для яких кілець типу $Z[\sqrt{-p}]$ можна застосовувати використання «ідеальних» множників? Яка будова кілець кілець $Z[\sqrt[3]{p}]$?

Література

[1] *Боревич З.І.* Теорія чисел / З.І. Боревич, І.Р. Шафаревич. — М.: Наука, 1985. — 504 с.

[2] *Гекке Е.* Лекции по теории алгебраических чисел / Е. Гекке; [пер. з нім. Г.І. Ольшанський, Д.А. Райков]. — М.: Гос. изд. технико-теоретической литературы, 1940. — 261 с.

[3] *Требенко Д.Я.* Алгебра і теорія чисел / Д.Я. Требенко, О.О. Требенко. — К.: НПУ ім. М.П. Драгоманова, 2006. — 400, [1] с.

УДК 512.562

Черепня Ю.А., Величко В.Є.

[1] *студентка 5 курсу фізико-математичного факультету, ДВНЗ «ДДПУ»*

[2] *кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри алгебри, ДВНЗ «ДДПУ»*

e-mail: vladislav.velichko@gmail.com

НАПІВГРУПИ ВІДОБРАЖЕНЬ, ЩО ЗБЕРІГАЮТЬ БІНАРНЕ ВІДНОШЕННЯ

Розглядаються напівгрупи часткових і повних перетворень множини X, які зберігають бінарне відношення задане на X. Розглянуто випадок, коли бінарне відношення є відношенням порядку або квазіпорядку.

Ключові слова: *частково впорядкована множина, напівгрупа бінарних відношень*

Вступ

Для довільної множини X нехай $\mathcal{T}(X)$ — напівгрупа перетворень $\alpha : X \to X$ із операцією $x(\alpha\beta) = (x\alpha)\beta$. Далі, нехай $\mathcal{PT}(X)$ — множина всіх часткових перетворень, тобто відображень $\beta : X_1 \to X$, де $X_1 \subseteq X$. Множина X_1 називається областю визначення відображення β і позначається $Dom\beta$. Операцію в напівгрупі $\mathcal{PT}(X)$ виконують за правилом $x(\alpha\beta) = (x\alpha)\beta$ при $x \in Dom\alpha \cap (Dom\beta)\alpha^{-1}$. Нарешті, нехай $\mathcal{B}(X)$ – — напівгрупа бінарних відношень на множині X. Нехай $\sigma \in \mathcal{B}(X)$. Для $x \in X$ покладемо $A_x = \{y|(x,y) \in \sigma\}$. Тоді σ можна розглядати як багатозначне відображення $x \mapsto A_x$. Очевидно, $\mathcal{T}(X)$ і $\mathcal{PT}(X)$ — піднапівгрупи напівгрупи $\mathcal{B}(X)$ і $\mathcal{T}(X) \subseteq \mathcal{PT}(X) \subseteq \mathcal{B}(X)$. При $|X| > 1$ маємо $\mathcal{T}(X) \subset \mathcal{PT}(X) \subset \mathcal{B}(X)$. У випадку коли X — скінчена множина, елементи цих напівгруп можна записувати як звичайні підстановки. Наприклад, якщо $X = \{1,2,3,4\}$, то

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{T}(X), \quad \beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & - & 2 & 3 \end{pmatrix} \in \mathcal{PT}(X),$$

$$\gamma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ - & \{1,3,4\} & 3 & \{1,2\} \end{pmatrix} \in \mathcal{B}(X)$$

Відомо і інше представлення елементів напівгрупи $\mathcal{B}(X)$, тобто представлення у вигляді матриць із 0 та 1 (булевих матриць). Елемент $\sigma \in \mathcal{B}(X)$ в цьому випадку представляється у вигляді матриці $\sigma = \|\sigma_{ij}\|_{i,j \in X}$, де

$$\sigma_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{якщо } (i,j) \in \sigma, \\ 0 & \text{якщо } (i,j) \notin \sigma. \end{cases}$$

Наприклад, наведений вище елемент γ можна представити наступним чином:

$$\gamma = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Нехай X — множина, на якій задано бінарне відношення σ, і $\alpha : X \to X$ — відображення. Будемо казати, що α *зберігає* σ, якщо

$$\forall x, y \in X \quad (x,y) \in \sigma \Rightarrow (x\alpha, y\alpha) \in \sigma. \tag{1}$$

Відзначимо, що задання на множині X бінарного відношення σ рівносильно заданню графа з множиною вершин X, а відображення $\alpha : X \to X$, яке зберігає відношення σ, — ендоморфізм цього графа. Поняття ендоморфизму графа допускає ряд модифікацій, які узагальнюють означення (1) [4, 5]. Обгляд робіт по напівгрупам ендоморфізмів графів представлено в [7].

Основна частина

Необхідна і достатня умова збереження відношення σ надає наступне твердження.

Твердження 1. [6] *Відображення $\alpha \in \mathcal{T}(X)$ зберігає відношення σ в тому і тільки в тому випадку, коли $\sigma\alpha \subseteq \alpha\sigma$ (в розумінні добутку бінарних відношень).*

Позначимо через $\mathcal{T}_\sigma(X)$ множину всіх $\alpha \in \mathcal{T}(X)$, які зберігають σ. За умовою маємо $\mathcal{T}_\sigma(X) = \{\alpha \in \mathcal{T}(X) | \sigma\alpha \subseteq \alpha\sigma\}$. Неважко перевірити, що $\mathcal{T}_\sigma(X)$ — піднапівгрупа напівгрупи $\mathcal{T}(X)$, навіть підмоноїд. У випадку коли σ — відношення порядку або квазіпорядку на множині X, напівгрупу $\mathcal{T}_\sigma(X)$ називають напівгрупою ізотонних перетворень. Ця напівгрупа несе інформацію про будову квазівпорядкованої множини X. Л.М. Глускін довів [2], що якщо для двох квазівпорядкованих множин X і Y напівгрупи $\mathcal{T}_\sigma(X)$ і $\mathcal{T}_\sigma(Y)$ ізоморфні, то множини X і Y ізоморфні або антиізоморфні.

Цікаве питання про регулярність напівгрупи $\mathcal{T}_\sigma(X)$. Якщо σ — відношення порядку, то необхідна і достатня умова регулярності напівгрупи $\mathcal{T}_\sigma(X)$ отримані в [1], більш прозорі умови, у випадку коли (X, σ) — ланцюг, — в [3].

Для елементів напівгруппи $\mathcal{PT}(X)$ «збереження σ » можна розуміти двояко.

Означення 1. *Часткове відображення $\alpha \in \mathcal{PT}(X)$ прийнятне для σ, якщо*

$$\forall x, y \in Dom\alpha (x, y) \in \sigma \Rightarrow (x\alpha, y\alpha) \in \sigma. \tag{2}$$

Означення 2. *Часткове відображення $\alpha \in \mathcal{PT}(X)$ співставляється з σ, якщо*

$$\sigma\alpha \subseteq \alpha\sigma. \tag{3}$$

Нехай

$$\mathcal{PT}_\sigma(X) = \{\alpha \in \mathcal{PT}(X) | \alpha \text{ прийнятне для } \sigma\},$$
$$\widetilde{\mathcal{PT}}_\sigma(X) = \{\alpha \in \mathcal{PT}(X) | \alpha \text{ співставляється з } \sigma\}.$$

Не важко перевірити, що $\mathcal{PT}_\sigma(X)$ і $\widetilde{\mathcal{PT}}_\sigma(X)$ — моноїди, є підмоноїдами моноїда $\mathcal{PT}(X)$. Наступне твердження показує, що $\widetilde{\mathcal{PT}}_\sigma(X) \subseteq \mathcal{PT}_\sigma(X)$.

Твердження 2. [6] *Для довільного $\alpha \in \mathcal{PT}(X)$ справедлива імплікація $(3) \Rightarrow (2)$, але існують приклади, коли $(2) \not\Rightarrow (3)$.*

Із умови (3) випливає умова

$$\forall x, y \in X \quad ((x, y) \in \sigma \;\&\; y \in Dom\alpha \Rightarrow x \in Dom\alpha) \tag{4}$$

Твердження 3. [6] *Для довільного $\alpha \in \mathcal{PT}(X)$ справедлива імплікація $(2) \;\&\; (4) \Rightarrow (3)$.*

Розглянемо тепер більш докладно випадок, коли σ — квазіпорядок. Будемо позначати цей квазіпорядок через $\leqslant$.

Теорема 1. [6] *Нехай $(X, \leqslant)$ — квазівпорядкована множина. Напівгрупа $\mathcal{PT}_\leqslant(X)$ регулярна тоді й лише тоді, коли виконується хоча б одна умова:*

1) X — антиланцюг;

2) X — ланцюг;

3) $x \leqslant y$ для всіх $x, y \in X$.

Позначимо через Δ відношення рівності на множині X. Для $\sigma \subseteq X \times X$ транзитивне замикання відношення σ будемо обозначати через σ^t. Нарешті, обозначимо через ω будь-який лінійний порядок на множині X. Для відношення σ, яке задовольняє умові $\Delta \subseteq \sigma \subseteq \omega$, $\sigma^t = \omega$ питання про регулярність напівгрупи $PT_\sigma(X)$ вирішується наступним твердженням.

Твердження 4. **[6]** *Нехай* σ *— бінарне відношення на* X *,* $\Delta \subseteq \sigma \subseteq \omega$ *, де* ω *— лінійний порядок і* σ^t *. Якщо напівгрупа* $\mathcal{PT}_\sigma(X)$ *регулярна, то* $\sigma = \omega$ *.*

Доведення. Нехай $\sigma \neq \omega$. Візьмемо пару $(a,b) \in \omega \setminus \sigma$. Так як $\sigma^t = \omega$ то $\sigma \neq \Delta$, тому існує пара $(c,d) \in \sigma \setminus \Delta$. Покладемо $\alpha = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Очевидно, $\alpha \in \mathcal{PT}_\sigma(X)$. Якщо $\beta \in \mathcal{PT}_\sigma(X)$ — такий елемент, що $\alpha\beta\alpha = \alpha$, то $c, d \in Dom\beta$ и $c\beta = \alpha$, $d\beta = b$, звідки отримуємо, що β не зберігає відношення σ . Це протирічить вибору β . Звідки отримуємо, що α — нерегулярний елемент напівгрупи $\mathcal{PT}_\sigma(X)$.

Нехай $\mathcal{IS}(X)$ підмножина напівгрупи часткових перетворень $\mathcal{PT}(X)$ кожен елемент якої є взаємнооднозначним частковим перетворенням (частковою підстановкою). А відношення рівності (діагональ)

$$\iota_X = \{(x,x) | x \in X\}.$$

Лема 1. $\mathcal{IS}(X)$ *є інверсною напівгрупою.*

Для часткової підстановки $\alpha = \left(\begin{smallmatrix} x \\ x\alpha \end{smallmatrix} \middle| x \in X\right)$ інверсна до неї визначається таким чином

$$\alpha^{-1} = \begin{pmatrix} x\alpha \\ x \end{pmatrix} \mid x \in Dom\,\alpha \Big) \oplus \Big(\begin{matrix} y \\ \emptyset \end{matrix} \mid y \in X \setminus Dom\,\alpha \Big)$$

Тут символом $\oplus$ позначено пряму суму перетворень, що діють на множинах які не перетинаються. Для перетворень $\alpha \in \mathcal{PT}(X)$, $\beta \in \mathcal{PT}(Y)$, $X \cap Y = \emptyset$, їх пряма сума $\alpha \oplus \beta$ визначається рівністю

$$z(\alpha \oplus \beta) = \begin{cases} z\alpha & \text{якщо } z \in X \\ z\beta & \text{якщо } z \in Y \end{cases}$$

Довільну інверсну напівгрупу S можна упорядкувати, поклавши для будь-яких елементів $a, b \in S$

$$a \leqslant b \Leftrightarrow \exists e \in S(e^2 = e) : a = eb$$

Лема 2. *Відношення* $\leqslant$ *на інверсній напівгрупі* S *є відношенням часткового порядку.*

Доведення – очевидна перевірка умов часткового порядку.

Для симетричної інверсної напівгрупи $\mathcal{IS}(X)$ маємо таке твердження

Теорема 2. *В симетричній інверсній напівгрупі* $\mathcal{IS}(X)$ *,* $\alpha \leqslant \beta$ *тоді й лише тоді, коли* $\alpha \subseteq \beta$ *.*

Доведення. Досить пересвідчитись, що для відношень $\alpha, \beta \in \mathcal{IS}(X) \subset \mathcal{B}(X)$ нерівність $\alpha \leqslant \beta$ має місце тоді й лише тоді коли $\alpha \subseteq \beta$. Нехай α, β елементи напівгрупи $\mathcal{IS}(X)$ і $\alpha \leqslant \beta$. Тоді в множині X існує підмножина C для якої $\alpha = \iota_C \beta$. Якщо $(x, y) \in \alpha$, то існує такий елемент $z \in X$, що $(x, z) \in \iota_C$, $(z, y) \in \beta$. Тобто $x = z \in C$ і також $(x, y) \in \beta$. А тому $\alpha \subseteq \beta$.

Навпаки, нехай $\alpha \subseteq \beta$ містить елемент $\iota_{Dom(\alpha)}\beta$. Тоді

$$(x, y) \in \alpha \Rightarrow (x, x) \in \iota_{dom(\alpha)}, (x, y) \in \beta \Rightarrow (x, y) \in \iota_{dom(\alpha)}\beta,$$

і тому $\alpha \subseteq \iota_{dom(\alpha)}\beta$. Виходячи з оберненого включення, вважаємо, що $(x, y) \in \iota_{Dom(\alpha)}\beta$. Тоді $x \in Dom(\alpha)$ і $(x, y) \in \beta$. Тобто існує $x\alpha \in X$ такий, що $(x, x\alpha) \in \alpha \subseteq \beta$. З того, що β є частковим відображенням маємо $x\alpha = y$. Тобто $(x, y) \in \alpha$.

Ми показали, що $\alpha = \iota_{Dom(\alpha)}\beta$ і остаточно $\alpha \leqslant \beta$ в $\mathcal{IS}(X)$.

Висновки

В роботі розглянуті деякі регулярні напівгрупи напівгруп часткових та повних перетворень скінченої множини на яких зберігається бінарне відношення.

Література

[1] *Айзенштат А.Я.* Регулярные полугруппы эндоморфизмов упорядоченных множеств / А.Я. Айзенштат // Учёные записки Ленинградского гос. пед. ин-та им. А.И. Герцена. — 1968. — Т. 387. — С. 3 – 11.

[2] *Глускин Л.М.* Полугруппы изотонных преобразований / Л.М. Глускин // Успехи мат. наук. — 1961. — Т. 16, № 5. — С. 157 – 162.

[3] *Adams M.E.* Posets whose monoids of order-preserving maps are regular / M.E. Adams, M. Gould // Order. — 1989. — Vol. 6, No. 2. — P. 195 – 201.

[4] *Bötcher M.* Endomorphism spectra of graphs / M. Bötcher, U. Knauer // Discrete Math. — 1992. — Vol. 109. — P. 45 – 57

[5] *Bötcher M.* Postscript: «Endomorphism spectra of graphs» / M. Bötcher, U. Knauer // Discrete Math. — 2003. — Vol. 270. — P. 329 – 331.

[6] *Ким В.И.* Слабо регулярные полугруппы изотонных преобразований / В.И. Ким, И.Б. Кожухов, В.А. Ярошевич // Фундаментальная и прикладная математика. — 2011/2012. — Т. 17, № 4. — С. 145 – 165.

[7] *Molchanov V.A.* Semigroups of mappings on graphs / V.A. Molchanov // Semigroup Forum. — 1983. — Vol. 27. — P. 155 – 199.

УДК 511.333

Рябухо О.М., Турка Т.В.

[1] *кандидат фізико-математичних наук, завідувач кафедри алгебри, ДВНЗ «ДДПУ»*

[2] *кандидат фізико-математичних наук, асистент кафедри алгебри, ДВНЗ «ДДПУ»*

e-mail: renelena@mail.ru, tvturka@mail.ru

ДОСЛІДЖЕННЯ ІМОВІРНІСНИХ АЛГОРИТМІВ ТЕСТУВАННЯ ПРОСТОТИ ЧИСЕЛ

Описані декілька класичних імовірнісних алгоритмів для визначення простоти числа. На прикладі тестів Ферма та Соловея-Штрассена досліджено, наскільки ефективними є такі тести. Розглянуте питання забезпечення необхідної точності визначення простоти при використанні таких тестів.

Ключові слова: *імовірнісний алгоритм, прості числа, псевдопрості числа, слабо псевдопрості числа, ефективність тесту.*

Вступ

Із появою у 1976 році ідеології відкритого ключа та з розвитком можливостей обчислювальної техніки в криптографії почали активно використовувати фундаментальні результати теорії чисел і сучасної алгебри. Так однією з головних обчислювальних задач сучасної криптографії є задача пошуку великих простих чисел.

Більшість сучасних асиметричних криптосистем так чи інакше використовують великі прості числа. Саме вони добре підходять для побудови односторонніх функцій. Нагадаємо, що односторонніми називають такі функції, які легко обчислюються для довільного вхідного значення, але аргумент при заданому значенні функції знайти важко. Такі задачі, як обчислення дискретного логарифму, або розклад на множники, можуть бути використані при побудові односторонніх функцій і традиційно вважаються складними.

Наведемо перелік криптосистем та алгоритмів, в яких використовуються прості числа:

- обмін ключами за Діффі-Хелманом;
- криптосистема RSA (шифрування та підпис);
- алгоритм цифрового підпису DSA;
- схема Ель-Гамаля;
- криптосистема Рабіна;
- криптографія на еліптичних кривих, зокрема ГОСТ Р 34.10-2001.

В них на перший план виходить порядок чисел, з якими доводиться працювати. Такі числа повинні бути достатньо великими, щоб забезпечувати криптоаналітичну стійкість використовуваного алгоритму. В той же час, їх потрібно генерувати порівняно швидко. Це обумовлює важливість побудови ефективних алгоритмів для перевірки великого випадкового числа на простоту (випадковість обраного числа теж є важливою для забезпечення стійкості). Всі такі алгоритми можна поділити на дві групи: детерміновані та імовірнісні. Перші встановлюють простоту числа математично строго, і, як правило, потребують багато часу для перевірки, в той час як другі просто мінімізують імовірність похибки у визначенні простоти після кожного послідовного свого запуску.

Постановка задачі.

Сформулюємо основні напрямки, у яких розвивається проблема пошуку великих простих чисел.

1. Для заданого великого натурального числа n з'ясувати, чи є воно простим. Можна послідовно перебирати прості числа менші за задане число (точніше менші за $\sqrt{n}$), щоб знайти всі його дільники. Тоді набуває актуальності не стільки час роботи алгоритму, як його асимптотична поведінка при зростанні кількості цифр числа n. Довгий час задача перевірки числа на простоту була яскравим прикладом задачі, яка ефективно розв'язується імовірнісними алгоритмами, а не детермінованими. Нарешті в 2002 році індійські математики Агравал, Кайал і Саксена [2] запропонували детермінований поліноміальний алгоритм.

2. Знайти велике просте число. Найбільші прості числа, знайдені на сьогодні, мають спеціальний вигляд. Для чисел спеціального вигляду розроблені алгоритми перевірки на простоту, які не застосовні до звичайних чисел. Такі числа не можна вважати випадковими, і вони майже не застосовуються в асиметричних криптосистемах. Наприклад, числа Мерсенна, це числа виду $M_p = 2^p - 1$. На початку лютого 2013 року математик Кертис Купер, учасник проекту обчислень GIMPS (Great Internet Mersenne Prime Search), знайшов 48-е просте число Мерсенна. Десятковий запис такого числа має 17 425 170 знаків.

3. Знайти велике випадкове просте число. В цьому випадку ми тестуємо різні випадкові числа заданої складності (під складністю маємо на увазі кількість знаків в бінарному записі числа), аж поки не натрапимо на просте. Якщо наш алгоритм дає негативну відповідь, або просто занадто довго перевіряє вибране число — ми міняємо його на якесь інше — з надією на те, що

для нього алгоритм працюватиме ефективніше.

4. Знайти просте число, яке буде дільником заданого натурального числа, або, більш загально, розкласти задане натуральне число на множники. Ця задача найчастіше постає в криптоаналізі, і в деякому сенсі є узагальненням першої — адже якщо нам не вдалося знайти жодного власного дільника числа p — це і означає, що воно просте. Насправді, розкласти число на множники набагато складніше, ніж перевірити його на простоту — існування поліноміального алгоритму для розкладу числа на множники не доведене.

Зосередимося на третій проблемі, яка, по суті, є послідовним застосуванням першої. Формалізуємо задачу.

Дано натуральне число p. Встановити, чи буде воно простим, за допомогою деякого алгоритму. Якщо алгоритм безсилий, то міняємо число на інше, бо для нас важливіше знайти хоча б одне таке просте число. Найважливішим критерієм якості нашого алгоритму буде час його виконання. Цей час можна суттєво зменшити, якщо використовувати імовірнісні методи перевірки. Імовірнісні тести працюють набагато швидше детермінованих, але мають певний недолік. Після позитивного проходження числом тесту, залишається імовірність того, що воно насправді складене.

Вимоги до імовірнісного алгоритму перевірки простоти.

1. З самого початку ми вважаємо, що число просте, а за допомогою алгоритму спробуємо встановити, чи є воно складеним (встановити непростоту числа значно легше, ніж простоту).

2. Алгоритм встановлює, чи число просте, але може помилитись — тобто він на складене число може сказати, що воно просте.

3. Алгоритм залежить від параметра, який вибирається щоразу випадковим. Таким чином, ми можемо застосовувати алгоритм багато разів з різними значеннями параметра, і з кожним наступним застосуванням алгоритму, імовірність того, що досліджуване число є складеним, повинна зменшуватись.

4. Коли параметр пробігає всю наперед визначену параметричну множину, то наш імовірнісний алгоритм перетворюється на детермінований — тобто ми можемо стверджувати, що досліджуване число насправді просте.

Алгоритм часткового ділення.

Можна розглядати алгоритм часткового ділення як імовірнісний тест. Нехай нам треба перевірити простоту числа n. Ми перевіряємо, чи не ділиться воно на жодне з чисел $2, 3, ..., a$. В цьому випадку a виступає параметром, а параметричною множиною буде $2, 3, ..., [\sqrt{n}]$. Коли a пробігає всю множину параметрів, то тест стає детермінованим. Зрозуміло, навряд чи можна говорити про ефективність цього тесту, якщо ми плануємо перевіряти за його допомогою дуже великі числа. Але перед перевіркою даного числа на простоту за допомогою малої теореми Ферма та інших методів доцільно провести базове дослідження на наявність малих простих дільників. Це дає можливість суттєво скоротити час пошуку простого числа, у випадку, коли нас цікавить знаходження хоча б одного такого числа (ця проблема постає в короткочасних процедурах шифрування, коли час кодування-декодування для нас відіграє більшу роль, ніж час, який потрібен для криптоаналізу).

Алгоритм базового методу може бути представлений наступними кроками:

1. Задаємо l — нижню межу діапазону, в якому повинне знаходитись просте число.

2. Задаємо u — верхню границю діапазону, в якому повинне знаходитись просте число.

3. Перевіряємо коректність задання діапазону $2 < l \leqslant u$.

4. Підраховуємо максимальну кількість спроб $r \leftarrow 100([\log_2 u] + 1)$.

5. $r \leftarrow r - 1$.

6. Якщо $r < 0$, то ліміт спроб вичерпано (подія має дуже малу ймовірність, і на практиці майже ніколи не зустрічається. В тому разі, коли це все ж сталося, треба просто перезапустити тест).

7. Вибираємо в заданому інтервалі $1 \leqslant n \leqslant u$ випадкове число n.

8. Якщо n менше за 2000, то тестування виконується методом пробного ділення на всі відомі прості числа, менші за n (такі числа називаються табульованими).

9. Якщо n більше за 2000, то тестування виконується методом пробного ділення на всі прості числа, менші за 2000. Якщо дільник існує, то переходимо до кроку 5.

10. На цьому кроці можна приступати до перевірки числа n на простоту іншим методом (який не пов'язаний з методом часткового ділення).

11. Якщо тест негативний (n виявилось складеним), переходимо до кроку 5.

12. Якщо тест позитивний, то ми згенерували просте число, що нам і було потрібно.

Ключовим в цьому тесті являється пункт 9. Він дозволяє відкинути 85% чисел перед запуском обраного нами алгоритму для дослідження простоти. Слід відмітити, що ефективність часткового ділення ніяк не залежить від основного алгоритму (який запускається на кроці 10). Очевидна доцільність застосування часткового ділення.

Псевдопрості числа.

Псевдопростим числом називають складене натуральне число, яке має деякі властивості простих чисел. Існування псевдопростих чисел перешкоджає роботі алгоритмів, які використовують ті чи інші властивості простих чисел.

Згідно малої теореми Ферма для довільного простого числа p та для довільного натурального числа n, взаємнопростого з p, має місце конгруенція:

$$a^{p-1} \equiv 1(\text{mod } p). \qquad (1)$$

На основі цієї теореми можна побудувати досить потужний тест на простоту.

Тест Ферма. Для $n > 1$ вибираємо $a > 1$, і обчислюємо $a^{n-1}(\text{mod } n)$, якщо результат не 1, то n складене, якщо 1, то n — псевдопросте за основою a або псевдопросте число Ферма. Деякі складені числа є псевдопростими за будь-якою основою. Це так звані абсолютно псевдопрості числа, їх ще називають числами Кармайкла. Ситуація, коли досліджуване число виявиться абсолютно псевдопростим, дуже малоймовірна, але формально ми не можемо її опускати.

Ефективність тесту Ферма для слабо псевдопростих чисел.

Дослідимо, наскільки ефективним є тест Ферма для чисел, які не є числами Кармайкла. Такі числа будемо називати слабо псевдопростим.

Позначимо за W множину всіх значень параметра a, для яких n проходить тест на простоту за Ферма, тобто:

$$W = \{a \in N : a^{n-1} \equiv 1(\text{mod } n)\}. \qquad (2)$$

Оскільки, за нашим припущенням, n не являється абсолютно псевдопростим, то $|W| < |Z_n^*|$ — тобто W не може збігатись зі всією мультиплікативною групою Z_n^* лишків, взаємнопростих з n. Легко зрозуміти, що W - підгрупа групи Z_n^*, тому

$$\frac{|Z_n^*|}{|W|} \geqslant 2. \qquad (3)$$

Це означає, що серед елементів параметричної множини нашого імовірнісного тесту максимум половина призводить до продовження прогонки (всі лишки з $Z_n^* \setminus W$ зразу покажуть, що n не є простим). Звідси негайно слідує, що після k прогонок тесту Ферма для слабо псевдопростого числа імовірність похибки в визначенні простоти числа n становитиме не більше 2^{-k} (звичайно ж, за умови випадкового вибору лишків з параметричної множини).

Таким чином, тест Ферма є ефективним для чисел, які не є абсолютно псевдопростими — ми можемо із як завгодно великою точністю встановлювати простоту таких чисел. Проблема лише в тому, що слід спершу відсіяти числа Кармайкла, а це майже нереально для тих порядків чисел, які зараз застосовуються в криптографічних протоколах.

Тест Соловея-Штрассена

Розглянемо тест, який будується на узагальненні малої теореми Ферма. Використовуємо критерій Ейлера.

Твердження 1. *Для довільного непарного n наступні умови еквівалентні:*
1. n *— просте;*
2. *для довільного $a \in Z$ виконується конгруенція:*

$$a^{\frac{n-1}{2}} \equiv \left(\frac{a}{n}\right) (\mathrm{mod} n). \tag{4}$$

Цей критерій дає нам змогу використати наступний імовірнісний тест.

1. Вибираємо U — коефіцієнт точності (чим більший цей коефіцієнт, тим вища точність встановлення простоти n).
2. $k \leftarrow 1$.
3. Вибираємо з впорядкованого по величині масиву простих чисел k — не просте число.
4. Перевіряємо, чи виконується конгруенція (4).
5. Якщо конгруенція не виконується, то відповідь «n — складене».
6. Якщо конгруенція виконується, то $k \leftarrow k+1$.
7. Якщо $k < U$, то переходимо до третього кроку.
8. Якщо $k > U$, то відповідь: «n — псевдопросте з імовірністю $1-2^{-U}$ ».

Легко бачити, що цей тест задовольняє вимоги ефективного імовірнісного тесту на простоту: множиною параметрів виступають прості числа, менші за $\sqrt{n}$, і після кожного прогону тесту імовірність того, що тест неправильно визначив простоту числа, зменшується вдвічі. При цьому тест Соловея-Штрассена позбавлений головного недоліку тесту Ферма — для всіх натуральних n багатократна прогонка тесту зменшує імовірність похибки до нуля.

Слід також відмітити головний недолік тесту Соловея-Штрассена — це час його виконання. Якщо піднесення до степеня за модулем можна здійснити за порівняно малий час, то про обчислення символу Лежандра цього сказати не можна. Проблема ускладнюється необхідністю проводити тест декілька разів — тим більше, чим меншу імовірність похибки ми вважаємо за прийнятну.

Спробуємо формалізувати задачу. Нехай для нас прийнятна імовірність похибки ϵ. Для її забезпечення нам достатньо k прогонок тесту, де $2^{-k} < \epsilon$. Ми можемо суттєво зменшити час, необхідний для забезпечення достатньої точності визначення простоти, якщо покращимо оцінку

$$\frac{|Z_n^*|}{|W|} \geqslant 2 \tag{5}$$

замінивши двійку на якесь більше число.

Бачимо, що надто велика кількість прогонок тесту Соловея-Штрассена, необхідна для досягнення прийнятної точності оцінювання простоти великих натуральних чисел, робить його практично не застосовним. Проте, тест допускає модифікації, які дозволяють оптимізувати кількість його послідовних застосувань для досягнення заданої точності. Подальша оптимізація тесту Соловея-Штрассена реалізована в імовірнісних тестах Леманна, Міллера-Рабіна. Ці тести детально розглянуті в [4].

Оцінки швидкості алгоритмів

Наведемо емпіричні оцінки швидкості алгоритмів (кількість операцій, необхідних для проведення одного циклу тесту), описаних в цій роботі. Такі оцінки найчастіше подаються у вигляді деякої функції від числа, що перевіряється, і містять в собі деякі константи, чисельне значення яких для нас неважливе — адже, має значення лише асимптотика цієї функції при збільшенні порядку досліджуваного числа. Доведення цих оцінок не приводиться, оскільки воно опирається на деякі нетривіальні факти теорії алгоритмів. Детально методи отримання оцінок такого роду описані в книзі [6].

1. Для тесту на основі часткового ділення кількість операцій для повної перевірки числа n на простоту не перевищує $C\sqrt{n}$ для деякої константи $C > 0$. Ця оцінка слідує з того, що для кожного часткового ділення потрібна лише скінченна кількість операцій (для нас потрібно, щоб вона не залежала від n). На практиці, вже для чисел порядку 1030 отримуємо таку кількість операцій, яку не здатний виконати за прийнятний час найпотужніший комп'ютер. Для імовірнісної модифікації тесту часткового ділення час залежить від потужності параметричної множини, яка забезпечує задану точність перевірки простоти. В розглянутому нами прикладі ця множина має потужність $O(\log n)$.

2. Для тестів Ферма та Соловея-Штрассена кількість операцій оцінюється числом $O(\log n)^3$, тобто є поліноміальною функцією від кількості знаків числа n. Необхідність запускати ці тести велику кількість разів збільшує цю оцінку до $O(\log n)^4$ — відповідно до потужності параметричної множини.

В той же час, найшвидші детерміновані тести показують значно гірші результати. Поліноміальний алгоритм, запропонований Агравалом, Кайялом та Саксеною, дає результат $O((\log n)^{\frac{15}{2}})$.

Висновки

Дослідження алгоритмічних проблем теорії чисел є актуальним з часу винайдення перших криптосистем з відкритим ключем. Причому важливим є як удосконалення самих криптографічних алгоритмів та методів генерації простих чисел, так і дослідження стійкості цих алгоритмів з точки зору криптоаналізу. Використання імовірнісних тестів дає нам суттєвий виграш в швидкості. Значення похибки при встановленні простоти числа, яке отримується вже після невеликої кількості прогонок тестів, може задовольнити навіть вибагливого криптографа.

Література

[1] *Alford W.R.* There are Infinitely Many Carmichael Numbers / W.R. Alford, A. Granville, C. Pomerance // Annals of Mathematics. — 1994. — № 139. — P. 703 – 722.

[2] *Agrawal M.* Primes is in P / M. Agrawal, N. Kayal, N. Saxena // Annals of Mathematics. — 2004. — № 160. — P. 781 – 793.

[3] *Василенко О.Н.* Современные способы проверки простоты чисел / О.Н. Василенко // Кибернетический сборник. — 1988. — № 25. — С. 162 – 187.

[4] *Василенко О.Н.* Теоретико-числовые алгоритмы в криптографии / О.Н. Василенко. — М.: МЦНМО, 2006. — 336 с.

[5] *Коблиц Н.* Курс теории чисел в криптографии / Н. Коблиц. — М.: Научное изд-во: ТВП, 2001. — 254 с.

[6] *Черемушкин А.В.* Лекции по арифметическим алгоритмам в криптографии / А.В. Черемушкин. — М.: МЦНМО, 2002. — 104 с.

ФІЗИКА

УДК 620.3

Надточій В.О., Уколов О.І., Хорунжа І.О., Полтавцев М.А.

[1] *доктор фізико-математичних наук, професор, завідувач кафедри фізики, ДВНЗ «ДДПУ»*

[2] *асистент кафедри загальнонаукових дисциплін, АДІ «ДонНТУ»*

[3] *студентка 5 курсу фізико-математичного факультету, ДВНЗ «ДДПУ»*

[4] *студент 3 курсу АТР факультету, АДІ «ДонНТУ»*

e-mail: ukolov-aleksei@mail.ru

ФОРМУВАННЯ НАНОСТРУКТУР У МОНОКРИСТАЛІЧНОМУ ГЕРМАНІЇ ЗА УМОВИ ДИСЛОКАЦІЙНО-ПОВЕРХНЕВОЇ ДИФУЗІЇ

Предметом розгляду даної роботи є структури обмежених розмірів величиною порядку декількох нанометрів та технологічні методи, які уможливлюють цілеспрямоване створення таких об'єктів і керування їхніми властивостями. В роботі показана нова можливість утворення низькорозмірних атомних структур на поверхні Ge, властивості яких вивчені за методами атомно-силової мікроскопії та раманівської спектроскопії комбінаційного розсіювання світла.

Ключові слова: *наноструктура, поверхня, дифузія, дислокація.*

Вступ

Інтерес до нанокластерів Ge пов'язаний з успіхами в розробці технологій отримання достатньо однорідного за розміром масиву острівців. Розміри нанокластерів вдалося зменшити до значень, які забезпечують прояв ефекту розмірного квантування навіть при кімнатній температурі [1]. Якщо розміри системи порядку довжини хвилі де-Бройля вільного електрона в усіх трьох напрямках, то такі об'єкти називають квантовими точками, $0D$ (dimensional) структурами. Їх аналогами можуть бути нановключення другої фази в кристалічній чи будь-який іншій матриці, а також різноманітні штучні ансамблі часток нанорозмірів. Такі системи називають надгратками.

Серед сучасних технологічних методів одержання ансамблів квантових точок можна вирізнити три порівняно самостійні підходи до розв'язання цієї задачі. Два із них розвивають ідеї, що закладені в основі технології вирощування квантових шарів і квантових ниток, третій ґрунтується на використанні підходів і можливостей колоїдної хімії.

У перших двох методах за основу беруть можливості сучасної молекулярно-променевої епітаксії контрольованого, заздалегідь заданого нанесення будь-якої кількості довільного матеріалу на підкладку. Далі ці підходи відрізняються використанням різного ступеня узгодження параметрів кристалічної гратки нарощуваного шару і підкладки.

В даній роботі ставилося завдання дослідити явище формування наноструктур Ge за рахунок дифузії уздовж лінії виходу на поверхню дислокаційних напівпетель при створенні градієнта напруження і з'ясувати можливості їх практичного використання. Численні експериментальні та теоретичні дослідження дифузії уздовж дислокацій і малокутових границь свідчать про наявність у них прискореного перенесення. Прискорення дифузії уздовж дислокації найчастіше пояснюють наявністю вакансій, концентрація яких значно вища, ніж в об'ємі [2].

Основна частина

Розглянемо дислокаційну напівпетлю (рис.1), кінці якої орієнтовані під великим кутом в місцях виходу на поверхню під дією сил дзеркального зображення та лінійного натягу. Якщо дислокація створена в кристалі германія деформуванням при $300K$, то закріплена точковими дефектами, практично не містить домішкової атмосфери [3-5], а її поле напруження $\sigma(r)$ розповсюджується на відстань $r \leqslant 0,5$ мкм від ядра [5]. Напрямок дифузійних потоків вакансій і міжвузловинних атомів в кристалі може визначатися зовнішнім механічним впливом. У такому випадку роль сили $\overline{f}$, що виділяє переважний напрямок дифузії точкових дефектів у твердому тілі, відіграє величина, яка пропорційна градієнту напруження $\nabla\sigma$. Діюча на вакансію сила спрямована у напрямі градієнта напруження, тобто у напрямі більш стисненої частини кристала, а діюча на міжвузловинний атом сила спрямована у зворотньому напрямку [6]. При згинанні кристала з'являється можливість дифузійного переміщення міжвузловинних атомів уздовж дислокації на поверхню, яка розтягується; у зворотньому напрямку буде відбуватися переміщення вакансій. Неоднорідний розподіл напружень при стисканні і їх концентрація часто спостерігається біля ребер зразка.

Оскільки міжвузловинний атом переносить атомний об'єм $(+a^3)$, а вакансія переносить об'єм $(-a^3)$, то густина сумарного «потоку об'єму речовини» має вигляд [6]

$$j = c_v\overline{U_v} + c_i\overline{U_i} \sim \frac{a^3}{kT}(c_vD_v + c_iD_i)\nabla\sigma, \tag{1}$$

де c_v і c_i - рівноважні концентрації вакансій і міжвузловинних атомів в кристалі, $\overline{U_v}$ і $\overline{U_i}$ - середні дрейфові їх швидкості, а D_v и D_i - відповідні коефіцієнти дифузії. Якщо покласти $c_vD_v + c_iD_i = cD$, то густина дифузійного «потоку об'єму речовини» буде визначатися за порядком величини формулою [6].

$$j \sim cD\left(\frac{a^3\sigma}{kT}\right). \tag{2}$$

В цій формулі

$$D = D_0 \exp(-Q/kT), \tag{3}$$

де Q - енергія активації дифузії. Для кристалів з дуже малим вмістом домішки D має сенс коефіцієнта самодифузії. При зовнішньому механічному впливі на кристал можуть створюватися градієнти напружень і, відповідно, потоки об'єму речовини як уздовж дислокації на поверхню j_d, так і вздовж поверхні j_s (рис.1).

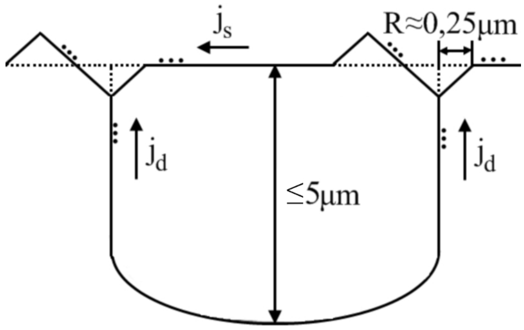


Рис. 1: Стабілізована дислокаційна напівпетля біля поверхні

Розглянемо спочатку можливість використання формул (1) і (2) для оцінки j_d уздовж ділянок дислокації, орієнтованих під великим кутом до поверхні. Для цього додатково потрібно буде взяти до уваги ряд особливостей структурного стану приповерхневого шару [4], наявність градієнта напруження у місці виходу пружного поля дислокації на поверхню [5], відмінну рису структури ядра в дислокаційних областях кристалів з пухкою упаковкою типу Ge і Si [7]. Кількісні дослідження дифузії уздовж дислокацій в германії і кремнії показали [8], що, як і у випадку звичайної об'ємної дифузії (3), коефіцієнт дифузії уздовж дислокації експоненціально залежить від температури (4)

$$D_d = D_{0d} \exp\left(\frac{Q_d}{kT}\right) \tag{4}$$

Однак передекспоненційний множник D_{0d} у цьому випадку на три порядки більший, ніж для об'ємної дифузії, а енергія активації $Q_d \approx 0.8Q$, де Q - енергія активації в об'ємі при $T > 650C^0$ D_d перевищує D на чотирип'ять порядків. Тому в [8] наголошується, що в літературі відсутні надійні кількісні дані щодо канальної дифузії, які можна було б використовувати для конкретних розрахунків. Разом з тим можна припустити, що при наявності градієнта напружень дифузійний потік j_d може значно перевищувати j_v в об'ємі внаслідок порушень кристалічної структури поблизу дислокації [2], а також більш високої рівноважної концентрації точкових дефектів і коефіцієнта дифузії у приповерхневому шарі [4]. Якщо кристал піддавати статичному навантаженню і одночасно обробляти ультразвуком (УЗ), то коефіцієнти дифузії в його приповерхневому шарі можна збільшити додатково на 1-2 порядки [4]. Наприклад, у приповерхневому шарі монокристала Ge при деформації стисканням $D_s = 10^{-4}exp(-0.2/kT)$ і при $T = 300\,\text{К}$ складає $D_s = 4.3 \cdot 10^{-8}\text{см}^2/\text{с}$. Тому можна очікувати, що в деформованому кристалі буде існувати дифузійне перенесення речовини сумарним потоком $j = j_d + j_s$ при наявності градієнта напруження уздовж дислокації і уздовж поверхні. Залежно від співвідношення дифузійних потоків j_d і j_s речовини можна отримати різні за формою структури на поверхні.

1. Забезпечували умову $j_d \gg j_s$ при кімнатній температурі для дислокацій в приповерхневому шарі на стороні розтягу зразка поблизу бічного ребра. У місці виходу дислокації на поверхню утворилася лунка (рис.2,а) за рахунок виходу атомів на поверхню (112) і одночасно уздовж поверхні в напрямку [111] спаду напруги (показано стрілкою) від бічного ребра. В результаті у перенапруженній області на поверхні поряд з лункою сталося самоорганізоване зростання острівця пірамідальної форми (рис.2). Контур дислокаційної ямки на поверхні і острівець в основі на цій площині (112) мають гексагональну форму. В результаті сканування зонда атомно-силового мікроскопа (АСМ) через дно лунки і вершину острівця встановлено рівність площ між прямою середнього рівня поверхні і лініями границь ямки і острівця (рис.2, б). Рівність об'ємів дислокаційної ямки і острівця свідчить про те, що самоорганізоване зростання пірамідального острівця відбувалося в результаті його добудови, в основному, атомами кристала, що перебували в об'ємі дислокаційної ямки. Тому роль складової дифузійного потоку j_s у цьому процесі була незначною, а дія горизонтальної складової сили проявилася у створенні перенапруженної області поряд з ямкою, яка була концентратором напруження. Таке перенапруження може зростати до певного часу у міру поглиблення ямки. Розподіл напруження поблизу поглиблення кругової форми в макрозразку є складним завданням теорії пластичності. Для цієї задачі може бути прийнята спрощена модель, якщо розглядати лише тонкий шар зразка з отвором, а вплив пружного поля дислокації при достатній глибині ямки не враховувати. Існує розв'язок подібної задачі для тонкої пластини з круговим вирізом по краях,

що розтягується (або стискається) зовнішньою силою F [9]. Її аналітичне рішення показує, що за умови пластичності Мізеса поблизу кругової частини вирізу деформованої пластини поле напружень поширюється від границі вирізу на відстань, що дорівнює приблизно його діаметру. Висновки цієї теорії добре узгоджуються з результатами експерименту на рис. 2.

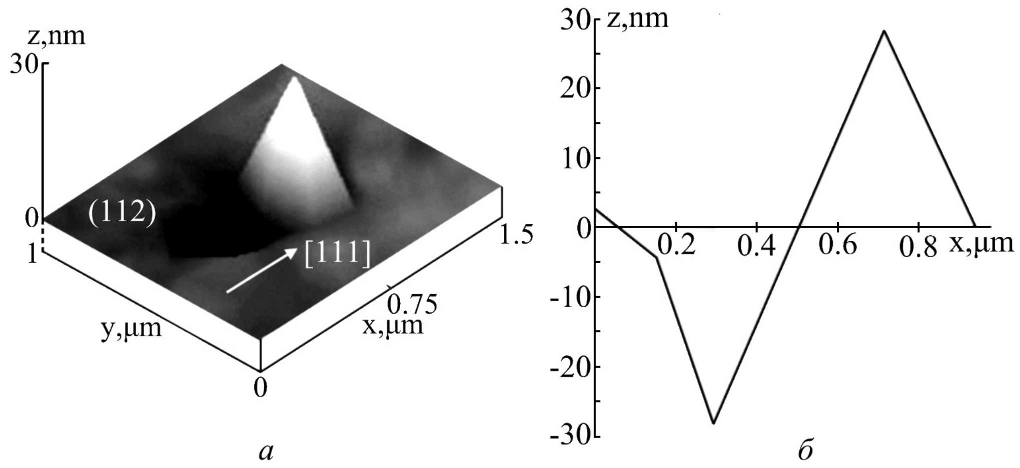


Рис. 2: а - структура на поверхні Ge після деформування згинанням при $\sigma_m = 80$ МПа упродовж 24 год; б - профілограма при скануванні зонда АСМ крізь дно лунки і вершину острівця

Таким чином можна вважати, що ріст острівця відбувався на деформованій поверхні кристала, тому рушійною силою його утворення є різниця в періодах решітки перенапруженної частини поверхні поблизу ямки і нарощуваного острівця [10]. За нашими оцінками параметр неузгодженості (різниця в періодах решітки в системі острівець-підкладка) з урахуванням концентрації напружень поблизу ребра і ямки складав $\triangle a > 2\,\%$, що було достатньо для формування тривимірних острівців нанометрових розмірів — квантових точок [10,11]. Відомо [12], що використання згину для випробувань на механічну міцність при кімнатній температурі зручно тим, що дозволяє досягати досить значних пружних деформацій напівпровідникових кристалів, зокрема, для кремнію і германію близько $2\,\%$ і більше. Типовими представниками напівпровідникових структур з розбіжностями між періодами решіток $\triangle a > 2\,\%$, використовуваних в електроніці та оптиці, є гетеросистеми типу $Ge/Si(100)$ ($\triangle a \approx 4\%$) [10, 13], $In_xGa_{1-x}As/GaAs(100)$ ($\triangle a \approx 3.5\%$) [14], які вирощуються в режимі Странського-Крастанова [13]. Якщо параметр неузгодженості досить великий, то релаксація напружень через утворення тривимірних острівців відбувається раніше, ніж утворення дислокацій невідповідності [10]. Вимірювання залишкових напружень після навантаження нами було проведено на гребенях, сформованих із сукупності тривимірних наноострівців на стадії дозрівання при $T = 300K$ [15]. Використовували методику раманівського комбінаційного розсіювання світла [16, 17]. Спектри мікро-КРС були отримані при кімнатній температурі в геометрії оберненого розсіювання з використанням спектрометра Horiba Jobin Yvon T64000 з конфокальним мікроскопом UV-Visible-NIR Olympus BX41. Збудження спектрів КРС здійснювали Ar-Kr-лазером (довжина хвилі збудження $\lambda_{exc} = 488$ нм). При вимірюваннях КРС лазерний промінь фокусувався на зразку в плямі діаметром < 1 мкм. Латеральне картографування фононних спектрів КРС структури забезпечувалося переміщенням п'єзоелектричного керованого столика з кроком 0.1 мкм поперек гребеня. Точність визначення частоти фононної лінії становила 0.15 см$^{-1}$. У спостережуваних нами спектрах КРС не було виявлено суттєвих зміщень максимуму інтенсивності смуги по частоті, що свідчить про відсутність залишкових напружень у вирощеній структурі.

2. У другому експерименті зразок випробовували в умовах згинання при різних температурах. На першому етапі отримували структуру типу лунка - острівець при кімнатній температурі (рис.2,а), а потім продовжували деформувати при підвищеній $T = 490$ K. Деформування зразка з одночасним УЗ опроміненням стимулювало створенню шорсткості поверхні [11], зростанню коефіцієнта дифузії D_s та виконанню умови $j_s > j_d$. Цей процес сприяв заростанню ямки поблизу острівця (рис.3).

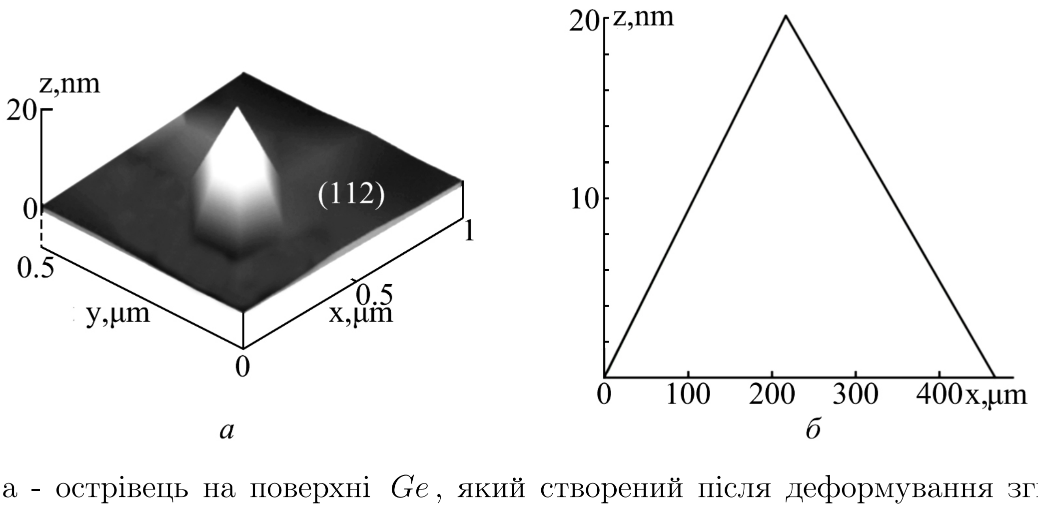


Рис. 3: а - острівець на поверхні Ge, який створений після деформування згинанням при $\sigma_m = 80$ МПа упродовж 10 год і потім при $T = 490$ K упродовж 3 год при такому ж напруженні; б - профілограма острівця

3. На зразках Ge, деформованих одновісним стисканням при більш високій температурі $T = 570$ K, відбувалося подальше збільшення шорсткості поверхні, потоків j_s і j_d, що призводило до зриву нуклеації острівця поблизу лунки. Дифундуючі уздовж дислокації атоми після виходу на поверхню без закріплення відразу переносились на значні відстані під дією градієнта

напруження. На рис.4,а видно тільки ямки в місцях виходу напівпетлі і відсутній острівець. Форма ямок спотворена внаслідок інтенсивної поверхневої дифузії, що проявляється і на профілограмі рис.4,б.

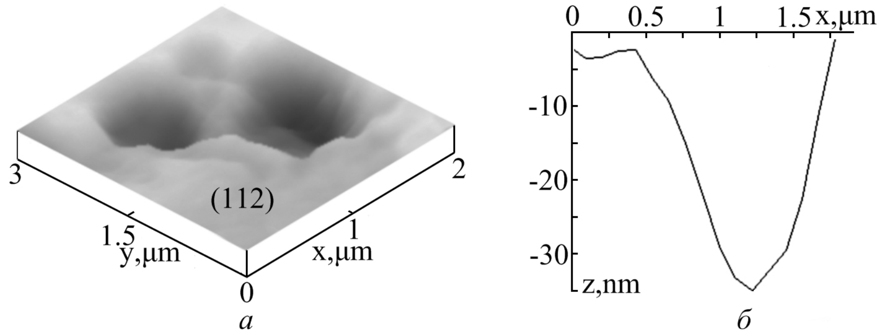


Рис. 4: а - лунки у місці виходу дислокаційної напівпетлі, які утворилися на бічній поверхні зразка Ge біля торця після одновісного стискання; б - профілограма лунки

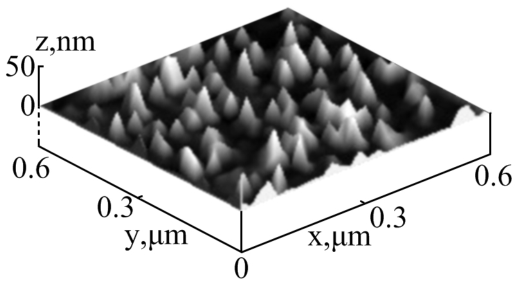


Рис. 5: Масив наноострівців, який утворений на стороні розтягу зразка Ge при згинанні з одночасним УЗ опроміненням при 490 K; з цього ж масиву один острівець показаний на рис.3,а

Серед низки вимог, що пред'являються до масивів напівпровідникових квантових точок для приладного застосування, є зменшення їх дисперсії — розкиду розмірів навколо середнього радіуса. Масиви острівців, в яких зародження і ріст лімітується дислокаційною дифузією, можуть мати більш вузький розподіл за розмірами, що спостерігалося в експерименті [18, 19] і обговорювалося в [20]. На рис.5 наведено масив наноострівців, отриманий нами на основі використання явища масопереносу при наявності градієнта механічного напруження. Подібного виду структури можна отримувати в температурному інтервалі $(300 - 500)$ K при збереженні незмінної морфології.

Висновки

1. Показано, що деформування монокристалів Ge з одночасним УЗ опроміненням при температурах нижче від $0.35T_{melt}$ (T_{melt} - температура плавлення) призводить до зародження дислокаційних петель, уздовж яких при наявності градієнта напружень відбувається прискорене перенесення атомів на поверхню. Таке дифузійне масоперенесення супроводжується утворенням

лунки у місці виходу дислокації на поверхню і ростом пірамідального острівця на перенапруженній поверхні з атомів перенесеного матеріалу. Рушійною силою самоорганізованнного росту є напруження, що виникає при неузгодженості параметрів ґратки на перенапруженій поверхні поблизу ямки і в основі острівця.

2. Використання раманівського комбінаційного розсіювання світла дозволило встановити, що після зняття зовнішнього деформуючого кристал тиску залишкові напруження в наноструктурах не виявляються.

3. Запропонована методика дислокаційно-поверхневої дифузії може бути використана у технологіях створення низьковимірних напівпровідникових структур, в яких проявляються квантові ефекти.

Література

[1] *Никифоров А.И.* Исследование процесса роста пленки Ge на поверхности Si(100) методом регистрирующей дифрактометрии / А.И. Никифоров, В.А. Черепанов, О.П. Пчеляков // ФТП. — 2001. — Т. 35, № 9. — С. 1032 – 1035.

[2] *Баллуфи Р.* Термически активные процессы в кристаллах / Р. Баллуфи. — М.: Мир. — 1973. — 160 с.

[3] *Nadtochy V.* Structure changes caused by the stress gradient in subsurface layers of germanium single crystals / V. Nadtochy, I. Zhikharev, M. Golodenko // Sol. State Phenomena. — 2003. — V. 94. — P. 253 – 256.

[4] *Алехин В.П.* Физика прочности и пластичности поверхностных слоев материалов / В.П. Алехин. — М.: Наука. — 1983. — 280 с.

[5] *Надточий В.А.* Микропластичность и электрические свойства Ge и Si, деформированных при низких температурах / В.А. Надточий, Н.К. Нечволод, Н.Н. Голоденко // Вісник Харківського університету, серія «Фізика». — 2003. — № 600, в. 7. — С. 101 – 104.

[6] *Косевич А.М.* Как течет кристалл / А.М. Косевич // УФН. — 1974. — Т. 114, № 3. — С. 509 – 532.

[7] *Доброхотов Э.В.* Диффузия в дислокационном Ge и модель жидкого ядра дислокации / Э.В. Доброхотов // ФТТ. — 2005. — Т. 47, № 12. — С. 2166 – 2169.

[8] *Petroff P.* Structural defects in III-V compound semiconductor / P. Petroff // Inst. Phys. Conf. — 1975. — V. 23. — P. 73 – 90.

[9] *Писаренко Г.С.* Уравнения и краевые задачи теории пластичности и ползучести / Г.С. Писаренко, Н.С. Можаровский. — Киев: Наукова думка. — 1975. — 496 с.

[10] *Пчеляков О.П.* Кремний-германиевые наноструктуры с квантовыми точками: механизмы образования и электрические свойства / О.П. Пчеляков, Ю.Б. Болховитянов, А.В. Двуреченский [и др.] // ФТП. — 2000. — Т. 34, № 11. — С. 1281 – 1289.

[11] *Дубровский В.Г.* Расчет функции распределения квантовых точек по размерам на кинетической стадии роста / В.Г. Дубровский // ФТП. — 2006. — Т. 40, № 10. — С. 1153 – 1160.

[12] *Концевой Ю.А.* Пластичность и прочность полупроводниковых материалов и структур / Ю.А. Концевой, Ю.М. Литвинов, Э.А. Фаттахов. — М.: Радио и связь. — 1982. — 239 с.

[13] *Кукушкин С.А.* Зарождение когерентных полупроводниковых островков при росте по механизму Странского-Крастанова, индуцированное упругими напряжениями / С. А. Кукушкин, А. В. Осипов, F. Schmitt [и др.] // ФТП. — 2002. — Т. 36, № 10. — С. 1177 – 1185.

[14] *Устинов В.М.* Технология получения и возможности управления характеристиками структур с квантовыми точками / В.М. Устинов // ФТП. — 2004. — Т. 38, № 8. — С. 963 – 970.

[15] *Надточий В.А.* Исследование поверхности деформированного Ge методом атомно-силовой микроскопии / В.А. Надточий, А.И. Уколов, В.П. Алехин // Деформация и разрушение материалов. — 2012. — № 4. — С. 26 – 33.

[16] *Ю П.* Основы физики полупроводников / Ю П. , М. Кардона. — М.: Физматлит. — 2002. — 560 с.

[17] *Стрельчук В.В.* Рентгеновская дифрактометрия и сканирующая микрорамановская спектроскопия неоднородностей структуры и деформаций по глубине многослойной гетероструктуры InGaN/GaN / В.В. Стрельчук, В.П. Кладько, Е.А. Авраменко [и др.] // ФТП. — 2010. — Т. 44, № 9. — С. 1236 – 1247.

[18] *Jesson D.E.* Self-Limiting Growth of Strained Faceted Islands / D.E. Jesson, G. Chen, K.M. Chen, S.J. Pennycook // Phys. Rev. Lett. — 1998. — V. 80, № 23. — P. 5156 – 5159.

[19] *Ross F.M.* Coarsening of Self-Assembled Ge Quantum Dots on Si(001) / F.M. Ross, J. Tersoff, R.M. Tromp // Phys. Rev. Lett. — 1998. — V. 80, № 5. — P. 984 – 987.

[20] *Венгренович Р.Д.* Оствальдовское созревание наноструктур с квантовыми точками / Р.Д. Венгренович, Ю.В. Гудыма, С.В. Ярема // ФТП. — 2001. — Т. 35, № 12. — С. 1440 – 1444.

УДК 537.311.322

Надточий В.А., Уколов А.И., Щербина И.Л., Иванов Р.И.

[1] *доктор физ.-мат. наук, профессор, заведующий кафедрой физики, ГВУЗ «ДГПУ»*

[2] *ассистент кафедры общенаучных дисциплин, АДИ «ДонНТУ»*

[3] *студентка 5 курса физико-математического факультета, ГВУЗ «ДГПУ»*

[4] *студент з курса АТР факультета, АДИ «ДонНТУ»*

e-mail: ukolov-aleksei@mail.ru

ИССЛЕДОВАНИЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ДЕФЕКТОВ В ПОЛУПРОВОДНИКОВЫХ ПЛАСТИНАХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ СХЕМ ПРИ ВОЗДЕЙСТВИИ МЕХАНИЧЕСКИХ НАПРЯЖЕНИЙ

В работе приведены зависимости напряжений в области действия сосредоточенной силы при трехопорном изгибе тонкой полупроводниковой пластины Ge. При выбранных размерах и условиях деформирования превышение напряжений в образце вблизи концентратора существенно на глубине до 25 мкм и от него вдоль поверхности на расстоянии < 1.2 мм. Полученное методом структурного анализа распределение дефектов в приповерхностном слое качественно согласуется с результатами электрических измерений времени жизни τ неосновных носителей заряда. Использованный зондовый метод измерения τ может быть рекомендован для контроля степени дефектности на малых фрагментах интегральных схем.

Ключевые слова: *напряжение, дефекты, дислокации, время жизни.*

Введение

Установлено [1, 2], что около 50 % отказов в микроэлектронных приборах вызвано механическими воздействиями, возникающими в процессе производства, испытаний и эксплуатации как самого прибора, так и элементов, входящих в его состав. Распределение напряжений в полупроводниковом кристалле обусловлено совокупностью технологических операций на различных стадиях производства интегральных схем (ИС) - от выращивания до механических испытаний готовой продукции. Комплексное исследование микропластичности полупроводниковых кристаллов Ge при низких температурах ($T < 0.35T_{melt}$ (T_{melt} - температура плавления)) показало [3], что в зависимости от уровня механических напряжений и способа деформирования вблизи поверхности образуется дефектный слой, толщиной до 100 мкм из вакансионно-примесных кластеров и дислокаций, в то время как в толще кристалла сохраняется относительное совершенство [3-6].

Поскольку размеры современных полупроводниковых структур весьма ограничены как вдоль поверхности, так и по толщине и составляют десятки-сотни микрометров, то такие структуры могут находиться в пределах аномального дефектного слоя, образованного за счет действия концентраторов напряжения на краях пластины или пленочного покрытия, неровностях поверхности, включениях, скоплениях ростовых дефектов [7, 8]. Уровень остаточных напряжений в ИС определяется физико-механическими характеристиками элементов конструкции, уровнями механических и термических воздействий в процессе производства и чаще всего не поддается теоретическим расчетам. В [2] отмечается также об отсутствии практических методов производственного контроля уровней внутренних напряжений и плотности структурных дефектов в ИС из-за сложности конструктивной иерархии активных и пассивных элементов, составляющей приборную структуру. В данной работе показана возможность оценки распределения структурных дефектов на основе электрических измерений времени жизни τ неравновесных носителей заряда на поверхности деформированной трехопорным изгибом пластины Ge. Параметр τ претерпевает заметное уменьшение уже при малых плотностях дефектов, когда изменение концентрации и подвижности основных носителей заряда незначительны [9, 10]. Зондовый метод определения τ обладает высокой степенью локальности и позволяет по распределению структурных дефектов в напряженных областях устанавливать его корреляцию с полями созданных напряжений. Степень локальности метода зависит от радиуса полусферического наконечника зонда, который может быть получен для вольфрамовой проволочки от единиц микрометров [11] до нескольких десятков нанометров [12], так что ограничения могут определяться лишь допустимой механической нагрузкой на зонд для прокалывания окисной пленки и необходимой величиной импульса тока инжекции [13].

Основная часть

Элементарная формула для напряжений при изгибе в призматических стержнях дает удовлетворительные результаты только на некотором расстоянии от точки приложения силы. Вблизи этой точки будут, однако, значительные отклонения в распределении напряжений. Для случая тонкой пластины с прямоугольным сечением можно получить строгое решение для распределения напряжений, рассматривая действие на неё силы F (рис. 1) при нагружении клином определенной ширины. Указанная модель позволяет рассчитать концентрацию напряжений, а затем полученные результаты учесть в схеме трехопорного изгиба (рис.2,а). Распределение напряжений (рис. 1) имеет цилиндрическую симметрию радиуса r [14, 15]. Выделенный элемент поверхности A подвергается простому сжатию в радиальном направлении, а напряжение

$$\sigma_r = -k\frac{F\cos\theta}{br}, \tag{1}$$

где r - есть радиальное расстояние от точки приложения груза и b - ширина пластины. Коэффициент $k=\pi/2$ определяется из того обстоятельства,

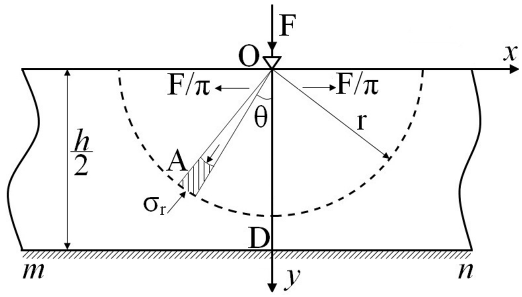


Рис. 1: Распределение напряжений в пластине под действием сосредоточенной силы F

что напряжения σ_r, распределенные вдоль полуокружности, показанной на рис.1 пунктиром, находятся в равновесии с силой F. Если рассмотреть горизонтальную плоскость mn, то нормальное напряжение σ_y, действующее по этой плоскости, будет равно [14]

$$\sigma_y = \sigma_r\cos^2\theta = -\frac{2F}{\pi}\frac{\cos^3\theta}{br} = -\frac{2F}{\pi}\frac{\cos^4\theta}{by}, \tag{2}$$

При определении равнодействующих горизонтальных составляющих радиальных давлений показано [14, 15], что сосредоточенная сила F вызывает расклинивающее действие двумя противоположными силами величиной F/π (рис.1). В случае пластины толщиной h и шириной b эти силы, действующие на расстоянии $h/2$ от поверхности, вызывают в срединном поперечном сечении не только растягивающие напряжения, определяемые формулой

$$\sigma'_x = \frac{F}{\pi hb}, \tag{3}$$

но также и напряжения изгиба, даваемые выражением

$$\sigma''_x = -\frac{Fh}{2\pi}\frac{y}{I_z}, \tag{4}$$

в котором $Fh/2\pi$ есть изгибающий момент, вызываемый горизонтальными силами F/π, y - расстояние от верхней плоскости пластины, принятое положительным вниз, и $I_z = bh^3/12$ - момент инерции поперечного сечения.

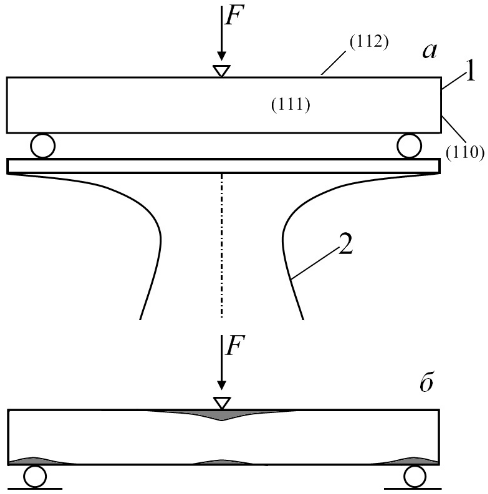


Рис. 2: Схема деформирования пластины трехопорным изгибом (а) и распределение дефектов вблизи концентраторов (б). На рисунке обозначено: 1 - образец Ge, 2 - акустический излучатель

Накладывая напряжения из уравнений (3) и (4) на напряжение при трехопорном изгибе, определяемое по элементарной формуле для призматических стержней, находим, что нормальные напряжения в срединном поперечном сечении равняются

$$\sigma_x = \frac{1.5Fl}{bh^2} + \frac{F}{\pi bh} - \frac{6Fy}{\pi bh^2}. \tag{5}$$

Здесь первое слагаемое принятое равным σ_{max} как для поверхностного слоя в обычной формуле при изгибе стержней. Такое допущение правомерно для данной задачи при рассмотрении концентрации напряжений в тонком приповерхностном слое в области действия силы F.

Распределение полных напряжений в области действия деформирующей силы F (рис.2,а) было найдено с учетом составляющих σ_y (2) и σ_x (5), размеров пластины германия ($l = 17$ мм, $b = 4$ мм, $h = 0.8$ мм), а также величины силы $F = 8$ Н. Результаты расчетов приведены графически на рис.3, где точка приложения силы соответствует началу координат. При $x = 0$ на расстоянии от поверхности $y = 2$ мкм полное напряжение составляет $\sigma \approx 650$ МПа, но резко снижается по мере роста y (рис.1) до значения $\sigma \approx 80$ МПа, определяемого первым слагаемым в формуле (5), то-есть концентрация напряжений существенна лишь в слое, толщиной ~ 25 мкм. На расстояниях $y > 25$ мкм и $x > 1.2$ мм полное напряжение можно определить по элементарной формуле для балки при трехопорном изгибе.

Распределения напряжений в образце над нижними опорами можно найти подобным способом с учетом деформирования силой величиной $F/2$.

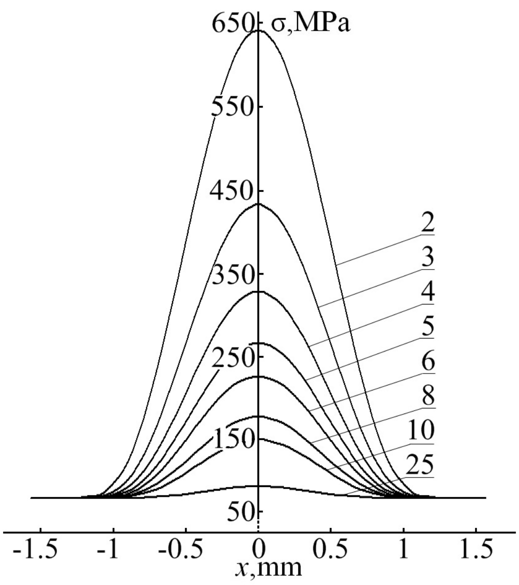


Рис. 3: Графики полных напряжений в области приложения силы F на различных расстояниях y от поверхности, мкм

Учет распределения статических и знакопеременных напряжений при УЗ воздействии, длительности испытаний при выбранной температуре ($T = 310K$), типа источников дислокаций в выращенном кристалле Ge и физических свойств приповерхностного слоя, а также выполненные структурные исследования в данной работе и в [3-8] с помощью оптической, электронной и атомно-силовой микроскопии позволили установить следующее:

1. В приповерхностном слое, толщиной в несколько десятков нанометров возникает массоперенос вещества вдоль поверхности, а глубже – до 5 мкм генерируются вакансионно-приместные кластеры и дислокационные петли, большей частью выходящие на поверхность. При наличии градиента напряжений диффузия атомов вдоль поверхности и вдоль дислокаций на поверхность порождает образование островков или гребней нанометровой высоты из совокупности островков [7, 8]. Этот эффект наиболее выражен вблизи концентраторов напряжений.

2. В более глубоких слоях под опорами на расстоянии от поверхности до 100 мкм и в тонком (до нескольких мкм) слое вдоль поверхности вдали от опор образуются вакансионно-примесные кластеры сферической формы или вакансионные диски вокруг ростовых включений. Их размеры, плотность и глубина залегания зависят от уровня напряжений и пересыщения вакансиями [3, 6, 16], которыми интенсивно насыщается приповерхностный слой под действием статической загрузки и УЗ облучения.

Известно, что дефекты типа дислокаций и кластеров, как эффективные центры рекомбинации [17], уменьшают время жизни τ неосновных носителей заряда (в данном случае дырок) в соответствии с зависимостью $\tau = A/N$, где A - константа, N - плотность дефектов. На процессы рекомбинации неравновесных носителей электрических зарядов, инжектируемых с металлического зонда в кристалл, влияет сама поверхность, введенные деформированием дефекты приповерхностного слоя, а также ростовые дефекты в объеме кристалла. Поэтому при наличии нескольких видов рекомбинации математическую связь эффективного (измеряемого) времени жизни неосновных носителей заряда τ_{eff} с временем жизни неосновных носителей заряда на поверхности τ_s, в дефектном слое τ_l и объеме кристалла τ_v можно выразить формулой [18, 19]:

$$\frac{1}{\tau_{eff}} = \frac{1}{\tau_s} + \frac{1}{\tau_l} + \frac{1}{\tau_v}, \tag{6}$$

Значение слагаемого $1/\tau_s = 2s/h$ в (6) определяется толщиной пластины h и скоростью поверхностной рекомбинации зарядов s. Значение параметра s в сильной степени зависит от состояния поверхности и может изменяться в интервале $2 - 10^6$ см/с. В данном эксперименте для уменьшения параметра s пластины Ge перед измерениями подвергались травлению в перекиси водорода. После такой обработки $s = 50$ см/с [20]. Время жизни τ_l в дефектном слое изменялось от 80 мкс до 250 мкс. Величины рассчитанного $\tau_s = 800$ мкс, объемного времени жизни по сертификату для данного образца было $\tau_v = 250$ мкс и учитывались как постоянные. Поэтому для тонкой пластины Ge с учетом введенных дефектов структуры время жизни в слое τ_l определяли как

$$\frac{1}{\tau_l} = \frac{1}{\tau_{eff}} - const. \tag{7}$$

Значения τ_{eff} измеряли в разных точках вдоль образца с шагом 1 мм по прямой, проходящей посередине плоскости сжатия и растяжения. Результаты расчетов τ_l приведены на рис.4. Концентрация дефектов и толщина дефектного слоя на плоскости растяжения максимальна в местах, где τ_l достигает своего минимума (точки a, c, e) и принимает значения, близкие к $\tau_v = 250$ мкс в областях с незначительными структурными нарушениями. Для верхней плоскости наблюдается только один провал вблизи точки f на кривой τ_l, соответствующий области максимальной концентрации напряжений (рис. 2,б и рис.3). На рис.4 представлены оптические снимки структурных нарушений в разных областях на плоскости растяжения, выявленные химическим травлением. Подбором состава травителя и режима обработки можно выявить мелкие детали структуры типа кластеров и выходов дислокаций. Измерения τ можно выполнять также на готовых ИС с нанесен-

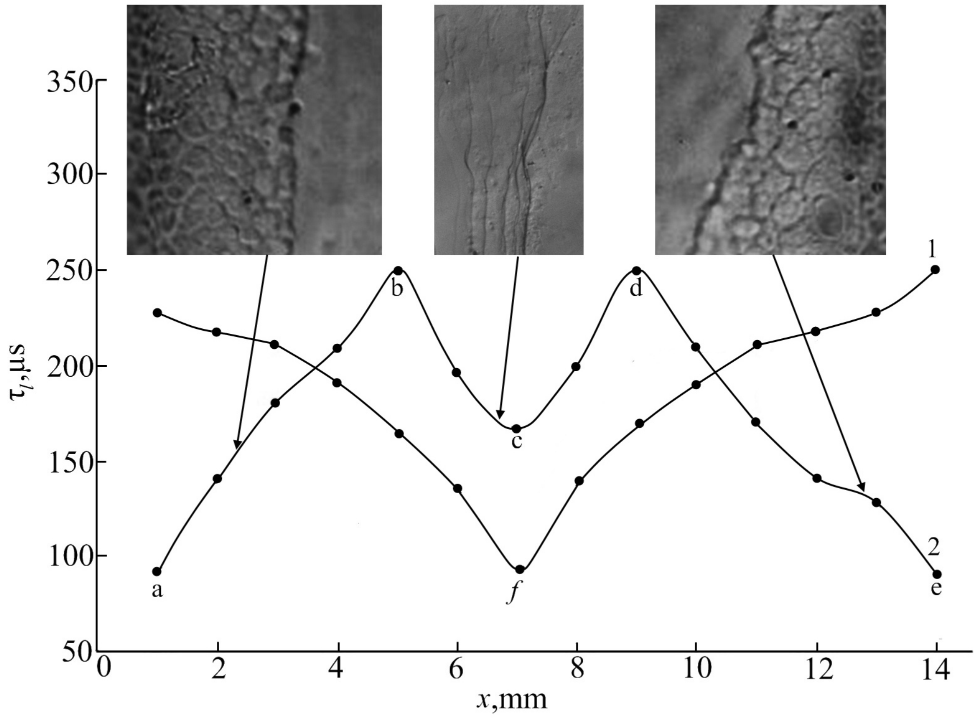


Рис. 4: Графики изменения времени жизни τ_l неравновесных носителей заряда в дефектном слое вдоль верхней (1) и нижней (2) поверхностей пластины Ge. На вставках приведены оптические снимки деформационных дефектов

ными активными и пассивными элементами (рис.5). Для удаления загрязнений на поверхности полупроводниковую пластину следует кратковременно протравить в перекиси водорода, промыть в дистиллированной воде и высушить. Наибольшая плотность дефектов появляется обычно на границах между структурными элементами и подложкой. Вдоль этих границ можно устанавливать под микроскопом измерительный вольфрамовый зонд, определять τ и оценивать уровень дефектности.

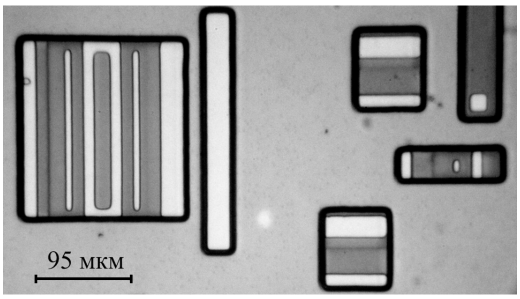


Рис. 5: Изображение участия типичной безкорпусной интегральной схемы, подготовленной для выполнения измерений времени жизни носителей заряда

Выводы

Таким образом, измеряя время жизни τ_{eff} неосновных носителей заряда на полупроводниковых структурах, можно устанавливать корреляцию с распределением механических напряжений.

Данный метод был опробован на интегральных схемах типа КР1533, КР132РУ4Б и других.

Предложенный метод имеет ограничения, поскольку позволяет измерять τ от единиц до сотен микросекунд с удельным сопротивлением полупроводника $10^{-1} - 10^{2}$ Ом·см и погрешностью около $15\,\%$ [12].

Литература

[1] *Перевощиков В.А.* Проблема ростовых и технологических микродефектов в приборных слоях структур «кремний на изоляторе», формируемых термокомпрессионным соединением пластин / В.А. Перевощиков, В.Д. Скупов // Вестник Новгородского ун-та, серия: ФТТ. — 2001. — № 2. — С. 103 – 109.

[2] *Сергеев В.С.* Напряжения и деформации в элементах микросхем / В.С. Сергеев, О.А. Кузнецов, Н.П. Захаров, В.А. Летягин — М.: Радио и связь. — 1987. — 88 с.

[3] *Надточий В.А.* Микропластичность алмазоподобных кристаллов (Si, Ge, GaAs, InAs): дис. ... доктора физ.-мат. наук: 01.04.07 / Надточий Виктор Алексеевич. — Харьков, 2006. — 471 с.

[4] *Надточий В.А.* Исследование электрических свойств Ge и Si, деформированных при низких температурах / В.А. Надточий, Н.К. Нечволод, Д.Г. Сущенко // ФТВД. — 2001. — Т. 11, № 1. — С. 104 – 110.

[5] *Надточий В.А.* Изменение времени жизни носителей заряда и проводимости дефектного приповерхностного слоя Ge при термообработках / В.А. Надточий, Н.К. Нечволод, Н.Н. Голоденко // ФТВД. — 2004. — Т. 14, № 3. — С. 42 – 48.

[6] *Nadtochy V.* Structure changes caused by the stress gradient in subsurface layers of germanium single crystals / V. Nadtochy, I. Zhikharev, M. Golodenko // Sol. State Phenomena. — 2003. — V. 94. — P. 253 – 256.

[7] *Надточий В.А.* Исследование поверхности деформированного Ge методом атомно-силовой микроскопии / В.А. Надточий, А.И. Уколов, В.П. Алехин // Деформация и разрушение материалов. — 2012. — № 4. — С. 26 – 33.

[8] *Надточий В.А.* Формирование наноструктур в Ge при условии дислокационно-поверхностной диффузии / В.А. Надточий, А.И. Уколов, Н.К. Нечволод // ФТВД. — 2012. — Т. 22, № 3. — С. 54 – 62.

[9] *Тхорик Ю.А.* Структурная релаксация в полупроводниковых кристаллах и приборных структурах / Ю.А. Тхорик. — Киев: Феникс. — 1994. — 247 с.

[10] *Вавилов В.С.* Радиационные методы в твердотельной электронике / В.С. Вавилов, Б.М. Горин, Н.С. Данилин [и др.]. — М.: Радио и связь. — 1990. — 184 с.

[11] *Павлов Л.П.* Методы измерения параметров полупроводниковых материалов / Л.П. Павлов. — М.: Высшая школа. — 1987. — 239 с.

[12] *Вудраф Д.* Современные методы исследования поверхности / Д. Вудраф, Т. Делчар. — М.: Мир. — 1989. — 568 с.

[13] *Иглицын М.И.* Об измерении времени жизни носителей заряда в полупроводниках / М.И. Иглицын, Ю.А. Концевой, В.Д. Кудин, А.А. Майер. // ЖТФ. — 1957. — Т. 27, № 7. — С. 1414 – 1424.

[14] *Тимошенко С.П.* Сопротивление материалов. Более сложные вопросы теории и задачи / С.П. Тимошенко. — М.: Наука. — 1965. — 480 с.

[15] *Timoshenko S.* Theory of Elasticity / S. Timoshenko, J.N. Goodier. — New York. — 1951. — 506 p.

[16] *Nadtochiy V.* Microplasticity and electrical properties of subsurface layers of diamond-like semiconductors strained at low temperatures / V. Nadtochiy, N. Golodenko, N. Nechvolod // Functional Materials. — 2003. — V. 10, № 4. — P. 702 – 706.

[17] *Концевой Ю.А.* О рекомбинации в полупроводниках с макроскопическими дефектами / Ю.А. Концевой // ФТП. — 1970. — Т. 4, № 6. — С. 1184 – 1187.

[18] *Уколов А.И.* Измерение времени жизни неосновных носителей заряда в приповерхностном слое монокристаллического Ge зондовым методом / А.И. Уколов, В.А. Надточий, Н.Н. Голоденко // Вісник ХНУ, серія «Фізика». — 2012. — № 962, В. 15. — С. 63 – 66.

[19] *Надточій В.О.* Спосіб визначення міри дефектності приповерхневих шарів монокристалів германію або кремнію / Надточій В.О., Уколов О.І.; патент на винахід 97999, МПК G01N 27/87; опубл. 10.04.12.

[20] *Berezhinsky L.I.* Spectra of the photo-electric phenomena physically differentiated on the light absorption factor / L.I. Berezhinsky, E.F. Venger, I.E. Matyash, B.K. Serdega // Semiconductor Physics, Quantum Electronics and Optoelectronics. — 2004. — V. 7, № 4. — P. 441 – 445.

УДК [37.02:5]"20"

Шурыгина Л.С., Шурыгин Е.Г., Мелешко А.И.

[1] *кандидат педагогических наук, доцент кафедры физики, ГВУЗ «ДГПУ»*

[2] *ассистент кафедры геометрии и методики математики, ГВУЗ «ДГПУ»*

[3] *студентка 5 курса физико-математичческого факультета, ГВУЗ «ДГПУ»*

e-mail: fiziksgpu@yandex.ru

О ЕСТЕСТВЕННОМАТЕМАТИЧЕСКОМ ОБРАЗОВАНИИ В ПОСТНЕКЛАССИЧЕСКИЙ ПЕРИОД РАЗВИТИЯ НАУКИ

Обосновывается утверждение, что междисциплинарность – характерная особенность постнеклассического этапа развития науки и современная форма ее фундаментальности. Это необходимо учитывать при совершенствовании всех уровней системы образования.

Ключевые слова: *междисциплинарность, сложность, синергетика, детерминированный хаос, солитон*

«Ключ к завтрешнему дню — мировоззрение, выработанное сегодня»

Н.Н. Моисеев

«То, что мы наблюдаем — не сама природа, но природа, открывающаяся нашему способу задавать вопросы»

В. Гейзенберг

Вступление

Проблема совершенствования содержания естественнонаучного образования, преодоления отставания его от современной науки очень актуальна в период быстрого развития последней. Однако, огромное количество появляющихся теорий и экспериментальных фактов не могут быть втиснуты в содержание соответствующих дисциплин. Это и не нужно. Необходимо учить, главным образом, не тому «что думать», а «как думать» с учетом миропонимания соответствующей эпохи. Поэтому дидактической переработке, в первую очередь, подлежат те направления развития науки, те открытия, которые вносят новое в естественнонаучную картину мира, изменяют представления о научной рациональности. Для их выделения необходим анализ развития мировоззрения и стратегий познания.

Основна часть

Переход от классического этапа развития науки к неклассическому в первых десятилетиях XX века связан с появлением теории относительности (специальной и общей), квантовой механики и считается революционным.

Классическая картина мира, в основе которой лежит физика Галилея и Ньютона, – упрощенная модель реальности, описываемой с позиции постороннего, «абсолютного» наблюдателя, с позиции субъекта ей (изучаемой реальности) не принадлежащего. Науку интерисуют, главным образом, состояния равновесия и устойчивости. Считалось, что свойства реальности хорошо отображаются линейными законами (реакция системы на воздействие всегда пропорциональна последнему). Благодаря успехам классической механики в науке утвердился лапласовский детерминизм – возможность однозначного определения состояния системы в любой последующий момент времени, если известно начальное состояние. Принималась концепция пассивной природы, подвластной детерминированным и обратимым законам. В таком мире нет развития, не может возникнуть ничего нового.

В неклассический период развития науки было осознано, что мы изучаем не «объект» сам по себе, а наше взаимодействие с ним, появилось понятие относительности к средствам наблюдения, принцип неопределенности и принцип дополнительности. Повысился гносеологический статус статистических законов – в микромире, в квантовой механике, они объективны, а не отражают «состояние нашего ума», наше незнание.

Достижения науки последних десятилетий XX века также связывают с революционными изменениями в миропонимании. Теперь имеет значение не только изучаемый объект и инструменты исследования, но и познающий субъект. Осознано, что когнитивный опыт познающего коренится в его биологической структуре. «Мы не видим «пространство» мира, мы проживаем поле нашего зрения. Мы не видим «цветов» реального мира, мы проживаем наше собственное хроматическое пространство» [1, с. 20]. Появляются новые представления о самых фундаментальных свойствах реальности – эволюции природных систем и геометрии природы. Но, в связи с открытием детерминированного хаоса, появляются и новые ограничения в познании – «горизонт прогноза». В центре внимания – сложные системы нано-, макро- и мегауровней структурной организации материи. Характеризуя этот этап развития науки лауреат Нобелевской премии И.Р. Пригожин пишет о «новом диалоге человека с природой», о переносе акцента в познании реальности от Бытия к Становлению, от существующего к возникающему. Новое миропонимание связывают с новым стилем научного мышления – нелинейным. «Нелинейное мышление

– новый стиль мышления в современном точном естествознании» [2, с. 126]. В физической энциклопедии указано: «Все реальные физические системы нелинейны, их можно считать линейными лишь приближенно» [3, с. 312]. В списке В.Л. Гинзбурга особенно важных и интересных проблем в физике и астрофизике начала XXI века под номером одиннадцать читаем: «Нелинейная физика. Турбулентность. Солитоны. Хаос. Странные аттракторы» [4]. В комментариях к этому пункту указано, что внимание к нелинейной физике все усиливается и усиливается. Пришло также понимание того, что нелинейными свойствами обладает не только физическая реальность. Методология, основанная на нелинейном мышлении, междисциплинарна. Она нужна в экономических, социальных науках, в экологии и т.д. Например, нелинейность в биологии имеет экспоненциальный характер. «Эволюционный смысл столь мощной нелинейности вполне понятен: надо услышать шорох подползающей змеи и не ослепнуть при близкой вспышке молний. Те биологические системы, которые не смогли охватить громадный диапазон жизненно значимых воздействий среды, попросту вымерли, не выдержав борьбы за существование. На их могилах можно было бы написать: «Они были слишком линейны для этого мира». Но такая же судьба ожидает и математические модели, не учитывающие этой важной особенности жизни» [5, с. 55].

Особенность постнеклассического этапа развития науки – появление междисциплинарных направлений исследования: кибернетики, теории систем, синергетики, нанонауки и т.д. Ядром формирующейся постнеклассической науки XXI века, по мнению академика В.С. Степина (директора института философии РАН) является синергетика – междисциплинарное направление изучения сложных систем различной природы. Синергетика имеет естественнонаучные корни. Она выросла из теории лазерной генерации, неравновесной термодинамики, теории автоколебаний и автоволн различной природы, исследований неравновесных структур в плазме. Используются и развиваются в ней также междисциплинарные подходы кибернетики и теории систем. Каркас синергетики, объединяющий изучение сложных систем любой природы в единый трансдисциплинарный подход – нелинейная динамика, раздел современной математики, занимающийся исследованием нелинейных динамических систем. «Под динамической системой условились понимать систему любой природы (физическую, химическую, биологическую, социальную, экономическую и т.д.), состояние которой изменяется (дискретно или непрерывно) во времени» [6, с. 16].

Потребность в междисциплинарном подходе на данном этапе развития науки объясняется следующим:

1. Высокие технологии создаются только на основе междисциплинарного синтеза. Например, нанотехнологии появились и развиваются на стыке физики, химии, биологии, медицины, материаловедения и т.д.

2. Дифференциация науки XX века привела к появлению огромного количества научных дисциплин. С одной стороны, узкая специализация способствовала их развитию, с другой – привела к незнанию специалистами происходящего даже в смежных областях науки. За деревьями не стало видно леса. Возникла потребность в целостном миропонимании. Г.Г. Малинецкий (председатель редколлегии серии «Синергетика: от прошлого к будующему») считает: «За междисциплинарностью, целостной гармоничной картиной мира – будущее. Без них научное познание утратит красоту, очарование, а потом и силу» [6, с. 13].

3. Междисциплинарность – современная форма фундаментальности науки (и образования). Научный метод познания в классическом понимании состоит из следующих этапов: обобщение определенной группы фактов, вывод следствий, экспериментальная их проверка и, наконец, теория (О таком пути развития научной мысли писал А. Эйнштейн [7, с. 569-570]). Однако переживаемый в наше время информационный взрыв делает актуальным другой метод научного поиска, который можно назвать концептуальным. Его компоненты: разрозненные аналогии, концепция, теория. Концептуальный подход не исключает классический, но опирается на него.

Наличие аналогий между различными явлениями и процессами – проявление основных принципов природы в многообразии закономерностей частных наук. Значение аналогий понимали многие знаменитые ученые. Блестяще пользовался ими (аналогиями) Вернадский В.И. В своих знаменитых лекциях Р. Фейнман писал: «переходя к новым разделам физики и даже к другим наукам, мы сталкиваемся с уравнениями, почти не отличающимися от уже известных нами ранее. Таким образом, многие явления имеют аналогию в совсем других областях науки» [8, с. 97]. Один из создателей теории систем Л. фон Берталанфи подчеркивал, что важны не поверхностные аналогии, а изоморфизмы в математическом смысле слова, т.е. строгое соответствие между всеми элементами сравниваемых систем.

Один из отцов-основателей синергетики Г. Хакен, предложивший название данному научному направлению, стал интенсивно развивать его, обнаружив аналогию между процессами появления когерентного излучения в лазере, конвективных структур в подогреваемом снизу слое жидкости и равновесными фазовыми переходами.

Отдельные научные дисциплины рассматривают определенные виды движения, тесно связанные с моделью системы. В синергетике в центре внимания не вид движения, а процесс развития, качественные изменения системы, возникновение, исчезновение или превращение динамических структур, структур-процессов.

Одним из истоков синергетики и ее составной частью является теория колебаний и волн. Из школьного курса физики известно, что колебания различной природы (механические, электрические и т.п.) подчиняются одинаковым количественным законам. Важно не то, что именно колеблется, а, главным образом, как совершаются колебания. Л.И. Мандельштам в своих известных лекциях писал, что для теории колебаний не типичен интерес к тому, что происходит в данный момент в данном месте. Ее интересует, главным образом, общий характер процесса взятого в целом, в течении некоторого интервала времени. То же самое можно сказать о синергетике. Она как бы надстраивается над различными разделами науки, выделяя основные общие закономерности развития природных систем.

Основы математического аппарата, адекватного такому подходу к изучению реальности, заложены на пороге XX века А. Пуанкаре. Со времен Ньютона в качестве математических моделей природных явлений используются дифференциальные уравнения. Однако найти аналитическое выражение для решения уравнения или их систем возможно далеко не всегда. Число уравнений, интегрируемых в квадратурах, крайне ограничено. Существуют приближенные методы численного нахождения решений, дающие возможность вычислять частные решения на заданном промежутке изменения независимых переменных. Однако для многих вопросов естествознания таких знаний недостаточно (Например, устойчива ли наша Солнечная система?). А. Пуанкаре иллюстрирует ситуацию на примере проблемы трех тел: «Будет ли одно из тел всегда оставаться в некотором участке неба или оно может удалиться в бесконечность? Будет ли расстояние между двумя из этих тел неограниченно убывать или, напротив, это расстояние будет всегда заключено в определенных границах?» (Цитируется по [9]). Для ответа на подобные вопросы нужно знать решение для большого (как угодно) промежутка времени, т.е. «знать характер решения в целом». Поэтому, утверждает А. Пуанкаре, необходимо, прежде всего, качественное исследование функций, определяемых дифференциальными уравнениями. К качественным исследованиям относятся: геометрическое изучение интегральных кривых, фазовых траекторий, фазового портрета системы, исследование устойчивости стационарных режимов функционирования и т.д. Этими вопросами занимается качественная теория дифференциальных уравнений или, в современной интерпретации, – теория динамических систем. Именно с качественной стороны должна начинаться теория всякой функции, — утверждает А. Пуанкаре, предвидя чрезвычайную важность такого анализа для многих вопросов естествознания и математики. Явления, описание которых одинаково с точки зрения качественной теории, аналогичны.

Синергетика – теория развития, функционирования сложных систем. Можно говорить о сложности на структурном и на функциональном уровне. Эти сложности взаимосвязаны, но не эквивалентны. Сложная система состоит из множества взаимодействующих подсистем, элементов. Вследствие этого взаимодействия, система приобретает новые свойства, которые называют эмерджентными (В термодинамике, например, это энтропия, температура и т.п.). В статистической физике также рассматривают системы, состоящие из множества подсистем. Однако взаимодействием между ними либо пренебрегают либо считают достаточно слабым (идеальный газ, фотоны в равновесном излучении, фононы в твердом теле и т.д.). В синергетике главное – взаимодействие подсистем, учитывается его нелинейность.

Примеры сложных макроскопических систем: планеты, жидкости, твердые тела, облака, растения, животные, популяции животных, человеческие сообщества, ансамбль нейронов мозга и т.д.

Понятие сложности неразрывно связано с нелинейностью. Если система линейна, можно воспользоваться принципом суперпозиции, разложить ее на независимые составляющие, изучив которые объяснить поведение всей системы. Для сложных систем такой подход (редукционизм) неприменим. Целое не сводится к сумме частей, а части, образуя сложную систему, изменяют свои свойства.

И.Р. Пригожин пишет, что важнее говорить о сложном поведении, сложном функционировании, чем о сложности структуры. Одна из существенных особенностей сложного поведения – способность совершать переходы между различными режимами функционирования. Поэтому «понятие сложности относится к таким системам, в которых наблюдаемое поведение в значительной мере связано с их эволюцией, т.е. предысторией» [10, с. 48].

Примерно до середины XX века единственным законом эволюции неживых систем (косной материи — по терминологии Вернадского В.И.) являлся второй закон термодинамики, согласно которому изолированные системы стремятся к равновесному состоянию, т.е. деградируют. Наблюдаемые в природе процессы структурообразования не объяснялись.

Согласно синергетике вся материя во Вселенной, на всех уровнях структурной организации, — космологическом, физическом, биологическом, социальном, обладает свойством самоформирования, саморазвития, самоорганизации. «Я думаю, что познание механизмов самоорганизации и составляет суть фундаментальных наук», – пишет академик Н.Н. Моисеев в своей последней книге [11].

Под самоорганизацией обычно понимают процессы спонтанного упорядочения, образования структур в далеких от равновесия, открытых системах. Система самоорганизуется, если она приобретает пространственную, временную или функциональную структуру без специфического воздействия извне, т.е. без воздействия, навязывающего ей определенную структуру. Установлено, что существуют устойчивые способы организации структур-процессов в среде, зависящие от свойств среды, адекватные ей, к которым эволюционируют все другие состояния данной системы со временем.

Различают самоорганизацию консервативную, диссипативную и дисперсную. В первом случае структуры возникают при понижении температуры. Это – равновесные фазовые переходы, например, жидкость — кристалл. Для существования образовавшихся структур приток энергии не нужен.

В результате неравновесных фазовых переходов образуются диссипативные структуры. Это – структуры-процессы, возможные только в далеких от равновесия условиях. Для их возникновения и поддержания необходимы диссипативные процессы (диффузия, вязкость, химические реакции и т.д.) и, следовательно, приток энергии извне. Например, все биологические системы являются диссипативными.

Одна из интересных особенностей неравновесности – дуалистичность диссипативных процессов, необратимости. Вблизи равновесия они разрушают порядок (переход к равновесию), но создают порядок (структуры) вдали от равновесия, играя конструктивную роль.

Примеры диссипативных структур-процессов: когерентное излучение в лазере, конвективные структуры в жидкостях или газах (например, ячейки Бенара), гранулы на Солнце, тепловые структуры в плазме, многие астрофизические явления, многие социальные явления, самоорганизующейся системой является человеческий мозг в процессе познания реальности и т.д. Процессы самоорганизации происходят на всех уровнях структурной организации материи, от элементарных частиц до космических структур, галактик.

Дисперсная структура – солитон. Концепция солитона – одна из фундаментальных в современной науке. Солитонами называют уединенные волны, формирующиеся в нелинейных средах с дисперсией, которые по своим свойствам во многом напоминают частицы. Если один солитон догоняет другой, то они ведут себя как частицы при упругом столкновении.

При создании квантовой механики была попытка представить частицу как пакет волн де Бройля, поскольку скорость частицы и соответствующего ей волнового пакета одинаковы. Однако интерпретация не была принята – для волн де Бройля дисперсия имеет место даже в вакууме, скорость распространения зависит от длины волны. Поэтому волновой пакет неустойчив, быстро расплывается, а частицы (электроны, протоны и т.д.) устойчивы.

В нелинейной среде ситуация может быть иной. Скорость распространения нелинейной волны зависит от ее амплитуды, поэтому форма распространяющейся уединенной волны, волнового импульса, становится все круче. Это, при определенных условиях, компенсирует действие дисперсии, уединенная волна становится устойчивой.

Образование и распространение солитонов описывается нелинейными уравнениями, аналитически точное решение которых удается найти в исключительных случаях. Однако во второй половине XX века была установлена удивительная связь между стационарным уравнением Шредингера для одномерного движения и уравнением Кортевега – де Фриза (КдФ) для нелинейных волн в среде с дисперсией. Появился метод обратной задачи рассеяния, жемчужина двадцатого века в области математической физики. Существованию солитонов было дано аналитическое объяснение.

Солитоны или солитоноподобные объекты наблюдаются везде: на поверхности воды, в плазме, в нелинейной оптике, в кристаллах, сверхпроводниках, в атмосфере Земли. Например, ряд интересных явлений в твердом теле можно объяснить лучше, если привлечь солитоны, рассматривая их в качестве элементарных возбуждений.

Теоретикам нравится идея, согласно которой элементарные частицы являются солитонами соответствующих нелинейных полей. Существует теоретическая работа, убедительно доказывающая, что квант гравитационного поля – гравитон, является солитоном (Уравнения ОТО Эйнштейна, определяющие свойства гравитационного поля, нелинейны). ТВО (Теория Великого Объединения всех трех взаимодействий – слабого, сильного и электромагнитного, еще не созданная окончательно) предсказывает существование необычных гигантских солитонов – космических струн, представляющих собой тонкие вихревые трубки, длина которых сравнима с размерами Галактики. Проблема космических струн (с вопросом) находится в упомянутом выше списке В.Л. Гинзбурга. Очевидно, что у солитоники (науки о солитонах) большое будущее.

Изучение процессов самоорганизации имеет не только теоретический интерес. Чтобы показать это приведем отрывок из доклада сотрудников И. Пригожина для Европейской Комиссии: «Поддержание организации в Природе не достигается (и не может быть достигнуто) управлением из единого центра; порядок может поддерживаться только с помощью самоорганизации. Самоорганизующиеся системы делают возможной адаптацию к превалирующей окружающей среде, т.е. реагирует на изменения в окружающей среде, и именно их термодинамический отклик делает такие системы чрезвычайно гибкими и устойчивыми к возмущениям внешних условий. Мы хотели бы подчеркнуть превосходство самоорганизующихся систем над традиционной человеческой технологией, старательно избегающей сложности и иерархически управляющей процессами .... Совершенно новая технология должна быть создана для того, чтобы использовать высокий потенциал управляемости и регулирования самоорганизующихся систем; это иллюстрируется биологическими системами, способными создавать сложные продукты с непревзойденной точностью, эффективностью и скоростью» [12, с. 13]. Очень важно также понять принципы самоорганизации, которые используются наноструктурами в природе.

Следующее фундаментальное открытие второй половины XX века – детерминированный (динамический) хаос. Под детерминированным хаосом «подразумевается нерегулярное, или хаотическое движение, порожденное нелинейными системами, для которых динамические законы однозначно определяют эволюцию во времени состояния системы при известной предыстории» [13]. Таким образом, имеются уравнения, характеризующие происходящие с системой изменения, известны начальные условия, но поведение системы предсказуемо только на ограниченном интервале времени. Это противоречит сформировавшимся в классической науке представлениям. В 1986 г президент Международного союза теоретической и прикладной механики выступил с заявлением: «Мы все глубоко осознаем сегодня, что энтузиазм наших предшественников по поводу великолепных достижений ньютоновской механики побудил их к обобщениям в этой области предсказуемости, в которые до 1960 г мы все охотно верили, но которые, как мы теперь понимаем, были ложными. Нас не покидает коллективное желание признать свою вину за то, что мы вводили в заблуждение широкие круги образованных людей, распространяя идеи о детерминизме систем, удовлетворяющих законам движения Ньютона, – идеи, которые как выяснилось после 1960 г, оказались неправильными» (Цитируется по [14, с. 84]).

Динамический хаос – типичное свойсво нелинейных систем и часто встречается в природе. Это явление обнаруживается в электрических цепях, лазерах, ускорителях частиц, в экономике и т.д. Динамический хаос проявляется в физиологических реакциях живого организма. Например, типичная электрокардиограмма не является реализацией только регулярного процесса, но и детерминированного хаоса. «Детерминированный процесс с существенной хаотической компонентой или хаотический процесс с существенной детерминированной компонентой – это основа кинетики живой материи» [15]. Хаотическая компонента важна для приспособляемости системы к внешней среде. Благодаря хаотической динамике сложная система способна работать в широком диапазоне условий и адаптироваться к их изменениям.

Геометрия природных объектов зависит от динамики процессов, их формирующих. Сложный режим функционирования динамических систем порождает фрактальную структуру. Фрактальная геометрия природы – визуализация, структурная запись создающих эти объекты природных процессов, имеющих хаотическую компоненту.

Таким образом, понятия об эволюции природных систем, самоорганизации, детерминированном хаосе, фракталах – связанные между собой компоненты современного миропонимания. Это надо учитывать при формировании содержания естественноматематического образования.

В рамках Болонского процесса подчеркивается важность поддержки междисциплинарности для улучшения качества высшего образования. Предполагается обязательное наличие кредитов по междисциплинарным курсам. Знания нужно не только собирать и накапливать, но и уметь связывать их в целостную систему.

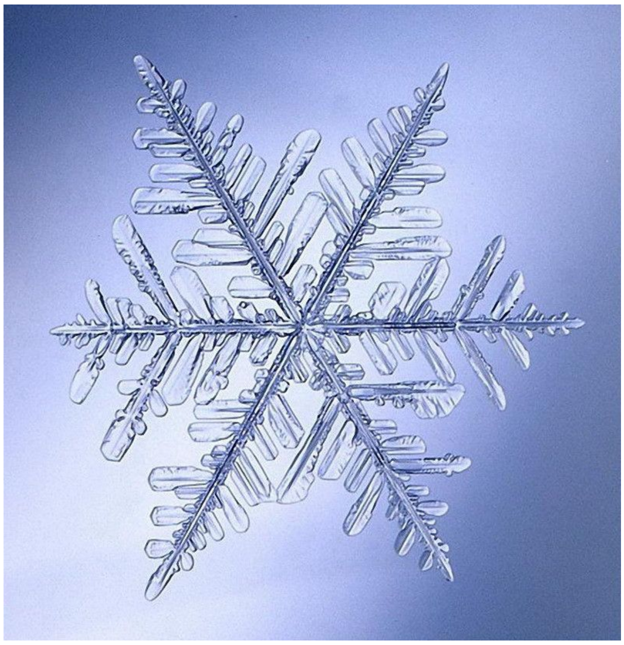
В разработанном в 2001 году Европейской организацией университетов директивном документе «Контроль качества в высшем образовании» междисциплинарность рассматривается как один из его (качества) показателей.

Выводы

Приведенный анализ показывает, что при формировании содержания образования, кроме дисциплинарного подхода, должен использоваться и междисциплинарный.

Наиболее соответсвует состоянию современной науки и потребностям практики междисциплинарное направление изучения сложных систем различной природы – синергетика.

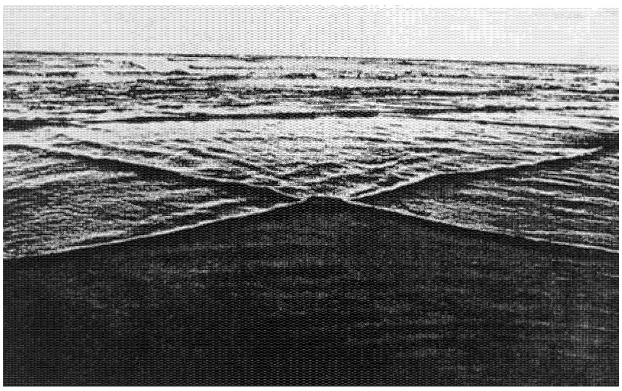
а)



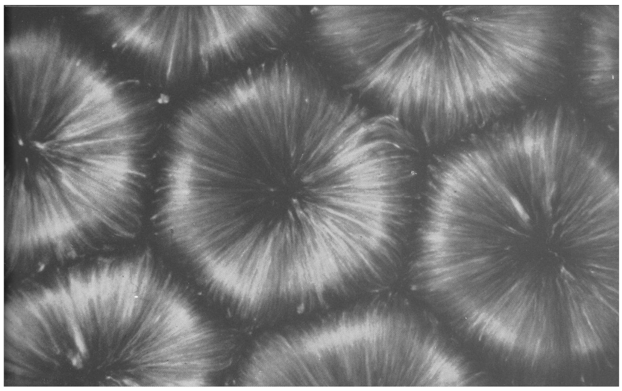
б)

в)

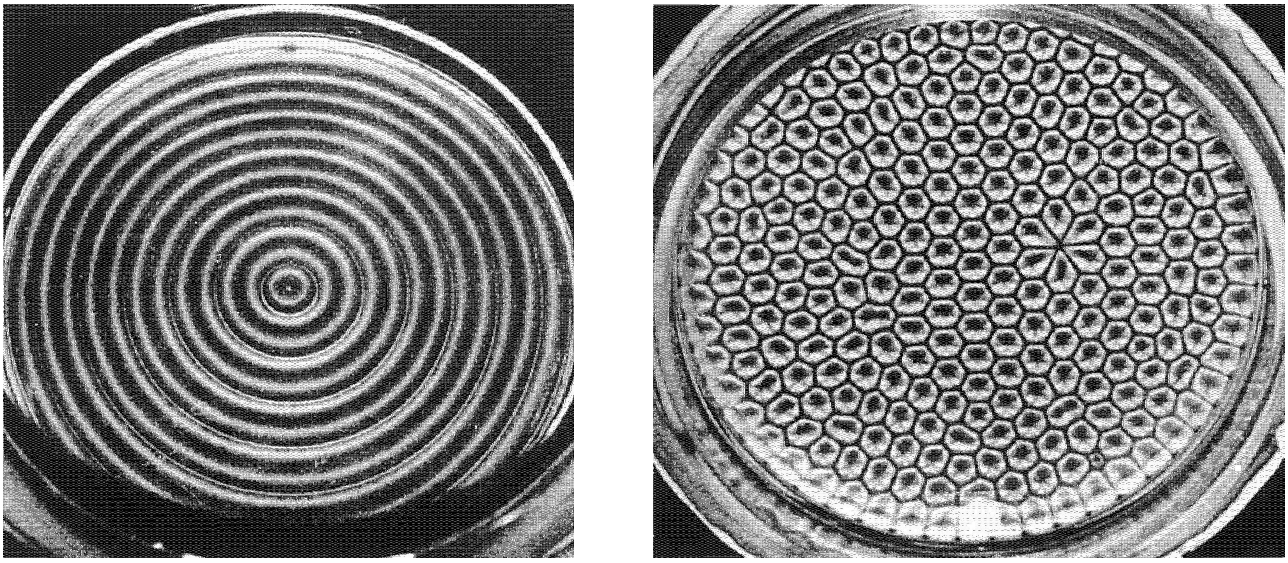
г)



д)



е)



ж) *з*)

Рис. 1: Самоорганизация в природе: а), б) – снежинки; в) – облака; г) – спиральная галактика NGC 1232; д) – взаимодействие двух скрещенных солитонов на мелкой воде (фотография из [16]); е) – ячейки Бенара; ж), з) – конвективные ячейки и валы Бенара (фотографии из [16]).

Литература

[1] *Матурана У.Р.* Древо познания: биологические корни человеческого понимания / У.Р. Матурана, Ф.Х. Варела. — М.: Прогресс-Традиция, 2001. — 224 с.

[2] *Добронравова И.С.* Синергетика: становление нелинейного мышления / И.С. Добронравова. — К.: Либідь, 1990. — 152 с.

[3] Физическая энциклопедия: в 5 т. / [редкол.: Д.М. Алексеев и др.; ред. А.М. Прохоров]. — М.: Большая Российская энциклопедия, 1992.

[4] *Гинзбург В.Л.* Физический минимум — какие проблемы физики и астрофизики представляются особенно важным и интересными в начале XXI века / В.Л. Гинзбург // УФН. — 2004. — Т. 177, № 4.

[5] *Молчанов А.М.* Нелинейность в биологии / А.М. Молчанов. — Пущино: Пущинский научный центр РАН, 1992. — 222 с.

[6] *Данилов Ю.А.* Лекции по нелинейной динамике. Элементарное введение. / Ю.А. Данилов. — М.: КомКнига, 2006.

[7] *Эйнштейн А.* Собрание научных трудов: в 4 т. / А. Эйнштейн. — М.: Наука, 1967. — Т. 4: Письма к Морису Соловину.

[8] *Фейнман Р.* Фейнмановские лекции по физике / Р. Фейман, Р. Лейтон, М. Сэндс. — М.: Мир, 1965. — Т. 2

[9] Качественная теория динамических систем второго порядка / [Андронов А.А., Леонтович Е.А., Гордон И.И., Майер А.Г.]. — М.: Наука, 1966.

[10] *Николис Г.* Познание сложного. Введение. / Г. Николис, И. Пригожин. — М.: Мир, 1990.

[11] *Моисеев Н.Н.* Универсум. Информация. Общество. / Н.Н. Моисеев. — М.: Устойчивый мир, 2001.

[12] *Пригожин И.* Современная термодинамика: от тепловых двигателей до диссипативных структур / И. Пригожин, Д. Кондепуди. — М.: Мир, 2002. — 461 с.

[13] *Шустер Г.* Детерминированный хаос. Введение. / Г. Шустер. — М.: Мир, 1988.

[14] *Пригожин И.* Время, хаос, квант. К решению парадокса времени. / И. Пригожин, И. Стенгерс. — М.: Едиториал УРСС, 2003. — 240 с.

[15] *Иваницкий Г.Р.* XXI век: что такое жизнь с точки зрения физики / Г.Р. Иваницкий // УФН. — 2010. — Т. 180, № 6. — С. 337 – 369.

[16] *Инфельд Э.* Нелинейные волны, солитоны и хаос / Э. Инфельд, Дж. Роуландс. — М.: Физматлит, 2006. — 480 с.

УДК 519.712

Сенченко А.С., Бобырь А.В.

[1] *кандидат физико-математических наук, доцент кафедры алгебры, ГВУЗ «ДГПУ»*

[2] *студент 5 курса физико-математического факультета, ГВУЗ «ДГПУ»*

e-mail: senchenko@pisem.net

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ГЕНЕТИЧЕСКИХ АЛГОРИТМОВ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ О РАСЩЕПЛЕНИИ МНОЖЕСТВА

В работе предложен генетический алгоритм расщепления заданного множества. Этот алгоритм разбивает множество на два подмножества так, чтобы в каждом из них не содержалось целиком ни одно из подмножеств заданного семейства. Предложена программная реализация алгоритма в среде C++.

Ключевые слова: *расщепление, генетический алгоритм, подмножества.*

Вступ

Термин расщепление используется во многих областях науки: в физике существует понятие расщепления ядра и атома; в генетике – понятие расщепления по фенотипу; в психологии – расщепление сознания; в органической химии – расщепление белков, жиров, углеводов. В этих научных направлениях науки под расщеплением понимают выделение каких-то особенностей какого-либо единого объекта. Понятие расщепление существует и в теории алгоритмов. Многие практические задачи эффективно решаются с помощью построения дерева расщепления. Внутренние узлы этого дерева являются атрибутами некоторой базы данных, а каждая его ветвь, идущая от внутреннего узла, отмечена предикатом расщепления, причем каждая запись использует уникальный путь к каждому узлу-решению.

В математике известна задача о расщеплении множества: задан набор подмножеств C множества S; необходимо определить существует ли такое разбиение множества S на два подмножества S_1 и S_2, что ни одно подмножество из C не содержится целиком ни в S_1, ни в S_2. Эта задача имеет много различных практических применений, рассмотрим некоторые из них:

1. *Задача выбора переводчиков.* N человек являются переводчиками с различных иностранных языков, причем для каждого из них задано владение определенными иностранными языками. Некоторая организация нанимает этих переводчиков для обслуживания двух групп туристов; необходимо выделить переводчиков для каждой из этих групп так, чтобы в каждой из групп были переводчики со всех необходимых языков.

2. *Задача распределения парков вагонов.* Некоторая крупная организация владеет парками вагонов, причем каждый вагон может быть использован только для перевозки определенных видов продукции. Необходимо так распределить парк вагонов между двумя заводами этой организации, чтобы из каждого завода можно было осуществить вывоз продукции.

3. *Задача раскрашиваемости графа в два цвета.* [1, 2] В дискретной математике эта проблема известна под названием *задача Эрдеша-Хайнала.* Эта задача решена для частных случаев, а в общем случае остается открытой.

Доказано что задача о расщеплении множества является NP-сложной [3, 5]. Поэтому все алгоритмы являются эвристическими и дают приближенный к оптимальному результат. Большой вклад в решение задачи внесли ученые Р. Эрдеш, Л. Ловас, Л. Лу, Дж. Бек, А.В. Косточка, Д.А. Шабанов. Исследования в данном направлении продолжаются, поскольку используемые методы не всегда позволяют найти оптимальное решение из-за неудовлетворительных показателей быстродействия. Наиболее перспективными с нашей точки зрения являются алгоритмы с использованием методов теории искусственного интеллекта, в первую очередь генетические алгоритмы, поэтому именно их мы и использовали для решения нашей задачи.

Постановка задачи. Задачей работы является разработка генетического алгоритма построения расщепления заданного множества и его программная реализация в среде C++. Исходное множество и семейство подмножеств $C_1 \ldots C_k$ в нем задается таблицей. Необходимо разбить заданное множество на два подмножества S_1 и S_2 таким образом, чтобы ни одно из подмножеств семейства $C_1 \ldots C_k$ не входило полностью ни в S_1 ни в S_2. Мощности подмножеств S_1 и S_2 должны быть равными или близкими к равенству. Задаются ограничения на количество элементов множества и количество подмножеств в семействе.

Основная часть

Задача может быть решена с помощью полного перебора вариантов. В этом случае сложность решения задачи равна 2^n, где n – количество элементов множества. Известно что функция $f(n) = 2^n$ при возрастании n

растет очень быстро. Поэтому для множества, состоящего из 60 элементов, решение перебором вариантов найти за реальное время невозможно.

Одним из подходов к решению нашей задачи может являться эволюционное моделирование. Этот подход использует принцип природной эволюции процесса. Он и послужил основой для генетических алгоритмов.

Рассмотрим основные понятия, связанные с генетическими алгоритмами. Хромосому – определенную последовательность символов – будем считать отдельным вариантом решения задачи. Каждый входящий в хромосому символ будем называть геном.

Генетический алгоритм определенным или случайным образом генерирует начальную популяцию хромосом. Будем считать, что вся популяция состоит из q хромосом. Затем с помощью фитнесс-функции проверяем каждую хромосому насколько хорошо она подходит для решения задачи. Из начальной популяции выбираем $\frac{q}{2}$ хромосоми по наилучшим значениям фитнесс-функции. Эти хромосомы переходят в следующее поколение. Из выбранных $\frac{q}{2}$ хромосом получаем еще $\frac{q}{2}$ хромосом путем применения операций кроссинговера, сдвига, мутации.

Мутация – такое преобразование хромосомы, в ходе которого случайным образом изменяется один или несколько генов. Наиболее распространенный вид мутации – случайное изменение одного из генов хромосомы.

Кроссинговер – операция в ходе которой из двух хромосом порождаются две новые хромосомы. Одноточечный кроссинговер работает таким образом. Сначала, случайным образом, выбирается одна из точек разрыва. Обе родительские структуры разбиваются на два сегмента по этой точке. Затем соответствующие сегменты разных родителей склеиваются по точке разрыва и получаем две хромосомы наследников.

Сдвиг состоит в циклическом изменении позиции всех генов на определенное количество единиц. Работа генетического алгоритма это последовательное приближение и проверка условия достижения искомого результата.

Алгоритм выполняется до тех пор, пока не пройдет определенное число поколений или не будет получен любой другой критерий остановки, в противном случае работа алгоритма будет продолжаться.

Определение операций генетического алгоритма для поставленной задачи

В нашей задаче рассматривается множество из n элементов, каждый из которых входит хотя бы в одно из подмножеств элементов $C_1 \ldots C_k$. Информация о вхождении или не вхождении каждого элемента множества в подмножество $C_1 \ldots C_k$ задаем таблицей.

На рисунке 1 изображен внешний вид главного окна программы.

Все хромосомы являются последовательностями длины n, состоящие из нулей и единиц, каждый ген отвечает за помещение соответствующего элемента в то или иное подмножество: значение i-го гена 0 означает, что элемент i помещается в S_1; значение 1 – что элемент i помещается в S_2. Таким образом количество нулей в хромосоме соответствует количеству элементов в подмножестве S_1.

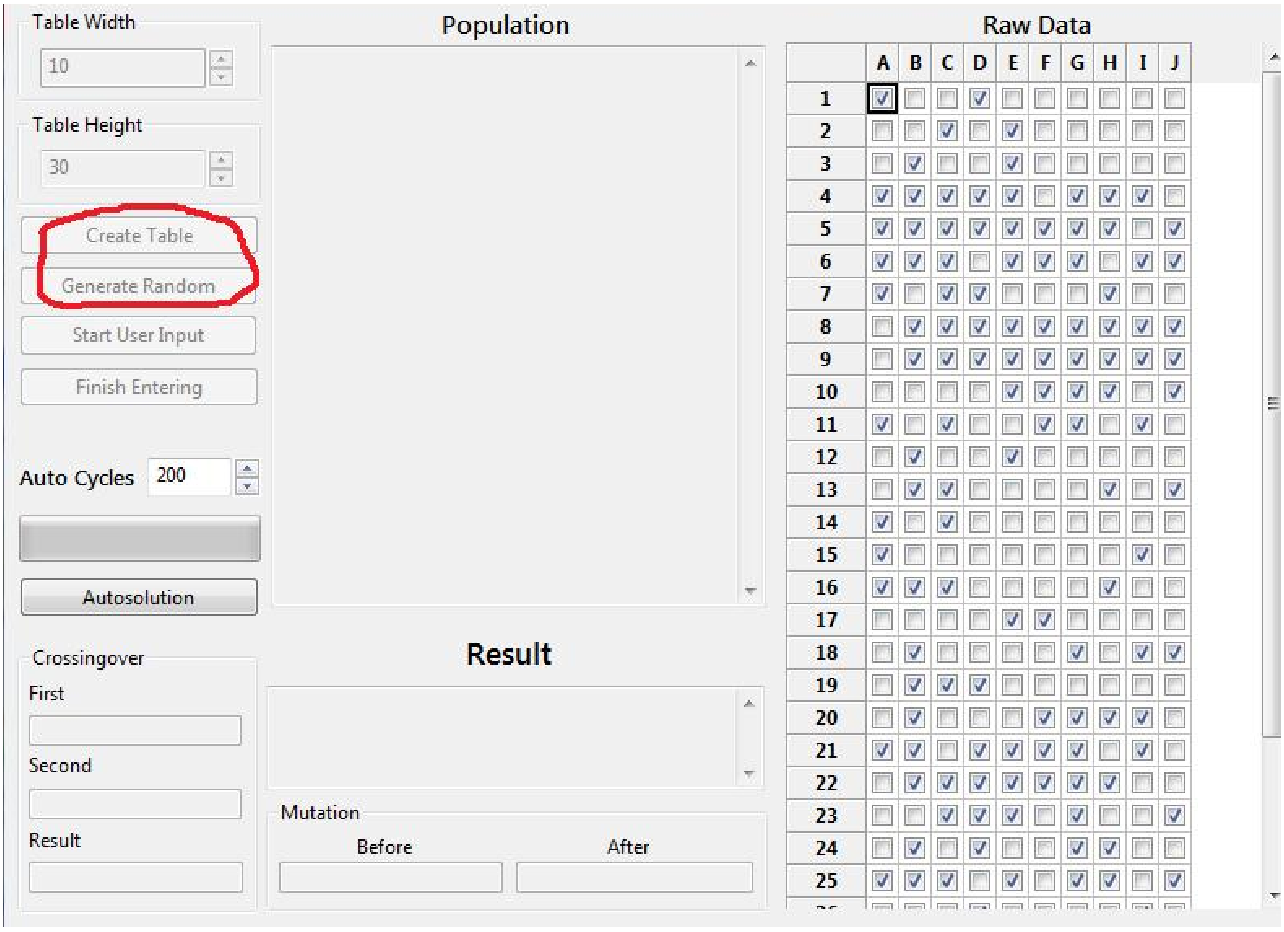


Рис. 1: Интерфейс вид главного окна программы

Фитнесс-функция задается как количество подмножеств $C_1 \ldots C_k$ целиком входящих в S_1 или S_2. Решением задачи будет хромосома, для которой значение фитнесс-функции равно нулю.

В следующее поколение переходят хромосомы с наименьшим значением фитнесс-функции. Для получения хромосом следующего поколения применяются операции сдвига, мутации и одноточечного кроссинговера.

Вручную устанавливаем максимальное количество поколений (до 500 хромосом). При этом, если в одном поколении будет несколько одинаковых хромосом, то все повторы хромосом ликвидируются с помощью принудительного применения к ним мутации.

Разработана программная реализация алгоритма в среде программирования С++. По результатам тестирования программы найдены оптимальные параметры генетических операций: мутация с вероятностью 0,18 – 0,25, сдвиг 0,17 – 0,2, кроссинговер 0,55 – 0,65.

Наша программа с этими параметрами находит расщепление множества с вероятностью 0,68, причем наличие решение для каждого случая изначально неизвестно, поэтому неблагоприятным считается также случай, при котором расщепление невозможно.

Выводы

В работе предложен генетический алгоритм решения задачи расщепления множества. Рассмотрен вариант кодирования исходных данных, оценка фитнесс-функции и способы выполнения генетических операций. Разработана программная реализация алгоритма, выбраны оптимальные, на наш взгляд, вероятности генетических операций.

Дальнейшие исследования должны рассматривать особенности выполнения генетических операций и их вероятность для отдельных случаев вида семейства подмножества, в частности для случая когда подмножества в семействе отличаются друг от друга очень слабо.

Литература

[1] *Райгордский А.М.* Задача Эрдеша-Хайнала о раскраске гиперграфов, ее обобщение и смежные проблемы / А.М. Райгордский, Д.А. Шабанов // Успехи математических наук. — 2011. — Т. 66, № 3. — С. 109 – 182.

[2] *Шабанов Д.А.* Раскраски гиперграфов / Д.А. Шабанов // Труды МФТИ. — 2012. — Т. 4, № 1. — С. 131 – 140.

[3] *Гери М.* Вычислительные машины и трудно решаемые задачи / М. Гери, Д. Джексон. — М.: Мир, 1982. — 416 с.

[4] *Воронский Г.К.* Генетические алгоритмы, искусственные нейронные сети и проблемы виртуальной реальности / Г.К. Воронский. — Х.: Основа, 1997. — 112 с.

[5] Алгоритмы: построение и анализ / [Т. Кормен, Ч. Лейзерсон, Р. Ривест, К. Штайн]. — М.: Вильямс, 2005. — 1296 с.

[6] *Рутковская Д.* Нейронные сети, генетические алгоритмы и нечеткие системы / Д. Рутковская, М. Пилинский, Л. Рутковский. — М.: Горячая линия, 2006. — 452 с.

УДК 519.17

Стёпкин А.В.

[1] *заведующий лабораториями факультета экономики и управления, ГВУЗ «ДГПУ»*

e-mail: stepkin.andrey@rambler.ru

ВОЗМОЖНОСТЬ И СЛОЖНОСТЬ РАСПОЗНАВАНИЯ ГРАФОВ КОЛЛЕКТИВОМ АГЕНТОВ

В работе рассматривается задача распознавания конечного графа коллективом агентов. Два агента-исследователя одновременно передвигаются по графу, считывают и изменяют отметки на элементах графа, передают необходимую информацию агенту-экспериментатору, который и распознает исследованный граф. Предложен алгоритм кубической (от числа вершин графа) временной и квадратической емкостной сложностей, который распознает любой конечный неориентированный граф без петель и кратных ребер. Для распознавания графа каждому агенту необходимо 2 различные краски (всего 3 краски). Метод основан на методе обхода графа в глубину.

Ключевые слова: *распознавание графа, обход в глубину, агент-исследователь, агент-экспериментатор.*

Введение

В наше время актуальным вопросом кибернетики является развитие такого направления, как теория дискретных динамических систем. В общей схеме Глушкова – Летичевского эта система представляется в виде модели взаимодействия управляющей и управляемой систем. Подобное взаимодействие рассматривается в [1], в предположении, что один агент-исследователь (АИ) передвигается по неизвестному графу и обменивается данными с агентом-экспериментатором (АЭ), который восстанавливает граф по данным, полученным от АИ.

В данной работе, интересующее нас взаимодействие, рассмотрено в предположении, что два АИ перемещаются по неизвестной среде, заданной конечным неориентированным графом [2]. АИ могут окрашивать вершины графа, ребра и инциденторы, воспринимать эти отметки и на их основании осуществлять перемещение. Информацию о своих действиях они передают АЭ, который и строит представление исследуемого графа.

Полученный алгоритм использует результаты и обозначения из [3].

Основные определения и обозначения

В работе рассматриваются конечные, неориентированные графы без петель и кратных ребер. Пусть $G = (V, E)$ – граф, где V – множество вершин, E – множество ребер (двухэлементных подмножеств (v, u), где $v, u \in V$). Тройку $((v, u), u)$ будем называть инцидентором ребра (v, u) и вершины u. Множество таких троек обозначим I. Множество $L = V \cup E \cup I$ назовем множеством элементов графа G. Функцией раскраски графа G назовем отображение $\mu : L \to \{w, r, y, ry, b\}$, где w интерпретируется как белый цвет, r – красный, y – желтый, ry – красно - желтый b – черный. Пара (G, μ) называется раскрашенным графом. Последовательность $u_1, u_2, ...u_k$ попарно смежных вершин называется путем в графе G, а k – длинной пути. При условии $u_1 = u_k$ путь называется циклом. Окрестностью $Q(v)$ вершины v будем называть множество элементов графа, состоящее из вершины v, всех вершин u смежных с v, всех ребер (v, u) и всех инциденторов $((v, u), v), ((v, u), u)$. Мощность множеств вершин V и ребер E обозначим через n и m соответственно. Ясно что $m \leqslant \frac{n(n-1)}{2}$. Изоморфизмом графа G и графа H назовем такую биекцию $\varphi : V_G \to V_H$, что $(v, u) \in E_G$ точно тогда, когда $(\varphi(v), \varphi(u)) \in E_H$. Таким образом, изоморфные графы равны с точностью до обозначения вершин и раскраски их элементов.

Агенты A и B передвигаются по графу из вершины v в вершину u по ребру (v,u), могут изменять окраску вершин v, u, ребра (v,u), инциденторов $((v, u), v)$,$((v, u), u)$. Находясь в вершине v, АИ воспринимает метки всех элементов окрестности $Q(v)$. И на основании этих меток определяет, по какому ребру будет перемещаться, и как будет окрашивать элементы графа. АЭ передает, принимает и идентифицирует сообщения, полученные от АИ, обладает конечной, неограниченно растущей внутренней памятью, в которой фиксируется результат функционирования АИ на каждом шаге и строится представление графа G, вначале неизвестного агентам, списками ребер и вершин.

Основная часть

Целью работы является разработка такого алгоритма работы агентов, что АИ, будучи помещены в произвольные не совпадающие вершины неизвестного агентам конечного графа G, все элементы которого окрашены цветом w, через конечное число шагов обойдут его, передавая АЭ информацию о своих действиях. АЭ используя эту информацию, восстановит граф H, изоморфный G, то есть распознает граф G.

Рассмотрим подробнее алгоритмы функционирования агентов.

Алгоритм работы агента A:

1. Агент A красит $(\mu(v) := r)$;
2. запрос AN;
3. *if* $AN \neq 1$ *then do*
4. запрос BN;
5. *if* $BN = 0$ *then* $МЕТИМ\_ПЕР\_A(v)$;
6. *else* $ВЫБОР\_ХОДА\_A(v)$;
7. *end do*;
8. *else* $РАСП\_ПЕР\_A(v)$;

Все, процедуры, которые не описаны ниже, представлены в [3].

$РАСП\_ПЕР\_A(v)$:

1. $Z := K$;
2. *if* в $O(v)$ нет ребра, у которого $(\mu(v,u) = y)$ *then do*
3. агент A выполняет $ОТСТУП\_A(v)$;
4. *go to* 2 данной процедуры;
5. *end do*;
6. *else do*
7. *if* $(((K = Z)\, or\, (K = 1))\, and\, (Z \neq 1))$ *then* $РАСП\_ABB(v)$;
8. *else* $РАСП\_ABBb(v)$;
9. запрос K;
10. *if* $K \neq 0$ *then go to* 2 данной процедуры;
11. *else* агент A выполняет процедуру $ОБН\_A(v)$;
12. *if* $Z \neq 1$ *then do*
13. *if* в $O(v)$ есть ребро, у которого $(\mu\,((v,u)\,,v) = r)\, and\, (\mu\,(v,u) = b)\, and\, (\mu\,((v,u)\,,u) = r)$ *then do*
14. агент A выполняет процедуру $ВПЕРЕД\_AR\_N(v)$;
15. *go to* 13 данной процедуры;
16. *end do*;
17. *else if* в $O(v)$ есть ребро, у которого $(\mu\,(v,u) = r)\, and\, (\mu\,(u) = r)\, and\, (\mu\,((v,u)\,,u) = r)$ *then do*
18. агент A выполняет процедуру $ВПЕРЕД\_\ AR(v)$;
19. *go to* 17 данной процедуры;
20. *end do*;
21. *else go to* 2 алгоритма обхода;
22. *end do*;
23. *else go to* 17 данной процедуры;
24. *end do*;

При выполнении процедуры $НАЗАД\_A(v)$, агент A выбирает из окрестности $O(v)$ произвольное ребро (v,u), для которого выполняется условие $((\mu(v,u)=r)\, and\, (\mu((v,u),v)=r))\, and\, (\mu(v)=r)$, и переходит по нему в вершину u. При этом, окрашивает $\mu(v):=b,\ \mu\ (v,u):=b,\ \mu\ ((v,u),v):=b$, выполняет присваивание $v:=u$ и записывает в список M сообщение: *НАЗАД_А*.

$РАСП\_A(v)$:

1. Агент A выбирает из окрестности $O(v)$ ребро (v,u), у которого $(\mu(v)=\mu(u)=r)\, and\, (\mu(v,u)=w)$ и переходит по нему в вершину u;
2. агент A красит $\mu(v,u):=b$;
3. агент A записывает в список M сообщение: *ОБРАТНОЕ_РЕБРО_А*;
4. *while* в $O(u)$ есть ребро (u,l), у которого $(\mu(u,l)=r)\, and\, (\mu((u,l),l)=r)\, and\, (\mu(l)=r)$ *do*
5. агент A переходит по ребру (u,l) в вершину l;
6. $u:=l$;
7. агент A записывает в список M: *ОТСТУПИЛ_А*;
8. *end do*;
9. агент A записывает в список M сообщение: *РЕБРО_РАСПОЗНАНО_А*;

При выполнении процедуры $РАСП\_ABB(v)$, агент A выбирает из окрестности $O(v)$ ребро (v,u), для которого выполняется условие $\mu(v,u)=y$ и переходит в вершину u, окрашивая $\mu(v,u):=r,\ \mu((v,u),u):=b$. Выполняет $v:=u$ и записывает в список M сообщение: *ВПЕРЕД_ABB*. После чего агент A выбирает из окрестности $O(v)$ ребро (v,u), у которого $((\mu(v,u)=r)\, and\, (\mu((v,u),v)=b))$, и переходит по нему в вершину u, окрашивая $\mu((v,u),v):=r,\ \mu(v,u):=b, \mu((v,u),u):=r$, выполняет присваивание $v:=u$ и записывает в список M сообщение: *НАЗАД_ABB*.

Процедура $РАСП\_ABBb(v)$ аналогична процедуре $РАСП\_ABB(v)$, с отличием в том, что выполняя возврат по перешейку в свою область, агент A окрашивает ребро и дальний инцидентор следующим образом $\mu\ (v,u):=b,\ \mu\ ((v,u),u):=b$.

Выполняя процедуру $ВПЕРЕД\_AR\_N(v)$, агент A выбирает из окрестности $O(v)$ произвольное ребро (v,u), для которого выполняется условие $(\mu\ ((v,u),v)=r)\, and\, (\ \mu\ (v,u)=b)\, and\, (\mu\ ((v,u),u)=r)$, переходит по нему в вершину u, окрашивая $\mu\ ((v,u),v):=b,\ \mu\ ((v,u),u):=b$. После чего выполняет присваивание $v:=u$ и записывает в список M сообщение: *ВПЕРЕД_AR_N*.

При выполнении процедуры $СТОП\_A(v)$, агент A окрашивает $\mu\ (v) := b$ и завершает работу.

Алгоритм работы агента B:

1. Агент B красит $(\mu\,(s) := y)$;
2. запрос BN;
3. *if* $BN \neq 1$ *then do*
4. Запрос AN;
5. *if* $\mu(s) = ry$ *then do*
6. агент B выполняет процедуру $ВОЗВРАТ\_B\,(s)$;
7. агент B выполняет процедуру $МЕТИМ\_ПЕР\_B\,(s)$;
8. *end do*;
9. *else if* $AN = 0$ *then* $МЕТИМ\_ПЕР\_B\,(s)$;
10. *else* $ВЫБОР\_ХОДА\_B\,(s)$;
11. *end do*;
12. *else* $РАСП\_ПЕР\_B\,(s)$;

Процедуры агента B, не рассмотренные ниже, аналогичны процедурам агента A.

При выполнении процедуры $МЕТИМ\_ПЕР\_B(s)$, агент B проверяет наличие в $O\,(s)$ ребра (v, u), для которого выполняется условие $(\mu\,(s,z) = w)\, and\, ((\mu\,(z) = r)\, or\, (\mu\,(z) = ry))$ (1). Если такое ребро обнаружено и в вершине z стоит агент A, то агент B выполняет процедуру $СТОИТ\_B(s)$ и возвращается в строку 7 алгоритма обхода. Если в вершине z нет агента A, то агент B выполняет процедуру $МЕТИМ\_ВА\,(s)$ и возвращается в начало рассматриваемой процедуры. Если в $O\,(s)$ нет ребра, удовлетворяющего условию (1), то агент B запрашивает значение переменной L. При этом: если $L = 0$, то агент B выполняет процедуру $ВЫБОР\_ХОДА\_B\,(s)$, иначе агент B выполняет процедуру $ФИКС\_B\,(s)$ и возвращается в строку 2 алгоритма обхода.

$ВЫБОР\_ХОДА\_B\,(s)$:

1. *if* в $O\,(s)$ обнаружено ребро, у которого $(\mu\,(s,z) = w)\, and\, (\mu\,(z) = \mu\,(s) = y)$ *then do*
2. агент B выполняет процедуру $РАСП\_B(s)$;
3. *go to* 2 алгоритма обхода;
4. *end do*;
5. *else if* в $O\,(s)$ обнаружено ребро, у которого $(\mu\,(s,z) = w)\, and\, (\mu\,(z) = w)$ *then do*
6. агент B выполняет процедуру $ВПЕРЕД\_B(s)$;
7. *go to* 2 алгоритма обхода;

8. *end do*;
9. *else if* в $O(s)$ есть ребро, у которого $(\mu(s,z) = w)\, and\, ((\mu(z) = r)\, or\, (\mu(z) = ry))$ *then do*
10. агент B выполняет процедуру $СТОИТ\_B(s)$;
11. *go to* 2 алгоритма обхода;
12. *end do*;
13. *else if* в $O(s)$ есть ребро, у которого $(\mu(s,z) = r)$ *then do*
14. агент B выполняет процедуру $СТОИТ\_B(s)$;
15. *go to* 2 алгоритма обхода;
16. *end do*;
17. *else if* в $O(s)$ есть ребро, у которого $((\mu(s,z) = y)\, and\, ((\mu(z) = r)\, or\, (\mu(z) = ry)))$ *then do*
18. агент B выполняет процедуру $СТОИТ\_B(s)$;
19. *go to* 4 алгоритма обхода;
20. *end do*;
21. *else if* в $O(s)$ есть ребро, у которого $(\mu(s,z) = y)\, and\, (\mu(s) = y)\, and\, (\mu((s,z), s) = y)$ *then do*
22. агент B выполняет процедуру $НАЗАД\_B(s)$;
23. *go to* 2 алгоритма обхода;
24. *end do*;
25. *else* агент B выполняет процедуру $СТОП\_B$;

Выполняя процедуру $МЕТИМ\_BA(s)$, агент B выбирает из окрестности $O(s)$ произвольное ребро (s,z), для которого выполняется условие $((\mu(s,z) = w)\, and\, ((\mu(z) = r)\, or\, (\mu(z) = ry)))$, переходит по нему в вершину z, окрашивая $\mu(s,z) := y, \mu((s,z), z) := y$, выполняет присваивание $s := z$ и записывает в список N: *ВПЕРЕД_ВА*. Далее B выбирает из окрестности $O(s)$ ребро, у которого $((\mu(s,\mathrm{z}) = y)\, and\, ((\mu(s) = r)\, or\, (\mu(s) = ry)))$, переходит по нему в вершину z, выполняет $s := z$ и записывает в список N сообщение: *НАЗАД_ВА*.

При выполнении процедуры $ВОЗВРАТ\_B(s)$, агент B выбирает из $O(s)$ ребро, у которого $(\mu(s,z) = y)\, and\, (\mu((s,z), s) = y)$, переходит по нему в вершину z, выполняет присваивание $s := z$ и записывает в список N: *ВОЗВРАТ_В*.

Алгоритм «Восстановление» и процедуры, не рассмотренные ниже, изложены в [3] с поправкой, что при использовании цикла с предусловием, условие имеет вид: $(M \neq \varnothing)\, or\, (N \neq \varnothing)$.

ОБР_СП_А():
1. *if* Mes = «ВПЕРЕД_А» *then* *ВПЕРЕД_А*();
2. *if* Mes = «ВПЕРЕД_АВ» *then* *ВПЕРЕД_АВ*();
3. *if* Mes = «ВПЕРЕД_АВВ» *then* *ВПЕРЕД_АВВ*();
4. *if* Mes = «НАЗАД_А» *then* *НАЗАД_А*();
5. *if* Mes = «НАЗАД_АВ» *then* *НАЗАД_АВ*();
6. *if* Mes = «НАЗАД_АВВ» *then* *НАЗАД_АВВ*();
7. *if* Mes = «ФИКС_А» *then* *ФИКС_А*();
8. *if* Mes = «ОБН_А» *then* *ОБН_А*();
9. *if* Mes = «ОТСТУПИЛ_А» *then* *ОТСТУПИЛ_А*();
10. *if* Mes = «РЕБРО_РАСПОЗНАНО_А» *then* *РЕБРО_РАСПОЗНАНО_А*();
11. *if* Mes = «ОТСТУП_А» *then* *ОТСТУП_А*();

ОТСТУП_А(): $i := i + 1$.
ВПЕРЕД_АВВ(): $E_H := E_H \cup \{(N\_B, r(t-i))\}$.
ОТСТУПИЛ_А(): $i := i + 1$.
РЕБРО_РАСПОЗНАНО_А(): $E_H := E_H \cup \{(r(t), r(t-i))\}$; $i := 0$.

Процедуры работы со списком команд агента B, которые не рассмотрены ниже, аналогичны процедурам работы со списком команд агента A. Процедура *ОБР_СП_В*() аналогична рассмотренной *ОБР_СП_А*(), только добавлено условие:
if Mes=«ВОЗВРАТ_В» *then* ВОЗВРАТ_В().
ВОЗВРАТ_В(): $E_H := E_H \backslash \{(y(p-1), y(p))\}$; $V_H := V_H \backslash \{Сч\_B\}$; $Сч\_B := Сч\_B - 2$; $p := p - 1$; $y(p) := Сч\_B$; $L := 1$; $K := K + 1$.

Рассмотрим основные свойства алгоритма. В начале алгоритма, при $n \geqslant 3$, как минимум, по одному разу выполнятся следующие процедуры: *ВПЕРЕД_А*(v), *ВПЕРЕД_А*() и *ВПЕРЕД_В*(s), *ВПЕРЕД_В*(). При выполнении процедур *ВПЕРЕД_А*(v) и *ВПЕРЕД_В*(s) АИ посещают новую вершину графа G. Процедурами агента АЭ *ВПЕРЕД_А*() и *ВПЕРЕД_В*() создается новая вершина графа H. При одновременном попадании двух АИ в одну белую вершину процедурами *ВПЕРЕД_А*() и *ВПЕРЕД_В*() будет создано две новые вершины графа H. Одна из вершин (дублирующая вершину созданную агентом A) будет удалена командой *ВОЗВРАТ_В*(). Таким образом, процесс выполнения описанного алгоритма индуцирует отображение $\varphi : V_G \to V_H$ вершин графа G в вершины графа H. Причем $\varphi(v) = t$ (когда вершина v окрашена в красный цвет и $t = Сч\_A$) и $\varphi(s) = p$ (когда вершина s окрашена в желтый цвет и $p = Сч\_B$). Указанное отображение естественным образом устанавливает неявную нумерацию вершин графа G.

Более того, отображение φ является биекцией, поскольку в связном графе G все вершины достижимы из начальных вершин. Поэтому все вершины посещаются агентами, то есть окрашиваются в красный и желтый цвета.

Из описания алгоритма следует, что агенты АИ проходят все ребра графа G, поскольку при окончании алгоритма все ребра становятся черными. При выполнении процедуры *ВПЕРЕД_A*() или *ВПЕРЕД_B*() АЭ распознает древесное ребро (v,u) и так нумерует вершину u, что ребру (v,u) однозначно соответствует ребро $(\varphi(v),\varphi(u))$ графа H. При выполнении процедур *РЕБРО_РАСПОЗНАНО_A*() или *РЕБРО_РАСПОЗНАНО_B*() агент АЭ распознает обратное ребро (v,u) графа G и ставит ему в однозначное соответствие ребро $(\varphi(v),\varphi(u))$ графа H. При выполнении процедур *ФИКС_A*(), *ВПЕРЕД_ABB*() или процедур *ФИКС_B*(), *ВПЕРЕД_BAA*(), АЭ распознает перешеек (v,u) графа G и ставит ему в однозначное соответствие ребро $(\varphi(v),\varphi(u))$ графа H. Следовательно, φ является изоморфизмом графа G на граф H.

Таким образом, выполняя алгоритм распознавания, агенты распознают любой граф G с точностью до изоморфизма.

Подсчитаем временную и емкостную сложность в равномерной шкале [4]. Для этого рассмотрим свойства красного и желтого путей. Из описания алгоритма следует, что на каждом шаге алгоритма красный (желтый) путь – это простой путь, соединяющий начальную вершину v (вершину s – в случае агента B) с номером $\varphi(v)=1\,(\varphi(s)=2)$ с вершиной u (z) с номером $\varphi(u)=Сч\_A$ ($\varphi(z)=Сч\_B$). Следовательно, общая длина красного и желтого пути не превосходит n.

При выполнении процедур *ВПЕРЕД_A*(v), *ВПЕРЕД_B*(s) и *НАЗАД_A*(v), *НАЗАД_B*(s) агенты АИ проходят одно ребро. При выполнении процедур *РАСП_A*(v), *РАСП_B*(s) агенты АИ проходят одно обратное ребро и не более $n-2$ (изначально одна вершина уже окрашена в «чужой» цвет) ребер красного (желтого) пути. При выполнении процедур *РАСП_A*(v), *РАСП_B*(s) агенты АИ проходят фактически цикл, состоящий из обратного ребра и некоторого конечного отрезка красного (желтого) пути, соединяющего вершины инцидентные обратному ребру. При выполнении процедур *МЕТИМ_AB*(v), *МЕТИМ_BA*(s) и *РАСП_ABB*(v), *РАСП_ABBb*(v), *РАСП_BAA*(s), *РАСП_BAAb*(s) оба АИ проходят один и тот же перешеек, сначала в одном направлении, а потом в обратном. Выполняя процедуры *ВПЕРЕД_AR*(v), *ВПЕРЕД_BR*(s) и процедуры *ОТСТУП_A*(v), *ОТСТУП_B*(s) агенты АИ проходят одно красное (желтое) ребро. При выполнении процедур *ВПЕРЕД_AR_N*(v), *ВПЕ-*

$РЕД\_BR\_N(s)$ АИ проходят одно черное ребро. При выполнении процедур $ФИКС\_A(v)$ $ФИКС\_B(s)$ и $ОБН\_A(v)$ $ОБН\_B(s)$ агенты АИ не передвигаются, а только делают записи в свой список команд для АЭ, на что так же уходит один ход.

При подсчете временной сложности алгоритма будем считать, что инициализация алгоритма, анализ окрестности $O(v)$ рабочей вершины и выбор одной из возможных процедур занимают некоторое постоянное число единиц времени. Так же будем считать, что выбор ребер, проход по ним АИ и обработка команд АЭ полученных на данном этапе от АИ осуществляется за 1 единицу времени. Тогда временная сложность алгоритма определяется следующими соотношениями:

1. Инициализация выполняется один раз и ее асимптотическая сложность равна $O(1)$;
2. процедуры $ВПЕРЕД\_A(v)$ и $ВПЕРЕД\_B(s)$ выполняются не более чем $n-1$ раз, и общее время их выполнения оценивается как $O(n)$;
3. аналогично общее время выполнения процедур $НАЗАД\_A(v)$ и $НАЗАД\_B(s)$, оценивается как $O(n)$;
4. на выполнение процедур $МЕТИМ\_AB(v)$ и $МЕТИМ\_BA(s)$ уходит время, которое оценивается как $2\times O(n)\times n$, то есть как $O\left(n^2\right)$;
5. на выполнение процедур $РАСП\_ABB(v)$, $РАСП\_ABBb(v)$ и процедур $РАСП\_BAA(s)$, $РАСП\_BAAb(s)$ уходит время, оцениваемое как $O\left(n^2\right)$;
6. процедуры $ВПЕРЕД\_AR(v)$ и $ВПЕРЕД\_BR(s)$ выполняются за время, оцениваемое как $O(n)\times n$, то есть как $O\left(n^2\right)$;
7. процедуры $ВПЕРЕД\_AR\_N(v)$ и $ВПЕРЕД\_BR\_N(s)$ выполняются за время, оцениваемое как $O(n)$;
8. аналогично процедуры $ОТСТУП\_A(v)$ и $ОТСТУП\_B(s)$ выполняются за время, оцениваемое как $O(n)\times n$, то есть как $O\left(n^2\right)$;
9. время, затрачиваемое на процедуры $ФИКС\_A(v)$ и $ФИКС\_B(s)$, оценивается как $O(n)$;
10. время, затрачиваемое на процедуры $ОБН\_A(v)$ и $ОБН\_B(s)$, оценивается как $O(n)$;
11. выполнение процедур $РАСП\_A(v)$ и $РАСП\_B(s)$, оценивается как $O(n)\times m$, то есть как $O\left(n^3\right)$;
12. время выполнения процедур $СТОИТ\_A(v)$ и $СТОИТ\_B(s)$ в общей сложности для всех четырёх возможных случаев, оценивается как $O(n)+O\left(n^2\right)=O\left(n^2\right)$.

Следовательно, суммарная временная сложность $T(n)$ алгоритма удовлетворяет соотношению: $T(n)=O\left(n^3\right)$.

Емкостная сложность $S(n)$ алгоритма определяется сложностью списков $V_H, E_H, r(1)...r(t), y(1)...y(p)$, сложность которых соответственно определяется величинами $O(n), O(n^2), O(n), O(n)$. Следовательно: $S(n) = O(n^2)$.

Таким образом, временная сложность алгоритма распознавания равна $O(n^3)$, а емкостная - $O(n^2)$. При этом алгоритм использует 3 краски.

Теорема 1. *Выполняя полученный алгоритм распознавания, агенты распознают любой граф G с точностью до изоморфизма.*

Теорема 2. *Временная сложность алгоритма равна $O(n^3)$, а емкостная – $O(n^2)$, где n – число вершин графа. При этом используется 3 краски.*

Заключение

Предложен алгоритм распознавания графа среды временной сложности $O(n^3)$ и емкостной – $O(n^2)$. АИ имеют память, ограниченную n, и используют по две краски. Алгоритм показывает, что при распознавании графа двумя АИ асимптотические временная и емкостная сложности остаются такими же, как при распознавании графа одним АИ [1]. Временная сложность, в лучшем случае, может быть понижена в 2 раза.

На основе данного исследования автор надеется создать, более эффективные алгоритмы, которые позволят улучшить результаты, полученные с помощью аналогичного алгоритма [3].

Литература

[1] *Грунский И.С.* Распознавание конечного графа блуждающим по нему агентом / И.С. Грунский, Е.А. Татаринов // Вестник Донецкого университета. Серия А. Естественные науки. — 2009. — Вып. 1. — С. 492 – 497.

[2] *Кудрявцев В.Б.* Введение в теорию автоматов / В.Б. Кудрявцев, С.В. Алешин, А.С. Подкозлин. — М.: Наука, 1985. — 320 с.

[3] *Грунский И. С.* Распознавание конечного графа коллективом агентов / И.С. Грунский, А.В. Стёпкин // Труды ИПММ НАН Украины. — 2009. — Т. 19. — С. 43 – 52.

[4] *Ахо А.* Построение и анализ вычислительных алгоритмов / А. Ахо, Дж. Хопкрофт, Дж. Ульман — М.: Мир, 1979. — 536 с.

УДК 004.424.36

Рубан Н.Н.

[1] *ассистент кафедры алгебры, ГВУЗ «ДГПУ»*

e-mail: rubannn@gmail.com

ГРАФОВЫЕ БАЗЫ ДАННЫХ

Рассмотрены отличительные особенности использования баз данных на основе графов, их преимущества относительно реляционных баз при решении некоторых задач.

Ключові слова: *графовые базы данных, граф, NoSQL*

Введение

Графовая база данных – это база данных, предназначенная для хранения данных в виде графа. Т.е. это хранения данных по вершинам и ребрам. По определению, графовая база данных – это любая структура для хранения, где взаимосвязанные элементы соединены без применения индекса. Смежные по структуре элементы доступны при разыменовании физического показателя. Существует несколько типов графов, которые могут хранить: от «однотипного» ненаправленного графа до гиперграфа, включая свойственные подграфы.

Таким образом, база данных в виде графа должна соответствовать следующим критериям:

- хранение оптимизировано для данных, представленных в виде графа, с обеспечением хранения данных по вершинам и ребрам;

- хранение оптимизировано для просмотра графа без использования индекса. Графовая база данных оптимизирована для запросов используя близость данных, начиная от одного или нескольких корневых узлов, а не использование глобальных запросов;

- гибкая модель данных для некоторых решений: нет необходимости в определении типов данных для вершин и ребер в отличии от более ограниченной табличной модели реляционной базы данных;

- встроенная API с точкой входа для классических алгоритмов теории графов (кратчайший путь, алгоритм Дейкстры, A* и др.)

Основная часть

Движение *NoSQL* (англ. not only SQL, не только SQL) стало популярным в последние несколько лет, в особенности благодаря тому, что NoSQL может решить ряд вопросов, по которым реляционные базы данных значительно уступают:

- доступность, для обработки больших наборов данных, и их разделение (реляционные базы данных уделяют внимание корректности, доступности и устойчивости к сбоям сети (теорема CAP);
- гибкость схемы;
- трудности в моделировании и обработке сложных структур, таких как деревья, графы, или слишком большого количества связей.

Графовые базы данных чаще всего работают используя такие пункты:

- обработка взаимосвязанных данных;
- легкое управление сложными и гибкими моделями данных;
- предложение исключительного функционирования для локального чтения путем обхода графа.

База данных на основе графа подходит для изучения данных, структурированных как граф (или производных, таких как дерево), особенно когда взаимосвязь между элементами значительна. Идеальный вариант использования запроса – начать с одной или нескольких вершин и обойти граф. Всегда есть возможность дать более широкие запросы, например, *.findAll* (найти все элементы данного типа), но в данном случае должен использоваться механизм индексации. Такой механизм может быть разработан специально для графа (супервершины — часть индексированных данных) или же использовать другое известное решение (например Apache Lucene).

В отличии от этого, реляционные базы данных хорошо подходят для схожих с *.findAll* запросов благодаря внутренней структуре таблиц. Группировки набора данных обычно вполне достаточно.

Несмотря на название, реляционные базы данных менее подходят для изучения взаимосвязей. Обычно применяются индексы, либо внешние ключи. В базах данных на основе графа обход данных происходит, используя физические указатели, в то время как внешние ключи являются логическими указателями.

Рассмотрим эти различия на примере. В базе будем хранить данные о сотруднике ВУЗ, наименовании кафедры, и педагогический стаж. Например, необходимо найти людей, которые работают на факультете математики.

При помощи реляционной модели мы можем выполнить следующий запрос, который вероятно потребует поиска 3 индексов, соответствующих внешним ключам в модели.

```
Select Person.Name from Person, Faculty, WorksIn
where Faculty.Name='математики'
and WorksIn.FacultyId = Faculty.Id
and WorksIn.PersonId = Person.Id
```

Person

id	Name
1	Иванов Иван
2	Петров Иван
3	Сидоров Петр
...	

Works In

personId	facultyId	experience
1	1	10
2	1	15
3	2	20
...		

Faculty

id	Name
1	математики
2	физики
3	истории
...	

Рис. 1: Реляционная схема.

В случае графа, запрос потребует поиска 1 индекса, затем поиск взаимосвязи путем прямого разыменования физических указателей.

```
Находим узел у которого Faculty.Name='математики' (Faculty1)
и отбираем все узлы которые связаны отношением Works.
```

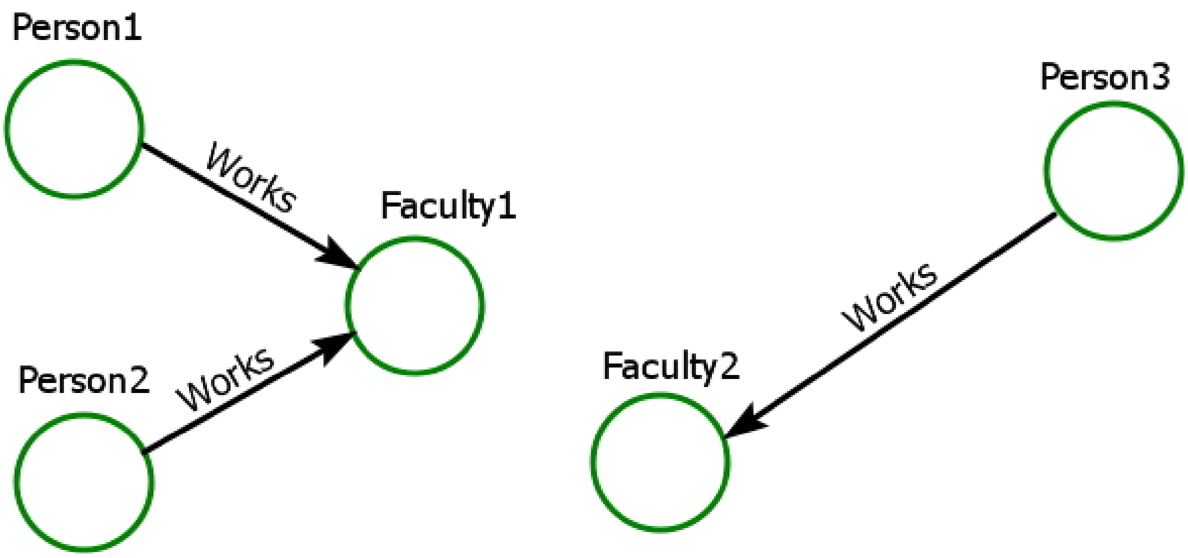


Рис. 2: Графовая схема.

На этом примере можно хорошо рассмотреть ситуацию, когда производительность графовой базы данных будет выше, чем реляционный базы данных.

Разница в производительности будет еще более значительна при увеличении объема данных, потому что кроме первого индекса поиска, для обхода нужно найти начальный узел(ы), запрос будет фактические выполняется за постоянное время. А в реляционной базе данных, при разименовании каждого индекса которое будет происходить за время $O(\log_2 N)$, если для индексов использовать B-деревья (N — число записей в таблице).

Сравнение работу графовых баз данных и других типов баз данных — сложная задача из-за их разницы по структуре и предназначению. Для запросов, графовые базы данных будут более эффективны в отличии от реляционных базы данных, если модель доступа к данным была специально разработана для обхода графа. Различие будет еще более значительным, если имеет значение глубина обхода, или если она заранее не известна (так как задачу с использованием эквивалентного SQL-запроса сложно оптимизировать).

Выводы

Таким образом при разработке структуры базы данных необходимо рассматривать варианты при которых данная структура будет опираться на свойства графа и если данные предполагают использование графовых схем, то их использование может существенно сократить доступ к данным, а на больших объемах значительно уменьшить время обработки информации. Особенно большой интерес использования графовых баз данных возникает при разработки всевозможных социальных сетей.

Литература

[1] *Ian Robinson* Graph Databases / Ian Robinson, Jim Webber, Emil Eifrem. — O'Reilly Media, 2013. — 178 p.

[2] *Jonas Partner* Neo4j in Action / Jonas Partner, Aleksa Vukotic, Nicki Watt. — Manning Publications, 2012. — 350 p.

[3] *Shashank Tiwari* Professional NoSQL / Tiwari Shashank. — Wrox, 2011. — 408 p.

[4] *Эрик Редмонд* Семь баз данных за семь недель. Введение в современные базы данных и идеалогию NoSQL / Эрик Редмонд, Джим Р. Уилсон; [Под ред. Жаклин Картер]; [пер. с англ. А.А. Слинкин]. — М.: ДМК Премм, 2013. — 384 с.: ил. алгоритмы / Пер. с англ. — Москва: Вильямс, 2007. — 400 с.

УДК 378.016

Сьомкін В.С.

[1] *кандидат педагогічних наук, доцент кафедри геометрії та МВМ, ДВНЗ «ДДПУ»*

e-mail: vladimir-syomkin@yandex.ru

ОСОБЛИВОСТІ ОРГАНІЗАЦІЇ ЛАБОРАТОРНОГО ПРАКТИКУМУ З ДИСЦИПЛІНИ «ШКІЛЬНИЙ КУРС ІНФОРМАТИКИ ТА МЕТОДИКИ ЇЇ НАВЧАННЯ»

У статті окреслено деякі проблеми організації лабораторного практикуму з навчальної дисципліни «Шкільний курс інформатики та методики її навчання», а також зроблено змістовний аналіз відбору навчального матеріалу до лабораторних робіт і запропоновано вимоги до їх виконання.

Ключові слова: *лабораторна робота, навчальна діяльність, діяльнісний підхід, метод навчання, продуктивна і репродуктивна діяльність, конвергентне і дивергентне мислення, рефлексія.*

Вступ

Багато фундаментальних, спеціальних, у тому числі й методичних дисциплін широко використовують у своєму арсеналі таку форму організації навчального процесу, як лабораторна робота, що дає можливість відтворити експериментальний майданчик, де студенти можуть на практиці перевірити й відпрацювати одержані теоретичні знання, а також випробувати власні міркування щодо певних запитань курсу, який ними вивчається.

Особливе місце в цій проблемі посідає організація лабораторного практикуму з дисципліни «Шкільний курс інформатики та методика її навчання» для студентів педагогічного вузу. Згідно з робочою програмою навчальної дисципліни, 40% часу відводиться саме на лабораторні роботи [6]. Такий розподіл часу створює передумови для більш щільного зв'язку теорії з практикою, розвитку здібностей майбутніх учителів інформатики до постановки й проведення експериментальних досліджень, їх аналізу й синтезу, вмінню оцінювати результати досліджень, сприймати їх як реальну дійсність, що підтверджує гіпотезу або спростовує її.

Специфіка курсу, що вивчається, полягає в його змістовній двобічності: шкільного курсу інформатики з одного боку та методики її навчання з іншого. Під час виконання лабораторних робіт студенти набувають навичок практичного характеру, одночасно постаючи як у ролі учня, який виконує заздалегідь підготовлені завдання, так і в ролі вчителя, який на основі теоретичних знань з інформатики й методики її навчання аналізує ці тексти, корегує, здійснює добірку практичних завдань із теми, що вивчається. У багатьох випадках фактичний і методичний зміст теорії стає більш зрозумілим тільки після самостійного випробування основних елементів цієї теорії на практиці. Виконання лабораторних робіт сприяє поглибленню знань студентів як зі шкільного курсу інформатики, так і з методики її навчання, розумінню логіки побудови цих курсів.

У процесі виконання лабораторних занять студенти мають можливість складати конспекти уроків різних типів, готувати комп'ютерне забезпечення уроків і позакласних заходів, проводити логіко-дидактичний аналіз наявних педагогічних програмних засобів, запроваджувати ділові ігри, вчитися аналізувати уроки, перевіряти виконані учнями за допомогою комп'ютерів завдання, виготовляти фрагменти педагогічних програмних засобів, унаочнення навчального процесу, дидактичних матеріалів тощо [4].

Основна частина

За деякими дослідженнями, серед викладачів середніх і вищих навчальних закладів більше, ніж 90%, стикаються з проблемою постановки завдань лабораторних робіт, розробки методичних матеріалів із їх проведення. Більше, ніж 60% опитаних, відчувають при цьому труднощі методичного характеру у зв'язку з тим, що в педагогічній літературі цим питанням не приділено належної уваги [2].

У залежності від дидактичних цілей можна навести наступну класифікацію лабораторних робіт із методики викладання інформатики:

- ознайомлення з фактичним і методичним матеріалом;
- розв'язування експериментальних навчальних і методичних задач;
- розв'язування задач зі створення нових об'єктів, перевірки різних проблемних гіпотез навчального й методичного рівнів.

В ознайомлювальних лабораторних роботах проводиться вивчення основного змісту теми, що вивчається, виявляються базові поняття навчального матеріалу, визначаються етапи, форми й методи їх формування тощо. Прикладом теми такої лабораторної роботи може бути «Поняття інформації. Властивості інформації».

Дослідницький характер мають експериментальні лабораторні роботи, у яких студенти, з одного боку, розв'язують практичні задачі за допомогою комп'ютера, а з іншого – вивчають можливість застосування різних форм і методів відтворення цих задач у контексті вивчення певної теми. Наприклад, під час вивчення теми «Моделювання і формалізація» виникає велика кількість таких задач, зокрема з використанням методу Монте-Карло.

Проведення експериментальних досліджень має місце й у процесі організації проблемно-пошукових лабораторних робіт. Але експерименти відрізняються новизною й супроводжуються пошуком і створенням нових об'єктів, наприклад, створенням ППЗ, тематичної бази даних або інших програмних комп'ютерних продуктів. Важливою складовою таких лабораторних робіт є розробка сценарію діяльності учнів зі створення означених продуктів.

Лабораторна робота зі шкільного курсу інформатики та методики її навчання є водночас і формою організації навчального процесу, і методом навчання. З точки зору організаційного процесу, лабораторна робота найчастіше починається як фронтальна робота всієї групи студентів, але з часом переростає в індивідуальну або групову (2-3 особи). А як метод – роботу спрямовано на виробку практичних навчальних умінь і навичок, з одного боку, та накопичення первинного професійного досвіду керуванням навчальною діяльністю – з іншого. Першої мети досягаємо в процесі виконання реальних завдань шкільного курсу інформатики, другої – в результаті пошуку й осмислення методики викладання окремих тем курсу інформатики в умовах школи.

Вихідними передумовами до успішного виконання лабораторної роботи є опертя на діяльнісний підхід, тобто:

1. Не можна ставити узагальнюючі, абстрактні цілі, які складно, а інколи навіть неможливо діагностувати засобами поточного контролю [1].

2. Студенти перед виконанням роботи повинні чітко розуміти, яке місце в майбутній педагогічній діяльності будуть займати одержані знання й уміння.

3. Програмний засіб не повинен бути тільки об'єктом вивчення, а слугувати засобом для досягнення цілей розв'язування конкретної задачі діяльності. Наприклад, у ході вивченні теми «Комп'ютерне моделювання» табличний процесор, СКБД тощо використовуються як засоби створення, тестування й дослідження комп'ютерних моделей.

4. Контрольні запитання до лабораторної роботи повинні відображати весь зміст пройденого матеріалу, передбачаючи конкретні однозначні відповіді.

5. Рефлексія діяльності студента повинна бути відтворена в письмовому звіті до лабораторної роботи з аналізом змісту опрацьованого матеріалу й мати двобічний характер – навчальний (розв'язання задач) і методичний.

Дуже важливо, щоб проведена робота в межах лабораторної не набула епізодичного характеру, а отримані фактичні й методичні знання мали прикладне значення під час вивчення інших тем курсу шкільної інформатики. Так, наприклад, знання з теми «Алгоритмізація» повинні знайти відповідне місце в інших темах курсу інформатики і, як результат, – у процесі виконання інших лабораторних робіт. Такі поняття, як компь'ютерна модель, алгоритм, дані, типи даних, вирази, розгалудження, цикли, логічні операції та інші червоною ниткою проходять через увесь курс шкільної інформатики.

У зв'язку з цим важливими завданнями в лабораторному комплексі повинні стати задачі з:

- визначення ролі й місця навчального розділу в базовому курсі інформатики;
- розгляду цілей і задач вивчення розділу в базовому курсі інформатики;
- визначення сутності й ролі базових понять, етапів і методів їх формування;
- встановлення зв'язків між основними поняттями як всередині навчального розділу, так в межах усієї дисципліни [3].

Метою циклу лабораторних робіт зі шкільного курсу інформатики та методики її навчання є формування вмінь і навичок поводження майбутнього вчителя з комп'ютерною технікою та програмним забезпеченням у процесі викладання інформатики в школі. Студент дізнається, які вміння на рівні дій і функцій діяльності він повинен отримати. Студенту пропонуються завдання лабораторної роботи, до багатьох із яких надаються алгоритми їх виконання, деталізуються найбільш «вузькі» місця й можливі труднощі. Згідно з класифікацією [5], навчальну діяльність студента можна назвати *виконавчою.* При подальший роботі над однотипними завданнями навчальна діяльність студента набуває репродуктивний характер, знання, які він акумулює в процесі роботи за згаданою класифікацією, є *копією* [5], формується конвергентне мислення. У подальшому студентові пропонується можливість пошуку інших рішень наведених задач, тобто формується дивергентна форма мислення, що заснована на стратегії генерування безлічі рішень однієї задачі. На даному етапі навчальні дії студента визначаються наявністю вміння досягати потрібного результату як за заданим зразком, так і при створенні й послідовному втіленні власного задуму, тобто носять репродуктивно-продуктивний характер, при цьому формуються *вміння.*

Тексти до лабораторних робіт складаються із завдань, які розширюють можливості вчителя в процесі викладання дисципліни, роблять його більш змістовним як теоретично, так і практично. Особливої уваги потребують задачі, які реалізують метод проектів. Це задачі зі створення баз даних, електронної газети, постера, аналітичних тематичних таблиць, презентацій та інші. Сучасна методика викладання як шкільної, так і вузівської інформатики активно впроваджує до навчального процесу метод проектів, поширення якого пояснюється можливістю імітувати діяльність, що реально розвертається в позанавчальному житті [4]. Проектний метод розкриває творчі можливості, пізнавальні здібності, враховує інтереси учня. Але впровадження даного методу до класно-урочної системи – не найпростіше методичне завдання. Потрібне врахування індивідуальних особливостей учнів, їх рівень володіння комп'ютером, можливостей аналітичної й пізнавальної діяльності, уміння самостійно конструювати свої знання, орієнтуватися в інформаційному просторі тощо. Проблемою є організація виконання цих проектів. Проекти потребують більшого часу, ніж урок, застосування групової форми навчання, а це поєднано з умінням учителя організувати такий процес з урахуванням доступу до комп'ютера кожного учасника проекту. Саме на розв'язання цих навчальних і методичних задач і повинні бути спрямовані розроблені лабораторні роботи для студентів у межах практикуму, що розглядається.

Останнім, але не менш важливим етапом лабораторної роботи є її підсумковий етап, на якому студенту потрібно осмислити зміст вивченого матеріалу й технологію його опрацювання, співставити отримані результати з очікуваними, зробити висновки. Але це тільки осмислення способів і прийомів роботи зі змістом навчального матеріалу (рефлексія змісту). Важливим є й інше питання – аналіз власної діяльності майбутнього педагога, осмислення способів і прийомів роботи з навчальним матеріалом, пошук найбільш раціональних шляхів досягнення результатів (рефлексія діяльності). Окреслені положення мають бути покладені в основу звіту до лабораторної роботи. У методичних вказівках із цього розділу слід вказати необхідну форму представлення результатів.

При оцінюванні цього звіту викладач враховує:

- обсяг виконаного матеріалу й послідовність виконання необхідних дослідів: розробку моделі, алгоритму, комп'ютерної програми;
- вибір програмного забезпечення та його спрямування на проведення досліджень;
- самостійність і якість виконання роботи;
- логіку опису спостережень і якість висновків до них.

Правильність і охайність оформлення результатів у звіті:

- співставлення отриманих результатів з очікуваними;
- оцінку важливості теми відносно змісту навчальної дисципліни;
- передбачення можливих утруднень роботи учнів в освоєнні досліджуваного матеріалу;

- методичні рекомендації з реалізації в навчальному процесі розв'язування запропонованих задач;
- дотримання техніки безпеки під час роботи на комп'ютері.

Висновки

Спроби реалізації описаного підходу до організації лабораторного практикуму зі «Шкільного курсу інформатики та методики її навчання» дали нам змогу значно підвищити роль цієї форми навчання та мотивувати студентів до вивчення як змісту шкільного курсу інформатики, так і засвоєння основних положень методики її навчання.

Зазначена тематика повинна отримати продовження як в подальших дослідженнях автора, так і підвищити науковий інтерес студентів до цієї проблеми в процесі написання курсових і дипломних робіт. Це дасть змогу домогтися поширення варіативності завдань до лабораторних робіт, їх структуризації, уніфікації на різних факультетах і спеціальностях.

Література

[1] *Ашеров А.Т.* Построение лабораторных работ по изучению педагогических технологий с опорой на структуру деятельности специалиста / А.Т. Ашеров, Г.И. Сашко // Управління якістю педагогічної освіти: зб. матеріалів II Міжнар. наук.-практ. конференці. — Донецьк: ДІПО І ППАПН України, 2002р. — 136 с.

[2] *Белова Е.К.* Роль лабораторных работ в учебном процессе и особенности их проектирования / Е.К. Белова // Проблемы инженерно-педагогического образования: сб. науч. трудов. — Харьков: УИПА, 2003. — С. 218 – 225.

[3] *Лапчик М.П.* Теория и методика обучения информатике / М.П. Лапчик, И.Г. Семакин, Е.К. Хеннер, М.И. Рагулина [и др.]. — М.: Издательский центр «Академия», 2008. — 592 с.

[4] *Міхеєв В.В.* Лабораторні роботи з методики навчання інформатики / В.В. Міхеєв // Методичний посібник. — Житомир, 2006. — 144 с.

[5] *Артюх С.Ф.* Педагогические аспекты преподавания инженерных дисциплин / С.Ф. Артюх, Е.Э. Коваленко, Е.К. Белова, Г.В. Изюмская, В.В. Беликова // Пособие для преподавателей; [под ред. С.Ф. Артюха]. — Харьков: УИПА, 2001. — 210 с.

[6] *Сьомкін В.С.* Робоча навчальна програма з дисципліни «Шкільний курс інформатики та методика її навчання» для студентів за спеціальністю 7.04020101 Математика*, спеціалізація інформатика / В.С. Сьомкін. — 2012 р. — 16 с.

УДК 373.5.016:004

Глазова В.В.

[1] *кандидат педагогічних наук, старший викладач кафедри геометрії та МВМ, ДВНЗ «ДДПУ»*

e-mail: veraglazova@mail.ru

ЗАСТОСУВАННЯ МЕТОДУ ПРОЕКТІВ У ВИКЛАДАННІ ШКІЛЬНОГО КУРСУ ІНФОРМАТИКИ ТА МЕТОДИКИ ЇЇ НАВЧАННЯ

У статті висвітлені особливості застосування методу проектів у викладанні шкільного курсу інформатики та методики її навчання. Визначено тематику проектів з дисципліни, розглянуті етапи роботи над проектом, обґрунтована важливість формування вміння користуватися методом проектів для студентів.

Ключові слова: *метод проектів, шкільний курс інформатики, методика навчання.*

Вступ

Останнім часом все більше уваги приділяється проблемі включення в освітній процес нових методів навчання, що вимагають якісно іншої підготовки майбутніх фахівців, зокрема, вчителів інформатики, основним завданням яких є підготовка молодого покоління до життєдіяльності в інформаційному суспільстві. Уміння майбутніх вчителів творчо і критично осмислювати нові методи, запропоновані для реалізації в школі, їх компетентність у визначенні найбільш перспективних з них, їх власна позиція багато в чому визначають стан сучасного освітнього простору.

Одним із інструментів вирішення цієї проблеми є використання методу проектів. Цей метод був започаткований у 20-ті роки минулого століття в США Дж. Дьюї та його учнем В.Х.Кілпатріком. Використання проектної діяльності у сфері навчання особливо активізувалося в другій половині 1990-х рр. У сучасній педагогічній літературі наголошується, що використання методу проектів значною мірою дозволяє зняти складнощі поєднання теорії з практикою. Змістові аспекти методу проектів знайшли відображення в працях Г.Ващенка, В.Гузєєва, Є.Кагарова, Н.Матяш, Н.Морзе, Т.Новікової, Н.Пахомової, О.Петрова, Є.Полат, Н.Поліхун, В.Сімоненка, І.Чечель, В.Шапіро та ін. У центрі уваги науковців Л.Жеребчук, О.Зосименко, В. Лутковського, С.Омельяненко, О.Фунтікової та ін. були проблеми використання методу проектів у навчальній діяльності студентів вищих навчальних закладів.

Основна частина

Метод проектів визначають як сукупність навчально-пізнавальних прийомів, що дозволяють вирішити ту чи іншу проблему в процесі самостійних дій з обов'язковою презентацією результатів своєї роботи. В основі методу проектів лежить розвиток критичного мислення студентів, вміння самостійно конструювати свої знання, орієнтуватися в інформаційному просторі, аналізувати отриману інформацію [1].

Навчання з використанням методу проектів заохочує і підсилює дійсне навчання учнів, студентів через те, що воно є: особистісно-орієнтованим, використовує безліч дидактичних підходів – навчання в справі, незалежні заняття, спільне навчання, «мозковий штурм», рольова гра, евристичне і проблемне навчання, дискусія, командна діяльність; є самовмотивованим, тобто зростає інтерес і залученість до роботи в міру її виконання; дозволяє вчитися на власному досвіді і досвіді інших у конкретній справі; приносить задоволення від продукту власної діяльності [2].

Невипадково метод проектів вважається оптимальним засобом реалізації діяльнісного підходу до професійної підготовки педагогів, що дозволяє їм не на словах навчитися застосовувати знання і уміння, отримані під час вивченні різних навчальних дисциплін на різних етапах навчання, і інтегрувати їх в процесі роботи над проектом з методики навчання інформатики.

Метод проектів може застосовуватися в межах вивчення окремих дисциплін, найчастіше в синтезі з іншими методами навчання та формами організації навчального процесу. Вивчення дидактичних можливостей метода проектів показало, що його використання дозволяє підвищити ефективність навчання різним аспектам нових інформаційних технологій. Навчання інформатики є важливою ланкою інформатизації освіти. Успішність процесу інформатизації шкільної освіти спирається на добре поставлене викладання інформатики. Адже, найчастіше, молоді вчителі, починаючи свій професійний шлях, орієнтуються на сталий менталітет, традиційний підхід до роботи старших колег. Таким чином, означене вимагає переорієнтації підготовки майбутніх учителів на оволодіння сучасними технологіями з урахуванням нових підходів.

Аналіз системи підготовки вчителів інформатики засвідчив, що однією з найважливіших є навчальна дисципліна «Шкільний курс інформатики та методика її навчання». Процес впровадження методу проектів у викладання потребує визначення змісту курсу з урахуванням використання методу проектів у навчанні, визначення принципів створення проектів, розробки методики використання методу проектів у навчанні студентів. Метод проектів у підготовці студентів до майбутньої професійної діяльності є самостійною діяльністю студентів, яка здійснюється під гнучким керівництвом викладача та спрямована на вирішення дослідницького завдання або проблеми, на отримання результатів своєї роботи. Під час вивчення дисципліни «Шкільний курс інформатика та методика її навчання» підсумком роботи може бути як ідеальний продукт: зроблений на основі вивчення інформації висновок, сформовані знання, так і матеріальний продукт: WEB-сайт, сценарій проведення заходу, маршрут навчальної екскурсії, методичний посібник, методичні вказівки, збірка методичних матеріалів, узагальнення передового педагогічного досвіду, програма навчання, навчальний план, довідник, доповідь, альбом, газета тощо.

Метод проектів є комплексним методом, який дозволяє будувати процес навчання спираючись на інтереси студентів і надає їм більшу свободу в своїх діях. Метод проектів, критично перероблений і адаптований під викладання дисципліни, зможе забезпечити розвиток творчої ініціативи і самостійності студентів у навчальній діяльності, допоможе знайти способи, шляхи розвитку самостійного мислення, дасть можливість студентам не просто запам'ятовувати і відтворювати знання, які вони отримують у вищому навчальному закладі, а й допоможе сформувати вміння застосовувати ці знання на практиці.

На основі аналізу програми дисципліни було визначено орієнтовну тематику проектів («Інформація», «Сучасний вчитель інформатики: яким він має бути?», «Ігрові методи у викладанні інформатики», «Навчання інформатики у профільній школі», «Індивідуальний практикум з інформатики» та ін.). Під час вибору теми проекту слід враховувати такі аспекти як: розумові, психологічні можливості студентів, їх індивідуальні особливості, навчально-матеріальну базу, міжпредметні зв'язки, залучення знань із різних галузей, професійно-орієнтовану важливість проекту тощо.

В освітньому просторі проектна діяльність не є самоціллю, вона завжди підпорядкована педагогічним цілям і виступає як засіб їх досягнення, тобто йде навчання дією і у дії. Робота над проектами під час вивчення дисципліни «Шкільний курс інформатики та методика її навчання» відбувається з дотриманням етапів, які переважно виокремлюють у методичній літературі – пошуковий, його ще називають попереднім, стартовим, початковим (відбуваються роботи з визначення теми проекту, пошук та аналіз проблеми, висування гіпотези, постановка цілі, обговорення методів дослідження), аналітичний (аналіз вхідної інформації, пошук оптимального способу досягнення цілі проекту, побудова алгоритму діяльності, покрокове планування роботи), практичний (реалізація проекту), презентаційний (оформлення результатів, підготовка та проведення презентації, захист і оцінка проекту), контрольний (аналіз результатів, коригування, оцінка якості проекту) [3]. Кожен учасник проекту, залежно від своїх сильних сторін, активно включається в роботу на певному етапі. Під час роботи над проектом можуть існувати декілька варіантів розподілу видів діяльності усередині робочої групи. У підготовці майбутніх вчителів інформатики можлива реалізація різних видів проектів (дослідницьких, інформаційних, творчих, рольових, телекомунікаційних тощо), але найчастіше використовуються змішані типи проектів у яких, наприклад, одночасно є ознаки дослідницького і творчого, або ознайомчо-орієнтовані і дослідницького.

Висновки

Для студентів надзвичайно важливим є опанування методом проектів, оскільки це відкриває нові можливості для успішного початку професійної діяльності, розвитку самостійності, креативності, інтелектуальних, вольових якостей. Уміння користуватися методом проектів – показник високої кваліфікації викладача [4, с. 67]. Проживаючи в спеціально організованій освітній ситуації, студент відтворює зразки професійного життя і діяльності, тим самим розвиваючи свій внутрішній світ, набуваючи і вдосконалюючи професійні компетенції.

Література

[1] Intel Обучение для будущего. — К. : Издательство «Нора-принт», 2006.

[2] *Гузеев В.В.* «Метод проектов» как частный случай интегральной технологии обучения /В.В. Гузеев // Директор школы. — 1995. — № 6. — С. 24 – 32.

[3] *Морзе Н.В.* Метод навчальних проектів. Режим доступу: `http://osvita.ua/school/theory/984/`.

[4] Полат Е.С. Новые педагогические и информационные технологии в системе образования : [учеб. пособ. для студ. пед. вузов и системы повышения квалиф. пед. кадров] / Е.С. Полат, М.Ю. Бухаркина, М.В. Моисеева, А.Е. Петров; [под ред. Е.С. Полат]. — М. : Издательский центр «Академия», 2002. — 272 с.

УДК 378.016:004

Овчарова О.І.

[1] *старший викладач кафедри алгебри, ДВНЗ «ДДПУ»*

e-mail: kafedra_algebry_sdpu@mail.ru

ОСОБЛИВОСТІ ВИКЛАДАННЯ ІНФОРМАТИКИ ДЛЯ СТУДЕНТІВ ГУМАНІТАРНИХ СПЕЦІАЛЬНОСТЕЙ

У статті розглянуті питання, пов'язані з особливостями підготовки студентів гуманітарних спеціальностей до використання засобів сучасних інформаційних технологій у майбутній професійній діяльності.

Ключові слова: *інформатика, комп'ютер, сучасні інформаційні технології, інформатизація освіти, інформаційна культура.*

Вступ

У сучасному суспільстві відбувається інформатизація усіх сфер діяльності людини. Відбувається також активне впровадження засобів сучасних інформаційних технологій в освіту. До початку XXI століття викладання інформатики у школі в основному обмежувалось одним навчальним предметом, і навичками роботи з комп'ютером повинен був володіти тільки вчитель інформатики.

У нинішній час відбувається широке впровадження комп'ютерної техніки у навчальний процес, створюється все більше електронних підручників, електронних посібників та дидактичних матеріалів для вивчення різних предметів [1]. У подальшому вчитель, не підготовлений до роботи з комп'ютером та програмними засобами, практично не зможе виконувати свої професійні обов'язки.

В силу наведених причин, у вищих педагогічних навчальних закладах студенти гуманітарних спеціальностей вивчають дисципліни «Інформатика і ТЗН», «Сучасні інформаційні технології».

Основна мета викладання цих дисциплін – навчити студентів гуманітарних спеціальностей використовувати засоби інформатики і обчислювальної техніки, відповідне програмне забезпечення для розв'язання практичних задач у відповідній предметній галузі, а також формування інформаційного світогляду студентів [2, 3].

Основна частина

Викладання інформатики на гуманітарних факультетах має свої особливості. Однією з них є не достатньо високий рівень шкільної підготовки студентів, тому основним завданням курсу інформатики для студентів гуманітарних спеціальностей є вирівнювання знань, набутих у межах середньої освіти, підвищення рівня інформаційної культури студентів, підготовка до використання засобів сучасних інформаційних технологій у навчанні та майбутній професійній діяльності [4].

У зв'язку з тим, що для вивчення інформатики на гуманітарних факультетах відводиться невелика кількість годин, вивчення цієї дисципліни студентами гуманітарних спеціальностей обмежується вивченням основ роботи з комп'ютером, навичками взаємодії з операційною системою, а також навичками роботи з найбільш поширеними прикладними програмами. Причому, у процесі підготовки майбутнього вчителя необхідно враховувати ті обставини, що апаратне і програмне забезпечення швидко вдосконалюється, з'являються нові програмні засоби, які необхідно буде застосовувати у професійній діяльності. Тому важливо навчити студентів не тільки працювати з вище названими програмами, але й навчити їх самостійно працювати з навчальними посібниками, опановувати роботу з новими програмними засобами.

Особливість викладання інформатики на гуманітарних факультетах зумовлена ще й тим, що цю дисципліну треба адаптувати до навчання студентів-гуманітаріїв. Зміст курсу «Інформатика і ТЗН» повинен враховувати специфіку того факультету, на якому його вивчають. Як правило, переважна більшість студентів гуманітарних спеціальностей не орієнтована на вивчення точних наук. Успішне засвоєння ними вмінь і навичок роботи з інформаційними технологіями можливе лише при усвідомленні необхідності опанування цими вміннями. Орієнтація на майбутню професійну діяльність, показ необхідності використання нових інформаційних технологій при розв'язанні конкретних задач, пов'язаних з цією діяльністю, формують позитивну мотивацію студентів до вивчення інформатики. Необхідно, щоб навчальний матеріал, завдання для лабораторних робіт, самостійної роботи якомога більше були пов'язані зі спеціалізацією студентів. Наприклад, при вивченні текстового редактору необхідно звернути увагу на такі його можливості як перевірка граматики, орфографії, запропонувати виконати завдання з творчим гуманітарним спрямуванням. На лабораторних заняттях також можна запропонувати студентам створити презентації для використання на уроках мови, літератури і т. д.

На лекційних та лабораторних заняттях необхідно враховувати особливості сприймання студентами-гуманітаріями технічних знань, комп'ютерної термінології. Для покращення сприймання та засвоєння студентами навчальної інформації під час лекцій можна застосовувати мультимедійну апаратуру та інші технічні засоби навчання. Також необхідно більше уваги приділяти індивідуальній роботі зі студентами. Аналізуючи досвід викладання інформатики можна зауважити, що найбільше труднощів у студентів гуманітарних спеціальностей виникає при вивченні тем, пов'язаних з апаратним забезпеченням, а також при роботі з електронними таблицями, виконанні розрахунків, побудові діаграм. Тому вивчення цих тем потребує проведення додаткових консультацій, надання викладачем допомоги студентам при виконанні ними індивідуальних завдань, самостійної роботи.

Висновки

Для підвищення якості викладання інформатики на гуманітарних факультетах необхідно враховувати специфіку факультету і орієнтуватися на підготовку кваліфікованого користувача, який вміє грамотно взаємодіяти з комп'ютером, застосовувати засоби сучасних інформаційних технологій у навчанні, науково-дослідній роботі та майбутній професійній діяльності.

Для викладання інформатики на філологічному, дефектологічному факультетах підготовлено навчально-методичний комплекс дисципліни «Інформатика і ТЗН», методичні посібники, при розробці яких були враховані особливості вивчення інформатики.

Література

[1] *Степанов А.Н.* Информатика: учебное пособие для высших учебных заведений по гуманитарным социально-экономическим направлениям и специальностям / А.Н. Степанов. — СПб: Питер, 2002. — 605 с.

[2] *Козловський А.В.* Комп'ютерна техніка та інформаційні технології / А.В. Козловський. — К.: Знання, 2012. — 463 с.

[3] *Коджаспирова Г.М.* Технические средства обучения и методика их использования / Г.М. Коджаспирова. — М. Academia, 2001. — 255 с.

[4] *Чернилевский Д.В.* Дидактические технологии в высшей школе / Д.В. Чернилевский. — М.: Юнити-Дана, 2002. — 437 с.

УДК 378:681.518

Величко В.Є., Рухманкова Г.В., Скрипачова Т.О., Пугачова І.В.

[1] *кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри алгебри, ДВНЗ «ДДПУ»*

[2–4] *студенти 5 курсу фізико-математичного факультету, ДВНЗ «ДДПУ»*

e-mail: vladislav.velichko@gmail.com

СТВОРЕННЯ ІНФОРМАЦІЙНО-ОСВІТНЬОГО СЕРЕДОВИЩА ПЕДАГОГІЧНОГО ВНЗ

В роботі розглядаються питання створення інформаційно-освітнього середовища педагогічного ВНЗу, наводяться шляхи створення середовища. Окрему увагу приділено структурному змісту освітнього середовища та особливості його створення для майбутніх вчителів.

Ключові слова: *інформаційно-освітнє середовище, LMS, підготовка вчителя*

Вступ

Створення та накопичення різних засобів інформаційно-комунікаційних технологій для навчальних закладів породжує цілий ряд проблем педагогічного характеру. Перш за все, слід відзначити очевидну відсутність якоїнебудь системи в розробці, накопиченні та практичному використанні розрізнених інформаційних ресурсів педагогічного призначення. Як правило, подібні засоби ніяк не пов'язані між собою і невиправдано дублюють одну і ту ж інформацію. Засоби інформатизації, які використовуються в рамках одного навчального закладу, вимагають принципово різних методичних і технологічних підходів, накладають суттєві вимоги на знання і вміння студентів, що негативно позначається на ефективності навчального процесу [1].

Ще однією проблемою, пов'язаною з хаотичністю розробки і використання інформаційних технологій та ресурсів у навчальному закладі, є практична неможливість універсальної підготовки педагогічних кадрів, здатних комплексно використовувати переваги засобів інформаційно-комунікаційних технологій в навчальній, позанавчальній та організаційно-педагогічній діяльності.

Необхідне об'єднання в одну уніфіковану систему інформаційних ресурсів та технологій, що використовуються в усіх сферах діяльності вищого навчального закладу. Подібна система повинна бути доповнена загальними однотипними методологічними вимогами і рекомендаціями. А тому метою даної статті є різнобічний розгляд питань, що пов'язані з формуванням інформаційно-освітнього середовища педагогічного вузу.

Основна частина

Спроби формування інформаційно-освітнього середовища робляться в багатьох навчальних закладах, проте, як правило, вони зводяться до вирішення технічних проблем взаємозв'язку окремих засобів і технологій інформатизації. До цих пір не вирішені питання уніфікації змісту і методів, що характеризують використання засобів інформаційно-комунікаційних технологій.

На роль подібної системи може претендувати інформаційно-освітнє середовище навчального закладу, обумовлене в багатьох публікаціях як сукупність комп'ютерних засобів і способів їх функціонування, які використовуються для реалізації навчальної діяльності. Більш точно інформаційно-освітнє середовище можна визначити як засноване на використанні комп'ютерної техніки програмно-телекомунікаційне середовище, що реалізує єдиними технологічними засобами і взаємопов'язаним змістовним наповненням якісне інформаційне забезпечення студентів, викладачів, адміністрацію навчального закладу і громадськість. Подібне середовище повинно включати в себе організаційно-методичні засоби, сукупність технічних і програмних засобів зберігання, обробки, передачі інформації, що забезпечує оперативний доступ до педагогічно значущої інформації і створює можливість для спілкування викладачів та студентів.

Інформаційно-освітнє середовище має будуватися як інтегрована багатокомпонентна система, компоненти якої відповідають навчальній, позанавчальній, науково-дослідній діяльності, вимірюванню, контролю і оцінки результатів навчання, діяльності з управління навчальним закладом [2].

Одним з найбільш значущих компонентів середовища є програмно-методичний комплекс, націлений на інформатизацію навчальної діяльності навчального закладу. Проектування, побудова та експлуатація навчальної компоненти повинні здійснюватися у строгій відповідності з широким комплексом вимог і рекомендацій психолого-педагогічного, методичного та технологічного характеру.

Однією з істотних сфер діяльності будь-якого навчального закладу, незалежно від рівня освіти, є наукові та методичні дослідження. Аспекти функціонування науково-методичної сфери діяльності навчальних закладів породжують окремий напрямок впроваджень засобів ІКТ. Необхідно виділення в рамках середовища спеціальної компоненти, що інтегрує розрізнені засоби інформатизації науково-дослідної та методичної діяльності, здійснюваної педагогами. Відповідна компонента середовища повинна не тільки надавати засоби доступу до інформаційних ресурсів, значимим з точки зору наукової діяльності, але і надавати інструментарій для бібліографування, обробки, зберігання та обліку інформаційних фрагментів, важливих з точки зору проведених розробок. Такі засоби можуть виявитися корисними при організації віддалених дистанційних взаємодій педагогів у сфері наукових досліджень.

Виділяють також позанавчальну компоненту інформаційно-освітнього середовища. Сфера позанавчальної діяльності навчального закладу на практиці використовує переваги засобів ІКТ досить рідко і безсистемно. Інформаційні технології здатні підняти на більш високий рівень позанавчальні заходи, які безпосередньо не пов'язані з основною навчальною діяльністю. Очевидна доцільність використання комп'ютерних телекомунікацій в міжособистісному позанавчальному спілкуванні. У даних областях від якості та рівня змістовно-методичної опрацьованості відповідних засобів ІКТ істотно залежить навчально-виховний ефект позанавчальної діяльності [3].

Основними інформаційними ресурсами, складовими позанавчального компоненту інформаційно-освітнього середовища повинні бути засоби інформування учнів і педагогів про плановані позанавчальні заходи, інформаційні засоби підтримки діяльності кураторів, засоби інформаційного забезпечення позанавчальної спілкування студентів, інформаційні засоби, необхідні для проведення культурно-масових і спортивних заходів, засоби управління позанавчальною діяльністю в навчальному закладі.

Великою сферою застосування засобів ІКТ є організаційно-управлінська діяльність навчальних закладів. В її автоматизації використовуються багато програмних систем та оболонок, такі як планувальники занять, системи бухгалтерського обліку, засоби розрахунку навчального навантаження і тарифікації, електронні бази даних про викладачів, студентів, засоби навчання і багато інших. У моделюванні, проектуванні і компонуванні інформаційно-освітнього середовища має сенс виділення спеціалізованої компоненти, що інтегрує інформаційні ресурси, що автоматизують обробку та передачу інформації в рамках організаційно-управлінської діяльності навчального закладу.

Формування інформаційно-освітнього середовища, що охоплює всі сфери діяльності навчального закладу, створює додаткові умови для всебічного аналізу показників освітнього процесу, дозволяє сформувати цілісне уявлення про стан системи освіти, про якісні та кількісні зміни в ній.

На сьогодні існує два різних технологічних шляхи створення інформаційно-освітнього середовища. Перший з них, це створення середовища в рамках технічних можливостей університету. Реалізація цього принципу створення інформаційно-освітнього середовища є більш коштовною, але створене середовище може бути будь-якої доступної складності. Для розробки програмного забезпечення необхідно залучати представників усіх сфер навчально-виховного та організаційного комплексів, для створення гармонійної та високопродуктивної системи.

Другий спосіб створення інформаційно-освітнього середовища полягає у використанні хмарних технологій. Перевагою цього способу є використання вже існуючих програмних, інформаційних та методичних засобів, а недоліком – використання наявних можливостей без можливості їх вдосконалення. Прикладом використання хмарних технологій може бути створене інформаційне середовище в соціальних мережах, збереження інформації на відповідних серверах, робота електронної пошти, створення блогів, системи обміну сповіщеннями, системи агрегації інформації тощо.

Створення інформаційно-освітнього середовища в педагогічному вузі особливо актуальне, так як його використання передбачає включення студентів в навчальний процес, створення умов для активної взаємодії викладачів і студентів та навчання в активному середовищі як в режимі off-line, так і в режимі on-line. Виконання цих умов формує у майбутнього педагога не тільки знання з використання інформаційно-комунікаційних технологій в навчальному процесі а і їх інтеграцію в навчальний процес, що в свою чергу підвищує методичну значимість отриманих у педагогічному вузі знань, вмінь і навичок.

Висновки

Перспективи використання інформаційно-комунікаційних технологій в навчальному процесі безсумнівно широкі. А їх використання в комплексі з науковими, методичними та організаційними наробками створює можливості для виховання педагога майбутнього. Педагога, який своїм прикладом ерудованості, обізнаності та навичками вільного володіння сучасними інформаційними технологіями надихатиме учнів не тільки до відмінних знань свого навчального предмету, а і до самоосвітньої діяльності.

Література

[1] *Солдаткин В.И.* Информационно-образовательная среда открытого образования [Електронний ресурс] / В.И. Солдаткин // Всероссийская научно-методич. конф. — СПб.: Телематика, 2002. — Режим доступу до журн. : `http://tm.ifmo.ru/tm2002/db/doc/get_thes.php?id=22`

[2] *Козырев В.А.* Гуманитарная образовательная среда педагогического университета: сущность, модель, проектирование : Монография / В.А. Козырев. — СПб.: Изд-во РГПУ им. А.И.Герцена, 2004.

[3] *Гагарина Д.А.* Высокоразвитая информационно- образовательная среда вуза как средство формирования гуманитарной составляющей высшего профессионального образования / Д.А. Гагарина. — Пермь, 2010. — 178 с.

МЕТОДИКА ВИКЛАДАННЯ МАТЕМАТИКИ В ЗОШ ТА ВНЗ

УДК 37.016:51

Беседін Б.Б., Донченко Я.А.

[1] *кандидат педагогічних наук, доцент кафедри геометрії та МВМ, ДВНЗ «ДДПУ»*

[2] *студентка 5 курсу фізико-математичного факультету, ДВНЗ «ДДПУ»*

e-mail: besedin_boris@ukr.net, dadayana1991@gmail.com

РОЗВИТОК МАТЕМАТИЧНОЇ КУЛЬТУРИ ШКОЛЯРІВ НА УРОКАХ АЛГЕБРИ В ОСНОВНІЙ ШКОЛІ

Стаття присвячена проблемі розвитку математичної культури у учнів на уроках алгебри в основній школі, необхідності формування математичної культури учня в процесі навчання математики та розробці методичних рекомендацій щодо вирішення цієї проблеми.

Ключові слова: *культура, математична культура, математична підготовка, методичні принципи.*

Вступ

У процесі навчання математики в середній школі учень повинен не тільки опанувати алгоритми, методи розв‘язання або вникнути в їхню суть, він також повинен оволодіти певним рівнем математичної культури. За останні роки з'явилися роботи, присвячені проблемам розвитку математичної культури педагогів, студентів ВНЗ (майбутніх економістів, інженерів). Велика кількість публікацій з даної проблеми належать видатним ученим і педагогам А. Анго, А.Н. Крилову, Л.Д. Кудрявцеву, А.Д. Мишкіс, Я.Б. Зельдович, І.М. Яглому.

Питаннями розвитку математичної культури у школярів займалися такі вчені-педагоги як Дж. Ікрамов, В.І. Снегурова, Х.Ш. Шіхаліев. В наукових роботах, присвячених дослідженню з даної теми міститься наступне:

- Теоретичні відомості психологічної особливості віку учнів
- Аналіз поширених методик та практик для формування належного рівня математичної культури учнів
- Аналіз можливих причин виникнення проблем у формуванні математичної культури учнів

• Розробка різних підходів до побудови уроку, системи задач, підходів для розвитку математичної культури учнів.

Аналіз практики навчання математики показує, що рівень розвитку математичної культури учнів знижується щороку. Учні не проявляють належного інтересу до навчання, не отримують навичок самостійної роботи з математики. Розрив між потребами сучасного суспільства у фахівцях та рівнем знань учнів утворюють ще одну проблему сучасного навчання.

Тому, розвиток математичної культури учнів залишається важливим компонентом в процесі навчання математики.

Основна частина

Поняття «культура» є багатозначне та не має єдиного та повного означення. Культура — невід‘ємна частина життя людини. Наука сьогодні стає загальнодоступним та необхідним компонентом професійної складової спеціаліста. Її можна розглядати як знакову систему, мета якої полягає у описі процесів навколишнього світу. Математична культура — частина загальнолюдської культури. Її формування слід будувати на принципі спрямованості математичної культури людини у бік її професійної діяльності.

1957 рік можна вважати роком зародження розуміння проблеми формування математичної культури школярів. Вона розглядалася Н.Я. Віленкіним і І.М. Ягломом. Актуальні підходи до аналізу математичної культури особистості представлені в дослідженнях Дж. Ікрамова, В.Н. Худякова, Т.Г. Захарової та ін.

На думку Дж. Ікрамова, знання в мисленні кодуються у вигляді понять, суджень та умовиводів, а в мові виражаються за допомогою слів, словосполучень і пропозицій. Тому в якості параметрів, важливих компонентів математичної культури виступають математичне мислення і математична мова. Термін «математична мова» вживається для позначення всіх основних засобів, за допомогою яких в усній та письмовій формі виражається математична думка. Отже, в поняття «математична мова» включаються логіко-математичні символи, графічні схеми, креслення, а також наукові терміни разом з елементами природної мови [2].

В.Н. Худяков у своєму дисертаційному дослідженні розглядає математичну культуру учня початкової профільної освіти (спеціаліста) як суттєвий елемент загальної культури сучасної людини. В.Н. Худяков вважає, що математична культура виростає із загальної культури, яка є середовищем і матеріалом для становлення першої [3].

Т.Г. Захарова крім математичного знання виділяє чотири основні аспекти, які розширюють знання математики до рівня математичної культури. Це виділення людиною математичної ситуації з усього розмаїття ситуацій у навколишньому світі, наявність математичного мислення, використання всього розмаїття засобів математики та готовність до творчого саморозвитку, рефлексія [1].

Поняття «математична культура» недостатньо висвітлене в методичній літературі. Не достатньо чітко сформульовані концепції визначення сутності, змісту цього поняття чи підходу до визначення його структури. Його, зазвичай, розглядають і як набір визначених математичних знань, умінь і навичок, володіння математичною мовою, і як математичну самоосвіту, вміння застосовувати математику у професійній діяльності, і як присвоєні математичні цінності та ін.

Аналіз психолого-педагогічної, філософської, спеціальної літератури, дисертаційних робіт, дає можливість виділити наступні компоненти математичної культури:

1. *Обчислювальна культура*, яка включає вміння оперувати з раціональними числами без допомоги ЕОТ, раціонально обчислення виразів, прикидку результатів, усні обчислення.
2. *Алгоритмічна культура*, яка включає знання, уміння, навички та розуміння сутності мови, алгоритму, вміння володіння прийомами та засобами для запису та використання алгоритму, вміння зводити задачі до алгоритму та інтерпретувати отримані результат.
3. *Графічна культура*, яка потребує вміння зчитування інформації з графіків, діаграм та їхню інтерпретацію.
4. *Логічна культура*, що включає широкий комплекс вимог, серед яких вміння логічно вірно будувати свої умовиводи, виділяти ключові завдання, складати подібні задачі, розчленовувати задачі на більш прості та узагальнювати її.
5. *Мовна культура* потребує вміння чітко висловлювати свою думку, грамотно будувати свою мову, використовувати математичні терміни та їх суть.

Тобто, при використанні терміну «математична культура» школяра будемо розуміти комплекс якостей, систему культур, які у свою чергу формують саму математичну культуру.

Ряд даних вмінь, якими повинен володіти учень, можуть слугувати основою для визначення методичних принципів способів розвитку математичної культури учнів на уроках алгебри основної школи.

Сформулюємо принципи розвитку математичної культури у учнів основної школи:

1. *Використання комбінованих, нестандартних завдань, направлених на повторення вже пройденого матеріалу і закріплення матеріалу, що вивчається.*

Завдання такого типу повинні активізувати пізнавальну активність учнів, навчити їх нестандартно мислити, дивитися на задачу глобально, привчити розбивати задачу на елементарні підзадачі. При цьому діти повинні навчитися будували логічний ланцюжок міркувань таким чином, щоб простими та невеликими кроками прийти до шуканого результату.

2. *Використання математичного диктанту як обов'язкового етапу уроку.*

Математичний диктант кожного уроку можливо та необхідно робити якісно різним. Це обумовлено тим, що даний етап уроку може бути направлений на розвиток логічної культури (логічні задачі), розвиток математичного мовлення (правопис термінів), розвиток обчислювальної культури (завдання на обчислення), графічної культури (відшукання точок за графіком, робота з таблицями). Математичний диктант не повинен забирати багато часу на уроці — не більше 5 хвилин. Також, він може представляти будь-який етап уроку.

3. *Постійне удосконалення обчислювальної техніки учнів впродовж усього терміну їх навчання.*

Часто учням основної школи важко інтерпритувати числову інформацію в різних формах. Наприклад, $\frac{3}{7} = 0.43$, $\frac{1}{6} = 17\%$, $2 * 10^{-4} = 0.0002$. Учні доволі рідко використовують раціональний підрахунок, не розкривають для себе увесь потенціал перетворення числових виразів (властивості арифметичних дій, основна властивість дробу та ін.). Учні недостатньо впевнено володіють обчислювальними стратегіями (поєднанням усних, письмових та інструментальних обчислень), нехтують проміжним контролем і перевіркою правдоподібності результату. Помилки в розрахунках збивають зі шляху, наміченого для досягнення результату, а увага, зосереджена на осмисленні ходу розв'язання задачі, переноситься на подолання труднощів, пов'язаних з обчисленнями [4].

4. *Використання міжпредметних зв'язків на уроках алгебри.*

Корисно пропонувати учням завдання, які перетинаються з іншими предметами. Можна запропонувати задачі з фізичним змістом. Такі завдання повинні допомогти зацікавити дітей у вивченні математики та інших предметів, показати прикладну сторону предмету, розвити математичну та алгоритмічну мову. Тобто, вміння переводити задачу на мову математики, розв'язувати її за допомогою математики, та переводити відповідь назад до мови запиту.

Інтеграція завдань з математики та української мови допоможе учням розвити математичну мову та мислення. Учням можна під час теми «Тотожні перетворення виразів» запропонувати такі завдання:

a) Провідмінювати дріб $3\frac{157}{1116}$;

b) Написати історію з використанням математичних термінів.

5. *Систематизація та узагальнення знань учнів.*

Один з важливих принципів формування математичної культури учня – це формування у нього цілісної уяви про предмет математики та весь вивчаємий матеріал. Учень повинен мати цілісне уявлення з кожної змістовної лінії, яку він вивчав (числова, тотожні перетворення та ін.), а не окремі знання, які не перетинаються один з одним.

Для учнів корисно надавати класифікацію того чи іншого поняття.

— Класифікація основних прийомів розв'язання задач відносно їх типу.

— Класифікація розв'язання рівнянь відносно їхнього виду.

— Класифікація перетворень виразів.

Корисним є складання вчителем, учнями разом з вчителем та самими учнями самостійно узагальнюючих таблиць, як у темі «Розширення відомостей про функцію числового аргументу».

Висновки

Проведений аналіз психолого-педагогічної літератури та практики навчання математики дозволив сформулювати певні принципи, що необхідно використовувати вчителям в процесі навчання математики задля розвитку математичної культури школярів на уроках алгебри в основній школі.

Література

[1] *Захарова Т.Г.* Формирование математической культуры в условиях профессиональной подготовки студентов вуза: автореф. дис. ... канд. пед. наук / Т.Г. Захарова. — Саратов, 2005.

[2] *Икрамов Дж.* Математическая культура школьника. Методические аспекты проблем развития мышления и языка при обучении математике / Дж. Икрамов. — Ташкент: Укитувчи, 1981. — 278 с.

[3] *Худяков В.Н.* Формирование математической культуры учащихся начального профильного образования: дис. ... д-ра пед. наук / В.Н. Худяков. — Магнитогорск, 2001.

[4] *Ларина Л.Н.* Роль учителя в формировании вычислительной культуры учащихся [Електроний ресурс]: фестиваль педагогических идей «Открытый урок» / Л.Н. Ларина. — 2007. — Режим доступа к журналу: http://festival.1september.ru/articles/412071/

УДК 37.016:51

Беседін Б.Б., Пономарьова А.О.

[1] *кандидат педагогічних наук, доцент кафедри геометрії та МВМ, ДВНЗ «ДДПУ»*

[2] *студентка 5 курсу фізико-математичного факультету, ДВНЗ «ДДПУ»*

e-mail: besedin_boris@ukr.net, ponomarevalina1991@mail.ru

УЗАГАЛЬНЕННЯ ТА СИСТЕМАТИЗАЦІЯ ЗНАНЬ ПРИ ВИВЧЕННІ АЛГЕБРИ 7-9 КЛАСІВ

Стаття присвячена проблемі узагальнення та систематизації знань учнів при вивченні курсу алгебри 7-9 класів, необхідності узагальнення та систематизації в процесі навчання математики та розробці методичних рекомендацій щодо вирішення цієї проблеми.

Ключові слова: *узагальнення, систематизація, процес навчання.*

Вступ

Останнім часом все більше приділяється увага узагальненню і систематизації матеріалу, за допомогою якого учні не стільки повторюють пройдений матеріал, скільки приводять поняття в струнку систему, розкривають зв'язки і відношення між її елементами та набувають нові знання. Систематизація та узагальнення займає важливе місце у навчанні, розвитку мислення та пам'яті, але на уроках математики цьому відводиться незначна роль. Цим обумовлюється актуальність теми роботи, проблема якої в тому, щоб виявити та обґрунтувати можливості подальшого вдосконалення методики систематизації та узагальнення знань учнів при вивчені курсу алгебри 7-9 класів.

Питанням систематизації знань займались ще видатні педагоги минулого, такі як Я.А.Коменський, Дістервег А. та ін. Вперше задача формування в учнів системи наукових знань, а не кускових, ізольованих представлень була чітко сформульована в кінці 30-х років, коли серед принципів навчання з'явився принцип систематичності та послідовності. Над проблемами узагальнення та систематизації працювали: дидакти І.Я. Лернер, В.О. Онищук та методисти В.П. Іржавцева, Л.Я. Федченко та інші [3, 5, 6].

Аналіз шкільної практики навчання, відповідей абітурієнтів під час складання вступних іспитів свідчить про те, що відсутність чіткої системи знань не є поодиноким явищем. Значна частина вчителів не достатньо займається цією проблемою, інші розуміють систематизацію досить односторонньо, зводячи її до організації уроків узагальнюючого повторення. Узагальнююче повторення дуже часто підміняється простим повторенням матеріалу, в процесі якого учні розв'язують вправи безпосередньо взяті із відповідних контрольних робіт. Тому узагальнення та систематизація знань були і залишаються важливими компонентами в процесі навчання математики.

Основна частина

Питання узагальнення і систематизації – давня гносеологічна, психологічна і педагогічна проблема. Я.А. Коменський не одноразово в своїх працях підкреслював необхідність дотримуватись послідовності у вивченні матеріалу. Він вважав, що вся сукупність навчальних занять, повинна бути старанно розподілена на класи так, щоб попереднє завжди відкривало дорогу наступному і освітлювало йому шлях [4].

В формальній логіці під процесом узагальнення розуміють виділення загального в предметах і явищах дійсності і основане на цьому мислене об'єднання їх одне з одним. Відбувається віднесення предметів, що мають певну ознаку до групи.

Узагальнення відіграє надзвичайно важливу роль у процесі навчання. Насамперед на основі узагальнення учні засвоюють наукові поняття. У психології поняттям називається відображення загальних і істотних властивостей предметів та явищ дійсності, тобто, поняття - це узагальнення, які формуються в процесі пізнавальної діяльності людини взагалі і, зокрема, в навчанні. Щоб засвоїти поняття про певні предмети і явища, необхідно визначити в них найбільш загальні й істотні ознаки. Засвоєння учнями окремих понять ще не приводить до оволодіння основами наук, яке є одним з основних завдань загальноосвітньої школи. Опанувати основи тієї чи іншої науки - це означає засвоїти систему понять, правил, законів, які відображають причиново-наслідкові зв'язки між предметами і явищами реального світу. Вивчення системи знань – одна з найактуальніших проблем дидактики.

Система знань в учнів виробляється головним чином на основі дидактичного принципу систематичності у навчанні, який передбачає засвоєння знань, навичок і вмінь у певному логічному зв'язку.

П.К. Анохін вважає, що системою можна назвати тільки комплекс таких вибірково включених компонентів, у яких взаємодія та взаємовідношення приймають характер взаємного сприяння компонентів для отримання сфокусованого корисного результату. Таким чином, результат є невід'ємним та вирішальним компонентом системи, інструментом, який будує упорядковану взаємодію між двома іншими її компонентами [1].

Розглянувши зміст сучасного шкільного курсу алгебри можна виділити наступні основні методичні лінії в 7-9 класах: дійсні числа, тотожні перетворення, рівняння і нерівності, елементарні функції.

Об'єктами вивчення першої змістовної лінії є числа і дії з ними.

Об'єктами другої – вирази і дії з ними. Вирази складаються за допомогою чисел і букв (тобто властивості об'єктів, с котрими оперуємо, дещо змінилися), але дії з ними виконуються по тих же правилах, що і з числами.

При глибокому і усвідомленому засвоєнні першої змістовної лінії друга не викликає проблем у учнів. Опанування третьої змістовної лінії – це робота з виразами, але з врахуванням характерних властивостей нових об'єктів - рівнянь і нерівностей. Четверта змістовна лінія концентрує всі знання попередніх змістовних ліній.

Курс алгебри характеризується підвищенням теоретичного рівня навчання, поступовим посиленням ролі теоретичних узагальнень і дедуктивних висновків. Прикладна спрямованість курсу забезпечується систематичним зверненням до прикладів, що розкривають можливості вживання математики до вивчення дійсності і вирішення практичних завдань. Практична орієнтація курсу виражається в цілеспрямованому розвитку необхідного математичного апарату.

Щороку вивчення алгебри починається з повторення системи узагальнених і систематизованих за змістом курсу знань, умінь і навичок учнів за всі попередні роки навчання. Після достатнього повторення проводиться контроль і корекція знань, умінь і навичок з обов'язковим виведенням не лише необхідності, але і можливості поглиблення і подальшого розширення знань, умінь і навичок учнів.

Від узагальнення і систематизації на кожному уроці необхідно переходити до динамічного узагальнення відповідної теми в цілому, а від узагальнення і систематизації однієї, двох, трьох і так далі тем – до узагальнення і систематизації розділу і змістовної лінії. І кожного разу узагальнення і систематизація проводяться з обов'язковим виділенням і активізацією головних, основних знань, навичок і умінь учнів.

Кожний рік закінчується узагальненням і систематизацією знань, навичок і умінь учнів. Залежно від ролі і місця в учбовому процесі ми розрізнятимемо наступні етапи узагальнення і систематизації знань:

1. *Первинні узагальнення* – найбільш елементарні узагальнення, здійснювані під час сприйняття і усвідомлення учбового матеріалу.

2. *Локальні, або понятійні узагальнення* здійснюються на уроці в процесі роботи над засвоєнням нових понять (на етапі осмислення знань).

3. *Міжпонятійні (або поурочні) узагальнення і систематизація*, які включають означення між загальних, що вивчаються, загальних і суттєвих

ознак і властивостей, в переході від менш загальних до загальніших понять, в об'єднанні засвоєних понять в системи, в розкритті зв'язків і стосунків між елементами даної системи, розміщенні їх в певному порядку і раціональній послідовності.

4. *Тематичні узагальнення і систематизації* повинні забезпечити засвоєння цілої системи або циклу понять, що вивчаються протягом довгого часу, складових зміст значних розділів програми.

5. *Підсумкові узагальнення і систематизації* служать для встановлення зв'язків між системами знань, засвоєними в процесі опанування цілого курсу, засвоєння цілісної системи знань по окремих галузях наук.

6. *Міжпредметні узагальнення і систематизації* здійснюються по ряду родинних предметів (наприклад, математиці, фізиці, хімії і ін.) на спеціальних уроках міжпредметного узагальнювального повторення [2].

Таким чином, по мірі вивчення математики в школі необхідність систематизації та узагальнення знань значно зростає. Без впровадження в навчання цього процесу неможливо досягнути тих цілей, які ставить школа в навчанні математиці. Сформулюємо основні положення систематизації та узагальнення знань при вивченні алгебри 7-9 класів:

1. Систему вправ підручників доцільно поповнити *питаннями і завданнями систематизуючого характера.* Доцільно пропонувати учням вправи спрямовані на узагальнення і конкретизацію алгебраїчних понять, їх класифікацію, виділення спільного і відмінного між поняттями і їх властивостями, а також різноманітні завдання, розв'язання яких передбачає певну творчу діяльність. При виконанні цих вправ учню необхідно із усіх засвоєних ним раніше алгебраїчних знань відібрати необхідні для розв'язання даної задачі, вибрати найбільш зручний спосіб розв'язання, знайти вихід із нестандартної ситуації.

2. Систематизація знань має відбуватися не тільки на заключному етапі вивчення окремої теми алгебри 7-9 класів у формі уроків систематизації знань. Така *робота має проводитися на різних етапах вивчення теми*, з метою включення окремих понять, перетворень, методів розв'язання задач в загальну систему знань. Основу систематизації знань учнів повинне складати створення цілісних уявлень по лінії алгебри 7-9 класів з обов'язковим включенням цих знань до системи знань у цілому.

3. Доцільно формувати в учнів вміння здійснювати всебічний аналіз задач алгебри 7-9 класів з метою оптимального вибору методів їх розв'язання. Кожний з методів має як свої переваги, так і недоліки. Знання про них повинні бути власністю не тільки вчителя, а й учня. Учні мають розуміти, що

жоден з методів не є панацеєю.

4. *Використання узагальнюючих схем, таблиць, та інших засобів наочності.*

5. *Повторення* доцільно систематично проводити для підвищення якості навчання. Воно не повинно обмежуватись лише закріпленням знань, навичок і вмінь учнів, а має забезпечити засвоєння учнями системи знань. Для цього потрібно широко застосовувати як поточне, так тематичне і заключне повторення.

Висновки

Узагальнення і систематизація знань на уроках математики є важливим і необхідним етапом у процесі формування знань, навичок, вмінь і підготовки підростаючого покоління до життя. На основі узагальнення діти встановлюють загальні та істотні ознаки вивчених предметів, явищ, процесів, переходять від чуттєво-конкретних і вузьких понять до більш загальних і широких. Немає необхідності та й неможливо запам'ятати учням всю суму вивчених у школі знань, як понять, так і всього обсягу фактичного матеріалу. Зате для участі в продуктивній суспільно корисній праці і підготовці до навчання в наступних класах учням важливо усвідомити і запам'ятати найбільш істотне і загальне для ряду вивчених понять, законів, правил, уміти їх конкретизувати і застосовувати в житті, а також оволодіти методами наук.

Література

[1] *Анохін П.К.* Вибрані праці:філософські аспекти теорії функціональної системи / П.К. Анохін. — М.: Наука, 1978. — 400 с.

[2] *Деркачева Н.Я.* Использование методики динамичного обобщения и систематизации знаний учащихся по математике [Електроний ресурс]: Фестиваль педагогических идей «Открытый урок» / Н.Я. Деркачева. — 2007. — Режим доступа к журналу: http://festival.1september.ru/articles/524557/

[3] *Іржавцева В.П.* Систематизація та узагальнення знань учнів у процесі вивчення математики / В.П. Іржавцева, Л.Я. Федченко. — К.: Рад. Шк., 1998. — 205 с.

[4] *Коменський Я.А.* Велика дидактика / Я.А. Коменський. — К.: Рад. Шк., 1979. — 475 с.

[5] *Лернер І.Я.* Дидактичні основи методів навчання / І.Я. Лернер. — М.: Педагогіка, 1986. — 185 с.

[6] *Онищук В.О.* Узагальнення і систематизація знань учнів (4-8 класи) / В.О. Онищук. — К.: Рад. Шк., 1970. — 134 с.

УДК 37.016:51

Дугінова Ю.О., Беседін Б.Б.

[1] *студентка 5 курсу фізико-математичного факультету, ДВНЗ «ДДПУ»*

[2] *кандидат педагогічних наук, доцент кафедри геометрії та МВМ, ДВНЗ «ДДПУ»*

e-mail: duginova_yuliya@ukr.net, besedin_boris@ukr.net

РЕАЛІЗАЦІЯ ПРИНЦИПУ НАОЧНОСТІ З МЕТОЮ ФОРМУВАННЯ ПРОСТОРОВИХ УЯВЛЕНЬ НА УРОКАХ СТЕРЕОМЕТРІЇ

Стаття присвячена дослідженню проблеми використання наочності з метою формування просторових уявлень учнів. Розглянуто наочні засоби, які можуть бути використані на уроках стереометрії, розроблено методичні рекомендації щодо їх використання.

Ключові слова: *принцип наочності, просторові уявлення.*

Вступ

Одним з найважливіших завдань викладання геометрії в школі є формування і розвиток в учнів просторових уявлень, а також здібності та вміння виконувати операції над просторовими об'єктами. Досягнення цієї мети важливо не тільки для тих учнів, які в подальшому присвятять себе тим чи іншим технічним професіям, але й для тих, хто вибере інші спеціальності.

Слабкий розвиток просторових уявлень дає о собі знати вже в школі, ускладнюючи вивчення ряду шкільних предметів, а в діяльності дорослої людини він іноді виявляється причиною багатьох невдач.

Проблему формування і розвитку просторової уяви досліджували відомі психологи Б.Г. Ананьєв, Л.Л. Гурова, І.Я. Каплунович, Г.І. Лернер, Б.Ф. Ломов, Ф.Н. Шемякін, І.С. Якиманська та інші; методисти-математики О.М. Астряб, Р.В. Гангнус, В.О. Далінгер, Н.Ф. Четверухін та інші. Одним із найефективніших засобів розвитку просторових уявлень учнів є використання наочності. Принцип наочності в навчанні досліджувався в працях класиків педагогічної думки Я. Коменського, Й. Песталоцці, А. Дістервега, К.Д. Ушинського та інших.

Сучасними педагогами обґрунтована необхідність використання принципу наочності на всіх етапах процесу навчання: при поясненні нового матеріалу, при закріпленні знань, формуванні вмінь і навичок, при виконанні домашніх завдань, при контролі засвоєння навчального матеріалу. З розвитком інформаційних технологій, зокрема, персонального комп'ютеру відкриваються нові можливості використання наочності, тому проблема розробки наочності залишається актуальною на сьогоднішній день.

Основна частина

На основі чуттєвого пізнання заданих просторових співвідношень за допомогою складної системи розумових дій людина створює нові просторові образи і висловлює їх в словесній чи графічній формі (у вигляді схем, креслень, малюнків, ескізів). Це досягається спеціальною діяльністю просторового уявлення, що забезпечує сприйняття заданих просторових співвідношень, їх уявну переробку (перетворення) і створення на цій основі нових просторових образів. Наочність сприяє формуванню образу, а отже і просторовим уявленням.

У звичайному, побутовому значенні слово «наочний» означає такий, якого можна побачити, тобто одержати зорове сприймання. Однак в педагогіці наочне розуміється таким, що у складному об'єкті ми можемо виокремити, виділити прості елементи, кожен з яких для нас є певним первинним чуттєвим образом. Тоді предмет ми розглядаємо як певну сукупність цих чуттєвих елементів [2, с. 101]. У психолого-педагогічній літературі виділяють різні види наочності, які істотно різняться своїм змістом і створюють різні умови для виникнення образів:

- *Натуральні (речові) моделі та їх перспективні зображення* є простими замінниками реальних об'єктів, з якими вони зберігають повну схожість. Наочний характер цих моделей проявляється в тому, що на їх основі створюються образи реальних об'єктів, цілком доступних безпосередньому спостереженню.
- *Умовні графічні зображення* на відміну від натуральних (речових) моделей сприяють передачі більш прихованих від безпосереднього сприйняття властивостей досліджуваного об'єкта. Звільнені від конкретних «тілесних» особливостей об'єкта, вони передають головним чином конструкцію (будову) об'єкта, його геометричну форму, пропорції, просторове положення його окремих частин.
- *Знакові моделі* втрачають будь-який безпосередній зв'язок з зображуваним об'єктом. Але це не означає, що знакові моделі не наочні. При їх допомозі відтворюються в чуттєво-доступну, наочну форму різні зв'язки і відношення. [5, с. 33-36]

Проаналізуємо засоби наочності, що можуть бути використані на уроках стереометрії:

- В якості наочності можуть застосовуватися різноманітні *макети геометричних тіл* (каркасні, суцільні). Використання такої наочності не тільки сприяє формуванню в учнів образу того чи іншого геометричного тіла, але й полегшує сприймання теоретичного матеріалу та розв'язання задач (наприклад, вивчення взаємного розміщення прямих у просторі на каркасному макеті паралелепіпеда). Корисно залучати учнів до виготовлення макетів. Так, у посібнику В.І.Ковальова «Саморобні наочні посібники з математики» [2] наводяться креслення та розгортки многогранників і тіл обертання з детальними інструкціями щодо їх виготовлення. Альбом креслень має на меті надати допомогу вчителям математики та викладачам ручної праці в їх спільній роботі по виготовленню навчальних посібників.
- *Рисунок* дає можливість учням правильно розв'язати задачу, зробити певні висновки щодо властивостей тих чи інших просторових об'єктів. У процесі вивчення стереометрії рисунок є одним із засобів засвоєння нового матеріалу, розвинення просторової уяви учнів, і через це дуже важливо навчити їх вільно і свідомо виконувати рисунки геометричних форм, ознайомити їх з ефективними способами виконання таких рисунків.
- Використання *сучасних інформаційні технології*, зокрема комп'ютера, дає можливість моделювати окремі процеси та ситуації, тобто значно розширює можливості використання принципу наочності. На сьогоднішній день існує багато програмних засобів для вивчення математики, зокрема, стереометрії. Серед них програми Microsoft PowerPoint, Maple, MathCAD, Mathematika, Maxima, GeoGebra, GRAN-3D тощо.

На основі зазначених вище психолого-педагогічних аспектів можна виділити наступні методичні рекомендації використання принципу наочності для формування просторових уявлень в курсі стереометрії:

1. *Використання наочності на різних етапах навчального процесу.* На уроці наочні посібники використовуються з різними цілями: для ознайомлення з новим матеріалом, для закріплення знань, умінь, навичок, для перевірки їх засвоєння. На етапі викладення нового матеріалу наочність служить опорою для усвідомлення зв'язків між фактами, явищами, а слово вчителя спонукає до спостереження і спрямовує учнів на осмислення, тлумачення зроблених спостережень. При узагальненні, повторенні вивченого, як правило, джерелом знання виступає розповідь вчителя, а наочність виконує функцію підтвердження, ілюстрації, конкретизації. На етапі закріплення знань, умінь, навичок велике значення

має свідоме виконання учнями рисунків, дослідження взаємного розташування елементів цього рисунка, оскільки це є важливою умовою правильно виконаного розв'язання задачі. Засоби наочності можуть служити зоровою опорою при опитуванні учнів. Наприклад, використовуючи вправи на готових кресленнях, вчитель заощаджує час, збільшує обсяг матеріалу, що розглядається на уроці.

2. *Поєднання різних видів наочності.* Наприклад, якщо вивчається поняття конуса, то в якості наочності може бути застосовано: 1) словесний опис (визначення) цього поняття; 2) об'ємна модель конуса (каркасна або суцільна); 3) його розгортка; 4) зображення конуса або його розгортки на дошці, на папері, на екрані тощо. Всі перераховані об'єкти є моделями, з тієї чи іншої сторони відбивають поняття конуса. Однак, готуючись до конкретного уроку, вчитель вибирає ті з них, з якими легше організувати необхідну роботу учнів, тобто найбільш прості в даний момент для їх сприйняття. Якщо на уроці передбачається почати знайомство з поняттям конуса, то зручними виявляться об'ємні зображення або зображення на екрані. У процесі ж закріплення цього поняття зрозумілі для сприйняття плоскі креслення або словесні описи.
3. *Раціональне використання наочності.* Не треба зловживати наочними засобами, оскільки це може заважати сприйняттю навчального матеріалу або, навіть, гальмувати розвиток абстрактного мислення. Наприклад, презентація Microsoft PowerPoint, що містить зайві деталі (яскравий фон, колір шрифту, ілюстрації) відволікає увагу учнів. Надмірне використання макетів геометричних тіл може привести до того, що учні не сприйматимуть рисунки цих тіл.
4. *Врахування особливостей зображення просторових об'єктів на площині.* Методисти-математики зауважують, що в шкільній практиці немає єдиного загальноприйнятого підходу до виконання рисунків, більш того, багато вчителів приділяють цьому питанню мало уваги, вважаючи його другорядним [3, с. 8]. Способи побудови зображуваної фігури визначені властивостями паралельного проектування. Рельєфність рисунка досягається додержанням певних правил проведення різних ліній. Щоб полегшити учням використання теоретичного матеріалу під час розв'язування стереометричних задач, доцільно елементи просторової фігури, які є плоскими фігурами, виносити на окремий рисунок. Труднощі виникають не тільки при сприйнятті зображення на папері або на дошці, але й на екрані комп'ютера. Проте сучасні інформаційні засоби за допомогою рухомих, динамічних моделей (на відміну від статичних рисунків) дають

можливість учням краще уявити, дослідити певний об'єкт.

5. *Залучення учнів до виготовлення наочності.* Власноручно виготовлені макети, моделі, рисунки сприяють кращому усвідомленню, оскільки учні досконало вивчають геометричні тіла в процесі створення наочності. Корисною для вчителя математики та викладача ручної праці є книжка В.І.Ковальова «Саморобні наочні посібники з математики», де наводяться креслення та розгортки многогранників і тіл обертання з детальними інструкціями щодо їх виготовлення [1]. Поряд з кресленнями моделей складних конструкцій, виготовлення яких можливе в шкільних майстернях з обробки металу і дерева, в альбомі є креслення розгорток геометричних тіл, які можна зробити із паперу. Певні труднощі виникають при розробці учнями наочності за допомогою комп'ютера. Учням доводиться не тільки думати над запропонованим завданням, але й потрібно оволодіти навичками роботи з відповідною комп'ютерною програмою. Однак на сьогоднішній день обґрунтована необхідність навчання основам програмування, підготовки користувачів ПК для розв'язання різних прикладних задач.

Висновки

На основі аналізу психолого-педагогічної літератури розроблено методичні рекомендації щодо створення та використання різноманітних видів наочності (макетів, рисунків, ТЗН) при вивченні курсу стереометрії.

Література

[1] *Каплунович И.Я.* О структуре пространственного мышления при решении математических задач / И.Я. Каплунович // Вопросы психологии. — 1978. — № 3. — С. 75 – 84.

[2] *Ковалев В.И.* Самодельные наглядные пособия по математике / В.И. Ковалев // Альбом чертежей. — М.: Издательство академии педагогических наук РСФСР, 1963. — 169 с.

[3] *Малафіїк І.В.* Дидактика / І.В. Малафіїк // Навчальний посібник. — К.: Кондор, 2005. — 397 с.

[4] *Повзло Н.М.* Проблеми розв'язування стереометричних задач та пояснення їх розв'язання / Н.М. Повзло // Математика в школах України. — 2009. — № 1 (229). — С. 8 – 11.

[5] *Якиманская И.С.* Развитие пространственного мышления школьников / И.С. Якиманская. — М.: Педагогика, 1980. — 240 с.

УДК 37.016:51

Попова Ю.А., Беседін Б.Б.

[1] *студентка 5 курсу фізико-математичного факультету, ДВНЗ «ДДПУ»*

[2] *кандидат педагогічних наук, доцент кафедри геометрії та МВМ, ДВНЗ «ДДПУ»*

e-mail: popova_yulia_a@ukr.net, besedin_boris@ukr.net

ВИКОРИСТАННЯ КООРДИНАТНОГО ТА ВЕКТОРНОГО МЕТОДУ В ШКІЛЬНОМУ КУРСІ ГЕОМЕТРІЇ

Дана стаття присвячена використанню координатному і векторному методам розв'язання задач на уроках геометрії. Об'єктом вивчення є процес вивчення геометрії у загальноосвітній школі. При вивченні даного питання, виявлено, що вивчення координатно-векторного метода буде більш ефективним, якщо використовувати продуману систему задач для формування окремих компонентів метода

Ключові слова: *координатний метод, векторний метод*

Вступ

В геометрії використовується різні методи розв'язання задач – це синтетичний, аналітичний та алгебраїчний методи, метод перетворень, метод використання допоміжної побудови, векторний, координатний метод та інші.

Якщо в геометрії доводиться, як правило, шукати для кожної задачі особливий шлях розв'язання, то в алгебрі та аналітичної геометрії розв'язання проводяться за загальним для всіх задач планом, який пристосовується до будь-якій задачі. Перенесення в геометрію властиву алгебрі алгоритмізованість завдань – становить головну цінність координатно-векторного методу. Значимість цих методів полягає в тому, що їх застосування позбавляє від необхідності вдаватися до наочного уявлення складних просторових зображень, що спрощує розв'язання задач.

Проблемою координатно-векторного розв'язування задач займалася досить велика когорта вчених. Г.Б. Лудіна вважає, що використовувати координатну площину вже слід з п'ятого класу вивчення математики, що «сприяє реалізації внутріпредметних зв'язків між алгеброю і геометрією, дозволяє зводити побудови до обчислень, що інколи більш коротким шляхом приводить до мети» [4, с. 43]. Однак С. Смогоржевский застерігає нас, що розв'язання задач даним методом не завжди є простіше та гарніше тих, що може запропонувати елементарна геометрія [5].

Питанням використання векторного та координатного методу при розв'язанні задач займалися Кушнір І.А., С. Шестакович, Майоров В.М., Скопец З.А., Крайзман М.Л., Готман Е.Г., Глаголева Е.Г., Кирилов А.А., Гельфанд І.М. [1, 2, 3].

Координатно-векторний метод грає важливу роль при вирішенні школярами багатьох геометричних і фізичних задач, закладає основу для розв'язання задач у просторі. В школі за допомогою векторного та координатного методу розв'язується багато різноманітних задач, які не мають іншого способу розв'язання.

Основна частина

Координатно-векторний метод розв'язання задач порівняно з іншими методами, дуже часто дозволяє уникнути штучних побудов, спрощує розв'язання багатьох геометричних задач і доведення теорем. Він зручний також тим, що не потрібно використовувати велику кількість формул, ознак і властивостей фігур. Координатно-векторний метод в шкільному курсі геометрії застосовується досить рідко, хоч і є досить зручним.

Сутність координатного методу, як і векторного, полягає в тому, що геометрична задача перекладається на мову алгебри, і її розв'язання зводиться до розв'язання рівнянь, нерівностей чи їх систем. Щоб застосовувати координатно-векторний метод до розв'язання задачі, треба виконати три кроки:

1) Сформулювати задачу на мові векторів чи координат.
2) Перетворити алгебраїчний вираз.
3) Перекласти знайдений результат на мову геометрії.

Перш ніж переводити задачу на координатно-векторну мову, необхідно встановити, чи доцільно розв'язувати задачу саме координатно-векторним методом.

Розв'язувати задачу цими методами має сенс, якщо це задачі:

- пов'язані з доведенням паралельності прямих (відрізків);
- в яких треба довести, що деяка точка ділить відрізок у певному відношенні або є його серединою;
- в яких треба обґрунтувати, що три точки A, B і C лежать на одній прямій;
- в яких треба довести, що даний чотирикутник $ABCD$ – паралелограм;
- на знаходження довжини відрізка;
- на знаходження величини кута;
- на відшукання геометричних місць точок;
- на доведення залежностей між лінійними елементами.

Для гарного оволодіння учнями координатно-векторним методом необхідно ще на пропедевтичному етапі сформувати в учнів уявлення про можливість довільного вибору системи координат, в процесі розв'язання задач. Правильний вибір осей координат потрібен в першу чергу для того, щоб спростити алгебраїчні операції, а не перетворити легку задачу на дуже складну. При відсутності цієї форми навчальної діяльності процес розв'язання задач буде відбуватися більш повільно і його результати будуть менш ефективними, що в свою чергу призведе до погіршення засвоєння навчального матеріалу.

Принцип цілісності передбачає те, що учні повинні уявляти геометричні фігури, як об'єкти в координатній площині, за кожним рівнянням учні повинні бачити деяку фігуру та вміти інтерпретувати результати отриманих геометричним методом, за допомогою побудов.

Принцип послідовності полягає в тому що використовуються спеціально підібрані задачі, які направлені на формування окремих компонентів методу (спочатку задачі на формування одного компоненту, потім двох, трьох і т.д.) а систематичні повторення та використання координатного методу для розв'язання задач в різних темах геометрії передбачає розвиток мислення усіх учнів, у тому числі і найслабкіших.

Для оволодіння будь-якого матеріалу з довільної дисципліни, так і координатно-векторного методу, важливим є вивчення як теорії так і завдання практичного характеру. Проте враховуючи специфіку координатно-векторного методу ми вважаємо доцільним основний акцент приділяти практичній діяльності учнів, тобто розв'язування задач. використовуючи координатний та векторний методи.

Принцип наочності допомагає розвитку абстрактного мислення, забезпечує зв'язок між конкретним та абстрактним, тому дидактика стверджує,що наочність є вихідним моментом навчання. ефективність цього принципу залежить від правильного вибору засобів наочності та від їх правильного застосування в процесі навчання.

Для оволодіння вмінням переводити з геометричної мови на координатно-векторну та навпаки необхідно знати, як то чи інше координатно-векторне співвідношення можна виразити на геометричній мові, для формування цих навичок ми пропонуємо розробити таблицю з такими переводами і використовувати її на перших етапах.

Для підвищення ефективності уроків геометрії необхідно використовувати як традиційні засоби наочності так і технічні, пов'язані з новими інформаційними технологіям, що полегшують роботу вчителя, підвищують пізнавальний інтерес учнів, що в свою чергу підвищує ефективність навчального процесу. При вивченні дій над векторами можливо організувати самостійну пізнавальну діяльність учнів з використанням групових та ігрових форм її організації.

Координатно-векторний метод в шкільному курсі геометрії використовується для досить легких та типових задач. Тому доречно було б розглянути на факультативних заняттях більш складні та цікаві задачі, для поглиблення знань про координатно-векторний метод.

Висновки

Координатно-векторний метод значно полегшує розв'язування задач, а деяких випадках задачу взагалі неможливо розв'язати іншими способами, розвиває просторові уявлення та внутріпредметні зв'язки між алгеброю і геометрією.

Література

[1] *Гельфанд И.М.* Метод координат / И.М. Гельфанд, Е.Г. Глаголева, А.А. Нириллов. — М.: Наука. — 1973. — 88 с.

[2] *Готман Э.Г.* Решение геометрических задач аналитическим методом / Э.Г. Готман, З.А. Скопец. — М.: Просвещение. — 1979. — 128 с.

[3] *Єгорова Г.О.* Векторний і координатний методи розв'язування задач / Г.О. Єгорова // Математика в школе. — 2001. — №5. — С. 5 – 11.

[4] *Лудина Г.Б.* К изучению перемещений на координатной плоскости / Г.Б. Лудина // Математика в школе. — 1983. — №2 — С. 43.

[5] *Смогоржевский А.С.* Метод координат / А.С. Смогоржевский. — М.: Государственное издательство технико-теоретической литературы. — 1952. — 42 с.

УДК 37.016:[514.122+514.142]

Кадубовський О.А., Романкевич М.В.

[1] *кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри геометрії та МВМ, ДВНЗ «ДДПУ»*

[2] *студент 5 курсу фізико-математичного факультету, ДВНЗ «ДДПУ»*

e-mail: kadubovs@ukr.net

ОСНОВНІ МЕТРИЧНІ ЗАДАЧІ НА ПРЯМІ У ПЛОЩИНІ В АФІННИХ КООРДИНАТАХ

Дана стаття присвячена методичним і теоретичним аспектам вивчення теми «метричні задачі на пряму в площині в афінних координатах», яка, з урахуванням сучасної тенденції, є невід'ємною складовою при викладанні об'єднаного курсу з лінійної алгебри та аналітичної геометрії для студентів фізико-математичних спеціальностей ВНЗ.

Ключові слова: *афінна система координат на площині, метричні коефіцієнти, матриця Грама, метричні задачі, прямі в площині.*

> «Ничто не в силах остановить математика. Не остановился он даже перед авторитетом Декарта, искривив прямоугольную систему координат, названную в честь величайшего математика и мыслителя XVII века *декартовой.*»
>
> **Р. Глазер**

Вступ

Сьогодні перед вітчизняними ВНЗ, що готують майбутніх викладачів, зокрема викладачів фізики та математики, постало надважливе завдання – формувати фахівців з високим рівнем професійної компетентності.

Традиційно, дисципліни «Аналітична геометрія» і «Лінійна алгебра та аналітична геометрія» є нормативними дисциплінами у навчальних планах підготовки фахівців фізико-математичних спеціальностей педагогічних ВНЗ.

Загально-визнаною вимогою сучасності є теза про те, що студенти повинні бачити та усвідомлювати «... не лише стрункість і красу теоретичної думки, а й можливості застосування апарату аналітичної геометрії в інших розділах математики, для розв'язання практичних задач у різних галузях виробництва й економіки, оскільки *подальша викладацька діяльність* студентів-математиків», зокрема які здобувають освітньо-кваліфікаційний рівень магістра за спеціальністю 8.04020101 Математика*, «... *передбачатиме навчання спеціалістів різного профілю*» [6].

На превеликий жаль, відповідними освітньо-професійними програмами підготовки фахівців для зазначених дисциплін не передбачено змістових модулів «Метричні задачі на ... в афінних координатах». Можливо саме тому в більшості «рекомендованих» підручниках, методичних посібниках та збірниках задач з аналітичної геометрії (кількість яких постійно і стрімко зростає) для студентів педагогічних (і не лише) ВНЗ метричні задачі розглядають виключно в декартових прямокутних координатах. Але ж зазначені фахівці повинні володіти методами аналітичної геометрії, зокрема багатовимірної [3] , не лише евклідового, а й афінного просторів.

Одним із підтверджень сучасної тенденції об'єднання традиційно різних розділів математики в одну дисципліну, з метою досягнення наочності алгебраїчних абстракцій та лаконічності геометричних доведень, є те, що тема «Метричні задачі на ... в афінних координатах» є невід'ємною складовою об'єднаного курсу з лінійної алгебри та аналітичної геометрії для студентів фізико-математичних спеціальностей «класичних» університетів [12, 5].

Особливістю курсу аналітична геометрія є його (майже безпрецедентна) геометрична наочність. І тому, саме через цю обставину, для розвитку більш фундаментальних математичних уявлень студентів необхідно здійснювати цілеспрямоване навчання взаємопов'язаному використанню і «взаємоперекладам» між природними для цих математичних курсів формами інформації: геометричною наочністю і символьними образами.

Ще у 1970 р. (у журналі «Успехи математических наук», том XXV, вип. 1 (151)) Л.Д. Кудрявцев зазначив, що «Именно, курс геометрии излагается, как правило, более интуитивно, приводимые в нем доказательства часто основываются на наглядных соображениях, необходимость использования в ряде вопросов методов других разделов математики (алгебры, анализа) затушевывается». До зазначеного додамо, що в багатьох випадках правильні інтуїтивно-наочні уявлення взагалі витісняють строго-математичні обгрунтування деяких фактів (не аксіоматичного характеру). Не можна не погодитися й з тим, що такий одночасно різний підхід до вимог математичної строгості дійсно викликає ускладнення та «подвійні стандарти» у студентів, що вивчають цю дисципліну. Втішає те, що зазначеної вади позбавлена достатня кількість гарних підручників та курсів лекцій з аналітичної геометрії. Найбільш яскравими з них, на думку авторів, є [1, 2, 10, 11, 7]. Як зазначив П.С. Александров в [1]: «Что касается Б.Н. Делоне, то богатство его геометрических идей делает его книгу [2] (совместную с Д.А. Райковым) образцом геометрического мышления и изложения, который сохраняет и на многие годы сохранит свое значение».

В [2] Б.Н. Делоне наголошує на необхідності широкого розвитку афінної точки зору оскільки зв'язок аналітичної геометрії з такими важливими розділами математики, як аналіз (зокрема функціональний) і алгебра, відбувається саме через афінну і метричну геометрію. Слід зазначити, що в [2] крім звичайного матеріалу, який відноситься до різних видів рівнянь прямої та різних задач на пряму, зокрема метричних, коротко викладено й поняття про метод скорочених позначень для прямої.

Розділи «Метричні задачі на ... в афінних координатах» вперше було запропоновано П.С. Моденовим і О.С. Пархоменком у 1976 р. в збірнику задач з аналітичної геометрії [8]. Причому всі задачі таких розділів авторами було класифіковано як *задачі теоретичного характеру і підвищеної складності*. У відповідному розділі [8] для зазначених задач наведено розв'язки-відповіді, які пізніше також було наведено і в [9] у вигляді доволі повного довідкового матеріалу. За словами П.С. Александрова «... всякому понятно, что нельзя овладеть таким предметом, как аналитическая геометрия, не решая относящиеся к нему основные задачи. *Но решению задач надо научить*, ...» [1].
В роботі [4] викладено алгоритмічний підхід (при застосуванні координатно-векторного методу) до розв'язування певного кола метричних задач за допомогою введення афінної системи координат. Представлена стаття, в певному сенсі, є її логічним продовженням. Отже, **метою** даної статті є:
1) виокремлення та доповнення «ключових» задач вправами теоретичного характеру, які б (в певному розумінні) «повно» охоплювали основні метричні задачі «на прямі в площині»;
2) наведення (з дотриманням належного рівня строгості) розв'язань зазначених задач в афінних координатах за алгоритмами, які без змін (проте з очевидними значними спрощеннями) доцільно використовувати при розв'язуванні цих задач в косокутних та прямокутних координатах.

Основні поняття та попередні відомості

Нагадаємо [1], що `узагальненою декартовою` (або ж афінною) системою координат на площині називають трійку $(O;\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2})$, де O – деяка фіксована точка даної площини – *початок координат*, а $\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2}$ – *базисні вектори* (впорядкована пара неколінеарних векторів з початком у точці O), напрями яких визначають додатні напрями координатних осей OX (*абсцис*) і OY (*ординат*) відповідно – рис. 1 *а*).

В подальшому будемо вважати, що $\omega=\angle(\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2})\in(0^0;180^0)$, а вісь OY одержується в результаті повороту осі OX навколо точки O на кут ω у напрямку проти руху годинникової стрілки.

Площину з вибраною на ній узагальненою декартовою (афінною) системою координат називають (афінною) *координатною площиною.*

Добре відомо, що кожній точці M афінної площини в єдиний спосіб можна поставити у відповідність впорядковану пару чисел (x, y), які є коефіцієнтами розкладу її радіус-вектора $\overrightarrow{OM}$ за базисними векторами $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}$.
І навпаки, кожній впорядкованій парі чисел (x, y) ставиться у відповідність єдина точка площини, що є кінцем радіус-вектора $x \cdot \overrightarrow{e_1} + y \cdot \overrightarrow{e_2}$.

З огляду на зазначену зіставленність, кожну точку афінної площини ототожнюють з відповідною їй впорядкованою парою чисел, які й називають афінними координатами точки.

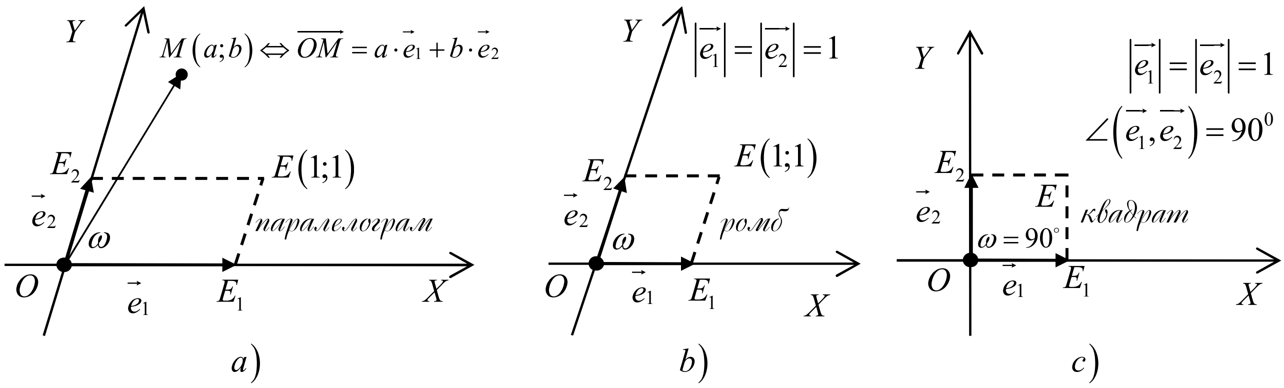


Рис. 1: $a)$ – афінна система координат (АСК); $b)$ – косокутна система координат (КСК); $c)$ – прямокутна система координат (ПСК)

Означення 1. *Афінну систему координат (АСК) називатимемо косокутною (КСК), якщо (при фіксованій одиниці довжини) всі її базисні вектори є ортами, тобто* $|\overrightarrow{e_1}| = |\overrightarrow{e_2}| = 1$ *– рис.* $1\ b)$.
Інколи говорять, що КСК породжується нормованим базисом.

Означення 2. *Косокутну систему координат називатимемо прямокутною (ПСК), якщо базисні вектори є (попарно) ортогональними, тобто* $\forall i \neq j\ \angle(\overrightarrow{e_i}, \overrightarrow{e_j}) = 90^0$ *– рис.* $1\ c)$.
Часто говорять, що ПСК породжується ортонормованим базисом.

Означення 3. [*11*] *Метричними коефіцієнтами* g_{ij} *базису* $\{\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}\}$ *(на площині) називають наступні скалярні добутки*

$$g_{ij} = \langle \overrightarrow{e_i}, \overrightarrow{e_j} \rangle = |\overrightarrow{e_i}| \cdot |\overrightarrow{e_j}| \cdot \cos\angle(\overrightarrow{e_i}, \overrightarrow{e_j}) \quad \forall i, j \in \{1, 2\}. \tag{1}$$

Матрицю $G = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix}$, *елементами якої є зазначені добутки, називають матрицею Грама метричних коефіцієнтів базису* $\{\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}\}$.

З урахуванням (1), мають місце рівності

$$g_{11} = |\overrightarrow{e_1}|^2, \quad g_{22} = |\overrightarrow{e_2}|^2, \quad g_{12} = g_{21} = |\overrightarrow{e_1}| \cdot |\overrightarrow{e_2}| \cdot \cos\angle(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}). \qquad (2)$$

І тому матриця Грама метричних коефіцієнтів *нормованого* базису (матриця Грама для КСК) має вид

$$G = \begin{pmatrix} 1 & \cos\omega \\ \cos\omega & 1 \end{pmatrix}, \quad \omega = \angle(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}). \qquad (3)$$

Матриця Грама коефіцієнтів *ортонормованого* базису (матриця Грама для ПСК) є одиничною матрицею

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \qquad (4)$$

Добре відомо (напр. [12]), що якщо два вектори (на площині) задано своїми координатами $\overrightarrow{a} = \{a_1; a_2\}$, $\overrightarrow{b} = \{b_1; b_2\}$ відносно базису $\{\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}\}$, то їх скалярний добуток можна обчислити за формулою

$$\left\langle \overrightarrow{a}, \overrightarrow{b} \right\rangle = \sum_{i=1}^{2} \sum_{j=1}^{2} g_{ij} a_i b_j = (a_1 \;\; a_2) \circ G \circ \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = A^T \circ G \circ B, \qquad (5)$$

де A, B — `матриці-стовпці`, елементами яких є координати векторів $\overrightarrow{a}$ і $\overrightarrow{b}$ відповідно; A^T – `матриця-рядок`, що є транспонованою до матриці A.

Оскільки $\langle \overrightarrow{a}, \overrightarrow{a} \rangle = |\overrightarrow{a}|^2$, то наслідком з (5) є наступна формула

$$|\overrightarrow{a}| = \sqrt{(a_1 \;\; a_2) \circ G \circ \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}} = \sqrt{A^T \circ G \circ A}. \qquad (6)$$

Слід зазначити, що для кожного базису, зокрема $\{\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}\}$, визначник $\|G\|$ матриці Грама є строго додатним. В останньому не важко переконатися, оскільки

$$\|G\| = g_{11} g_{22} - g_{12}^2 = |\overrightarrow{e_1}|^2 \, |\overrightarrow{e_2}|^2 - (|\overrightarrow{e_1}| \, |\overrightarrow{e_2}| \cos\angle(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}))^2 =$$
$$= |\overrightarrow{e_1}|^2 \, |\overrightarrow{e_2}|^2 \sin^2\angle(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}) > 0.$$

Більш детально з наведеними поняттями та фактами можна ознайомитися, наприклад в [1 – 3], [5], [11].

При викладі подальшого матеріалу (без додаткових пояснень) ми будемо використовувати елементарні відомості з «афінних задач на прямі в площині» [10], найпростіші факти «векторної алгебри» і «терії визначників», основні дії з матрицями та певні факти «метричної теорії векторів», з якою можна детально ознайомитися в [9, 11].

Основна частина

В умовах всіх наведених нижче задач координати даних точок і векторів та рівняння прямих задано відносно фіксованої афінної системи координат АСК $(O; \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$, g_{ij}, $(i = 1, 2)$ – метричні коефіцієнти базису $\{\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}\}$, $G = (g_{ij})$ – матриця Грама, $\|G\|$ – визначник матриці Грама, G^{-1} – матриця, обернена до матриці G.

Задача 1. Рівняння прямої l, що проходить через дану точку $L_0(x_0; y_0)$ перпендикулярно заданому вектору $\overrightarrow{n} = \{n_1; n_2\}$

Нехай $(x; y)$ – координати довільної але фіксована точки L прямої l. Тоді очевидно, що вектор $\overrightarrow{L_0L} = \{x - x_0; y - y_0\}$ є перпендикулярним до вектора $\overrightarrow{n} = \{n_1; n_2\}$. І тому (з урахуванням необхідної і достатньої умови ортогональності векторів) координати кожної точки $L(x; y)$ прямої l задовольняють матричному рівнянню

$$(n_1 \;\; n_2) \circ G \circ \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix} = 0,$$

яке в розгорнутому вигляді набуває вид

$$(n_1 g_{11} + n_2 g_{21})(x - x_0) + (n_1 g_{12} + n_2 g_{22})(y - y_0) = 0. \tag{7}$$

Тепер припустимо, що координати $(x'; y')$ певної точки L' задовольняють рівняння (7). Тоді (з урахуванням необхідної і достатньої умови ортогональності векторів) радіус-вектор $\overrightarrow{L_0L'} = \{x' - x_0; y' - y_0\}$ цієї точки є ортогональним до вектора $\overrightarrow{n} = \{n_1; n_2\}$. З останнього й випливає, що кінець $L'(x'; y')$ цього вектора належить прямій l.

Отже, відносно `афінної системи координат` (надалі – АСК) шуканим рівнянням прямої l, яка задовольняє зазначеним умовам, є рівняння (7).

Відносно `косокутної системи координат з координатним кутом` ω (надалі – КСК з КК ω) рівняння (7) набуває вид

$$(n_1 + n_2 \cos\omega)(x - x_0) + (n_1 \cos\omega + n_2)(y - y_0) = 0. \tag{8}$$

Відносно `прямокутної системи координат` (надалі – ПСК) рівняння (7) (або ж рівняння (8) для випадку $\omega = \pi/2$) набуває добре знайомий вид

$$n_1(x - x_0) + n_2(y - y_0) = 0. \tag{9}$$

Зауважимо, що задання прямої у зазначений в цій задачі спосіб, можна тлумачити як «геометричне місце кінців колінеарних векторів зі спільним початком, які є ортогональними до даного (не нульового) вектора».

Нагадаємо, що нормальним (*напрямним*) вектором прямої називають будь-який ненульовий вектор, що є перпендикулярним (*паралельним*) до цієї прямої. Напрямний та нормальний вектор однієї прямої є ортогональними.

Задача 2. Нормальний вектор прямої $l : ax + by + c = 0$

Добре відомо, що в якості напрямного вектора прямої $l : ax + by + c = 0$ завжди можна обрати вектор $\overrightarrow{l} = \{b; -a\}$. Тоді задача про знаходження координат нормального вектора прямої l зводиться до задачі про знаходження вектора $\overrightarrow{n}$, ортогонального до вектора $\overrightarrow{l}$.

Отже, нехай $\{n_1; n_2\}$ – шукані координати нормального вектора $\overrightarrow{n}$ прямої l. Зауважимо, що шукані n_1 і n_2 достатньо знайти з точністю до їх відношення, тобто достатньо знайти відношення $\frac{n_1}{n_2}$.

Для цього скористаємося необхідною і достатньою умовою ортогональності векторів $\overrightarrow{n}$ і $\overrightarrow{l}$ в матричному вигляді $(b \ \vdots -a) \circ G \circ \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \end{pmatrix} = 0$, яка в розгорнутому вигляді набуває вид $(bg_{11} - ag_{21})n_1 + (bg_{12} - ag_{22})n_2 = 0.$ Звідки $n_1 : n_2 = (ag_{22} - bg_{12}) : (bg_{11} - ag_{21})$. Таким чином, відносно АСК в якості шуканих координат $\{n_1; n_2\}$ нормального вектора прямої l можна обрати зазначено пару чисел, тобто вектор

$$\overrightarrow{n} = \{ag_{22} - bg_{12}; bg_{11} - ag_{21}\}. \tag{10}$$

Відносно КСК з КК ω в якості нормального вектора можна обрати вектор

$$\overrightarrow{n} = \{a - b\cos\omega; b - a\cos\omega\}, \tag{11}$$

а відносно ПСК – добре знайомий вектор виду

$$\overrightarrow{n} = \{a; b\}. \tag{12}$$

Задача 3. [4] Умови перпендикулярності двох прямих $l_1 : a_1x + b_1y + c_1 = 0$ **і** $l_2 : a_2x + b_2y + c_2 = 0$

Дві зазначені прямі є перпендикулярними тоді і лише тоді, коли ортогональними є їх напрямні вектори $\overrightarrow{l_1} = \{b_1; -a_1\}$ і $\overrightarrow{l_2} = \{b_2; -a_2\}$. Тому з урахуванням умови (10), необхідну і достатню умову перпендикулярності прямих l_1 і l_2 (заданих рівняннями відносно АСК) можна подати у вигляді

$$l_1 \perp l_2 \Leftrightarrow a_1a_2g_{22} - g_{12}(a_1b_2 + a_2b_1) + b_1b_2g_{11} = 0. \tag{13}$$

Відносно КСК з КК ω умова (13) набуває вид

$$l_1 \perp l_2 \Leftrightarrow a_1a_2 - (a_1b_2 + a_2b_1)\cos\omega + b_1b_2 = 0, \tag{14}$$

а відносно ПСК –

$$l_1 \perp l_2 \Leftrightarrow a_1a_2 + b_1b_2 = 0. \tag{15}$$

Задача 4. [4] Рівняння прямої m, що проходить через дану точку $M_0(x_0;y_0)$ перпендикулярно до заданої прямої $l: ax+by+c=0$

Оскільки пряма m є перпендикулярною до прямої $l: ax+by+c=0$, то в якості нормального її вектора можна обрати напрямний вектор $\overrightarrow{l}=\{b;-a\}$ прямої l. Тому, з урахуванням задачі 1 (рівняння (7) при $n_1=b,\ n_2=-a$), відносно АСК шукане рівняння прямої m має вид

$$(bg_{11}-ag_{21})(x-x_0)+(bg_{12}-ag_{22})(y-y_0)=0. \tag{16}$$

Відносно КСК з КК ω рівняння (16) набуває вид

$$(b-a\cos\omega)(x-x_0)+(b\cos\omega-a)(y-y_0)=0, \tag{17}$$

а відносно ПСК

$$b(x-x_0)-a(y-y_0)=0. \tag{18}$$

Вправа 1. [4] Покажіть, що рівняння прямої, яка проходить через точку $M_0(x_0;y_0)$ і є перпендикулярно до осі OX, можна подати рівнянням виду

$$g_{11}\cdot(x-x_0)+g_{12}\cdot(y-y_0)=0, \tag{19}$$

яке відносно КСК з КК ω набуває вид

$$(x-x_0)+\cos\omega\cdot(y-y_0)=0, \tag{20}$$

а відносно ПСК –

$$x-x_0=0. \tag{21}$$

Вправа 2. [4] Покажіть, що рівняння прямої, яка проходить через точку $M_0(x_0;y_0)$ і є перпендикулярно до осі OY, можна подати рівнянням виду

$$g_{21}\cdot(x-x_0)+g_{22}\cdot(y-y_0)=0, \tag{22}$$

яке відносно КСК з КК ω набуває вид

$$(x-x_0)\cos\omega+(y-y_0)=0, \tag{23}$$

а відносно ПСК –

$$y-y_0=0. \tag{24}$$

Задача 5. Кут між прямими $l_1: a_1x+b_1y+c_1=0$ і $l_2: a_2x+b_2y+c_2=0$

Шуканий кут (менший з двох суміжних) між прямими l_1 і l_2 можна знайти як кут між напрямними векторами $\overrightarrow{l_1}=\{b_1;-a_1\}$ і $\overrightarrow{l_2}=\{b_2;-a_2\}$ цих прямих. Як відомо, $\cos\angle\left(\overrightarrow{l_1},\overrightarrow{l_2}\right)=$

$$= \frac{\left\langle \overrightarrow{l_1}, \overrightarrow{l_2} \right\rangle}{\sqrt{\left\langle \overrightarrow{l_1}, \overrightarrow{l_1} \right\rangle}\sqrt{\left\langle \overrightarrow{l_2}, \overrightarrow{l_2} \right\rangle}} = \frac{\begin{pmatrix} b_1 & -a_1 \end{pmatrix} \circ G \circ \begin{pmatrix} b_2 \\ -a_2 \end{pmatrix}}{\sqrt{\begin{pmatrix} b_1 & -a_1 \end{pmatrix} \circ G \circ \begin{pmatrix} b_1 \\ -a_1 \end{pmatrix}}\sqrt{\begin{pmatrix} b_2 & -a_2 \end{pmatrix} \circ G \circ \begin{pmatrix} b_2 \\ -a_2 \end{pmatrix}}}.$$

Звідки косинус не тупого кута $\theta = \angle(l_1, l_2)$ можна знайти за формулою

$$\cos\theta = \frac{|b_1 b_2 g_{11} + a_1 a_2 g_{22} - g_{12}(a_1 b_2 + a_2 b_1)|}{\sqrt{b_1^2 g_{11} + a_1^2 g_{22} - 2a_1 b_1 g_{12}}\sqrt{b_2^2 g_{11} + a_2^2 g_{22} - 2a_2 b_2 g_{12}}}. \qquad (25)$$

Відносно КСК з КК ω (25) набуває вид

$$\cos\theta = \frac{|a_1 a_2 + b_1 b_2 - (a_1 b_2 + a_2 b_1)\cos\omega|}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2 - 2a_1 b_1 \cos\omega}\sqrt{a_2^2 + b_2^2 - 2a_2 b_2 \cos\omega}}, \qquad (26)$$

а відносно ПСК

$$\cos\theta = \frac{|a_1 a_2 + b_1 b_2|}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}\sqrt{a_2^2 + b_2^2}}. \qquad (27)$$

Не важко перевірити, що відносно АСК косинус, синус і тангенс кута θ між зазначеними прямими можна подати за допомогою співвідношень

$$\cos\theta = -\frac{\begin{Vmatrix} g_{11} & g_{12} & a_1 \\ g_{21} & g_{22} & b_1 \\ a_2 & b_2 & 0 \end{Vmatrix}}{\sqrt{\begin{Vmatrix} g_{11} & g_{12} & a_1 \\ g_{21} & g_{22} & b_1 \\ a_1 & b_1 & 0 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} g_{11} & g_{12} & a_2 \\ g_{21} & g_{22} & b_2 \\ a_2 & b_2 & 0 \end{Vmatrix}}},$$

$$\sin\theta = +\frac{\begin{Vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{Vmatrix} \cdot \sqrt{\begin{Vmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{Vmatrix}}}{\sqrt{\begin{Vmatrix} g_{11} & g_{12} & a_1 \\ g_{21} & g_{22} & b_1 \\ a_1 & b_1 & 0 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} g_{11} & g_{12} & a_2 \\ g_{21} & g_{22} & b_2 \\ a_2 & b_2 & 0 \end{Vmatrix}}}, \quad \operatorname{tg}\theta = -\frac{\begin{Vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{Vmatrix} \cdot \sqrt{\begin{Vmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{Vmatrix}}}{\begin{Vmatrix} g_{11} & g_{12} & a_1 \\ g_{21} & g_{22} & b_1 \\ a_2 & b_2 & 0 \end{Vmatrix}} \qquad (28)$$

Задача 6. Відстань від точки $M_0(x_0; y_0)$ до прямої $l : ax + by + c = 0$

Нехай $L(x'; y')$ – довільна але фіксована точка прямої l. Тоді шукану відстань $\rho(M_0; l)$ від точки M_0 до прямої l можна знайти як модуль проекції вектора $\overrightarrow{M_0 L}$ на нормальний вектор $\overrightarrow{n}$ прямої l. Тобто $\rho(M_0; l) = \frac{\left|\langle \overrightarrow{M_0 L}, \overrightarrow{n} \rangle\right|}{|\overrightarrow{n}|}$.

Використовуючи результати задачі 3, в якості вектора $\overrightarrow{n}$ можна обрати вектор $\overrightarrow{n} = \{ag_{22} - bg_{12}; bg_{11} - ag_{21}\}$. Тому

$$\langle\overrightarrow{M_0L},\overrightarrow{n}\rangle = (x'-x_0\ \ y'-y_0)\circ\begin{pmatrix} g_{11} & g_{12}\\ g_{21} & g_{22}\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix} ag_{22}-bg_{12}\\ bg_{11}-ag_{21}\end{pmatrix}=$$

$$=(x'-x_0\ \ y'-y_0)\circ\begin{pmatrix} g_{11} & g_{12}\\ g_{21} & g_{22}\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix} g_{22} & -g_{12}\\ -g_{21} & g_{11}\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix} a\\ b\end{pmatrix}=$$

$$=(x'-x_0\ \ y'-y_0)\circ G\circ G^{-1}\cdot\|G\|\circ\begin{pmatrix} a\\ b\end{pmatrix}=\|G\|\cdot(a(x'-x_0)+b(y'-y_0)).$$

$$|\overrightarrow{n}|^2=\langle\overrightarrow{n},\overrightarrow{n}\rangle=(ag_{22}-bg_{12}\ \ bg_{11}-ag_{21})\circ\begin{pmatrix} g_{11} & g_{12}\\ g_{21} & g_{22}\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix} ag_{22}-bg_{12}\\ bg_{11}-ag_{21}\end{pmatrix}=$$

$$=(a\ \ b)\circ G^{-1}\cdot\|G\|\circ G\circ G^{-1}\cdot\|G\|\circ\begin{pmatrix} a\\ b\end{pmatrix}=\|G\|^2\cdot(a\ \ b)\circ G^{-1}\circ\begin{pmatrix} a\\ b\end{pmatrix}.$$

Оскільки $\|G\|>0$, $ax'+by'=-c$, то

$$\rho(M_0;l)=\frac{\left|\langle\overrightarrow{M_0L},\overrightarrow{n}\rangle\right|}{|\overrightarrow{n}|}=\frac{|a(x'-x_0)+b(y'-y_0)|}{\sqrt{(a\ \ b)\circ G^{-1}\circ\begin{pmatrix} a\\ b\end{pmatrix}}}=\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{(a\ \ b)\circ G^{-1}\circ\begin{pmatrix} a\\ b\end{pmatrix}}}.$$

Таким чином, відстань від точки $M_0(x_0;y_0)$ до прямої $l: ax+by+c=0$, заданих відносно АСК, можна обчислити за формулою

$$\rho(M_0;l)=\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{(a\ \ b)\circ G^{-1}\circ\begin{pmatrix} a\\ b\end{pmatrix}}}. \tag{29}$$

Відносно КСК з КК ω формула (29) набуває вид

$$\rho(M_0;l)=\frac{\sin\omega\cdot|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2-2ab\cos\omega}}, \tag{30}$$

а відносно ПСК – добре знайому формулу

$$\rho(M_0;l)=\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}. \tag{31}$$

Задача 7. [4] Відстань між двома паралельними прямими $l_1: ax+by+c_1=0$ і $l_2: ax+by+c_2=0$

Нехай $L_2(x_2,y_2)$ – довільна але фіксована точка прямої l_2. Тоді шукану відстань $\rho(l_1;l_2)$ можна знайти як відстань точки L_2 до прямої l_1. Оскільки $ax_2+bx_2=-c_2$, то, з урахуванням формули (29), має місце рівність

$$\rho(L_2;l_1)=\frac{|ax_2+by_2+c_1|}{\sqrt{(a\ \ b)\circ G^{-1}\circ\begin{pmatrix} a\\ b\end{pmatrix}}}=\frac{|c_1-c_2|}{\sqrt{(a\ \ b)\circ G^{-1}\circ\begin{pmatrix} a\\ b\end{pmatrix}}}.$$

Таким чином, відстань між паралельними прямими l_1 і l_2, заданих своїми загальними рівняннями відносно АСК, можна обчислити за формулою

$$\rho(l_1; l_2) = \frac{|c_2 - c_1|}{\sqrt{(a \;\; b) \circ G^{-1} \circ \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}}}. \tag{32}$$

Відносно КСК з КК ω формула (32) набуває вид

$$\rho(l_1; l_2) = \frac{\sin\omega \cdot |c_2 - c_1|}{\sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos\omega}}, \tag{33}$$

а відносно ПСК – добре знайому формулу

$$\rho(l_1; l_2) = \frac{|c_2 - c_1|}{\sqrt{a^2 + b^2}}. \tag{34}$$

Вправа 3. Перевірити, що рівняння прямої l_0, яка відстоїть на однакових відстанях від паралельних прямих $l_1 : ax+by+c_1 = 0$ і $l_2 : ax+by+c_2 = 0$ (заданих своїми рівняннями відносно АСК), можна подати у вигляді

$$l_0 : \; ax + by + c_0 = 0, \text{ де } \quad c_0 = (c_1 + c_2)/2. \tag{35}$$

Вправа 4. Перевірити, що рівняння прямої $\bar{l}$, яка є паралельною до прямих $l_1 : ax + by + c_1 = 0$ і $l_2 : ax + by + c_2 = 0$ (заданих своїми рівняннями відносно АСК) та ділить їх спільний перпендикуляр у відношенні $m : n, \; m, n \in N, m \geqslant n$ (у напрямку від l_1 до l_2), можна подати у вигляді

$$\bar{l} : \; ax + by + \bar{c} = 0, \text{ де } \quad \bar{c} = (mc_2 + nc_1)/(m + n). \tag{36}$$

Вправа 5. Доведіть, що рівняння прямої $\widetilde{l}$, відношення відстаней якої до прямих $l_1 : ax + by + c_1 = 0$ і $l_2 : ax + by + c_2 = 0$ (заданих своїми рівняннями відносно АСК) становить $m : n, \; m, n \in N, m > n$ (у напрямку від l_1 до l_2), можна подати у вигляді (36) або ж

$$\widetilde{l} : \; ax + by + \widetilde{c} = 0, \text{ де } \quad \widetilde{c} = (mc_2 - nc_1)(m - n). \tag{37}$$

Задача 8. [4] Рівняння бісектрис кутів, утворених двома непаралельними прямими $l_1 : a_1x + b_1y + c_1 = 0$ **і** $l_2 : a_2x + b_2y + c_2 = 0$

Нехай $(x'; y')$ – координати довільної але фіксованої точки D, що належить бісектрисі d одного з двох суміжних кутів, утворених прямими l_1 і l_2. Як відомо, відстані довільної точки (D) бісектриси (d) кута до його сторін є рівними, тобто $\rho(D; l_1) = \rho(D; l_2)$. Тому, з урахуванням формули (29), має місце рівність

$$\frac{|a_1x' + b_1y' + c_1|}{\Delta_1} = \frac{|a_2x' + b_2y' + c_2|}{\Delta_2}, \text{ де } \; \Delta_i = \sqrt{(a_i \;\; b_i) \circ G^{-1} \circ \begin{pmatrix} a_i \\ b_i \end{pmatrix}},$$

$i = 1, 2$.

Оскільки $(x';y')$ – поточні координати довільної точки однієї з двох бісектрис, то шукані рівняння бісектрис d_1 і d_2 відносно АСК можна подати у вигляді

$$\begin{aligned} d_1: \quad & \frac{(a_1x+b_1y+c_1)}{\Delta_1} = +\frac{(a_2x+b_2y+c_2)}{\Delta_2}; \\ d_2: \quad & \frac{(a_1x+b_1y+c_1)}{\Delta_1} = -\frac{(a_2x+b_2y+c_2)}{\Delta_2}, \end{aligned} \tag{38}$$

де

$$\Delta_i = \sqrt{(a_i \;\; b_i) \circ G^{-1} \circ \begin{pmatrix} a_i \\ b_i \end{pmatrix}}, \; \forall\, i = 1,2.$$

Шукані рівняння бісектрис d_1 і d_2 відносно КСК з КК ω набувають вид

$$\begin{aligned} d_1: \quad & \frac{(a_1x+b_1y+c_1)}{\sqrt{a_1^2+b_1^2-2a_1b_1\cos\omega}} = +\frac{(a_2x+b_2y+c_2)}{\sqrt{a_1^2+b_1^2-2a_1b_1\cos\omega}}; \\ d_2: \quad & \frac{(a_1x+b_1y+c_1)}{\sqrt{a_1^2+b_1^2-2a_1b_1\cos\omega}} = -\frac{(a_2x+b_2y+c_2)}{\sqrt{a_1^2+b_1^2-2a_1b_1\cos\omega}}, \end{aligned} \tag{39}$$

а відносно ПСК

$$\begin{aligned} d_1: \quad & \frac{(a_1x+b_1y+c_1)}{\sqrt{a_1^2+b_1^2}} = +\frac{(a_2x+b_2y+c_2)}{\sqrt{a_1^2+b_1^2}}; \\ d_2: \quad & \frac{(a_1x+b_1y+c_1)}{\sqrt{a_1^2+b_1^2}} = -\frac{(a_2x+b_2y+c_2)}{\sqrt{a_1^2+b_1^2}}. \end{aligned} \tag{40}$$

Вправа 6. Задано дві прямі $l_1: \; a_1x+b_1y+c_1=0$ і $l_2: \; a_2x+b_2y+c_2=0$, які перетинаються, та точку $M_0(x_0;y_0)$, що не належить жодній з них. Доведіть, що рівняння бісектриси того кута, внутрішності якого належить дана точка M_0, має вид

$$\frac{(a_1x+b_1y+c_1)\cdot \mathrm{sign}F_1(x_0;y_0)}{\Delta_1} = \frac{(a_2x+b_2y+c_2)\cdot \mathrm{sign}F_2(x_0;y_0)}{\Delta_2}, \tag{41}$$

де $F_1(x_0;y_0) = a_1x_0+b_1y_0+c_1$, а $F_2(x_0;y_0) = a_2x_0+b_2y_0+c_2$.

Вправа 7. [4] Доведіть, що рівняння бісектрис координатних кутів АСК можна подати у вигляді

$$m: \; x\sqrt{g_{11}} \pm y\sqrt{g_{22}} = 0, \tag{42}$$

які відносно КСК з КК ω та ПСК набувають вид

$$m: \; y = \pm x. \tag{43}$$

Задача 9. Координати ортогональної проекції P' точки $P(\overline{x};\overline{y})$ на пряму $l : \frac{x-x_0}{m} = \frac{y-y_0}{n}$

Нехай $(x';y')$ – шукані координати точки P'. Оскільки $P' \in l$, то $\begin{cases} x' = mt + x_0 \\ y' = nt + y_0. \end{cases}$ Оскільки вектор $\overrightarrow{P'P} = \{mt + x_0 - \overline{x}; nt + y_0 - \overline{y}\}$ є перпендикулярним до прямої l, а $\overrightarrow{l} = \{m;n\}$ – напрямний вектор прямої l, то вектори $\overrightarrow{P'P}$ і $\overrightarrow{l}$ є ортогональними. Тому має місце рівність

$$\left(mt + x_0 - \overline{x} \vdots nt + y_0 - \overline{y}\right) \circ G \circ \begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix} = 0.$$

Звідки $\quad t \cdot \begin{pmatrix} m & n \end{pmatrix} \circ G \circ \begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overline{x} - x_0 & \overline{y} - y_0 \end{pmatrix} \circ G \circ \begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix}$, або ж

$$t = \frac{\begin{pmatrix} \overline{x}-x_0 & \overline{y}-y_0 \end{pmatrix} \circ G \circ \begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} m & n \end{pmatrix} \circ G \circ \begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix}}.$$

Отже, $\quad x' = \dfrac{\begin{pmatrix} \overline{x}-x_0 & \overline{y}-y_0 \end{pmatrix} \circ G \circ \begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} m & n \end{pmatrix} \circ G \circ \begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix}} \cdot m + x_0 = \dfrac{\left(m\overline{x} \vdots m(\overline{y}-y_0)+nx_0\right) \circ G \circ \begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} m & n \end{pmatrix} \circ G \circ \begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix}}.$

Таким чином, шукані координати ортогональної проекції точки $P(\overline{x};\overline{y})$ на пряму $l : \frac{x-x_0}{m} = \frac{y-y_0}{n}$, заданих відносно АСК, можна подати у вигляді

$$x' = \frac{\left(m\overline{x} \vdots m(\overline{y}-y_0)+nx_0\right) \circ G \circ \begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix}}{\Delta}; \quad y' = \frac{\left(n(\overline{x}-x_0)+my_0 \vdots n\overline{y}\right) \circ G \circ \begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix}}{\Delta}, \tag{44}$$

де

$$\Delta = \begin{pmatrix} m & n \end{pmatrix} \circ G \circ \begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix}.$$

Шукані координати x', y' відносно КСК з КК ω набувають вид

$$\begin{aligned} x' &= \frac{m(m\overline{x} + n\overline{y}) + n(nx_0 - my_0) + m\cos\omega(n\overline{x} + m\overline{y} + nx_0 - my_0)}{m^2 + n^2 + 2mn\cos\omega}; \\ y' &= \frac{n(m\overline{x} + n\overline{y}) - m(nx_0 - my_0) + n\cos\omega(n\overline{x} + m\overline{y} - nx_0 + my_0)}{m^2 + n^2 + 2mn\cos\omega}, \end{aligned} \tag{45}$$

а відносно ПСК

$$x' = \frac{m(m\overline{x} + n\overline{y}) + n(nx_0 - my_0)}{m^2 + n^2}; \; y' = \frac{n(m\overline{x} + n\overline{y}) - m(nx_0 - my_0)}{m^2 + n^2}. \tag{46}$$

Вправа 8. [9] Перевірити, що координати ортогональної проекції точки $P(\overline{x};\overline{y})$ на пряму $l: ax+by+c=0$, заданих відносно АСК, можна подати у вигляді

$$x' = \frac{\begin{pmatrix} b\overline{x} \,\vdots\, b\overline{y}+c \end{pmatrix} \circ G \circ \begin{pmatrix} b \\ -a \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} b & -a \end{pmatrix} \circ G \circ \begin{pmatrix} b \\ -a \end{pmatrix}}; \quad y' = -\frac{\begin{pmatrix} a\overline{x}+c \,\vdots\, a\overline{y} \end{pmatrix} \circ G \circ \begin{pmatrix} b \\ -a \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} b & -a \end{pmatrix} \circ G \circ \begin{pmatrix} b \\ -a \end{pmatrix}}. \quad (47)$$

Вправа 9. Показати, що координати точки P'', симетричної точці $P(\overline{x};\overline{y})$ відносно прямої $l: ax+by+c=0$, заданих відносно АСК, можна подати у вигляді

$$x'' = \frac{\begin{pmatrix} b\overline{x} \,\vdots\, 2b\overline{y}+2c+a\overline{x} \end{pmatrix} \circ G \circ \begin{pmatrix} b \\ -a \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} b & -a \end{pmatrix} \circ G \circ \begin{pmatrix} b \\ -a \end{pmatrix}}; \quad y'' = -\frac{\begin{pmatrix} 2a\overline{x}+2c+b\overline{y} \,\vdots\, a\overline{y} \end{pmatrix} \circ G \circ \begin{pmatrix} b \\ -a \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} b & -a \end{pmatrix} \circ G \circ \begin{pmatrix} b \\ -a \end{pmatrix}}. \quad (48)$$

Нагадаємо, що *кутовим коефіцієнтом* k прямої l називають відношення другої до першої координати напрямного вектора $\overrightarrow{l}$ цієї прямої. Оскільки перша координата будь-якого вектора, паралельного до осі OY, дорівнює нулю, то кутовий коефіцієнт коректно визначений (існує) лише для прямих, що не є паралельними до осі OY.

Очевидно, що (відносно АСК) рівняння прямої l, яка проходить через дану точку $L(x_0;y_0)$ та має кутовий коефіцієнт рівний k, можна подати у вигляді $l: \quad y-y_0 = k(x-x_0)$.

Задача 10. Рівняння прямої l, що проходить через дану точку $M_0(x_0;y_0)$ і утворює кут φ з додатним напрямом осі OX

Очевидно, що у випадку $\varphi = 0^0$, шукане рівняння прямої l має вид

$$l: \ y = y_0;$$

якщо $\varphi = \angle(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$, то рівняння прямої має вид

$$l: \ x = x_0;$$

якщо ж $\varphi = 90^0$, то дана задача зводиться до задачі 4, а шукане рівняння прямої (з урахуванням вправи 1) має вид

$$l: \ (x-x_0)g_{11} + (y-y_0)g_{12} = 0.$$

В подальшому достатньо обмежитися розглядом $\varphi \in \left(0^0;180^0\right) \setminus \{90^0;\omega\}$, де $\omega = \angle(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$. Оскільки за припущенням $\varphi \neq \omega$, то шукане рівняння прямої l можна знайти як рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом, тобто як рівняння виду $y-y_0 = k(x-x_0)$ з невідомим кутовим коефіцієнтом k.

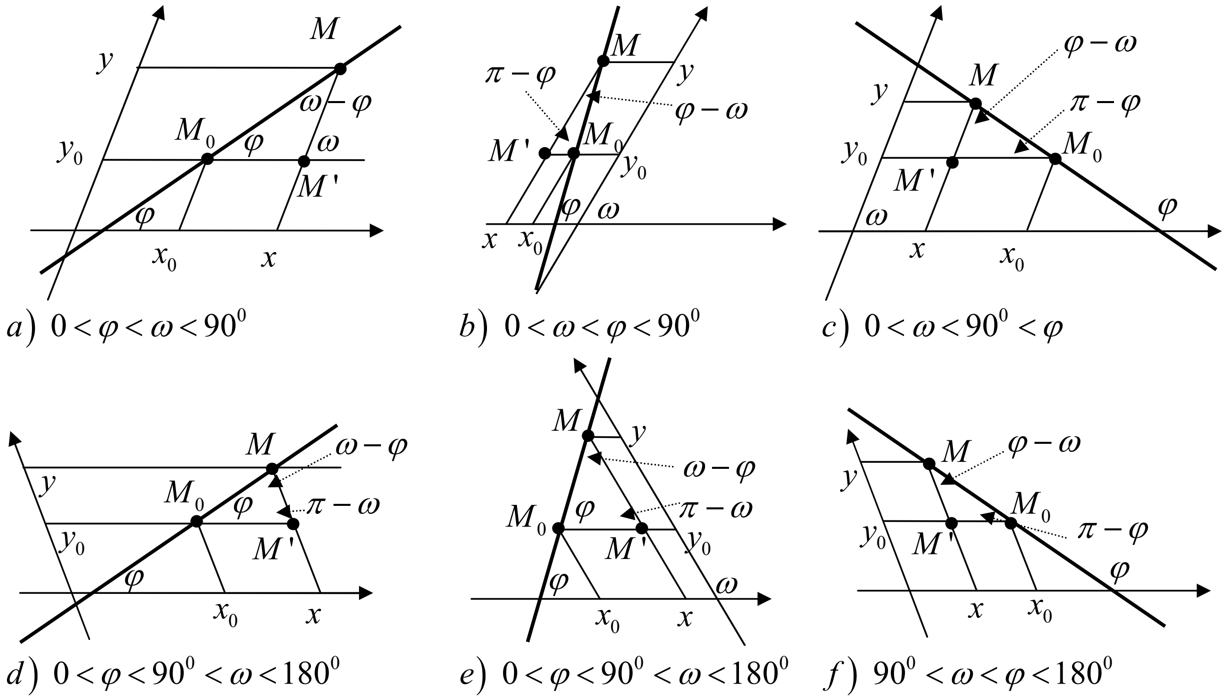


Рис. 2: до задачі 10

Нехай $M(x;y)$ – довільна але фіксована точка шуканої прямої l, яка є відміною від точки $M_0(x_0;y_0)$.

Через кожну з точок M_0, M проведемо прямі, що є паралельними до координатних осей. Пряму, що проходить через точку M паралельно до осі OY, позначимо як m. Оскільки (за припущенням) пряма l не є паралельною до осі OY, то прямі $y=y_0$ та m завжди перетинаються, точку перетину яких позначимо через M'.

Розглянемо $\Delta MM_0M'$. Не важко перевірити, що в кожному із 6-ти суттєво різних випадків (рис. 2. $a)$ — $f)$) мають місце наступні системи рівностей

$$\begin{cases} M'M_0=(x-x_0)\sqrt{g_{11}} \\ M'M=(y-y_0)\sqrt{g_{22}} \\ \angle M'M_0M=\varphi \\ \angle M'MM_0=\omega-\varphi \end{cases} (*), \quad \text{або ж} \quad \begin{cases} M'M_0=-(x-x_0)\sqrt{g_{11}} \\ M'M=(y-y_0)\sqrt{g_{22}} \\ \angle M'M_0M=\pi-\varphi \\ \angle M'MM_0=\varphi-\omega. \end{cases} \quad (**)$$

З $\Delta MM_0M'$ за теоремою синусів має місце рівність

$$\frac{M'M}{\sin\angle M'M_0M}=\frac{M'M_0}{\sin\angle M'MM_0}. \tag{49}$$

Тоді, з урахуванням $(*)$ і $(**)$, рівність (49) набуває вид

$$\frac{(y-y_0)\sqrt{g_{22}}}{\sin\varphi}=\frac{(x-x_0)\sqrt{g_{11}}}{\sin(\omega-\varphi)}, \quad \text{або ж} \quad \frac{(y-y_0)\sqrt{g_{22}}}{\sin(\pi-\varphi)}=\frac{-(x-x_0)\sqrt{g_{11}}}{\sin(\varphi-\omega)} \tag{50}$$

відповідно.

Отже, координати $(x; y)$ довільної точки M шуканої прямої l задовольняють рівняння

$$y - y_0 = \frac{\sqrt{g_{11}}}{\sqrt{g_{22}}} \cdot \frac{\sin\varphi}{\sin(\omega-\varphi)}(x - x_0). \tag{51}$$

Виразимо величину $\sin(\omega - \varphi)$ в термінах вихідних даних.
З урахуванням рівностей $\cos\omega = \frac{g_{12}}{\sqrt{g_{11}}\sqrt{g_{22}}}$, $\sin\omega = \frac{\sqrt{\|G\|}}{\sqrt{g_{11}}\sqrt{g_{22}}}$ (які є безпосереднім наслідком з визначення коефіцієнтів матриці Грама), маємо:
$\sin(\omega-\varphi) = \sin\omega\cos\varphi - \cos\omega\sin\varphi = \frac{\sqrt{\|G\|}}{\sqrt{g_{11}}\sqrt{g_{22}}}\cos\varphi - \frac{g_{12}}{\sqrt{g_{11}}\sqrt{g_{22}}}\sin\varphi$.

За припущенням $\varphi \neq 90^0$. Звідки $\cos\varphi \neq 0$ і тому

$$k = \frac{\sqrt{g_{11}}}{\sqrt{g_{22}}} \cdot \frac{\sin\varphi}{\frac{\sqrt{\|G\|}}{\sqrt{g_{11}}\sqrt{g_{22}}}\cos\varphi - \frac{g_{12}}{\sqrt{g_{11}}\sqrt{g_{22}}}\sin\varphi} = \frac{g_{11}\operatorname{tg}\varphi}{\sqrt{\|G\|} - g_{12}\operatorname{tg}\varphi}. \tag{52}$$

Таким чином, шукане рівняння прямої відносно АСК має вид

$$y - y_0 = \frac{g_{11}\operatorname{tg}\varphi}{\sqrt{\|G\|} - g_{12}\operatorname{tg}\varphi} \cdot (x - x_0). \tag{53}$$

Відносно КСК з КК ω (53) набуває вид

$$y - y_0 = \frac{\operatorname{tg}\varphi}{\sin\omega - \cos\omega\operatorname{tg}\varphi} \cdot (x - x_0), \tag{54}$$

а відносно ПСК – добре знайомий вид

$$y - y_0 = \operatorname{tg}\varphi \cdot (x - x_0). \tag{55}$$

`Геометричний зміст коефіцієнта` k `прямої` $l: y - y_0 = k(x - x_0)$.
З урахуванням (52), не важко пересвідчитись у тому, що для прямої, заданої відносно АСК рівнянням з кутовим коефіцієнтом,

$$k > 0 \Leftrightarrow \psi \in \left(0^0; \omega\right) \text{ і навпаки, } k < 0 \Leftrightarrow \psi \in \left(\omega; 180^0\right).$$

Геометричний зміст кутового коефіцієнта прямої, заданої рівнянням відносно ПСК, полягає у тому, що він дорівнює тангенсу кута φ між прямою та додатним напрямом осі OX. Для прямої, заданої рівнянням відносно АСК,

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{k\sqrt{\|G\|}}{g_{11} + kg_{12}}. \tag{56}$$

Слід також зазначити, що кутовий коефіцієнт прямої, яка є перпендикулярною до осі OX АСК з координатним кутом $\omega = \angle(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}) \neq 90^0$, (або ж як безпосередньо випливає з рівняння (19) вправи 1) становить

$$k = \frac{\sqrt{g_{11}}}{\sqrt{g_{22}}} \cdot \frac{\sin 90^0}{\sin(\omega - 90^0)} = -\frac{\sqrt{g_{11}}}{\sqrt{g_{22}}} \cdot \frac{\sin 90^0}{\sin(90^0 - \omega)} = -\frac{\sqrt{g_{11}}}{\sqrt{g_{22}}} \cdot \frac{1}{\cos\omega} = \boxed{-\frac{g_{11}}{g_{12}}}. \tag{57}$$

Задача 11. [10] Кут між прямими, заданими рівняннями $l_1 : y = k_1x + h_1$ і $l_2 : y = k_2x + h_2$ відносно АСК

З урахуванням задачі 5, косинус *не тупого* кута θ між прямими l_1 і l_2 можна знайти за формулою (25). Поділивши чисельник і знаменник правої частини (25) на добуток $b_1 \cdot b_2$, та прийнявши до уваги рівності $\frac{a_i}{b_i} = -k_i$ ($i = 1; 2$), одержимо

$$\cos\theta = \frac{|g_{11} + k_1k_2g_{22} + g_{12}(k_1 + k_2)|}{\sqrt{g_{11} + k_1^2g_{22} + 2k_1g_{12}}\sqrt{g_{11} + k_2^2g_{22} + 2k_2g_{12}}}. \tag{58}$$

З урахуванням (58) та основної тригонометричної тотожності, синус *не тупого* кута θ між прямими l_1 і l_2 можна знайти за формулою

$$\sin\theta = \frac{\sqrt{\|G\|} \cdot |k_1 - k_2|}{\sqrt{g_{11} + k_1^2g_{22} + 2k_1g_{12}}\sqrt{g_{11} + k_2^2g_{22} + 2k_2g_{12}}}. \tag{59}$$

З урахуванням (58) і (59), тангенс *не тупого* кута між прямими l_1 і l_2, заданих рівняннями відносно АСК, можна знайти за формулою

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{\sqrt{\|G\|} \cdot |k_1 - k_2|}{|g_{11} + k_1k_2g_{22} + g_{12}(k_1 + k_2)|}. \tag{60}$$

Відносно КСК з КК ω (60) набуває вид

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{\sin\omega \cdot |k_1 - k_2|}{|1 + k_1k_2 + (k_1 + k_2)\cos\omega|}, \tag{61}$$

а відносно ПСК

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{|k_1 - k_2|}{|1 + k_1k_2|}. \tag{62}$$

Задача 12. [10] Умови перпендикулярності прямих $l_1 : y = k_1x + h_1$ і $l_2 : y = k_2x + h_2$ в термінах їх кутових коефіцієнтів k_1 і k_2

З урахуванням необхідної і достатньої умови перпендикулярності прямих, заданих своїми загальними рівняннями відносно АСК (умова (13) із задачі 3) та рівностей $\frac{a_i}{b_i} = -k_i$ ($i = 1; 2$), або ж з урахуванням рівності (60), необхідну й достатню умову перпендикулярності прямих l_1 і l_2, заданих своїми рівняннями (з кутовим коефіцієнтом) відносно АСК, можна подати у вигляді

$$l_1 \perp l_2 \Leftrightarrow g_{11} + k_1k_2g_{22} + g_{12}(k_1 + k_2) = 0 \Leftrightarrow k_2 = -\frac{g_{11} + k_1g_{12}}{g_{21} + k_1g_{22}}. \tag{63}$$

Відносно КСК з КК ω у вигляді

$$l_1 \perp l_2 \Leftrightarrow 1 + k_1k_2 + (k_1 + k_2)\cos\omega = 0 \Leftrightarrow k_2 = -\frac{1 + k_1\cos\omega}{\cos\omega + k_1}, \tag{64}$$

а відносно ПСК –

$$l_1 \perp l_2 \Leftrightarrow k_1k_2 = -1. \tag{65}$$

Задача 13. Рівняння прямої l, яка відстоїть від початку координат на відстані $p>0$, а її нормальний вектор утворює кут α з додатним напрямом осі OX

Нехай $(x';y')$ – координати основи перпендикуляра, опущеного з початку координат на пряму l. Тоді $\overrightarrow{n}=\{x';y'\}$ – нормальний вектор прямої l. За умовою пряма l відстоїть від початку координат на відстані $p>0$ і тому $|\overrightarrow{n}|=p$. Звідки має місце матрична рівність

$$\begin{pmatrix} x' & y' \end{pmatrix}\circ G\circ\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}=p^2. \tag{66}$$

З іншого боку, оскільки вектор $\overrightarrow{n}$ утворює з додатним напрямом осі OX (з вектором $\overrightarrow{e_1}=\{1;0\}$) кут α, то з урахуванням (66), має місце рівність

$$\frac{\begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}\circ G\circ\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}}{\sqrt{g_{11}}\sqrt{\begin{pmatrix} x' & y' \end{pmatrix}\circ G\circ\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}}}=\cos\alpha\Leftrightarrow\frac{g_{11}x'+g_{12}y'}{\sqrt{g_{11}}\cdot p}=\cos\alpha \tag{67}$$

Нехай далі $(x;y)$ – координати довільної точки прямої l. Тоді вектори $\overrightarrow{n}=\{x';y'\}$ та $\overrightarrow{l}=\{x-x';y-y'\}$ є ортогональними, і тому шукане рівняння прямої l можна подати у матричному вигляді

$$\begin{pmatrix} x' & y' \end{pmatrix}\circ G\circ\begin{pmatrix} x-x' \\ y-y' \end{pmatrix}=0\Leftrightarrow\begin{pmatrix} x' & y' \end{pmatrix}\circ G\circ\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} x' & y' \end{pmatrix}\circ G\circ\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}=0.$$

З урахуванням (67), останнє рівняння можна подати у вигляді

$$(g_{11}x'+g_{21}y')\,x+(g_{12}x'+g_{22}y')\,y-p^2=0\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\sqrt{g_{11}}\frac{g_{11}x'+g_{12}y'}{\sqrt{g_{11}}\cdot p}x+\sqrt{g_{22}}\frac{g_{12}x'+g_{22}y'}{\sqrt{g_{22}}\cdot p}y-p=0\Leftrightarrow$$

$$\sqrt{g_{11}}\cos\alpha\cdot x+\sqrt{g_{22}}\cos\beta\cdot y-p=0, \tag{68}$$

де β – кут, який утворює вектор $\overrightarrow{n}$ з додатним напрямом осі OY (з вектором $\overrightarrow{e_2}=\{0;1\}$).

Позначимо далі $\omega=\angle(\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2})$. Оскільки $\beta=\pm(\alpha-\omega)$ і $\cos\beta=\cos(-\beta)$, то, з урахуванням рівностей $\cos\omega=\frac{g_{12}}{\sqrt{g_{11}}\sqrt{g_{22}}}$, $\sin\omega=\frac{\sqrt{\|G\|}}{\sqrt{g_{11}}\sqrt{g_{22}}}$, маємо рівність
$\cos\beta=\cos(\alpha-\omega)=\cos\alpha\cos\omega+\sin\alpha\sin\omega=\cos\alpha\cdot\frac{g_{12}}{\sqrt{g_{11}}\sqrt{g_{22}}}+\sin\alpha\cdot\frac{\sqrt{\|G\|}}{\sqrt{g_{11}}\sqrt{g_{22}}}$

Таким чином, шукане рівняння прямої l відносно АСК має вид

$$\sqrt{g_{11}}\cos\alpha\cdot x+\left(\cos\alpha\cdot\frac{g_{12}}{\sqrt{g_{11}}}+\sin\alpha\cdot\frac{\sqrt{\|G\|}}{\sqrt{g_{11}}}\right)\cdot y-p=0. \tag{69}$$

Відносно КСК з КК ω рівняння (69) набуває вид

$$\cos\alpha \cdot x + (\cos\alpha \cdot \cos\omega + \sin\alpha \cdot \sin\omega) \cdot y - p = 0, \tag{70}$$

а відносно ПСК – добре знайомий вигляд

$$\cos\alpha \cdot x + \sin\alpha \cdot y - p = 0. \tag{71}$$

Задача 14. Зведення загального рівняння прямої $l : ax + by + c = 0$ до нормального виду

Під нормальним рівнянням прямої $l : ax + by + c = 0$ будемо розуміти рівняння прямої l виду

$$l : \sqrt{g_{11}} \cos\alpha \cdot x + \sqrt{g_{12}} \cos\beta \cdot y - p = 0, \tag{72}$$

де p – відстань від початку координат до прямої l, а α і β – кути, які утворює нормальний вектор прямої l (початок якого співпадає з початком O АСК) з додатними напрямами осей OX і OY відповідно.

Як відомо, в ПСК зведення загального рівняння прямої $l : ax+by+c = 0$ до нормального виду досягається завдяки множенню обох частин загального рівняння прямої на нормуючий множник $\mu = \dfrac{-\operatorname{sign} c}{\sqrt{a^2 + b^2}}$. Покажемо, що в якості нормуючого множника у випадку АСК необхідно обрати величину

$$\mu = \frac{-\operatorname{sign} c}{\sqrt{(a\ \ b) \circ G^{-1} \circ \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}}}. \tag{73}$$

Дійсно:

1) з урахуванням формули (29), $\mu \cdot c = \dfrac{(-\operatorname{sign} c) \cdot c}{\sqrt{(a\ \ b) \circ G^{-1} \circ \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}}} = -\rho(O; l) = -p$;

2) $\cos\alpha = \cos\angle(\overrightarrow{n}, OX_+) = \cos\angle(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{n}) =$

$$= \frac{\begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \circ G \circ \begin{pmatrix} ag_{22} - bg_{12} \\ bg_{11} - ag_{21} \end{pmatrix}}{\sqrt{g_{11}} \cdot \|G\| \cdot \sqrt{(a\ \ b) \circ G^{-1} \circ \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}}} = \frac{a \cdot \|\cancel{G}\|}{\sqrt{g_{11}} \cdot \|\cancel{G}\| \cdot \sqrt{(a\ \ b) \circ G^{-1} \circ \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}}};$$

3) аналогічно

$$\cos\beta = \cos\angle(\overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{n}) = \frac{b \cdot \|\cancel{G}\|}{\sqrt{g_{22}} \cdot \|\cancel{G}\| \cdot \sqrt{(a\ \ b) \circ G^{-1} \circ \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}}}.$$

Таким чином, для зведення загального рівняння прямої $l: ax+by+c=0$ до нормального виду необхідно:

1) помножити обидві частини загального рівняння прямої l на нормуючий множник (73);
2) помножити та розділити чисельник і знаменник першого доданку на $\sqrt{g_{11}}$;
3) помножити та розділити чисельник і знаменник другого доданку на $\sqrt{g_{22}}$.

Задача 15. Рівняння прямих, що проходять через дану точку $M_0(x_0;y_0)$ під кутом θ ($0<\theta<\frac{\pi}{2}$) до даної прямої $l: y=kx+h$

Оскільки шукані прямі m_1 і m_2 утворюють рівні кути θ з даною прямою l, то, з урахуванням (63) із задачі 12, їх кутові коефіцієнти k_1 і k_2 задовольняють умову

$$\operatorname{tg}\theta=\frac{\sqrt{\|G\|}\cdot|k_i-k|}{|g_{11}+k_ikg_{22}+g_{12}(k_i+k)|}\Leftrightarrow \operatorname{tg}\theta=\pm\frac{\sqrt{\|G\|}\cdot(k_i-k)}{g_{11}+k_ikg_{22}+g_{12}(k_i+k)},\quad (74)$$

звідки маємо: $\operatorname{tg}\theta=-\frac{\sqrt{\|G\|}\cdot(k_1-k)}{g_{11}+k_1kg_{22}+g_{12}(k_1+k)}\ \Rightarrow\ k_1=\frac{k\sqrt{\|G\|}-(g_{11}+kg_{12})\operatorname{tg}\theta}{\sqrt{\|G\|}+(g_{21}+kg_{22})\operatorname{tg}\theta}$

$$\operatorname{tg}\theta=+\frac{\sqrt{\|G\|}\cdot(k_2-k)}{g_{11}+k_2kg_{22}+g_{12}(k_2+k)}\ \Rightarrow\ k_2=\frac{k\sqrt{\|G\|}+(g_{11}+kg_{12})\operatorname{tg}\theta}{\sqrt{\|G\|}-(g_{21}+kg_{22})\operatorname{tg}\theta}.$$

І тому рівняння прямих m_1 і m_2 (відносно АСК) можна подати у вигляді

$$m_1,m_2:\ y-y_0=\frac{k\sqrt{\|G\|}\mp(g_{11}+kg_{12})\operatorname{tg}\theta}{\sqrt{\|G\|}\pm(g_{21}+kg_{22})\operatorname{tg}\theta}(x-x_0).\quad (75)$$

Відносно КСК з КК ω рівняння прямих (75) набувають вид

$$m_1,m_2:\ y-y_0=\frac{k\sin\omega\mp(1+k\cos\omega)\operatorname{tg}\theta}{\sin\omega\pm(\cos\omega+k)\operatorname{tg}\theta}(x-x_0),\quad (76)$$

а відносно ПСК – рівняння виду

$$m_1:\ y-y_0=\frac{k-\operatorname{tg}\theta}{1+k\operatorname{tg}\theta}(x-x_0),\ \ m_2:\ y-y_0=\frac{k+\operatorname{tg}\theta}{1-k\operatorname{tg}\theta}(x-x_0),\quad (77)$$

Вправа 10. Покажіть, що відносно АСК рівняння прямої l_2, яка є симетричною до прямої $l_1: y-y_0=k_1(x-x_0)$ відносно прямої $l: y-y_0=k(x-x_0)$, можна подати у вигляді $y-y_0=k'(x-x_0)$, де

$$k'=k_1+2(k-k_1)\cdot\frac{g_{11}+g_{12}(k+k_1)+g_{22}kk_1}{g_{11}+2k_1g_{12}+k(2k_1-k)g_{22}}.\quad (78)$$

Зауважимо, що шукана пряма існує завжди. Тому у випадку коли $g_{11}+2k_1g_{12}+k(2k_1-k)g_{22}=0$, рівняння шуканої прямої має вид $x-x_0=0$, оскільки на площині `існує єдина` пряма, яка проходить через точку $(x_0;y_0)$ і для якої кутовий коефіцієнт не визначено (через паралельність до осі OY).

Більше того, має місце простий спосіб знаходження рівнянь бісектрис кутів, утворених прямими $x = x_0$ і $l_1 : y - y_0 = k_1(x - x_0)$. А саме, кутові коефіцієнти зазначених бісектрис є коренями квадратного рівняння (відносно k): $g_{11} + 2k_1 g_{12} + k(2k_1 - k)g_{22} = 0$.

Задача 16. Рівняння прямих, що проходять через дану точку $M_1(x_1; y_1)$ та відстоять від точки $M_0(x_0; y_0)$ на відстані p

Оскільки шукана пряма m проходить через точку $M_1(x_1; y_1)$, то її рівняння будемо шукати у вигляді $m : y - y_1 = k(x - x_1)$. Отже, знаходження рівняння шуканої прямої зводиться до відшукання її кутового коефіцієнта k.

За умовою точка $M_0(x_0; y_0)$ відстоїть від прямої $m : k(x-x_1)-(y-y_1) = 0$ на відстані p. Тому, з урахуванням (29), має місце рівність

$$\frac{|k(x_0 - x_1) - (y_0 - y_1)|}{\sqrt{(k \quad -1) \circ G^{-1} \circ \begin{pmatrix} k \\ -1 \end{pmatrix}}} = p, \text{ звідки}$$

$$\left(k^2(x - x_1)^2 - 2k(x_0 - x_1)(y_0 - y_1) + (y_0 - y_1)^2\right) = \tfrac{p^2}{\|G\|}\left(k^2 g_{22} + 2k g_{12} + g_{11}\right),$$

$$k^2\left(\|G\|(x_0 - x_1)^2 - p^2 g_{22}\right) - 2k\left(\|G\|(x_0 - x_1)(y_0 - y_1) + p^2 g_{12}\right) + \\ + \|G\|(y_0 - y_1)^2 - p^2 g_{11} = 0. \quad (*)$$

1) Припустимо, що $\|G\|(x_0 - x_1)^2 - p^2 g_{22} \neq 0$. Тоді рівняння $(*)$ можна розв'язати як квадратне рівняння відносно k. Не важко перевірити, що

$$\tfrac{D}{4} = p^2\|G\|\left(d^2 - p^2\right), \text{ де}$$

$$d^2 = (x_0 - x_1 \quad y_0 - y_1) \circ G \circ \begin{pmatrix} x_0 - x_1 \\ y_0 - y_1 \end{pmatrix} = \left|\overrightarrow{M_0 M_1}\right|^2. \qquad (79)$$

Можливими є лише наступні три випадки.

1.1) Якщо $d < p$, то шуканої прямої не існує.

1.2) Якщо $d = p$, то існує єдина (дві співпадаючі) шукана пряма m (для неї в цьому випадку вектор $\overrightarrow{n} = \{x_0 - x_1; y_0 - y_1\}$ є нормальним вектором), рівняння якої відносно АСК можна подати у вигляді

$$m : y - y_1 = \frac{\|G\|(x_0 - x_1)(y_0 - y_1) + p^2 g_{12}}{\|G\|(x_0 - x_1)^2 - p^2 g_{22}}(x - x_1), \quad \text{або ж}$$

$$(x - x_1)\left(g_{11}(x_0 - x_1) + g_{12}(y_0 - y_1)\right) + (y - y_1)\left(g_{12}(x_0 - x_1) + g_{22}(y_0 - y_1)\right) = 0. \qquad (80)$$

Зазначимо, що в цьому випадку шукана пряма m дотикається кола $\omega(M_0; p)$ (з центром в точці $M_0(x_0; y_0)$ радіуса p) в точці $M_1(x_1; y_1)$.

Рівняння прямої (80) відносно КСК з КК ω набуває вид

$$(x - x_1)\left((x_0 - x_1) + (y_0 - y_1)\cos\omega\right) + (y - y_1)\left((x_0 - x_1)\cos\omega + (y_0 - y_1)\right) = 0, \qquad (81)$$

а відносно ПСК –

$$(x-x_1)(x_0-x_1)+(y-y_1)(y_0-y_1)=0. \qquad (82)$$

1.3) Якщо $d>p$, то `існує дві шукані прямі` m_1 і m_2 (дотичні до кола $\omega(M_0;p)$, що проходять через точку $M_1(x_1;y_1)$), рівняння яких відносно АСК можна подати у вигляді $m_i : y-y_1=k_i(x-x_1)$, де

$$k_{1,2}=\frac{\|G\|(x_0-x_1)(y_0-y_1)+p^2g_{12}\mp p\sqrt{\|G\|}\sqrt{d^2-p^2}}{\|G\|(x_0-x_1)^2-p^2g_{22}}, \qquad (83)$$

а величина d обчислюється за формулою (79).
Формули (83) для обчислення k_1 і k_2 відносно КСК з КК ω набувають вид

$$k_{1,2}=\frac{(x_0-x_1)(y_0-y_1)\sin^2\omega+p^2\cos\omega\mp p\sin\omega\sqrt{d^2-p^2}}{\sin^2\omega\cdot(x_0-x_1)^2-p^2}, \qquad (84)$$

$$d^2=(x_0-x_1)^2+2(x_0-x_1)(y_0-y_1)\cos\omega+(y_0-y_1)^2$$

а відносно ПСК –

$$k_{1,2}=\frac{(x_0-x_1)(y_0-y_1)\mp p\sqrt{d^2-p^2}}{(x_0-x_1)^2-p^2}, \quad d^2=(x_0-x_1)^2+(y_0-y_1)^2. \qquad (85)$$

2) Припустимо тепер, що $\|G\|(x_0-x_1)^2-p^2g_{22}=0 \quad (\star)$.
Тоді рівняння $(*)$ «вироджується» у лінійне рівняння відносно k:

$$2k\left(\|G\|(x_0-x_1)(y_0-y_1)+p^2g_{12}\right)=\|G\|(y_0-y_1)^2-p^2g_{11} \quad (**)$$

Зауважимо, що `геометричний зміст умови` $(\star)$ полягає у тому, що вона є рівносильною умові про те, що точка M_0 відстоїть від прямої $\overline{m} : x-x_1=0$ на відстані p. В останньому не важко пересвідчитись шляхом безпосередньої перевірки за допомогою формули (29).

Таким чином, 2)-ий випадок характеризується тим, що пряма $\overline{m} : x=x_1$ є шуканою прямою. Крім того, можливими є наступні підвипадки.

2.1) Якщо $\|G\|(x_0-x_1)(y_0-y_1)+p^2g_{12}\neq 0$, то

$$k=\frac{\|G\|(y_0-y_1)^2-p^2g_{11}}{2\left(\|G\|(x_0-x_1)(y_0-y_1)+p^2g_{12}\right)}=k' \qquad (86)$$

і тому шукані рівняння прямих мають вид

$$m' : y-y_1=k'(x-x_1) \text{ та } \overline{m} : x=x_1.$$

2.2) Якщо $\|G\|(x_0-x_1)(y_0-y_1)+p^2g_{12}=0 \quad (\star\star)$, то
2.2.1) у випадку $\|G\|(y_0-y_1)^2-p^2g_{11}\neq 0$, рівняння $(**)$ взагалі не має розв'язків, і тому єдиною шуканою прямою є пряма $\overline{m} : x=x_1$;

2.2.2) у випадку $\|G\|(y_0-y_1)^2-p^2g_{11}=0$ $(\star\star\star)$, рівняння $(**)$ має безліч розв'язків, тобто $k\in R$. Дійсно, за умов одночасного виконання $(\star)$, $(\star\star)$ та $(\star\star\star)$ точка M_1 співпадає з точкою M_0 а $p=0$. І тому будь-яка пряма, яка проходить через точку M_1, відстоїть від точки $M_0\equiv M_1$ на відстані $p=0$. Шуканими прямими у цьому випадку є прямі $m_k: y-y_0=k(x-x_0), k\in R$ та $\overline{m}: x=x_1$ ($x_1=x_0$).

Площа трикутника, обмеженого трьома прямими

Вправа 11.[9] Пряму l відносно АСК задано «рівнянням у відрізках» $l:\ \frac{x}{m}+\frac{y}{n}=1$. Доведіть, що $S_{\triangle MNO}$ (O – початок координат, $M=l\cap OX$, $N=l\cap OY$), обмеженого прямою l та координатними прямими, можна обчислити за формулою

$$S_{\triangle MNO}=\frac{\sqrt{\|G\|}}{2}\cdot|m||n|. \tag{87}$$

Вправа 12.[4] Нехай сторони трикутника ABC відносно АСК задано рівняннями $(BC):\ a_1x+b_1y+c_1=0$, $(CA):\ a_2x+b_2y+c_2=0$, $(AB):\ a_3x+b_3y+c_3=0$. Доведіть, що $S_{\triangle ABC}$ можна обчислити за формулою

$$S_{\triangle ABC}=\frac{\sqrt{\|G\|}}{2}\cdot\frac{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1\\ a_2 & b_2 & c_2\\ a_3 & b_3 & c_3\end{vmatrix}^2}{\mathrm{mod}\left(\begin{vmatrix} a_2 & b_2\\ a_3 & b_3\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} a_3 & b_3\\ a_1 & b_1\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} a_1 & b_1\\ a_2 & b_2\end{vmatrix}\right)}. \tag{88}$$

Зауважимо, що `геометричний зміст визначника матриці Грама` G, елементами якої є метричні коефіцієнти g_{ij} базису $\{\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2}\}$ (який разом з полюсом O визначає на площині АСК) полягає у тому, що значення $\sqrt{\|G\|}$ дорівнює площі координатного (*масштабного*) паралелограма OE_1EE_2 узагальненої декартової системи координат АСК $(O;\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2})$ – рис. 1 a).

Висновки

В представленій роботі наведено розв'язання 16 «ключових» задач та 12 вправ теоретичного характеру, які (в певному розумінні) «повно» охоплюють метричні задачі «на пряму в площині» в афінних координатах.

На нашу думку є доцільним проведення аналогічних досліджень стосовно метричних задач «на пряму і площину в просторі» в афінних координатах.

Апробація запропонованого підходу до викладання зазначеної теми (під час проведення у 1-му семестрі 2012-2013 н.р. «Вибраних питань математики» для студентів 5 курсу фізико-математичного факультету ДВНЗ «ДДПУ») дозволяє стверджувати, що метричні задачі в афінних координатах у студентів викликали інтерес, спонукали їх до творчої діяльності та посилювали розуміння студентів причинно-наслідкових та міжпредметних зв'язків.

Автори мають надію, що наведений матеріал буде корисний студентам ВНЗ під час вивчення відповідної теми «Аналітичної геометрії» як посібник, та зацікавить викладачів, які викладають цю дисципліну, принаймні, як довідковий матеріал, який лише доповнює відповідні параграфи [8], [9].

Література

[1] Александров П.С. Лекции по аналитической геометрии, поплненные необходимыми сведениями из алгебры / П.С. Александров. — М.: Наука, 1968. — 912 с.

[2] Делоне Б.Н. Аналитическая геометрия / Б.Н. Делоне, Д.А. Райков. — Ленинград: ОГИЗ, 1948. — Т. 1. — 456 с.

[3] Ефимов Н.В. Линейная алгебра и многомерная геометрия / Н.В. Ефимов, Э.Р. Розендорн. — М., 1974. — 544 с.

[4] Кадубовський О.А. Введення косокутної системи координат, як метод розв'язання широкого кола задач з аналітичної геометрії середньої та вищої шкіл / О.А. Кадубовський, О.Л. Кадубовська // Пошуки і знахідки. — 2003. — С. 47 – 51.

[5] Ким Г.Д. Алгебра и аналитическая геометрия: Теоремы и задачи / Г.Д. Ким, Л.В. Крицков. — М.: Планета знаний, 2007. — Т. 1. — 469 с.

[6] *Лосєва Н.М.* Прикладна спрямованість навчання аналітичної геометрії як основа формування професійної компетентності викладача математики / Н.М. Лосєва, О.А. Ніколаєва // Дидактика математики: проблеми і дослідження: міжнар. зб. наук. робіт. — 2012. — № 38. — С. 46 – 50.

[7] Моденов П.С. Аналитическая геометрия / П.С. Моденов. — М.: МГУ, 1969. — 699 с.

[8] Моденов П.С. Сборник задач по аналитической геометрии / П.С. Моденов, А.С. Пархоменко. — М.: Наука, 1976. — 384 с.

[9] Моденов П.С. Задачи по геометрии / П.С. Моденов. — М.: Наука, 1979. — 368 с.

[10] Мусхелишвили Н.И. Курс аналитической геометрии / Н.И. Мусхелишвили. — [4-е изд.]. — М.: Высшая школа, 1967. — 655 с.

[11] Постников М.М. Аналитическая геометрия / М.М. Постников. — М.: Наука, 1973. — 384 с.

[12] Алания Л.А. Сборник задач по аналитической геометрии и линейной алгебре / Л.А. Алания, И.А. Дынников, В.М. Мануйлов; [под ред. Ю.М. Смирнова]. — [2-е изд.]. — М.: Логос, 2005. — 376 с.

УДК 378.016:51

Труш Н.І., Пиляк К.І.

[1] *кандидат педагогічних наук, доцент кафедри геометрії та МВМ, ДВНЗ «ДДПУ»*

[2] *студентка 5 курсу фізико-математичного факультету, ДВНЗ «ДДПУ»*

e-mail: nelya_trush@ukr.net

ФОРМУВАННЯ У СТУДЕНТІВ МАТЕМАТИЧНИХ СПЕЦІАЛЬНОСТЕЙ ВМІНЬ РОЗРОБЛЯТИ СИСТЕМИ НАВЧАЛЬНИХ ЗАДАЧ

У статті проаналізовано можливості формування у студентів математичних спеціальностей педагогічного університету інтегрованого уміння конструювати системи навчальних задач.

Ключові слова: *методична підготовка вчителя, формування готовності, конструювання системи задач, логічна грамотність.*

Вступ

Реалізація цілей і завдань якісної підготовки майбутнього вчителя математики зумовлює необхідність пошуку шляхів і засобів удосконалення її методичного складника, який є важливою ланкою в структурі професійно-педагогічного становлення й розвитку фахівця.

Шкільний досвід, практика післядипломної підготовки вчителів, результати опитування педагогів та учнів дозволяють дійти висновку про те, що останнім часом значна доля вчителів-математиків демонструє консерватизм у професійній діяльності та неготовність до самостійного вибору напрямків і засобів організації навчального процесу. Не відкидаючи значного впливу соціальних факторів, зазначимо, що в першу чергу це пов'язано із недоліками професійно-педагогічної підготовки фахівців.

Аналіз сукупності професійних задач, що мають вирішуватися вчителем математики, свідчить, що ключовими об'єктами, якими йому потрібно оперувати, є задача або система задач. Стосовно задач і проблем, пов'язаних з їх застосуванням у навчальному процесі, в різні періоди проводилися дослідження різного спрямування й результативності.

Зокрема, загальні питання, що стосуються визначення поняття «задача» розроблялись Г.О. Баллом, Л.Л. Гуровою, Я.О. Пономарьовим та ін. Методичні аспекти проблеми, роль системи задач у вдосконаленні процесу навчання математики аналізувалися в роботах М.І. Бурди, Ю.М. Колягіна, В.І. Крупича й інших методистів. Робота з творчими (евристичними) задачами досліджувалася Г.В. Дорофєєвим, Ю.М. Колягіним, В.І. Крупичем, О.І. Скафою, Л.М. Фрідманом та ін. Спроби практичної побудови систем задач здійснювалися авторами сучасних підручників з геометрії, зокрема, В.О. Гусевим (у Росії), М.І. Бурдою та Н.В. Тарасенковою (в Україні).

Разом з тим науковцями дотепер визначені лише загальні схеми конструювання систем задач, а дослідженню способів їх конструювання достатньої уваги не приділено. Втім, зустрічаються поодинокі дослідження (Г.І. Ковальова, О.Н. Орлянська), присвячені розкриттю специфіки процесу конструювання системи задач та опанування умінь, необхідних для його реалізації. Очевидно, опанування вчителем математики таких умінь є важливою й невід'ємною складовою його методичної компетентності, яка суттєво впливає на якість навчання учнів математики, формування у них системних уявлень про застосування математики у повсякденні.

Основна частина

Не вдаючись до аналізу різних точок зору на тлумачення поняття задачі, в подальшому будемо говорити про так звані навчальні задачі, виходячи з тези про те, що «навчальний характер кожної задачі має збагачувати знання й досвід учнів, вчити математичній діяльності» [2, с. 58], сприяти поступовому досягненню тематично обумовлених і загальних цілей навчання математики.

Системою навчальних задач будемо вважати будь-яку сукупність задач (у широкому сенсі), що задовольняє принципам понятійної однорідності, змістової цілісності, структурної повноти, підпорядкованості певним цілям.

Існують різні концепції створення систем задач, якими може послуговуватися вчитель математики у своїй професійній діяльності. Зокрема, при створенні шкільних підручників математики авторські колективи намагаються проектувати системи задач, що можуть стати основою для розроблюваної вчителем власної системи.

Наприклад, О.В. Погорєлов пропонував у відомому шкільному підручнику геометрії [5] мінімальний (з його точки зору) набір задач з вимогою обов'язкового їх розв'язання учнями. До цього набору, зокрема, відносилася низка задач, у яких розкривалися важливі властивості геометричних фігур, необхідні для продуктивної навчальної діяльності у процесі роботи з геометричними фігурами. Вважалося, що основна увага вчителя мала спрямовуватися на виділення опорних (чи ключових) задач та поповнення пропонованої автором сукупності.

Автори деяких сучасних підручників [3] вважають за доцільне насичення підручників обширним та різноманітним дидактичним матеріалом із зауваженнями для вчителя щодо надлишковості набору задач, мотивуючи це тим, що в такий спосіб відкривається можливість реалізації рівневої диференціації та індивідуального підходу у навчанні. За цих умов основна робота вчителя полягає у відбиранні задач для власної системи та їх структуруванні.

Продуктивними ідеями для проектування систем навчальних задач не тільки для навчання, але й для діагностики результатів навчальних досягнень учнів є виділення деякими математиками-методистами та практиками опорних (І.Ф. Шаригін, Н.І. Зільберберг та ін.) та ключових (Р.Г. Хазанкін) задач. Опорними зазвичай називають такі задачі, у яких дається опис деякого корисного факту, що може бути використаний при розв'язуванні інших задач, або ж у яких розвиваються теоретичні ідеї чи дається ілюстрація важливого методу.

Ключовими вважають задачі, опанування методів розв'язання яких дозволяє учневі в подальшому розв'язувати будь-яку задачу з даної теми на рівні шкільних вимог, а розв'язання більшості програмних завдань може бути зведено до розв'язання послідовності ключових задач.

Однак, не зважаючи на наявність методологічних і методичних розробок, предметом яких є шкільні задачі, цікавих концепцій методичного плану, існує проблема, пов'язана з якістю задачного матеріалу, що використовує вчитель у своїй діяльності. В кінцевому варіанті все залежить від особистої майстерності вчителя, його професіоналізму та якості його власної системи навчальних задач, адже успішне виконання учнем ізольованих завдань ще не свідчить про свідоме засвоєння відповідних способів дій. Саме тому автор технології використання ключових задач Р.Г. Хазанкін на своїх численних семінарах для вчителів заперечував проти надання вчителям своїх циклів ключових задач, вважаючи, що кожний вчитель повинен мати свою власну систему, що відповідає його переконанням.

Наявність серйозних розробок загальної теорії задач, цікавих концепцій методичного плану не визначає якість задачного матеріалу, який використовує вчитель у своїй діяльності. Значне навантаження вчителя, окремі соціальні чинники, а іноді і відсутність бажання часто заважають йому глибоко вникати у проблему. Крім того велика кількість дидактичних матеріалів, які видаються на допомогу вчителю, приводить до того, що частина педагогів взагалі не замислюється над необхідністю проектування своєї власної системи задач. Подібного роду позиція тільки підкріплюється широким (занадто широким) введенням у навчальний процес тестової перевірки досягнень учнів.

Звичайно, реальні засоби впливу на методичну свідомість учителів-практиків доволі обмежені, оскільки кожен вчитель має певний досвід і сформовані стереотипи технологічної організації навчання математики, що стає на заваді формуванню уявлень про важливість проектування власної системи задач, придатної для використання у навчанні математики. Суттєво більше шансів мають університети, які в бакалаврський період підготовки фахівців можуть спрямовувати організаційно-методичні ресурси на формування готовності майбутніх вчителів математики до конструювання систем задач.

У процесі навчання в педагогічному університеті майбутні вчителі математики при роботі безпосередньо з існуючими системами задач, їх аналізом, структуруванням і доповненням в курсі методики навчання математики отримують початкові уявлення щодо реалізації ідеї проектування систем навчальних задач. Однак цей процес належної уваги не отримує і такого роду діяльність здійснюється студентами епізодично, залишаючись однією з найбільш складних для виконання. При цьому мають місце типові труднощі:

- в процесі аналізу навіть окремо взятої задачі студенти не завжди можуть дати чіткий опис цілей і способів діяльності, на які доцільно орієнтуватися в процесі розв'язування задачі учнями;
- для більшості студентів виявляється вкрай складним виділення загальної ідеї пропонованого циклу задач, прогнозування місця задачі у циклі, не говорячи вже про створення схожого циклу;
- студенти погано виконують завдання на складання (добір) задач в межах обраної теми, а достатній рівень демонструють лише за умови, що задача є типовою або складеною за зразком;
- студенти досить слабо виявляють (прогнозують) дидактичні можливості тієї чи іншої системи задач;
- якщо мова йде про конструювання системи навчальних задач, то студенти, як правило, виділяють тільки найближчі цілі, але не беруть до уваги цілі навчання, що знаходяться на більш високих ступенях ієрархії, наприклад, розвиток логічного чи просторового мислення.

Зважаючи на те, що у програмах підготовки майбутніх учителів математики формування готовності до конструювання систем задач не віднесено до категорії обов'язкових фахових завдань, певну можливість формування вказаних складників можна було б вбачати у насиченні спеціальними методичними завданнями провідних тем курсу методики навчання математики. Однак, за браком навчального часу цей шлях вирішення проблеми є скоріше теоретично можливим, ніж реально здійсненним, тому навряд чи варто вважати його прийнятним.

Організувати систематичну й результативно прогнозовану роботу, спрямовану на формування у студентів готовності до конструювання систем задач дозволяє спеціалізований курс з вибраних питань методики навчання математики, присвячений проблемам методики конструювання систем задач та їх застосування у процесі навчання математики в школі.

У процесі роботи над спецкурсом передбачається ознайомлення студентів з можливим способом побудови системи задач, яка б сприяла розвитку логічного мислення учнів.

Даний матеріал вибрано не випадково. Серед цілей і завдань вивчення математики у школі виділяється розвиток логічного мислення і математичної мови, умінь логічно обґрунтовувати твердження, використовувати різні мови математики (словесну, символічну, графічну). Високий рівень сформованості логічного мислення школярів виступає і як мета математичної освіти, і як основа, на якій опанування математичними знаннями проходить значно ефективніше. Однак спеціальна робота з формування логічної грамотності учнів передбачена лише у класах з поглибленим вивченням математики, система ж завдань логічного характеру практично відсутня.

Для пізнавальної діяльності характерні специфічні прийоми і методи – певні методи утворення понять, прийоми визначення, логічні способи отримання нових знань із відомих - висновки (умовиводи) і доведення, методи побудови, оцінки і обґрунтування гіпотез, наукове пояснення явищ, індуктивні методи виявлення причинної залежності і узагальнення явищ, способи побудови теорій тощо.

Очевидно, що математична логіка не займається вивченням більшості з цих питань, а тому майбутні вчителі математики, логічна освіта яких обмежується курсом математичної логіки, виявляються практично не готовими до формування подібного роду прийомів у своїх учнів. Тому в якості завдань спецкурсу розглядаємо виділення максимально повного переліку компонентів логічної грамотності, їх опис, аналіз, операціоналізацію та формулювання відповідних типів критеріальних завдань.

Одним із найбільш впливових засобів формування в учнів логічної грамотності є система завдань з логічним навантаженням, розв'язування яких у процесі навчання математики поєднується з розв'язуванням математичних задач. Оскільки елементи логіки носять метаматематичний характер, то вони можуть бути розглянуті у «знятому» вигляді, як загальні схеми діяльності без відносно до змісту шкільної математики.

Зміст такого спецкурсу може орієнтуватися на визначення й обґрунтування напрямів опрацювання першорядних і методично важливих видів діяльності, що супроводжують роботу зі структурно класифікованими логічними формами, які слугують основою для виділення тематично групованих сукупностей задач, у межах яких за допомогою аналітико-синтетичних, конкретизаційних і узагальнювальних процедур здійснюється проектування систем задач.

Висновки

Опановуючи такі види діяльності, знайомлячись з основними типами завдань (задач) та їхніми «структурно-логічними схемами», майбутні вчителі поступово рухаються до самостійного конструювання власних циклів задач, наповнюючи типові структурно-логічні схеми конкретним математичним змістом.

Література

[1] *Балл Г.А.* Теория учебных задач. Психолого-педагогический аспект / Г.А. Балл. — М.: Педагогика, 1990. — 184 с.

[2] *Колягин Ю.М.* Задачи в обучении математике / Ю.М. Колягин. — М.: Просвещение, 1977. — Ч. I. — 145 с.

[3] *Мерзляк А.Г.* Геометрія для 9 кл. загальноосвітніх навчальних закладів / А.Г. Мерзляк, В.Б. Полонський, М.С. Якір. — Х.: Гімназія. — 2009. — 272 с.

[4] *Орлянская О.Н.* Учимся конструировать системы задач по математике: учеб.-метод. пособие / О.Н. Орлянская, Т.К. Смыковская, В.М. Монахов. — М.: Альфа, 2002. — 32 с.

[5] *Погорєлов О.В.* Планіметрія: підручник для 7-9 кл. загальноосвітніх навч. закл. / О.В. Погорєлов. — [8-ме вид.]. — К.: Школяр, 2004. — 240 с.

[6] *Шарыгин И.Ф.* Стандарт по математике: 500 геометрических задач: кн. для учителя / И.Ф. Шарыгин. — [2-е изд.]. — М.: Просвещение, 2007. — 205 с.

УДК 373.091.32:514

Медведчук Ю.О., Чуйко О.В.

[1] *студентка 5 курсу фізико-математичного факультету, ДВНЗ «ДДПУ»*

[2] *кандидат фізико-математичних наук, завідувач кафедри геометрії та методики викладання математики, ДВНЗ «ДДПУ»*

e-mail: kafedragmvmsdpu@ukr.net

НЕСТАНДАРТНІ УРОКИ – НОВИЙ ЗАСІБ ЕФЕКТИВНОГО НАВЧАННЯ УЧНІВ

Стаття присвячена аналізу позитивних та негативних характеристик нетрадиційних уроків. Розглядаються структура підготовки до таких уроків та роль учителя на кожному етапі.

Ключові слова: *нетрадиційні уроки, ефективність навчання, інтерес, творча особистість.*

Вступ

На сучасному етапі розвитку суспільства, коли цифрові технології та ЕОМ стають дедалі досконалішими, а їх використання – все більш зручним, система освіти, яка сформувалася кілька сторіч тому, вимагає все більшого реформування. Нові види діяльності, нові стандарти розвитку особистості потребують нових, нестандартних підходів до надання освіти.

Крім того, з другої половини XX ст. інтерес учнів середньої школи до навчання дуже знизився. Через одноманітність роботи на уроках учні втратили інтерес до навчання. Тому учителі за сучасних вимог до особистості почали шукати нові, більш ефективні методи навчання.

У школі все більше з'являється учителів-новаторів, які намагаються відійти від вже застарілої системи, коли цінується тільки сукупність знань учнів та випускників школи, а не їх вміння мислити та приймати рішення. При використанні класно-урочної системи зробити це не так вже й просто. Але й відмовитись від неї не можна, оскільки вона протягом кількох століть успішно доводила своє право на існування та свою зручність.

За таких умов учителі-новатори не відмовляються від класно-урочної системи, а змінюють структуру уроку, методи та форми навчання на уроці. З'явились так звані нетрадиційні уроки.

Основна частина

Нетрадиційний урок – це звичайний урок за часом, але незвичайний за формою проведення. На таких уроках навчальна діяльність учнів, яка зазвичай не приносить задоволення, поєднується з діяльністю творчою або розважальною. Будь-якій дитині подобається грати, змагатись, вигадувати та займатись творчістю. Отже, коли замість очікуваного опитування учитель запропонує провести цікаву гру, серед учнів одразу зникне напруга, учні зітхнуть з полегшенням і навіть не замисляться над тим, що гра також може бути формою опитування [1].

Підготовка та проведення нетрадиційного уроку включає такі етапи:

— задум;
— організація;
— проведення;
— аналіз.

Задум є найвідповідальнішим та найскладнішим. Саме на цьому етапі учителю важливо знайти спільну мову з учнями та дійти згоди щодо форми проведення уроку, теми, методів, що будуть застосовуватись на уроці.

На етапі організації відбувається розподіл обов'язків, написання сценарію, можливо, репетиції, добір завдань тощо. Тут учитель має відігравати роль консультанта, помічника та порадника.

Третій етап є відбиттям виконаної роботи, тобто при проведенні одразу видно, у якій мірі кожний з учнів виконав свої обов'язки при підготовці до нетрадиційного уроку. На цьому етапі учитель може бути як учасником, координатором проведення уроку, так і просто глядачем.

Проведення аналізу уроку учитель не повинен зводити до монологу. Учні самі виявляють переваги та недоліки проведеного уроку. Крім того, вони мають проаналізувати свою підготовку до уроку і виявити причини невдач або недоліків та зробити висновки, які можна реалізувати при проведенні наступних нестандартних уроків. Роль учителя при проведенні аналізу уроку повинна бути коригуючою, направляючою. І лише в якості підсумку учитель може повідомити учням свою думку щодо проведеного уроку. Важливо, щоб при проведенні аналізу уроку діалог не переріс у суперечку, щоб не було взаємних звинувачень тощо.

Аналіз педагогічної літератури дозволив виділити декілька десятків типів нестандартних уроків. Їх назви дають деяке уявлення про цілі, задачі, методику проведення таких уроків.

Можна виділити наступні типи нестандартних уроків:

1. Уроки у формі змагань та ігор: конкурс, турнір, естафета, дуель, КВК, ділова гра, рольова гра, кросворд, вікторина тощо.
2. Уроки, основані на формах, жанрах та методах роботи, відомих у суспільній практиці: дослідження, коментар, мозкова атака, інтерв'ю, репортаж, рецензії тощо.
3. Уроки, основані на нетрадиційній організації учбового матеріалу: урок мудрості, одкровення, урок-блок тощо.
4. Уроки, що нагадують публічні форми спілкування: прес-конференція, брифінг, аукціон, бенефіс, дискусія, панорама, телеміст тощо.
5. Уроки, основані на імітації діяльності закладів і організацій: слідство, патентне бюро, учена рада тощо.
6. Уроки, основані на імітації діяльності при проведенні суспільно-культурних заходів: заочна екскурсія, екскурсія в минуле, подорож, прогулянки тощо.
7. Уроки, що опираються на фантазію: урок-казка, урок-сюрприз тощо.
8. Використання на уроках традиційних форм позакласної роботи: вистава, брейн-ринг, диспут тощо.
9. Інтегровані уроки.
10. Трансформація традиційних способів організації уроку:
лекція-парадокс, парне опитування, урок-практикум, урок-семінар, урок-консультація тощо [2].

Можна навести інший підхід до класифікації нетрадиційних уроків:

1. Уроки творчості: урок винахідництва, урок-виставка, урок-твір, урок-творчий звіт тощо.
2. Уроки, співзвучні з суспільними тенденціями: урок-суспільний огляд знань, урок-диспут, урок-діалог тощо.
3. Міжпредметні та внутрішньо-курсові уроки: одночасно з двох предметів, для учнів різного віку тощо.
4. Уроки з елементами історизму: урок про вчених, урок-бенефіс, урок-історичний огляд, урок-портрет тощо.
5. Театралізовані уроки: урок-вистава, урок спогадів, урок-суд, урок-аукціон тощо.
6. Ігрові уроки: урок-ділова гра, урок-рольова гра, урок з дидактичною грою, урок-змагання, урок-подорож тощо.
7. Допоміжні уроки: урок-тест, урок для батьків, урок-консультація тощо [3].

При усіх перевагах таких уроків проводити їх частіше, ніж раз на дватри місяці не рекомендується. *По-перше*, підготовка до нетрадиційних уроків займає від двох тижнів до двох місяців, що не дає можливості проводити їх частіше. *По-друге*, для деяких учнів нетрадиційні уроки виявляються навіть шкідливими. Дитина потрапляє у невідому, незвичайну ситуацію і губиться, не знає, як себе поводити, що робити, ніяковіє. Таких дітей мало, проте вони є і не можна не зважати на їх потреби при плануванні своєї діяльності. *По-третє*, людина має властивість звикати до будь-чого, навіть до незвичайних речей. При частому проведенні нетрадиційних уроків учні починають до них звикати і поступово, як і до звичайних уроків, втрачати інтерес [4].

Проблема втрати учнями інтересу до математики взагалі і до геометрії зокрема вже кілька десятиліть турбує учителів середніх шкіл. Цей предмет завжди вважався найскладнішим для вивчення учнями, адже саме він найбільше відірваний від реального життя. Тому на уроках геометрії також необхідно проводити нетрадиційні уроки для того, щоб хоч трохи повернути інтерес учнів до навчання. Необхідно використовувати ділові ігри, які пов'язують геометрію та реальне життя, для більш молодших класів – уроки-казки, змагання, турніри. Для класів гуманітарного спрямування доцільно поєднати на одному уроці геометрію та, наприклад, українську або російську мову. Інтегровані уроки також корисно проводити при вивченні окремих тем. Наприклад, при вивченні подібності трикутників можна провести урок-подорож у країну Ліліпутію, де учням зустрінуться математичні об'єкти з різними коефіцієнтами подібності.

З власного досвіду можна сказати, що вибір теми незвичайного уроку та його місця у програмі є дуже виваженою та кропіткою роботою. Зазвичай доцільно проводити нетрадиційні уроки як підсумкові або узагальнюючі. Важливо заздалегідь визначити, які з уроків стануть незвичайними, та обрати форму їх проведення, щоб надалі простіше було планувати свою роботу.

Підготовка уроку-казки у сьомому класі на тему «Ознаки рівності трикутників» з використанням мультимедійного обладнання зайняла майже тиждень, причому від учнів вимагалася лише теоретична підготовка. Підготовка уроку-змагання у восьмому класі на тему «Многокутники та їх площі» зайняла набагато менше часу.

В класах, де проводились експериментальні нетрадиційні уроки, учні не звикли до такого виду робіт, тому спроби активізувати їх діяльність дуже часто не приносили результатів. Доводилось в ході уроку змінювати його структуру та умови виконання завдань. Але учні, які дійсно зацікавлені у вивченні математики, приймали досить активну участь у проведенні уроку.

Висновки

Різні види нетрадиційних уроків вимагають різної кількості часу для підготовки. Якщо учитель вирішує слідувати тенденціям сучасного суспільства у вихованні творчої, неординарної особистості та використовувати для цього нетрадиційні уроки, то він має дуже ретельно спланувати цю роботу. Крім того, привчати дітей до подібної роботи доцільніше з п'ятого-шостого класу, щоб вони якнайраніше привчались до творчого пошуку та нестандартного мислення.

За умов науково-технічного прогресу та нових вимог до випускників школи нетрадиційні уроки мають дуже важливе значення і проводити їх потрібно. Але використовувати їх треба з обережністю: при належному ставленні приносять користь, при зловживанні – стають марними або навіть шкодять.

Література

[1] *Букатов В.М.* Педагогические таинства дидактических игр / В.М. Букатов. — М.: МПСИ, ФЛИНТА, 1997. — 90 с.

[2] *Кульневич С.В.* Не совсем обычный урок / С.В. Кульневич, Т.П. Лакоценина. — Воронеж: «Учитель», 2006. — 173 с.

[3] *Кульневич С.В.* Совсем необычный урок / С.В. Кульневич, Т.П. Лакоценина. — Воронеж: «Учитель», 2006. — 160 с.

[4] *Николаева Л.С.* Использование нетрадиционных форм занятий / Л.С. Николаева, Л.И. Лесных. — Специалист, 1992. — № 2. — С. 5 – 6.

УДК 159.9.072

Саврасов М.В., Гунько Л.В.

[1] *канд. психологічних наук, старший викладач кафедри загальної психології, ДВНЗ «ДДПУ»*

[2] *студентка 4 курсу фізико-математичного факультету, ДВНЗ «ДДПУ»*

e-mail: savnick85@mail.ru

ПСИХОЛОГІЧНІ ОСОБЛИВОСТІ ДИНАМІКИ ПРОФЕСІЙНОЇ САМОСВІДОМОСТІ МАЙБУТНІХ ВЧИТЕЛІВ МАТЕМАТИКИ У ПРОЦЕСІ НАВЧАЛЬНОЇ ДІЯЛЬНОСТІ

Дане дослідження присвячене вивченню психологічних особливостей динаміки професійної самосвідомості майбутнього вчителя математики у процесі навчальної діяльності, проводиться емпірична перевірка ефективності запропонованого розвивального впливу на професійну самосвідомість майбутнього вчителя математики.

Ключові слова: *навчальна діяльність, професійна самосвідомість, майбутній вчитель, педагогічний вищий навчальний заклад, розвивальний вплив, словник самоописів, контент-аналіз, достовірна розбіжність, експеримент.*

Вступ

Постановка проблеми. У теоретичному та прикладному аспектах високорозвинена професійна самосвідомість виступає запорукою успішності професійної діяльності людини, її особистісно-професійного зростання та задоволеності власною професією. Як наслідок, випускнику педагогічного ВНЗ має бути притаманна розвинена, диференційована професійна педагогічна самосвідомість, зріле та виважене бачення самого себе як майбутнього фахівця. В той же час, проблема з'ясування динаміки становлення професійної самосвідомості майбутнього вчителя, в тому числі майбутнього вчителя математики у процесі навчальної діяльності у сучасній українский психології залишається недостатньо розкритою.

Мета дослідження – визначення динаміки професійної самосвідомості майбутнього вчителя математики у процесі навчальної діяльності.

Задачі дослідження:

– уточнити поняття «професійна самосвідомість педагога»;

– виявити динаміку професійної самосвідомості у процесі навчальної діяльності у звичайних умовах та при навчанні із розвивальним впливом;

– з'ясувати результативність запропонованого розвивального впливу на професійну самосвідомість майбутнього вчителя у процесі навчальної діяльності.

Об'єкт дослідження – професійна самосвідомість майбутнього педагога.

Предмет дослідження – динаміка професійної самосвідомості майбутнього вчителя математики у процесі навчальної діяльності.

Експериментальною базою нашого дослідження став фізико-математичний факультет Державного вищого навчального закладу «Донбаський державний педагогічний університет». Дослідження проводилося з майбутніми вчителями математики та основ інформатики. Експериментальне вивчення динаміки професійної самосвідомості майбутнього вчителя в процесі навчальної діяльності проводилося за допомогою методу лонгітюду. В якості характерних точок процесу професіонального становлення (етапів професіональної підготовки) використані другий семестр першого року навчання, другий семестр третього року навчання та другий семестр п'ятого року навчання. Вибір саме цих етапів навчання у ВНЗ у розгляді процесу динаміки професійної самсвідомості майбутнього вчителя обумовлений наступними міркуваннями: перший та п'ятий рік навчання – стартова та фінішна точки педагогічної системи, мета якої – підготовка професіонального педагога. Окрім того, в умовах конкретного навчального закладу саме з другого семестру першого року навчання починається викладання дисциплін психолого-педагогічного циклу та залишається позаду період, де психічне функціонування особистості студента ускладнене адаптацією до навчання, до нового соціального оточення тощо. Другий семестр третього року навчання – саме той етап навчання, коли студенти в цілому закінчили вивчення дисциплін психолого-педагогічного циклу (окрім галузевих методик викладання), але ще не мали досвіду практичної діяльності в якості вчителя чи вихователя. Дані фактори – засвоєння більшості дисциплін психолого-педагогічного циклу та педагогічна практика, є істотно важливим в системі професійної підготовки студента саме як майбутнього педагога, тож мають вагомий вплив на становлення і розвиток професійної самосвідомості майбутнього педагога, є певними визначальними динамічними ланками у становленні його професійної самосвідомості.

Відповідно до задач дослідження, студентів було розділено на контрольні та експериментальні групи. До складу контрольних груп входили 23 студенти фізико-математичного факультету, до складу експериментальних груп входили 22 студентів фізико-математичного факультету. Відповідно, до дослідження було залучено 45 студентів фізико-математичного факультету.

Аналіз основних досліджень і публікацій. Самосвідомість людини у психологічній науці розглядається як «... усвідомлення людиною себе як особистості, тобто власних рис характеру потенційних можливостей, дій і вчинків, їх мотивів і наслідків, своїх фізичних, інтелектуальних та моральних якостей, ставлення до навколишньої дійсності та власної діяльності» [6, с. 314]. Відповідно, професійна самосвідомість повинна розглядатися як результат усвідомлення людиною своїх професійно важливих психічних якостей, рівня їх розвитку, а також як система поглядів на свою професію, її суспільне значення тощо.

Професійне становлення вчителя відбувається в процесі його саморозвитку, яке в свою чергу тісно пов'язане з особливостями усвідомлення вчителем свого професійного «Я» [12]. Важливою складовою педагогічної діяльності вчителя виступає оцінювання, як фактор управління процесом психічного розвитку дитини [9]. Оціночні еталони, стиль оцінювання у процесі навчання і виховання засвоюються дитиною, визначають характер і особливості його самооцінки і є умовою перетворення учня з об'єкту на суб'єкт навчання і виховання.

В зв'язку з цим, якість підготовки фахівця у даній області залежить від рівня розвитку його творчих здібностей, його здібностей до гнучкого звернення до накопиченого педагогічного досвіду. З даної позиції, особливо важливим є розвиток індивідуальності, психічної неповторності педагога як його професійної якості. Ця обставина призводить до формування у педагога індивідуального стиля професійної діяльності – як реакції на систему індивідуальних особливостей, що впливають на ефективність професійної діяльності.

Крім того, в умовах прилюдності у діяльності індивіда відкриваються два протилежних змістовних блоки – «власний зміст» та «зміст для оточуючих» [10]. Цей факт має особливе значення для професійної педагогічної діяльності, оскільки вона протікає саме у присутності інших і заздалегідь розрахована на сприйняття оточуючими. Вчителя хвилює вірне оформлення процесу навчання і виховання у вербальну форму, своєрідна семантизація [11]. Цей компонент, як постійно присутній у діяльності вчителя, виражає залежність вчителя від свого власного «Я»-образу і пов'язаного з ним образу учнів в цілому чи окремого учня, що неодмінно виникає у процесі здійснення професійної діяльності, коли відбувається перехід його суб'єктивності у інтерсуб'єктивність.

Ю.Н. Кулюткіним показано, що ефективність керування діяльністю учня з боку вчителя пов'язана із здібністю послідовно усвідомлювати себе в якості суб'єкту діяльності у даній педагогічній ситуації [4]. У роботах Н.В. Кузьміної та її співробітників робляться висновки про тісний взаємозв'язок особливостей усвідомлення власного «Я» із рівнем педагогічної майстерності [3]. В.Н. Козієв розглядає професійну самосвідомість вчителя як систему усвідомлених вчителем власних якостей, що є значимими для педагогічної діяльності: «Я»-актуальне (оцінка себе вчителем у даний час), «Я»-ретроспективне (оцінювання себе вчителем по відношенню до початку педагогічної діяльності), «Я»-ідеальне (яким би вчитель хотів стати), «Я»-рефлексивне (погляд вчителя на оцінювання його колегами та учнями). Автор наголошує на необхідності цілеспрямованого формування професіональної самосвідомості педагога як певної системи ціннісних орієнтацій [2, с. 78].

В.Ф. Сафін вважає, що однією з умов підготовки вчителя як суб'єкту педагогічної діяльності можуть бути спеціальні вправи з метою моніторінга рівня сформованості підструктур педагогічних здібностей та якостей особистості через самооцінку студентами своїх життєвих планів, рис характеру, знань, вмінь та можливостей [8].

М.В. Агуловим в рамках виконаного ним дисертаційного дослідження встановлено, що центральним системоутворюючим чинником динаміки суб'єктності майбутнього педагога в процесі навчальної діяльності виступає інтегральний показник професійної самосвідомості – загальна довжина словника самоописів майбутніми педагогами свого професійного «Я» [1, с. 188].

Основна частина

Студенти як контрольної, так і експериментальної груп займалися у ВНЗ за державними програмами і навчалися звичайними методами, що включають відвідування лекцій, практичних і семінарських занять, виконання курсових робіт, проходження педагогічних практик різних видів, складання іспитів, заліків тощо. На першому році свого навчання студенти представлені лише у складі контрольної групи, оскільки вони тільки розпочали вивчення предметів психолого-педагогічного циклу, отже ще мають слабку теоретичну базу для розвитку суб'єктності майбутнього педагога. Отже, дані що отримані в ході застосування психодіагностичної програми для студентів першого курсу, ми використовуємо лише як певну точку відліку та мірило для опису і порівняння із результатами, що будуть отримані при діагностиці основних динамічних особливостей професійної самосвідомості даних студентів на третьому та п'ятому році навчання у звичайних умовах, оскільки розвивальна програма для них не застосовується.

Зі студентами експериментальної груп, крім звичайного навчання, проводилася спеціально організована корекційна робота протягом одного року навчання (відповідно, третій та п'ятий рік навчання). Застосовувалися як групові, так і індивідуальні форми роботи у межах становлення і розвитку суб'єктності із використанням розвивальної програми, адекватної меті і задачам роботи.

Для студентів контрольної та експериментальної групи нами проводилося співставлення середніх значень показників професійної самосвідомості на третьому році навчання до експерименту (з метою встановлення відсутності принципових відмінностей), аналогічно після експерименту, проводилося порівняння середніх значень показників професійної самосвідомості майбутнього педагога для представників контрольної груп до експерименту (третій рік навчання) та після нього (п'ятий рік навчання) (з метою з'ясування динаміки змінення показників суб'єктності у звичайних умовах навчання), і, відповідно, на рівні експериментальної групи до експерименту(третій рік навчання) та після нього (п'ятий рік навчання) (з метою з'ясування динаміки показників професійної самосвідомості в умовах навчання із розвивальним впливом).

Наприкінці експерименту ми проводили співставлення середніх значень показників професійної самосвідомості студентів контрольної та експериментальної групи (п'ятий рік навчання) з метою з'ясування відмінностей у динаміці розвитку професійної самосвідомості у звичайних у умовах та в умовах застосування спеціально організованої розвивальної роботи над професійної самосвідомості, одночасно перевіряючи таким чином ефективність запропонованої програми розвитку професійної самосвідомості майбутнього вчителя математики у процесі навчальної діяльності у ВНЗ.

Для експериментального визначення змісту професійної самосвідомості майбутніх вчителів трудового навчання та обслуговуючої праці, математики та фізики, нами був використаний метод вільного самоопису. Вперше цей метод, розроблений М. Куном та Т. Макпартлендом у 1953 році, модифікував та застосував для досліджень особливостей образу-«Я» студентів, школярів та молодих робітників Ф. Патакі, якій стверджував, що даний метод виявився адекватним інструментом для вивчення формування самосвідомості та соціальної ідентичності [5, с. 51]. Як ми вже казали вище, В.П. Саврасовим даний метод був успішно використаний для вивчення особливостей розвитку професійної самосвідомості майбутнього вчителя [7, с. 46-58].

У відповідності з сутністю методу вільного самоопису студентам на першому третьому та п'ятому році фізико-математичного педагогічного університету було запропоновано у письмовій формі висказати судження про свої професійно значимі якості, тобто вказати ті якості власної особистості, які впливають на успіх в подальшій самостійної професійній діяльності. Єдиним методом, який дозволяє зробити змістовний аналіз такого роду матеріалу з метою статистичного представлення результатів є **метод контент-аналізу**.

Отримані в ході експериментального дослідження тексти самоописів майбутніми вчителями особливостей і властивостей свого професійного «Я» були піддані обробці за допомогою методу контент-аналізу. Як одиниці аналізу виступали ті властивості особистості, які вказувалися як істотно важливі для професійно-педагогічної діяльності. Спираючись на уявлення про те, що в професійній самосвідомості відображаються властивості вчителя як суб'єкта управління педагогічним процесом, як початкова система категорій контент-аналізу матеріалів самоописів нами використовувалася система основних функцій управління, до яких звичайно відносять: формування мети, інформаційний пошук, прогнозування, ухвалення рішення, організація виконання, комунікації, контроль і оцінка результатів. Функція корекції не включалася до складу категорій аналізу, оскільки на етапі регулювання представлені всі стадії управління, які виступають як засіб регулювання. При формулюванні правил кодування одиниць аналізу ми спиралися на погляди В.А. Якуніна, який працює над реалізацією системного підходу до вивчення процесу навчання і виховання з позицій теорії управління, сутності основних функцій управління.

Таким чином, в процесі обробки текстів самоописів майбутніми вчителями свого професійного «Я» початкова система категорій аналізу, сформована на основі функціонального складу управління, була модифікована відповідно до специфіки професійної педагогічної самосвідомості і в остаточному варіанті включала **десять категорій аналізу**:

«особливості інформаційного пошуку», «інформаційний тезаурус»,
«мета», «здібність до прогнозування і створення мети»,
«особливості ухвалення педагогічного рішення»,
«особливості самоконтролю і самооцінювання»,
«організаторські здібності», «особливості самоорганізації»,
«особливості виконавської діяльності», «надійність, стабільність».

В процесі порівняння середніх значень показників розвитку професійної самосвідомості представників контрольної та експериментальної групи до експерименту, нами не зафіксовано статистично достовірних розбіжностей між середніми значеннями показників представленості компонент самосвідомості студентів-педагогів для контрольної та експериментальної груп до експерименту, вони відповідають критерію однорідності, що дає нам змогу в подальшому здійснювати психологічний експеримент, спрямований на співставлення процесу розвитку професійної самосвідомості в умовах традиційної навчальної діяльності студентів ВНЗ та за умови їх навчання із спеціально організованим розвивальним впливом на професійну самосвідомість.

З третього по п'ятий курс при навчанні у звичайних умовах нами не виявлено достовірних розбіжностей по показниках представленості в самосвідомості елементів інформаційного пошуку; особливостей, які пов'язані з володінням сукупністю знань; особливостей оцінювання; власних особливостей, пов'язаних зі здатністю виявляти й враховувати в діяльності значимі якості власного «Я»; здатність до прогнозування та цілеутворення; а також професійно значимих цілей не виявлено.

З третього по п'ятий курс при навчанні із розвивальним впливом, зафіксовано статистично достовірні розбіжності в бік зростання за показниками представленості в професійній самосвідомості елементів особливостей інформаційного пошуку ($t = 1,99$); особливостей спілкування ($t = 2,13$); особливостей самоорганізації ($t = 3,03$); особливостей виконавської діяльності ($t = 2,56$); меті ($t = 4,42$); середньої довжини словника ($t = 2,37$) від третього до п'ятого року навчання в умовах спеціально організованого навчання із розвивальним впливом.

Табл. 1: Кількісна представленість компонентів професійної самосвідомості в самоописах студентів контрольних та експериментальних груп після експерименту

№	Компоненти структури самосвідомості	Середня кількість використаних понять словника		Значення t-критерію
		експериментальна група після експерименту	контрольна група після експерименту	
1.	Особливості інформаційного пошуку	0,55	0,22	2,11*
2.	Інформаційний тезаурус	0,55	0,30	1,52
3.	Особливості контролю і оцінки	0,72	0,60	0,66
4.	Особливості самоконтролю і самооцінки	0,72	0,40	1,57
5.	Здатність до цілеутворення та прогнозування	0,68	0,63	0,29
6.	Особливості прийняття рішень	1,53	1,56	-0,07
7.	Особливості спілкування	1,92	0,60	1,51
8.	Особливості самоорганізації	0,93	0,74	0,76
9.	Організаторські здібності	0,93	0,52	2,13*
10.	Особливості виконавської діяльності	0,87	0,59	1,34
11.	Надійність, стабільність	1,17	1,11	0,23
12.	Мета	0,89	0,22	4,37**
13.	Середня довжина словника	10,53	7,6	3,3**

Позначкою * (**) нами відмічені значення t-критерію для $p < 0,05$ ($p < 0,01$)

У процесі порівняльного аналізу значень показників професійної самосвідомості при звичайному навчанні та при навчанні із розвивальним впливом, зафіксовано наступні розбіжності, що представлені у Таблиці 1.

Як можна бачити, не виявлено статистично достовірних розбіжностей між середніми значеннями наступних показників професійної самосвідомості студентів контрольних та експериментальних груп: інформаційний тезаурус; особливості контролю і оцінки; особливості самоконтролю і самооцінки; здатність до цілеутворення та прогнозування; особливості прийняття педагогічних рішень; особливості спілкування; особливості самоорганізації; особливості виконавської діяльності; надійність, стабільність не виявлено.

Зафіксоване статистично достовірне зростання за показниками представленості в професійній самосвідомості студентів експериментальних груп п'ятого курсу особливостей інформаційного пошуку $(t = 2,11)$; організаторських здібностей $(t = 2,13)$; мети $(t = 4,37)$; середньої довжини словника $(t = 3,3)$.

Отримані дані свідчать про позитивний вплив розвивальної програми на професійну самосвідомість як складову суб'єктності майбутнього вчителя в процесі навчальної діяльності.

Слід також звернути увагу на той факт, що компонент загальної довжини словника – інтегральний показник професійної самосвідомості, для студентів достовірно в бік зростання відрізняється у експериментальних групах від контрольних.

Висновки

Підводячи підсумки дослідження, можна сказати наступне:

1) метод самоопису з подальшим контент-аналізом дозволив нам простежити динаміку професійної самосвідомості для студентів від третього та п'ятого курсу в умовах дії програми розвитку суб'єктності майбутнього вчителя в процесі навчальної діяльності та порівняти її з динамікою в умовах звичайного навчання;

2) закономірне зростання довжини словника самоописів для студентів експериментальних груп свідчить про закономірне зростання диференційованості професійної самосвідомості майбутнього вчителя в процесі його професійної підготовки в педагогічному вузі в умовах дії спеціальної програми;

3) разом з статистично достовірним зростанням інтегрального показнику професійної самосвідомості, значна частина її компонент теж статистично достовірно зростає;

4) не відмічено у ході аналізу розбіжностей за середніми значеннями показників структури свідомості від'ємних значень t-критерію, що свідчить про відсутність будь-якої тенденції спаду значень за усіма показниками професійної самосвідомості для студентів експериментальних груп у порівнянні з контрольними у процесі навчання;

5) в ході навчальної діяльності із впровадженням спеціальної програми розвитку суб'єктності майбутніх педагогів в цілому мають місце статистично достовірні тенденції до зростання як інтегрального показника професійної самосвідомість – загальної довжини словника, так і окремих її частин для студентів від третього курсу до п'ятого курсу.

Література

[1] *Агулов М.В.* Психологічні чинники динаміки суб'єктності майбутнього вчителя: дис. ... кандидата психол. наук: спец. 19.00.07 «Педагогічна та вікова психологія» / М.В. Агулов. — Харків, 2010. — 214 с.

[2] *Козиев В.Н.* Психологичексий анализ профессионального самосознания учителя: дис. ... кандидата психол. наук: спец. 19.00.07 «Педагогическая и возрастная психология» / В.Н. Козиев. — Л., 1980. — 180 с.

[3] *Кузъмина Н.В.* Способности, одарённость, талант учителя / Н.В. Кузьмина. — Л.: Изд-во ЛГУ, 1985. — 165 с.

[4] *Кулюткин Ю.Н.* Психологическое знание и учитель / Ю.Н. Кулюткин // Вопросы психологии. — 1983. — № 3. — С. 54 – 61.

[5] *Патаки Ф.* Некоторые когнитивный аспекты Я-образа / Ф. Патаки // Психологические исследования познавательных процессов и личности; под. ред. К.К. Платонова. — М.: Наука, 1983. — С. 45 – 51.

[6] Степанов О.М. Психологічна енциклопедія / О.М. Степанов. — К.: «Академвидав», 2006. — 424 с.

[7] *Саврасов В.П.* Особенности развития профессионального самосознания будущего учителя: дис. ... канд. психол. наук: 19.00.07 / В.П. Саврасов. — Л., 1986. — 175 с.

[8] *Сафин В.Ф.* Роль самооценки в осознании себя как субъекта педагогической деятельности / В.Ф. Сафин // Формирование личности учителя в системе учебно-воспитательного процесса в педагогическом институте; [под ред. Н.В. Кузьминой]. — М.: МГПИ, 1980. — С. 104 – 106.

[9] *Станкин М.И.* Профессиональные способности педагога: Акмеология воспитания и обучения. Академия пед. и соц. наук / М.И. Станкин. — М.: Флинта, 1998. — 386 с.

[10] *Татенко В.О.* Суб'єкт психічної активності в онтогенезі: автореф. дисерт. на здобуття наук. ступеня д-ра психол. наук: спец. 19.00.01 «Загальна психологія, історія психології» / В.О. Татенко. — К., 1997. — 44 с.

[11] *Хараш А.У.* Восприятие человека как воздействие на его поведение / А.У. Хараш // Психология межличностного познания; [под ред. А.А. Бодалёва]. — М.: Педагогика, 1981. — С. 25 – 42.

[12] *Шильштейн Е.С.* Глубинное переживание «Я»: содержание и функциональное значение / Е.С. Шильштейн // Вестник МГУ. Серия 14. Психология. — 2003. — № 3. — С. 3 – 14.

[13] *Якунин В.А.* Психолого-педагогические условия организации учебного процесса в вузе: автореф. дис. на соискание уч. степени д-ра психол. наук: спец. 19.00.07 «Педагогическая и возрастная психология» / В.А. Якунин. — Л., 1989. — 32 с.

МЕТОДИКА ВИКЛАДАННЯ ФІЗИКИ ТА АСТРОНОМІЇ В ЗОШ ТА ВНЗ

УДК 372.853

Ткаченко В.М., Чмирьова К.М.

[1] *кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри фізики, ДВНЗ «ДДПУ»*

[2] *студентка 5 курсу фізико-математичного факультету, ДВНЗ «ДДПУ»*

e-mail: tkachenkovn1@mail.ru

ВИКОРИСТАННЯ ВІРТУАЛЬНИХ ЛАБОРАТОРНИХ РОБІТ ПРИ ПРОВЕДЕННІ ФІЗИЧНОГО ПРАКТИКУМУ В 11 КЛАСІ ЗОШ

Впровадження віртуального лабораторного практикуму в навчальний процес, як підготовчого етапу до виконання робіт фізичного практикуму з реальними фізичними приладами, дозволяє підвищити ефективність навчання та якість формування практичних вмінь і навичок учнів.

Ключові слова: *нові інформаційні технології, віртуальні лабораторні роботи.*

Вступ

У системі викладання фізики як навчального предмету склалася тріада:

- лекції;
- семінари (або практичні заняття);
- практикум (або лабораторні заняття).

Призначення практикуму – експериментальне спостереження основних, найбільш яскравих і виразних, фізичних ефектів і вивчення законів, що їх описують. Він виступає одночасно як метод навчання, джерело знань і засіб навчання.

Одним із завдань курсу фізики старшої школи є – розвиток в учнів узагальненого експериментального вміння проводити природничо-наукові дослідження методами фізичного пізнання (планування експерименту, вибір методу дослідження, вимірювання, обробка та інтерпретація одержаних результатів). Навчальний фізичний експеримент підводить учнів до розуміння сучасних фізичних методів дослідження, формує у них практичні вміння і навички.

Без експерименту немає, і не може бути раціонального вивчення фізики. Одне лише словесне пояснення призводить до формалізму та механічного заучування.

Досвід проведення фізичного практикуму з фізики в 11 класах показує, що виконання і сприйняття учнями лабораторних робіт пов'язане з рядом труднощів [1, 2]:

- в силу недостатнього фінансування освіти обмежується можливість доступу учнів до найцікавішого і унікального сучасного устаткування, технічних об'єктів, наукових і технологічних експериментів, які часом викликають найбільше зацікавлення і стимулюють отримання знань; як наслідок – відсутність наочності при його виконанні;
- багато явищ в умовах шкільного фізичного кабінету не можуть бути продемонстровані. Це стосується явищ мікросвіту, або процесів, які швидко протікають, або дослідів з приладами, які відсутні в кабінеті. В результаті учні стикаються з труднощами в їхньому вивченні, так як не в змозі подумки їх уявити.

Одним із варіантів вирішення даної проблеми, на нашу думку, є впровадження нових інформаційних технологій у навчальний процес – інтерактивні віртуальні лабораторні роботи.

Основна частина

На відміну від традиційного поділу методів навчання у вітчизняній педагогіці на:

- методи організації та здійснення навчально-пізнавальної діяльності;
- методи контролю за ефективністю навчально-пізнавальної діяльності;
- методи стимулювання навчально-пізнавальної діяльності,

у практиці навчання існують і інші підходи до визначення методів навчання, які засновані на ступені усвідомленості сприйняття навчального матеріалу. [3]. Серед яких слід виокремити інтерактивні. Істотна різниця інтерактивних вправ і завдань від звичайних у тому, що виконуючи їх учні не тільки закріплюють вже вивчений матеріал, але й вивчають новий.

Слово «інтерактив» англійського походження, від слів «inter» – разом, «act» – діяти. Інтерактивний – означає здатність взаємодіяти чи перебувати в режимі бесіди, діалогу з будь-ким (людиною) або чим-небудь (наприклад, комп'ютером).

Для успішної організації навчального процесу педагог завжди знаходиться в стадії пошуку нових форм, методів і засобів подачі матеріалу.

В даний час провідне місце займають методи і прийоми навчання, засновані на використанні сучасних інформаційних технологій, що призвело до корінних змін у теорії та практиці навчання. Персональний комп'ютер і Інтернет дуже міцно увійшли в наше життя, а сучасна молодь виявляє до них неабиякий інтерес. І в зв'язку з цим завдання вчителя полягає в тому, щоб і персональний комп'ютер, і Інтернет перетворити у свого безпосереднього помічника.

Питання впровадження у шкільний фізичний практикум нових інформаційних технологій розглядаються в роботах [4–6] та ін. Аналізування цих праць виявило, що найбільш складним видом занять у навчальному процесі на базі інформаційних технологій є лабораторна робота. Разом із тим комп'ютерний фізичний практикум, що містить комп'ютерні програми дослідницького характеру, за певних умов, може стати найбільш ефективним.

Фізичний практикум у 11 класі ЗОШ являє собою заключний етап у вивченні курсу фізики. На цей час, згідно Державному освітньому стандарту з освітньої галузі «Інформатика» в середніх навчальних закладах, учні мають відповідні знання, уміння і навички, необхідні для раціонального використання засобів сучасних інформаційно-комунікаційних технологій при вирішенні задач, пов'язаних з опрацюванням інформації, її пошуком, систематизацією, зберіганням, наданням і передачею.

У зв'язку з впровадженням нових інформаційних технологій у процес навчання суттєво змінюється підхід до лабораторних робіт, виникли нові види лабораторних робіт – віртуальні, інтерактивні лабораторні роботи. Термін «віртуальний» походить від англійського слова «virtual» – схожий, не відрізняється.

Величезну роль в активізації діяльності учнів під час виконання віртуальних лабораторних робіт відіграє пошуковий метод. Учні не просто знайомляться з матеріалами робіт, але й займаються активним пошуком наукової інформації. Це досягається шляхом постановки проблемних питань перед виконанням роботи або отриманням певних творчих завдань. Під час проведення лабораторних робіт учні можуть копіювати матеріали з сайту, записувати тези в свої зошити, робити позначки, переглядати відео фрагменти в Інтернет ресурсах та таке інше.

Крім того учні можуть використовувати готові програми комп'ютерного моделювання [7–10], які дозволяють візуально подати спрощені моделі багатьох фізичних явищ. При цьому можна поетапно включати в розгляд додаткові фактори, які поступово ускладнюють модель і наближають її до реального фізичного явища. Комп'ютер може не тільки створити модель таких явищ, але також дозволяє змінювати умови протікання процесу, «прокрутити» з оптимальною для засвоєння швидкістю. Також комп'ютерне моделювання дозволяє отримувати наочні динамічні ілюстрації фізичних експериментів та явищ, відтворювати їх тонкі деталі, які часто вислизають при спостереженні реальних явищ і експериментів. Деякі моделі дозволяють одночасно з ходом експериментів спостерігати за побудовою відповідних графічних залежностей, що підвищує їх наочність. Розробка до існуючих програм комп'ютерного моделювання запитань, задач і завдань творчого характеру, тестів, сприяє більш глибокому вивченню, узагальненню і закріпленню матеріалу.

Таким чином, при використанні віртуальних лабораторних робіт з фізики учні мають змогу:

- самопідготовки до виконання лабораторних досліджень;
- формування орієнтовних основ діяльності для виконання лабораторних досліджень;
- отримання інформації про фізичний процес і про кількісні значення фізичних величин, що його характеризують (характер їх зміни) – відеофрагменти;
- знайомитись із приладами, які будуть використовуватись в процесі виконання лабораторної роботи;
- перевіряти шляхом тестування ступінь сформованості відповідних практичних умінь і навичок.

Тому використання віртуальних лабораторних робіт ми розглядаємо як підготовчий етап до виконання робіт фізичного практикуму, тобто як підґрунтя для виконання лабораторних робіт з реальними фізичними приладами. Адже лише натурні експерименти дають адекватне уявлення про реальний перебіг фізичних явищ.

Такий діяльнісний підхід до виконання лабораторних робіт дозволяє вирішувати і виховні цілі: формування особистості, здатної орієнтуватися в потоці інформації; розвиток цікавості до фізичних знань, науково-популярних статей, життєвих проблем; усвідомлення учнями ролі фізики в науці та виробництві, виховання екологічної культури, розуміння моральних та етичних проблем, пов'язаних з фізикою.

Висновки

Поєднання інформаційно-комп'ютерних технологій (в тому числі і віртуальних лабораторних робіт) з натурним експериментом робить процес навчання і викладання більш цікавим, якісним, результативним. Саме за допомогою такої єдності можна:

- поліпшувати наочність;
- підвищувати інтерес до вивчення фізики;

- формувати вміння учнів отримувати знання самостійно, працюючи з навчальними комп'ютерними програмами, та в мережі Інтернет;
- здійснювати диференційований підхід до учнів при вивченні фізики;
- формувати творчу особистість учнів;
- удосконалювати практичні навички учнів роботи на ПК.

Література

[1] Сайт Народного учителя России Л.В. Пигалицына // `http://www.levpi-kt.narod2.ru/virt_lab.htm`. — 2013. — 10 апреля.

[2] Учитель физики Нижнецасучейской общеобразовательной школы В.Ю. Говорков // `http://fizicus.ucoz.ru/index/0-2`. — 2013. — 15.04.

[3] Википедия – свободная энциклопедия // `http://ru.wikipedia.org/wiki/Методы_обучения`. —2013. — 17 апреля.

[4] *Жук О.О.* Фізичний експеримент на екрані комп'ютера / О.О. Жук // Вісник Чернігівського державного педагогічного університету ім. Т.Г. Шевченка. — Чернігів: ЧДПУ, 2000. — № 3. — С. 217 – 220.

[5] *Бугайов О.І.* Комп'ютерна підтримка курсу фізики в середній школі: реальність і перспективи / О.І. Бугайов, В.С. Коваль // Фізика та астрономія в школі. — 2001. — № 3.

[6] *Шут М.І.* Застосування до навчання фізики складових сучасного навчального середовища / М.І. Шут // Збірник наукових праць Уманського державного педагогічного університету ім. Павла Тичини / гол. ред. М.Т. Мартинюк. — Умань: СПД Жовтий, 2008. — Ч. 2. — С. 306 – 317.

[7] *Бугайов О.І.* Бібліотека електронних наочностей «Фізика, 7 – 9 кл.» [Електронный Ресурс] : педагогічний програмний засіб для загальноосвітніх навчальних закладів / О.І. Бугайов, М.В. Головко, В.С. Коваль. — 479 Mb. — К.: Квазар-Мікро, 2004. — Версія 1.0.

[8] *Козел С.М.* Открытая физика 2.5 [Електронный Ресурс] : мультимедийный курс / С.М. Козел, В.А. Орлов, А.Ф. Кавтрев. — Долгопрудный: Физикон, 2005. — Технич. требов.: Pentium – 150; 64 Mb RAM; Windows 95/98/ME/NT/2000/XP; Internet Explorer 5.x/6.0; SVGA 800x600.

[9] *Грязнов А.Ю.* Виртуальные лабораторные работы по физике. 7 – 9 классы. [Електронный Ресурс] : программно-методический комплекс / А.Ю. Грязнов, С.Б. Рыжиков, А.А. Кудрявцев, Т.Г. Кудряшова. — М.: Новый Диск. — Технич. требов.: Pentium III – 750 МГц; 64 Mb RAM; Windows 2000/XP/Vista; CD-ROM.

[10] Лабораторные работы по физике. 10 класс. [Електронный Ресурс]. — М.: Дрофа, 2006. — Технич. требов.: Pentium III; 256 Mb; Windows 98/2000/XP; CD-ROM; видеосистема 800x600 –16 bit.

УДК 372.853

Ткаченко В.М., Читанава С.Д.

[1] *кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри фізики, ДВНЗ «ДДПУ»*

[2] *студентка 5 курсу фізико-математичного факультету, ДВНЗ «ДДПУ»*

e-mail: tkachenkovn1@mail.ru

ВИКОРИСТАННЯ КОМП'ЮТЕРНИХ ТЕХНОЛОГІЙ ПРИ ВИКЛАДАННІ РОЗДІЛУ «МЕХАНІКА» В КУРСІ ФІЗИКИ 10 КЛАСУ ЗОШ

В даній статті наведені деякі особливості використання комп'ютерних технологій на уроках фізики, зокрема, при викладанні розділу «Механіка». Розглянуті питання підвищення ефективності навчального процесу шляхом використання комп'ютерної техніки.

Ключові слова: *нові комп'ютерні технології (КТ), фізика.*

Вступ

Питання як викладати сьогодні фізику багато в чому ще дискусійне. На сьогодні поступово відбувається зміна ролі комп'ютера в навчанні: із засобу, що використовується лише на уроках інформатики для вивчення мов програмування, комп'ютер перетворюється на активного помічника вчителя-предметника. У зв'язку з цим зрозуміло, що назріла гостра необхідність в адаптації вчителів до нових умов роботи. Адже на уроці з використанням комп'ютера інформаційна функція вчителя перестає бути основною, а на перший план повинні виходити організуюча і керуюча функції. Основною роллю вчителя є постановка цілей навчання, організація умов, необхідних для успішного вирішення освітніх завдань

З поширенням у світі інформаційно-комп'ютерних технологій та у зв'язку з істотними структурними змінами в освітніх системах склалися передумови для широкого використання інформаційних технологій (ІТ) в загальноосвітніх навчальних закладах взагалі і в процесі вивчення фізики зокрема.

Основна частина

Традиційна система освіти застаріла і потребує значних нововведень. Виходом з положення може служити використання КТ в системі сучасної освіти. Але застосування подібних технологій в освіті виправдане тільки в тих випадках, в яких вони дають істотну перевагу в порівнянні з традиційними формами навчання [1, 2].

Також виокремлюють психологічні принципи, які впливають на якість навчання з використанням КТ: ретельне та детальне планування навчальної діяльності, її організація, чітка постановка цілей і завдань навчання; розробка таких навчально-методичних матеріалів, які базуються на психологічних закономірностях сприйняття, пам'яті, мислення, уваги, а також вікових особливостей учнів; наявність такого зворотного зв'язку між учнем і викладачем, який забезпечує учневі психологічний комфорт у процесі навчання; здатність учня самостійно працювати з інформацією.

Впровадженням КТ у навчальний процес з фізики займалися: О. Бугайов, Є. Коршак, М. Головко, В. Ляшенко, Н. Сосницька, М. Шут та ін. У працях цих вчених розглядаються питання вдосконалення шкільного фізичного експерименту засобами комп'ютерної техніки; поєднання традиційних засобів навчання, зокрема підручника з фізики, з електронними підручниками; розробки програмних засобів з вивчення окремих тем шкільного курсу фізики. Так Селевко А.Г. пише: «Нові інформаційні технології можуть застосовуватися на всіх етапах навчально-виховного процесу: для навчання основ інформаційної культури, при вивченні навчальних дисциплін, у виховному процесі. Комп'ютер може використовуватися на всіх етапах процесу навчання: при поясненні нового матеріалу, закріпленні, повторенні, контролі знань...» [3]. Проблеми дидактики і методики використання ІТ у процесі навчання фізики у старшій школі розглядаються в роботах Романової О.В. [4], Н.С. Пуришевої, А.В. Хуторського [5] та ін.

Використання КТ дозволяє раціональніше розподілити навчальний час. Застосовуючи на уроках фізики обчислювальну техніку, вчитель може за короткий час демонструвати процеси, які проходять впродовж місяців, років і навіть століть. Це дозволяє вивести сучасний урок на якісно новий рівень: підвищувати статус вчителя; впроваджувати в навчальний процес ІТ; розширювати можливості ілюстративного супроводу уроку; використовувати різні форми навчання та види діяльності в межах одного уроку; сприяє покращенню емоційного сприйняття навчального матеріалу, підвищенню його інформативності, доступності та наочності.

Педагоги-практики [4, 5] свідчать, що зараз спостерігається зниження рівня мотивації й пізнавальної активності учнів під час вивчення фізики, що вказує на необхідність вдосконалення методики навчання, модернізації форм і прийомів роботи вчителя. Отже, можна виділити наступні тенденції:

- стали приділяти велику увагу питанню впровадження КТ в навчальний процес,
- для шкільного курсу фізики розробляються комп'ютерні демонстрації і

методики їх використання.

Але існують певні складності:

- навчальні програми з фізики змінюються значно швидше, ніж створюється їх комп'ютерна підтримка;
- недостатньо комп'ютерних демонстрацій розроблено для учнів старшої школи, а більшість вже існуючих орієнтовані на програми шкіл РФ;
- одним з факторів є відсутність у багатьох вчителів навичок володіння комп'ютерним забезпеченням.

Таким чином, є протиріччя між сучасними задачами навчання фізики та недостатньою теоретичною і практичною розробкою експериментальної підтримки вивчення фізики у старшій школі з використанням КТ. Це протиріччя визначило актуальність проведеного дослідження. Гіпотеза дослідження полягала в тому, що впровадження в навчальний процес КТ сприятиме підвищенню якості рівня знань учнів при вивчення розділу «Механіка» в курсі фізики учнями 10 класу ЗОШ, розвитку мотивації в його вивченні. Отже, чому саме «Механіка»? Цей розділ один з базових у 10 класі. Учні вже знайомились з цим розділом в курсі основної школи, а в старшій школі коригуються і поглиблюються знання. Через брак часу у навчальній програмі, КТ спрощуватимуть і прискорюватимуть процес пояснення нового матеріалу, перевірку вже існуючих знань, здійснення контролю.

Існуючі електронні розробки компанії «Физикон»: «Физика. Механика, молекулярная физика», «Живая физика», «Физика. Основная школа. 7–9 классы: часть I», «Физика 7–11 классы. Практикум», «1С: Репетитор. Физика: версия 1.5» та [6], *по-перше*, адаптовані під навчальну програму РФ, яка відрізняється від української; *по-друге*, більшість з них охоплюють програму основної школи, а не старшої. Більшість необхідних тем курсу цими програмами фізики не охоплено. А також використання цих програм передбачає за собою вільне володіння ними вчителем фізики.

Ми пропонуємо комплекс розробок планів-конспектів з зазначеного розділу із використанням КТ. При плануванні уроків ми намагалися знайти оптимальне поєднання КТ з традиційними засобами навчання. Наявність зворотного зв'язку з можливістю комп'ютерної діагностики помилок учнями в процесі роботи, дозволяє проводити урок з урахуванням індивідуальних особливостей учнів. Ми використовували можливості комп'ютера при проведенні різних форм уроку.

Наприклад, на уроці перевірки знань з теми «Кінематика» основна мета — перевірка знань і розуміння основних термінів теми (тіло відліку, система відліку, траєкторія та т. і.). Учням пропонується самостійно відповісти на питання, використовуючи комп'ютерну модель, і отримати результати у відповідній кількості балів. Звичайно, такий урок можна проводити тільки в комп'ютерному класі.

На уроці вивчення нової теми «Прямолінійний рівномірний рух» з використанням комп'ютерних анімацій та моделей комп'ютер надає можливість візуалізації спрощеної теоретичної моделі рівномірного руху з поетапним включенням до розгляду додаткових факторів, чисельних даних, що поступово наближають цю модель до реального явища. Анкетування учнів, проведене під час педагогічної практики, виявило, що впровадження КТ в навчальний процес підвищує інтерес учнів до предмету, поліпшує запам'ятовування матеріалу.

Висновки

Таким чином вирішення нових освітніх завдань вимагає відповідної підготовки вчителя. Впровадження комп'ютера в навчальний процес дозволяє розширювати можливості подання навчальної інформації; підвищувати мотивацію навчання; активізувати навчальний процес, сприяючи забезпеченню більш повної зайнятості всіх учнів; розширювати набори навчальних завдань, здійснюючи управління процесом вирішення таких проблем, які важко піддаються аналізу в традиційних умовах; якісно змінювати контроль за діяльністю учнів; сприяти формуванню в учнів рефлексії діяльності, оскільки вони можуть наочно надати результати своєї роботи.

Література

[1] *Кавтрев А.Ф.* Информационные технологии и электронные образовательные ресурсы для учителя физики / А.Ф. Кавтрев // Школьные технологии. — 2005. — № 4. — С. 207 – 222.

[2] *Мартынов В.А.* Информационно-компьютерное обеспечение мотивационного программно-целевого управления / В.А. Мартынов // Материалы сборника БГПУ. — Барнаул, 2006. — С. 112 – 175.

[3] *Селевко А.Г.* Современные информационно-технические средства в школе / А.Г Селевко. — М.: Народное образование, 2008. — С. 7 – 24.

[4] *Романова О.В.* Информационная дидактика и проблема модернизации компонентов учебного процесса в высшей школе / О.В. Романова // Научные исследования–2011: IX Международная науч.-практ. конф., 22 апр. 2011 г.: матеріали конференції. — Горловка, 2011. — С. 98 – 101.

[5] *Хуторской А.В.* Современная дидактика / А.В. Хуторской // СПб.: Питер, 2001. — С. 195 – 204.

[6] *Фишман А.И.* Видеозадачи по физике. В 4 ч. (CD) / А.И. Фишман, А.И. Скворцов, Р.В. Даминов. — Казань: Казан. Гос. Унив., NMG, 2002.

УДК 531/534 (076)

Овчаренко В.П., Лысенко Е.М.

[1] *кандидат физико-математических наук, доцент кафедры физики, ГВУЗ «ДГПУ»*

[2] *студентка 5 курса физико-математического факультета, ГВУЗ «ДГПУ»*

e-mail: vp_ovcharenko@mail.ru

АКТИВИЗАЦИЯ ПОЗНАВАТЕЛЬНОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ НА УРОКАХ ФИЗИКИ

В статье рассматриваются методы и приемы активизации познавательной деятельности учащихся. Показано, что для определенной категории учащихся использование физического эксперимента способствует повышению уровня активизации практической деятельности.

Ключевые слова: *активность, познавательная деятельность.*

Ключевой проблемой в решении задачи повышения эффективности качества учебного процесса является активизация познавательной деятельности учащихся. Активные методы обучения позволяют использовать все уровни усвоения знаний от воспроизводящей деятельности через преобразующую к главной цели – творческо-поисковой деятельности. Отношение учащихся к процессу обучения обычно характеризуется активностью. Активность определяет степень (интенсивность, прочность) соприкосновения обучаемого с предметом [1].

Управление активностью учащихся называют активизацией. Активизацию можно определить как постоянно текущий процесс побуждения учащихся к энергичному, целенаправленному учению, преодоление пассивной и стереотипной деятельности, спада и застоя в умственной работе. Главная цель активизации – формирование активности учащихся, повышение качества учебно-воспитательного процесса [2].

При изучении физики используются различные пути активизации познавательной деятельности, основные среди них – разнообразие форм, методов, средств обучения, выбор таких их сочетаний, которые в возникших ситуациях стимулируют активность и самостоятельность учащихся.

В настоящее время в учебно-воспитательном процессе широко используются активные методы и формы занятий такие, как проблемный, диалоговый, игровой, исследовательский, метод проектов, модульный, опорных сигналов, автоматизированное обучение и другие [2]. Активные методы обучения формируют у обучаемых не просто знания – репродукции, а умения и потребности применять эти знания для анализа, оценки и правильного принятия решений.

Использование АМО, их выбор определяется целями и содержанием обучения, индивидуальными особенностями обучаемых и рядом других условий. Для успешного использования активных методов обучения необходимо соблюдать следующие педагогические условия активизации учебной деятельности обучаемых:

- знание сущности психических явлений, подлежащих активизации;
- знание приемов и способов управления этими психическими явлениями, средств педагогического воздействия;
- овладение методикой активизации учебной деятельности, приобретение опыта работы в этой области;
- волевая готовность к преодолению трудностей и срывов, которые могут возникнуть в процессе внедрения в практику активных методов обучения;
- учет мнения, запросов обучаемых, их отношение к методике активного обучения;
- избегать постоянного использования одних и тех же методов и приемов.

Один и тот же метод в работе различных учителей дает различные результаты в зависимости от состава используемых при этом методических приемов.

В педагогической практике и в методической литературе традиционно принято делить методы обучения по источнику знаний: словесные (рассказ, лекция, беседа, чтение), наглядные (демонстрация натуральных, экранных и других наглядных пособий, опытов) и практические (лабораторные и практические работы). Каждый из них может быть и более активным и менее активным, пассивным [3].

В преподавании физики, как и в преподавании других учебных предметов, должны применяться различные методы обучения: словесные, наглядные, практические – с выдвижением проблем и привлечением учащихся к самостоятельным поискам способов решения этих проблем. При этом степень участия школьников в решении выдвинутых проблем зависит от сложности этих проблем и уровня подготовки учащихся.

В современных условиях на содержание методов обучения большое влияние оказывают технические средства обучения (кино, телевидение, звукозапись и ее воспроизведение, различного вида статическая проекция и т. д.).

Они ускоряют процесс подачи и переработки информации, повышают качество ее усвоения.

В преподавании физики в старших классах по сравнению со средними классами должен возрасти «удельный вес» метода объяснений с теоретическим анализом фактов, выводами следствий из теорий, доказательствами, а также лекционного метода изложения материала в сочетании с широким использованием демонстрационного эксперимента, показом фрагментов фильмов, кодоскопической проекции, вычерчиванием на доске рисунков, схем, использование компьютерных технологий. Здесь должно быть усилено внимание к различным видам самостоятельных работ учащихся: работе с учебной и дополнительной литературой, выполнению наблюдений и опытов, решению физических задач и т. д. Особое внимание должно быть уделено формированию у учащихся обобщенных познавательных и практических умений.

При выборе тех или иных методов обучения следует учитывать прежде всего характер решаемых на уроке учебных задач, возрастные особенности учащихся старших классов, их стремление к самостоятельным суждениям, уровень имеющихся у них познавательных умений. Бесспорно также то, что в выборе методов и методических приемов для каждого конкретного урока важную роль играет педагогическое мастерство учителя, его индивидуальные качества. Очень важным является вопрос о соотношении различных методов обучения. Здесь надо иметь в виду, что чрезмерное увлечение каким – либо одним методом неизбежно приводит к снижению эффективности обучения. Так, чрезмерное увлечение, например, программным обучением приводит к снижению уровня теоретического мышления школьников, затормаживает развитие их логического мышления, выработку умения своими словами давать логически последовательные объяснения, обосновывать свои суждения.

Мастерство учителя заключается в умении обеспечивать наиболее рациональное (оптимальное) сочетание методов на различных этапах обучения в зависимости от содержания учебного материала и решаемых на его основе учебно-воспитательных задач, от возрастных особенностей учащихся, уровня развития и мышления, познавательных способностей, имеющегося запаса знаний, умений и навыков.

Как метод обучения большую ценность представляет физический эксперимент, который включает демонстрационный эксперимент, физический практикум, лабораторные работы, экспериментальные работы, опыты и задачи, компьютерный эксперимент. Именно этот метод был выбран нами для проведения педагогического эксперимента.

Целью эксперимента было:

- установить тип мышления учащихся и на базе этого выбрать оптимальные методы активизации познавательной деятельности учеников;
- выявить начальный уровень активизации практической деятельности учащихся;
- сформировать экспериментальные умения учащихся при изучении физики;
- повысить познавательный интерес и качество практической деятельности учащихся.

На первом этапе педагогического эксперимента было проведено тестирование учеников с целью выявления типа их мышления. Зная тип мышления, можно прогнозировать успешность познавательной деятельности учащихся, выяснить какие активные методы активизации нужно применить в учебном процессе. Существуют следующие типы мышления: предметно-действенное, абстрактно-символическое, словесно-логическое, наглядно-образное, творческое. Учащимся был предложен опросник, при помощи которого определялся тип мышления. Обработка результатов опроса показала, что необходима большая работа по развитию абстрактно-символического, наглядно-образного, творческого мышления. Из наблюдений за учебным процессом было установлено, что дети только интуитивно представляют методы наблюдения за экспериментом. При этом они не могут указать цель наблюдения, в ответах нет логической связи, не могут проявить самостоятельно какие-то умения и навыки экспериментальной работы.

Из всех активных методов обучения мы избрали экспериментальный, ибо он позволяет в большей степени проявить творческую и самостоятельную деятельность, развивать умения, навыки, повышает интерес к физике, улучшает память, мышление и обеспечивает воспитание: дисциплину, взаимопомощь, ответственность.

На формирующем этапе эксперимента была проведена:

- корректировка календарно-тематического плана по физике, который предусматривал проведение уроков, насыщенных экспериментальным методом;
- разработаны различные формы учебных занятий, в которых указаны приемы, способы, дающие возможность повысить уровень активности учащихся;
- разработаны рекомендации по овладению методами научного познания.

Вся проделанная работа позволила определить начальный и конечный уровень познавательной активности учащихся. Анализ результатов эксперимента позволил сделать следующий вывод: у учащихся сформировалось целостное представление об экспериментальном методе познания. Они могут самостоятельно и безошибочно определить цель, условие, план проведения эксперимента, делать логические заключения, значительно повысилась их самостоятельность, ответственность, успеваемость, интерес к изучению физики, что свидетельствует, в итоге, о повышении их уровня активности.

Разработанные нами методические рекомендации для учащихся по овладению экспериментальными умениями и навыками, и разработанные рекомендации для учителей физики по повышению уровня активизации практической деятельности могут использоваться в преподавании физики в школах.

Литература

[1] *Калмыкова З.И.* Зависимость уровня усвоения знаний от активности учащихся в обучении / З.И. Калмыкова // Современная педагогика. — 2000. — № 7. — С. 18 – 21.

[2] *Щукина Г.И.* Активизация познавательной деятельности учащихся в учебном процессе / Г.И. Щукина. — М.: Просвещение, 1982. — 160 с.

[3] *Горбунова А.И.* Методы и приемы активизации мыслительной деятельности учащихся / А.И. Горбунова // Современная педагогика. — 1999. — № 3. — С. 27 – 29.

УДК 531/534 (076)

Овчаренко В.П., Щербина І.Л.

[1] *кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри фізики, ДВНЗ «ДДПУ»*

[2] *студентка 5 курсу фізико-математичного факультету, ДВНЗ «ДДПУ»*

e-mail: vp_ovcharenko@mail.ru

ЗАСТОСУВАННЯ ІНТЕГРАЦІЙНИХ ЗВ'ЯЗКІВ ПРИ ВИКЛАДАННІ ФІЗИКИ

В даній статті обгрунтовується необхідність інтеграційних зв'язків фізики з природничими дисциплінами. В процесі експерименту було доведено, що інтеграційні зв'язки між дисциплінами забезпечують ефективність навчальної діяльності і сприяють розвитку в учнів цілісного наукового світогляду.

Ключові слова: *інтеграційні зв'язки, навчальна діяльність, науковий світогляд.*

Сучасна система освіти направлена на формування високо освіченої, інтелектуально розвиненої особистості з цілісним уявленням картини світу, з розумінням глибини зв'язків явищ та процесів, що представляють дану картину.

Введення інтеграції предметів в системі освіти дозволить вирішити завдання поставлені в даний час перед школою і суспільством в цілому. Інтеграційне навчання сприяє інтенсифікації, систематизації, оптимізації учбово-пізнавальної діяльності. Проблемі реалізації інтегративних зв'язків у навчанні приділялась значна увага на всіх етапах розвитку педагогіки. Загально відомо, що успішне розв'язання цієї педагогічної проблеми суттєво впливає на якість і ефективність навчального процесу. Тому вона постійно перебуває в центрі уваги дослідників і вчителів практиків. Предметна роз'єднаність стає однією з причин фрагментарності світогляду випускника школи, тоді як в сучасному світі переважають тенденції до економічної, політичної, культурної, інформаційної інтеграції. Самостійність предметів, їх слабкий зв'язок один з одним породжують серйозні труднощі у формуванні в учнів цілісної картини світу. Завдяки використанню інтеграції можна реалізувати:

- цілісне уявлення про навколишній світ (інтеграція як мета навчання);
- знайти загальну платформу зближення предметних знань (інтеграція як засіб навчання).

У програмі «Фізика. Астрономія. 7-11 кл.» вказано, що фізика є фундаментальною наукою, яка вивчає загальні закономірності перебігу природних явищ, закладає основи світорозуміння на різних рівнях пізнання природи. Фундаментальний характер фізичного знання як філософії науки і методології природознавства, теоретичної основи сучасної техніки і виробничих технологій визначає освітнє, світоглядне та виховне значення шкільного курсу фізики як навчального предмета [1]. Саме по цим причинам слід викладати фізику у зв'язку з іншими предметами і будувати в учнів цілісну наукову картину світу.

Важливо враховувати той факт, що інтеграційні зв'язки між предметами мало розроблені, викладені суперечливо, багато розбіжностей серед авторів посібників в розумінні суті цих зв'язків. Вчителі, не маючи чіткої системи методичних рекомендацій по цьому питанню, вимушені вирішувати цю проблему на емпіричному рівні. Проаналізувавши методичну літературу, ми виявили такі недоліки в викладанні природничих наук:

- невиправдано великі витрати часу на дублювання (повторний виклад) одних і тих же питань в процесі викладання різних навчальних дисциплін природничого напрямку;
- недостатня узгодженість в часі вивчення суміжних навчальних дисциплін, що ускладнює використання можливостей одного предмету в підготовці теоретичної і практичної бази для вивчення іншого;
- відсутність єдності в інтерпретації загальних понять, законів і теорій, відсутність єдності в їх розкритті на різних етапах навчання, при вивченні різних навчальних дисциплін;
- обмежене перенесення знань, умінь і навичок, отриманих учнями при вивченні одних навчальних предметів, на вивчення інших навчальних предметів;
- низький рівень систематизації і узагальнення знань, отриманих учнями при вивченні різних дисциплін;
- відсутність єдиного підходу до вироблення в учнів узагальнених умінь і навичок;
- недостатньо повне розкриття взаємозв'язків і взаємообумовленостей явищ, що вивчаються на уроках;
- обмежений показ спільності і, разом з тим, специфічності методів дослідження, а також специфічності ряду категорій, законів і положень для всіх наук [1].

Оскільки інтеграція – це не самоціль, а певна система в діяльності вчителя, то повинен бути і цілком конкретний результат інтегрованого навчання.

Він може бути:

- у підвищенні рівня знань по предмету, який вивчається;
- в глибині засвоюваних понять;
- у зміні рівня інтелектуальної діяльності;
- у зростанні пізнавального інтересу школярів;
- у включенні учнів в творчу діяльність;
- знання набувають системності;
- вміння стають узагальненими, сприяють комплексному застосуванню знань, їх синтезу, перенесенню ідей і методів з однієї науки в іншу;
- посилюється світоглядна спрямованість пізнавальних інтересів учнів;
- досягається всебічний розвиток особистості.

Для того щоб застосування інтеграції було можливим і плідним, необхідне планування інтеграційних зв'язків. Зміст, об'єм, час і засоби використання знань і вмінь з інших предметів можна визначити лише на основі планування. Це може бути сіткове, курсове, тематичне чи поурочне планування.

Інтеграційні зв'язки можуть бути здійснені різними шляхами в органічній єдності, цілеспрямовано і систематично. Це можуть бути синхронні багатопредметні зв'язки, перенесення знань з однієї області науки в різні ситуації інших областей, асинхронні (взаємні) зв'язки, понятійні, ідейні, системно-синтетичні, зв'язки по методам наук.

Пізнання фізики невід'ємне від пізнання математики, особливо зараз, коли математичні методи дослідження широко застосовуються у різних галузях. Фізика, з одного боку, використовує математичний апарат для вивчення кількісних зв'язків між явищами та процесами матеріального світу, а з іншого, стимулює розвиток математики, висуваючи для неї задачі створення нового математичного апарату для вираження нових фізичних закономірностей. Зв'язок фізики і математики, як навчальних предметів, повинен здійснюватись у різних напрямках, таких як формування в учнів фізичних і математичних понять, практичних вмінь та навичок.

Взаємозв'язок фізики і математики постійно розширюється. Основна увага приділяється вдосконаленню методики його реалізації, вибору оптимальних напрямків взаємопроникнень у викладанні цих курсів. Оскільки взаємозв'язок значно підвищує науковий рівень викладання кожного з цих предметів, його необхідно здійснювати на всіх етапах навчання. Саме на це націлюють вчителів навчальні програми з фізики та математики [3].

З проведеного аналізу програм з фізики і математики ми виявили досить великі недоліки і розбіжності при вивченні фізики і математичних наук, фактично на кожному уроці, перш ніж розповісти про фізику, вчителю необхідно дати учням математичну базу, для того щоб учні мали змогу його зрозуміти і розв'язувати задачі [4].

Реалізація одного з основних напрямків шкільної реформи- включення основ інформатики в учбовий процес і забезпечення комп'ютерної грамотності. Що можна сказати про зв'язок фізики та інформатики? Цей зв'язок буде поширюватися, без знання фізичних законів неможливий розвиток обчислювальної техніки, а без комп'ютера – прогрес розвитку фізики та інших наук.

Формування наукового світогляду учня неможливе без засвоєння системних знань з хімії, тому що розвиток зв'язків фізики і хімії сприяє формуванню ключових компетентностей учнів, необхідних для творчої самореалізації особистості, розуміння наукової картини світу, вироблення екологічного стилю мислення та виховання громадянина демократичного суспільства. З проведеного аналізу програм з хімії можна зробити висновок, що курси фізики і хімії добре узгоджені між собою. Є лише деякі розбіжності у часі вивчення одних і тих же понять, які можна вирішити шляхом проведення інтегрованих уроків.

Метою нашого експерименту було виявити чи забезпечує цілеспрямоване здійснення інтеграційних зв'язків фізики з предметами природничого циклу ефективність навчально-пізнавальної діяльності, підвищення якості навчальних досягнень учнів, підвищення їх пізнавального інтересу. В експерименті брали учні 11-А класу (ЗОШ №1, м. Слов'янськ) та вчителі фізики, математики, інформатики, хімії. Задачами першого етапу (констатуючого) педагогічного експерименту було дослідити активність учнів на уроках фізики; з'ясувати чи використовують вчителі ідеї інтеграції при навчанні; дізнатися про якість навчальних досягнень учнів. Під час бесіди з вчителями виявилось, що вони не займались аналізом програм з інших предметів, не проводили сумісні інтегровані уроки, а використовували свої знання з інших предметів, коли це потрібно, при вивченні своєї дисципліни. Учні не можуть зв'язати між собою предмети природничого циклу.

Ми розробили систему інтегрованих уроків для повторення курсу фізики при підготовці випускників шкіл до зовнішнього тестування, та методичні рекомендації для вчителів по їх впровадженню. На протязі трьох місяців (під час проведенні педагогічної практики) використовували ці розробки на уроках фізики і спостерігали за наслідками роботи учнів на уроках.

Результати проведеного педагогічного експерименту були проаналізовані і дали змогу зробити наступні висновки:

- підвищився пізнавальний інтерес учнів -учні стали активніше працювати на заняттях, брали домашні завдання, самостійно знаходили зв'язки між предметами;

- підвищилась якість навчальних досягнень учнів;
- підвищилась ефективність навчально-пізнавальної діяльності.

Таким чином, можна зробити висновок, що здійснення інтеграційних зв'язків фізики з предметами природничого циклу забезпечує ефективність навчальної діяльності, дозволяє сформувати в учнів цілісний науковий світогляд, вміння стають узагальненими, сприяють комплексному застосуванню знань з різних предметів.

Література

[1] *Зверев И.Д.* Межпредметные связи в современной школе: курс лекций / И.Д. Зверев, В.Н. Максимова. — М.: Педагогика, 1982. — 195 с.

[2] *Сергієв О.В.* Міжпредметні зв'язки під час вивчення фізики в середній школі: посіб. для вчителів / О.В. Сергієв. — К.: Радянська школа, 1979. — 171 с.

[3] *Радченко А.И.* Интегрированный урок — конференция. 11 класс / А.И. Радченко // Физика в школе. — 2007. — № 5. — С. 17 – 21.

[4] *Цацурян А.М.* Опыт применения математики в преподавании физики / А.М. Цацурян // Физика в школе. — 1990. — № 4. — С. 21 – 23.

УДК 372.853

Олійник Р.В., Пашковська Н.М.

[1] *кандидат педагогічних наук, доцент кафедри фізики, ДВНЗ «ДДПУ»*

[2] *студентка 5 курсу фізико-математичного факультету, ДВНЗ «ДДПУ»*

e-mail: natalya-pashkovs@mail.ru

ТЕХНОЛОГІЯ СПІВРОБІТНИЦТВА ЯК ОДИН ІЗ ШЛЯХІВ РОЗВИТКУ ПІЗНАВАЛЬНОЇ МОТИВАЦІЇ УЧНІВ

У статті згрупована методика інноваційної технології співробітництва, яка використовується вчителями на уроках фізики та може бути перспективним засобом розвитку пізнавальної мотивації учнів.

Ключові слова: *технологія, співробітництво, мотивація.*

Прагнення постійно оптимізовувати навчально-виховний процес зумовило появу нових і вдосконалення використовуваних педагогічних технологій різних рівнів і різної цільової спрямованості. Подальший їх розвиток пов'язаний з орієнтацією на реалізацію сучасних концепцій освіти й виховання.

Суттєвою ознакою сучасних інноваційних процесів у сфері навчання і виховання є їх *технологізація* – неухильне дотримання змісту і послідовності етапів впровадження нововведень.

Історично поняття «технологія» (грец. techne – мистецтво, майстерність і logos – слово, вчення) у значенні науки про майстерність виникло у зв'язку з технічним прогресом.

До основних ознак технології належить стандартизація, уніфікація процесу, можливість його ефективного та економічного відтворення відповідно до заданих умов. Технологічний процес завжди передбачає чітку послідовність операцій з використанням необхідних засобів (матеріалів, інструментів) за певних умов [1].

Впровадження педагогічних технологій в навчальних процесах окремих дисциплін є одним із перспективних шляхів підвищення ефективності навчання. Серед інших, для нашого теоретичного та практичного дослідження ми виділили технологію співробітництва, як одну з найбільш перспективних особисто-орієнтованих технологій.

Педагогіка співробітництва заснована на принципах:

— взаємозалежність членів групи;

— особиста відповідальність кожного члена групи за власні успіхи й успіхи групи;

— спільна навчально-пізнавальна діяльність в групі;

— загальна оцінка роботи групи [2].

Особливості характеристик та організації технології співробітництва вивчали К. Д. Ушинський, С. Т. Шацький, В. Я. Корчак, К. Роджерс, Е. Берн.

За їх твердженням, навчання у співробітництві розглядається як метод. Існують кілька варіантів даного методу навчання:

Перший варіант «навчання в команді». Більшість варіантів методу навчання в співробітництві використовують ідеологію саме цього варіанту. У цьому варіанті особлива увага приділяється «груповим цілям» і успіху всієї групи, який може бути досягнутий в результаті самостійної роботи кожного члена групи в постійній взаємодії з іншими членами цієї ж групи при роботі над темою, питанням, предметом вивчення. Завдання кожного учня полягає не тільки в тому, щоб зробити щось разом, а в тому, щоб пізнати щось разом, щоб кожен член команди оволодів необхідними знаннями, сформував потрібні навички і при цьому, щоб вся команда знала, чого досяг кожен учень [3].

Другий варіант навчання у співпраці «пила». Був розроблений проф. Elliot Aronson в 1978 р. і названий Jigsaw (у дослівному перекладі з англійської – ажурна пила, машинна ножівка). У педагогічній практиці такий підхід іменується скорочено «пила» [4].

Учні організуються в групи по 4-6 чоловік для роботи над навчальним матеріалом, який розбитий на фрагменти (логічні або смислові блоки).
Наприклад, тема «Біографія видатного фізика чи вченого» може бути розбита на:

– причини що спонукали вченого до вибору предмета дослідження;

– механізм вирішення наукової проблеми;

– труднощі наукового пошуку;

– оцінка внеску вченого в розвиток науки.

Кожен член групи знаходить матеріал по своїй частині.

Потім учні, які вивчають один і той же питання, але складаються в різних групах, зустрічаються і обмінюються інформацією як експерти з даного питання. Це називається «зустріччю експертів».

Третій варіант методу навчання в співробітництві «Вчимося разом».

Learning Together (вчимося разом) розроблений в університеті штату Міннесота в 1987 році (David Johnson, Roger Johnson). Клас розбивається на різнорідні (за рівнем навченості) групи в 3-5 чоловік. Кожна група отримує одне завдання, яке є частиною завдання будь якої теми, над якою працює весь клас. В результаті спільної роботи окремих груп і всіх груп в цілому досягається засвоєння всього матеріалу. Всередині групи учні самостійно визначають ролі кожного у виконанні загального завдання [5].

У навчанні, побудованому на основі педагогіки співробітництва важлива мета – розвиток інтелектуальних, духовних і фізичних здібностей, інтересів, мотивів, вироблення науково-матеріалістичного світогляду. Змістом уроку в такому навчанні є освоєння способів пізнання, суспільно і особисто значущих перетворень в навколишньої дійсності, а не програмні знання і матеріал підручника.

Учні отримують можливість думати вільно, говорити невимушено, емоційно, багато і уважно читати, аналізувати, усвідомлювати важливість знань фізики для життя і професійної діяльності. Якщо навчальна робота учнів має такі риси, це обов'язково приводить до розвитку важливої якості особистості – пізнавальної мотивації , навчання школярів набуває мотивів.

Під мотивами розуміють спонукальну причину дій і вчинків. На формування мотивів впливають потреби, потяги, емоції, установки, ідеали та інтереси. Проблема формування позитивної мотивації школярів на уроках фізики залишається актуальною, безліч педагогів вчених – дидактів займалися вирішенням цієї проблеми [6].

Наше дослідження також направлено на формування пізнавальної мотивації учнів при вивченні фізики. Його особливістю є шлях досягнення результату – розвиток мотивації за допомогою технології співробітництва.

Практичний етап дослідження нами був проведений у Слов'янському хіміко-механічному технікуму серед учнів, які вивчають фізику за програмою академічного рівня середньої школи. Викладачем фізики в цьому закладі є КотляровО.В., високо фаховий спеціаліст, який успішно втілював в практику роботи основні принципи, ідеї, методи та особливості, притаманні технології співробітництва. Його розробки «навчання в команді», «пила», «вчимося разом», «зустріч експертів», добре відомі колегам та майбутнім вчителям. Наше сумісне дослідження було направлено на розвиток пізнавальної мотивації учнів.

Наведемо перелік етапів нашої роботи:

- ознайомлення з теорією та практикою впровадження технології співробітництва, її «можливостей», для розвитку пізнавальної мотивації при навчанні фізики;
- діагностування рівня мотивації учнів до вивчення фізики та їх емоційного ставлення до предмету на початку дослідження (за Казанцевої Г.М. та модифікацією Андреєвої Ф.Д.);

- організація відповідних бесід та пояснень учням, які адаптували перехід від індивідуальної діяльності до групової;
- внесення змін до календарно-тематичного планування з фізики, які б передбачали застосування технології співробітництва, що сприяють розвитку пізнавальної мотивації учнів, емоційної саморегуляції, конструктивної взаємодії, організованості та відповідальності;
- розробка планів – конспектів уроків з фізики (тема: «Магнітне поле») з урахуванням використання рекомендацій планування, відповідного дидактичного матеріалу, наочностей, сучасних засобів навчання.

Створення емоційного настрою учнів на уроках сприяли застосування, нами традиційних та інноваційних методичних прийомів: історичних фактів, цікавих дослідів, дидактичних ігор, твори художньої літератури, проблемні ситуації, нестандартні прийоми навчання. Такі прийоми як тренінги розумової діяльності у співпраці та співробітництві допомагали наблизитися до мети дослідження.

Якщо на початку нашої роботи у студентів першого курсу хіміко-механічному технікуму ми константували рівень пізнавальної мотивації другого та третього ступеня у 52 % учнів, то наприкінці він складав 56 %. Результати дослідження (ще не кінцеві) дозволяють судити про його актуальність своєчасність та ефективність у досягнені позитивних цілей навчання.

Література

[1] *Кукушина В.С.* Педагогические технологии: учеб. пособие / В.С. Кукушина. — М.: ИКЦ «МарТ», 2004. — 336 с.

[2] *Селевко Г.К.* Современные образовательные технологии: учебное пособие / Г.К. Селевко. — М.: Народное образование, 1998. — 256 с.

[3] *Даутова О.Б.* Современные технологии в профильном обучении / О.Б. Даутова, О.Н. Крылова ; [под ред. А.П. Тряпициной]. — СПб.: Каро, 2006. — 176 с.

[4] *Лысенкова С.* Педагогика сотрудничества (Отчет о встрече учителей-экспериментаторов) / С. Лысенкова, В. Шаталов, И. Волков [и др.] // Учительская газета. — 1986. — 18 октября.

[5] *Полат Е.С.* Новые педагогические и информационные технологии в системе образования / Е.С. Полат. — М.: Академия, 2003.

[6] *Маркова А.К.* Мотивация и её воспитание у школьников / А.К. Маркова — М.: Педагогика, 1983. — 64 с.

УДК 372.853

Белошапка О.Я., Попов О.К., Шарап В.А.

[1] *старший викладач кафедри фізики, ДВНЗ «ДДПУ»*

[2] *вчитель фізики та астрономії, Слов'янська ЗОШ № 15*

[3] *вчитель фізики, Єнакієвський НВК № 2*

e-mail: beloshapka_al@mail.ru, neonate13@mail.ru

ТЕХНОЛОГІЯ ПРОБЛЕМНОГО ВИХОВАННЯ, ЯК ЗАСІБ ПОКРАЩЕННЯ ПІЗНАВАЛЬНОГО ІНТЕРЕСУ ДО НАВЧАННЯ

Розглянуті питання підвищення пізнавального інтересу шляхом використання проблемного навчання на уроках фізики. Показана можливість використання на практиці (надані результати педагогічного експерименту).

Ключові слова: *проблемне навчання, пізнавальний інтерес, педагогічний експеримент.*

Вступ

Метою навчання і виховання є формування особистості здатної активно діяти, приймати самостійні рішення, вільно мислити.

У більшої частини школярів позитивна мотивація недостатня. Виникає проблема між необхідністю школи дати дитині освіту і відсутністю зацікавленості в цьому їх самих і батьків. До того ж за останні роки в учнів знизився інтерес до природно-математичних предметів та фізики, зокрема. Причинами втрати інтересу часто є нерозуміння зв'язку досліджуваних понять з реальною дійсністю, відсутністю осмислення складних абстрактних понять, зміна світогляду учнів, поглядів на традиційні методи навчання.

У багатьох педагогів існує думка що, підвищенню інтересу, розвитку творчих здібностей і мислення сприяє викладання з використанням проблемних методів. Дорно І.В. вважає, що функції проблемного навчання – сприяння ефективному засвоєнню учнями системи знань і способів розумової і практичної діяльності; вироблення вміння творчо застосовувати отримані знання у новій ситуації, вирішувати навчальні проблеми; виховання пізнавальної самостійності, це веде до придбання досвіду творчої діяльності та розвитку творчих здібностей дітей; розвитку мислення [2].

Учні повинні виступати не в ролі пасивних слухачів, а активно брати участь у процесі пізнання. Формування активної життєвої позиції, прагнення до нового, уміння його розуміти і цінувати, схильності до досліджень та винахідництва починаються в школі. Фізика як навчальний предмет має такими особливостями, які створюють найбільш сприятливі умови для розвитку розумової діяльності учнів у цілому.

Основна частина

Пізнавальна діяльність — це єдність чуттєвого сприйняття, теоретичного мислення і практичної діяльності. Вона здійснюється на кожному життєвому кроці, у всіх видах діяльності і соціальних взаємин учнів, а також шляхом виконання предметно-практичних дій у навчанні. Говорячи про пізнавальну діяльність не можна забувати пізнавальну активність. Тому, що ставлення учнів до навчання характеризується активністю, яка визначає ступінь «зіткнення» учня з предметом його діяльності [5].

У структурі активності виділяються наступні компоненти:

— готовність виконувати навчальні завдання;

— прагнення до самостійної діяльності;

— свідомість виконання завдань;

— системність навчання;

— прагнення підвищіти свій особистий рівень.

Її особлива значущість полягає в тому, що вчення, будучи відбивно-перетворюючою діяльністю, спрямоване не тільки на сприйняття навчального матеріалу, але і на формування ставлення учня до самої пізнавальної діяльності. Перетворюючий характер діяльності завжди пов'язаний з активністю суб'єкта. Пізнавальна активність – це інтерес до навчальної діяльності, до придбання знань, до науки. Виникнення пізнавальної активності залежить в першу чергу від рівня розвитку дитини, його досвіду, знань, того грунту, яка живить інтерес, а з іншого боку, від способу подачі матеріалу. Тому пізнавальний інтерес учня виступатиме в учбовому процесі [1]:

— як мета навчання;

— як засіб в руках учителя і мотив діяльності учня;

— як результат навчання.

Це наводить до необхідності досліджувати «цікаве учення» як якість навчання, визначувані особливостями змісту предмета, який виявляється в комплексі методичних прийомів, сприяючих створенню позитивного емоційного настрою класного колективу на вирішення учбово-виховних завдань уроку.

Фізика займає особливе місце серед шкільних дисциплін. Як навчальний предмет вона складає головний зміст наукової картини світу. Це надає можливість підвищити пізнавальний інтерес до навчання вцілому. Цього можна досягти різними шляхами, але ми вважаємо, що найбільш раціональний це використання *проблемного навчання*. Основними поняттями концепції проблемного виховання є *проблемна ситуація, проблема і проблемне завдання* [3].

Проблемна ситуація – психологічний стан, що виникає в результаті мисленої взаємодії суб'єкта (учня) з об'єктом (навчальним матеріалом), який викликає пізнавальну потребу розкрити суть процесу або явища, що вивчається.

Проблема – ситуація що потребує активних дій і є побуджуючим чинником для діяльності людини (досліджень, проектування та виконання), щоб ліквідувати наслідки чи запобігти їх виникнення.

У процесі вирішення проблемних ситуацій, учні самі видобувають відсутні для рішення знання, при цьому вони проходять всі етапи наукового пізнання світу: від висунення гіпотези до її перевірки, осягають логіку відкриття [4].

Результати дослідження

Базою для проведення експериментального дослідження став 9 клас (15 чоловік) НВК № 2 м. Єнакієва. Нами була розроблена методика проблемного навчання, яку використали на уроках фізики. Для підтвердження гіпотези була проведена діагностика до та після застосування проблемного навчання. В ході діагностики були використані наступні методики:

- діагностика особистісної креативності;
- діагностика спрямованості навчальної діяльності;
- діагностика мотивації пізнавальної діяльності.

Були отримані наступні дані:

Табл. 1: Діагностика особистісної креативності

	Рівень		
Експеримент	Високий	Середній	Низький
Констатуючий	3 чол. (20,1 %)	8 чол. (53,6 %)	4 чол. (26,3 %)
Контролюючий	7 чол. (46,4 %)	5 чол. (33,5 %)	3 чол. (20,1 %)

Табл. 2: Діагностика спрямованості навчальної діяльності

	Рівень		
Експеримент	Високий	Середній	Низький
Констатуючий	3 чол. (20,1 %)	6 чол. (39,9 %)	6 чол. (39,9 %)
Контролюючий	7 чол. (33,5 %)	6 чол. (39,9 %)	4 чол. (26,3 %)

Табл. 3: Діагностика мотивації пізнавальної діяльності

	Рівень		
Експеримент	Високий	Середній	Низький
Констатуючий	3 чол. (20,1 %)	5 чол. (33,3 %)	7 чол. (46,3 %)
Контролюючий	4 чол. (26,6 %)	6 чол. (39,9 %)	4 чол. (33,3 %)

Висновки

В якості ознаки розвитку школярів можна розглядати пізнавальну діяльність, яка розуміється як особлива форма активності спрямованої на оволодіння принципами побудови нових дій з досліджуваним об'єктом.

В ході дослідження було встановлено, що застосування проблемного навчання сприяє покращенню пізнавального інтересу до навчання (результати в таблицях). Також була визначена можливість використання проблемного методу при вивчені фізики в школі та встановлено його вплив на характер пізнавальної діяльності учнів 9 класу. Всі визначені дані були розкриті і чітко виявлені.

Таким чином використання методу проблемного навчання при вивченні фізики сприяє всебічному розвитку учня.

Література

[1] *Дусавицкий А.К.* Формула интереса / А.К. Дусавицкий. — М.: Педагогика, 2003. — 128 с.

[2] *Дорно И.В.* Проблемное обучение в школе / И.В. Дорно. — М.: Знание, 1984. — 300 с.

[3] *Малафеев Р.И.* Развитие учащихся на основе проблемного обучения физике / Р.И. Малафеев. — Челябинск: ЧПГИ, 1975. — 155 с.

[4] *Оконь В.* Основи проблемного навчання / В. Оконь. — М.: Просвещение, 1968. — 248 с.

[5] *Талызина Н.Ф.* Формирование познавательной деятельносты учащихся / Н.Ф. Талызина. — М.: Знание, 1983. — 355 с.

УДК 37.016:521.91

Белошапка А.Я., Попов О.К.

[1] *старший преподаватель кафедры физики, ГВУЗ «ДГПУ»*

[2] *учитель физики и астрономии, Славянская ООШ № 15*

e-mail: beloshapka_al@mail.ru, neonate13@mail.ru

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ПАРАЛЛАКТИЧЕСКОГО ТРЕУГОЛЬНИКА ДЛЯ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ КООРДИНАТ

В данной работе показана возможность использования сферической геометрии на сфере в астрономии. Речь пойдёт о преобразовании горизонтальной системы координат в экваториальную с помощью паралактического треугольника и целесообразности его применения в школе. Разработана программа в среде Delphi, позволяющая проводить эти преобразования автоматически.

Ключевые слова: *параллактический треугольник, геометрия на сфере, система координат*

Введение

Небесные координаты использовались уже в глубокой древности. Описание некоторых систем содержится в трудах древнегреческого мыслителя Эвклида (около 300 до н. э.). Опубликован в «Альмагесте» Птолемея звездный каталог содержит положения 1022 звезд в эеклиптической системе небесных координат.

Наблюдения изменений небесных координат привели к величайшим открытиям в астрономии, которые имеют огромное значение для познания Вселенной. К ним относятся явления прецессии, нутации, аберрации, параллакса и другие [1].

Изучение небесных координат помогает решать задачи измерения времени, определять географические координаты земной поверхности, исследовать неравномерности вращения нашей планеты. Широкое применение находят небесные координаты при составлении различных звездных каталогов, при изучении истинных движений небесных тел – как природных, так и искусственных – в небесной механике и астродинамике и при изучении пространственного распределения звезд в проблемах звездной астрономии.

Для определения положения любого объекта в просторные нужно задать систему координат, в которой положение объекта можно было бы однозначно описать определенным набором числовых значений. В общем случае система координат задается положением ее центра, расположением координатных осей и единицей (или несколькими единицами), с помощью которых подаются числовые значения, описывающих положение объекта [1]. Систему небесных координат определяют в зависимости от задачи, которая решается. Но по сути все системы небесных координат, что с древних времен и до сегодняшнего дня используются в астрономии, являются сферическими полярными.

Основная часть

В астрономии для наблюдения светил чаще всего используют горизонтальную и экваториальную системы координат – рис. 1, 2.

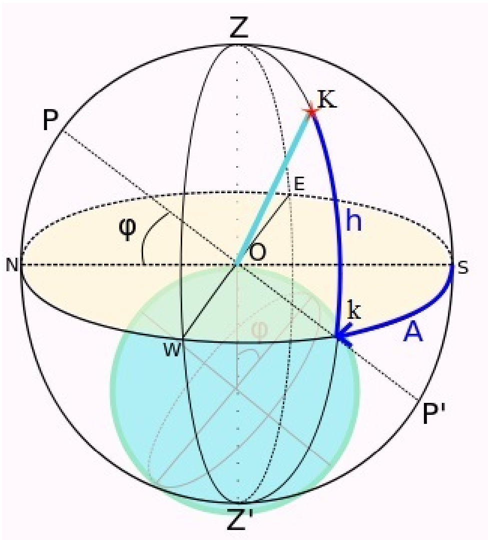


Рис. 1: Горизонтальная система координат

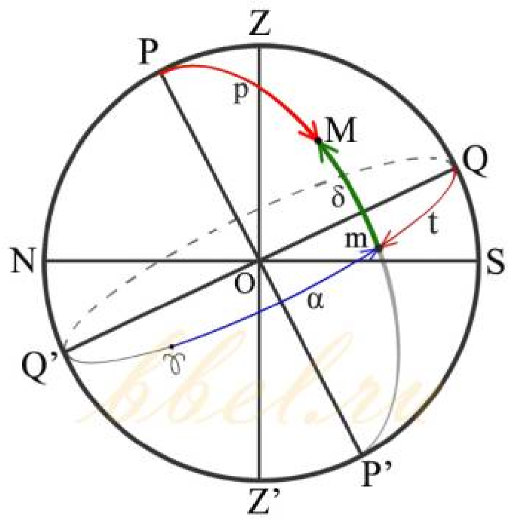


Рис. 2: Экваториальная система координат

Горизонтальная система координат [1], – это система небесных координат, в которой основной плоскостью является плоскость математического горизонта, а полюсами – зенит и надир. Она применяется при наблюдениях звёзд и движения небесных тел Солнечной системы на местности невооружённым глазом, в бинокль или телескоп с азимутальной установкой [1]. Горизонтальные координаты не только планет и Солнца, но и звёзд непрерывно изменяются в течение суток ввиду суточного вращения небесной сферы.

Экваториальная система координат — одна из систем небесных координат. В этой системе основной плоскостью является плоскость небесного экватора. Одной из координат при этом является склонение δ (реже – полярное расстояние p). Другой координатой может быть:

— часовой угол t (в первой экваториальной системе координат),

— прямое восхождение α (во второй экваториальной системе координат).

Преобразование координат

При решении многих задач практической астрономии приходится осуществлять переход от одной системы координат к другой и обратно. Эта операция выполняется при помощи сферической тригонометрии, для чего необходимо уметь решать так называемые сферические треугольники. Поэтому прежде рассмотрим основные понятия и начала математического аппарата сферической тригонометрии, после чего применим эту информацию к решению поставленной задачи [4].

Элементы сферической геометрии

Сферическим треугольником называется фигура на поверхности сферы, образованная пересечением трёх дуг больших кругов этой сферы (рис. 3). Вершины сферического треугольника принято обозначать большими буквами латинского алфавита, а противолежащие этим сторонам угла – соответственно малыми буквами [5].

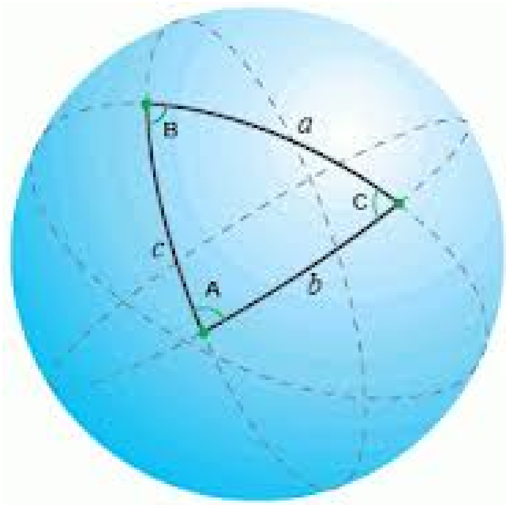


Рис. 3: Сферический треугольник

Косинус одной стороны сферического треугольника равен сумме произведения косинусов двух других его сторон и произведения синусов тех же сторон на косину угла между ними [1]:

$$\begin{cases} \cos(a) = \cos(b)\cos(c) + \sin(b)\sin(c)\cos(A) \\ \cos(b) = \cos(a)\cos(c) + \sin(a)\sin(c)\cos(B) \\ \cos(c) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b)\cos(C) \end{cases}$$

Синусы сторон сферического треугольника пропорциональны синусам противолежащих им углов:

$$\frac{\sin(a)}{\sin(A)} = \frac{\sin(b)}{\sin(B)} = \frac{\sin(c)}{\sin(C)} = const.$$

Синус стороны сферического треугольника, умноженный на косинус прилежащего угла, равен произведению синуса другой стороны, ограничивающей прилежащий угол, на косинус третьей стороны минус косинус стороны, ограничивающей угол, умноженный на произведение синуса третьей стороны на косинус угла, противолежащего первой стороне [1]:

$$\begin{cases} \sin(a)\cos(C) = \sin(b)\cos(c) - \cos(b)\sin(c)\cos(A) \\ \sin(b)\cos(A) = \sin(c)\cos(a) - \cos(c)\sin(a)\cos(B) \\ \sin(c)\cos(B) = \sin(a)\cos(b) - \cos(a)\sin(b)\cos(C) \\ \sin(a)\cos(B) = \sin(c)\cos(b) - \cos(c)\sin(b)\cos(A) \\ \sin(b)\cos(C) = \sin(a)\cos(c) - \cos(a)\sin(c)\cos(B) \\ \sin(c)\cos(A) = \sin(b)\cos(a) - \cos(b)\sin(a)\cos(C) \end{cases}$$

Переход от горизонтальных координат к экваториальным

В основе преобразований экваториальных координат в горизонтальные и наоборот лежит сферический треугольник PZM, который называется параллактическим. Вершинами его являются зенит Z, полюс мира P и светило M [1]. Сторона ZP представляет собой дугу небесного меридиана, сторона ZM – дугу вертикального круга, а сторона PM – дугу часового круга. Угол q треугольника называется параллактическим углом

Если светило находится в западном полушарии небесной сферы, то сторона $ZP = 90^0 - \delta$, а сторона $ZM = z = 90^0 - h$, где z – зенитное расстояние, h – высота светила. Сторона $PM = p = 90^0 - \delta$, где p – полярное расстояние, δ – склонение светила. Угол $PZM = 180^0 - A$, где A – азимут. Угол $ZPM = t$, где t – часовой круг светила, а угол $PMZ = q$, где q – параллактический угол.

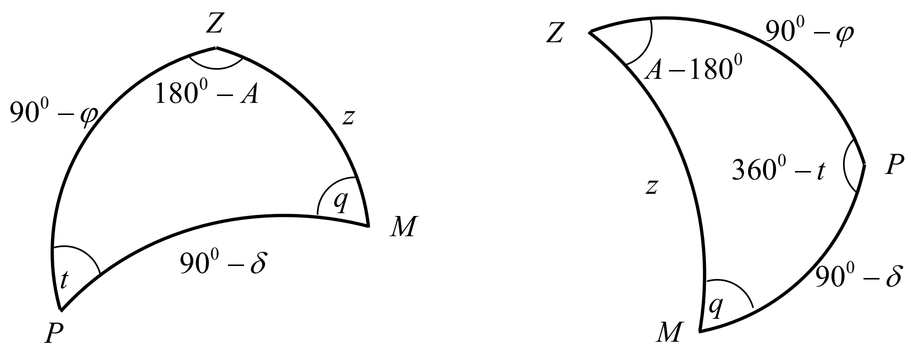


Рис. 4: Параллактический треугольник

В [2] показанао, что применяя основные формулы сферической тригонометрии к параллактическому треугольнику, беря за основу сторону PM и угол t, можно получить:

$$\begin{cases} \sin(\delta) = \sin(\phi)\cos(z) - \cos(\phi)\sin(z)\cos(A) \\ \cos(\delta)\sin(t) = \sin(z)\sin(A) \\ \cos(\delta)\cos(t) = \cos(\phi)\cos(z) + \sin(\phi)\sin(z)\cos(A) \end{cases}$$

Эти формулы применяются для перехода от горизонтальных координат к экваториальным. Рассчитываются δ и t, а потом $\alpha = s - t$, по известному зенитному расстоянию и азимуту в момент звездного времени s. Если нужно рассчитать зенитное расстояние и азимут по известным s, φ, α, δ, то эти формулы имеют вид:

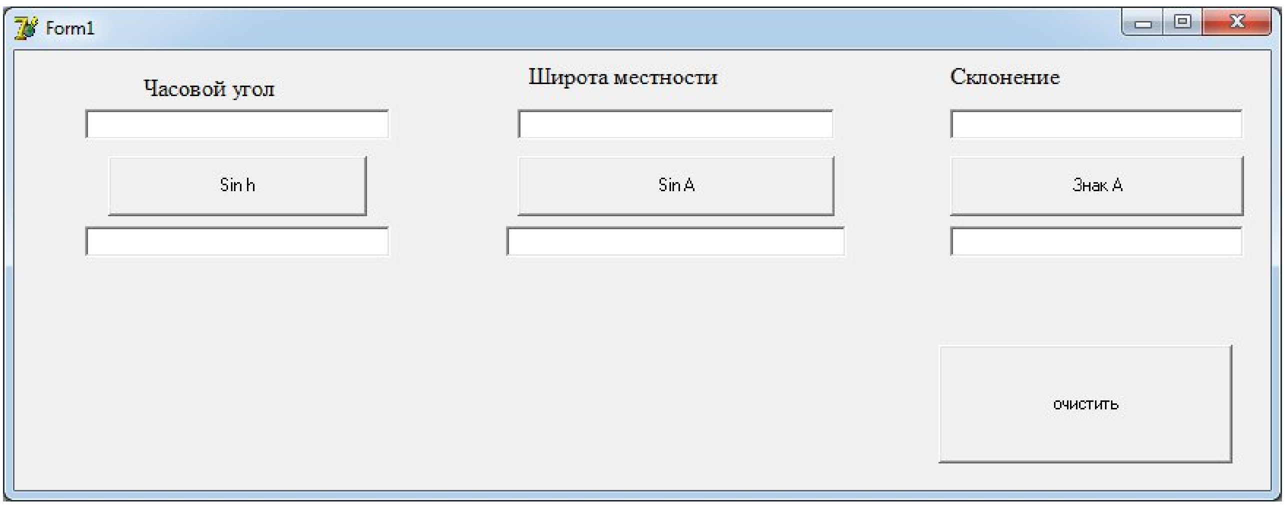
$$\begin{cases} \cos(z) = \sin(\phi)\sin(\delta) - \cos(\phi)\cos(\delta)\cos(t) \\ \sin(t)\sin(A) = \cos(\delta)\sin(t) \\ \sin(z)\cos(A) = -\cos(\phi)\sin(\delta) + \sin(\phi)\cos(\delta)\cos(t) \end{cases}$$

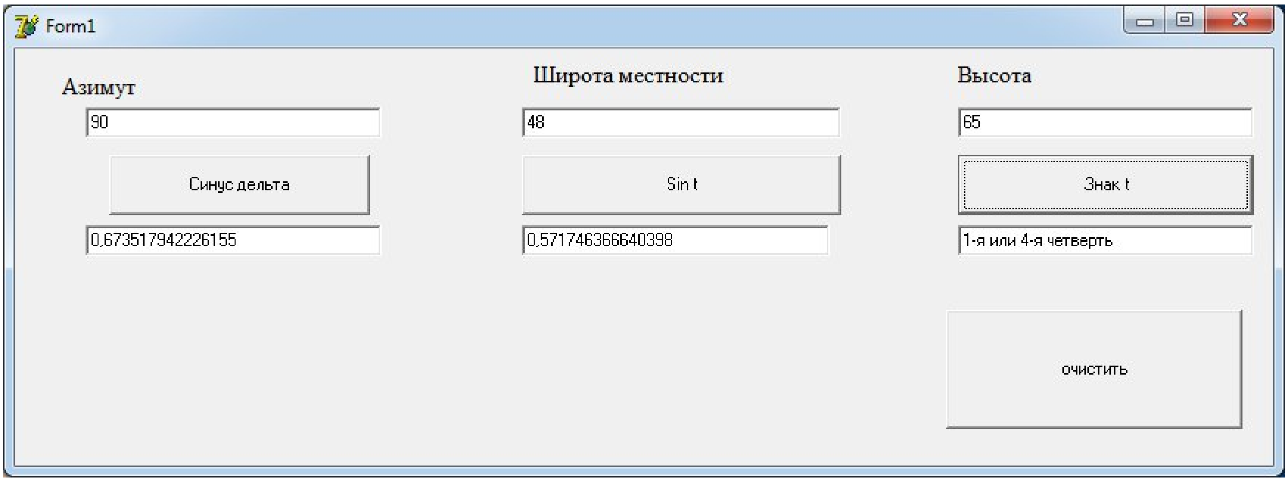
Формулы используются для расчета моментов времени восхода и захода светил и азимутов точек восхода и захода.

Программа для перехода от горизонтальных координат к экваториальным

Нами также была создана программа для облегчения математического расчета при переходе от горизонтальной системы координат к экваториальным и наоборот. Эта программа выполнена в среде Delphi. Она проста в обращении и имеет очень простой интерфейс.

Принцип прост: в пустые поля вносим известные нам координаты светила, затем нажимая на кнопки: $\sin(A), \sin(t), \sin(h)$ получаем координаты светила в другой системе.





Выводы

В работе рассмотрен переход от горизонтальных координат к экваториальным. Эта задача очень важна как с точки зрения астрономии, так и с точки зрения методики обучения астрономии.

Во-первых метод перехода основан на использовании сферической геометрии (параллактический треугольник), т.е. возникает возможность использовать данный материал в школе на факультативах или в классах с углубленным изучением математики. *Во-вторых* можно показать связь астрономии, математики и информатики, на основе составления простейших программ для облегчения математических расчетов.

Мы считаем что данная статья поможет в дальнейшем поставить астрономию, как науку на более высокий уровень, так же показать важность выше изложенного материала с практической точки зрения(преподавание астрономии в школе, использование программы для расчета координат светил).

Литература

[1] *Андрієвський С.М.* Курс загальной астрономій: Навчальний посібник / С.М. Андрієвський, І.А. Климишин. — Одеса: Астропринт, 2007. — 480 с.

[2] *Климишин И.А.* Элементарная астрономия / И.А. Климишин. — М.: Наука, 1991. — 464 с.

[3] *Климишин И.А.* Астрономия наших дней / И.А. Климишин. — М.: Наука, 1986. — 560 с.

[4] *Климишин І.А.* Астрономія: підручник 11 клас / І.А. Климишин, І.П. Крячко. — К.: Знання України, 2002. — 192 с.

[5] *Пришляк М.П.* Астрономія: 11 кл. / М.П. Пришляк. — Х.: Ранок, 2011. — 160 с.

УДК [373.5.016:52]:004

Митилёв Д.И., Сысоев Д.В., Белошапка А.Я.

[1−2] *студенты 4 курса физико-математического факультета, ГВУЗ «ДГПУ»*

[1] *старший преподаватель кафедры физики, ГВУЗ «ДГПУ»*

e-mail: mitilevd@gmail.com, sysoevkram@gmail.com, beloshapka_al@mail.ru

ПРИМЕНЕНИЕ ИННОВАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ ОБУЧЕНИЯ ПРИ ИЗУЧЕНИИ КУРСА АСТРОНОМИИ В СТАРШЕЙ ШКОЛЕ

В статье рассматриваем вопросы, связанные с особенностями использования инновационных технологий и методов их применения на уроках астрономии в старшей школе. Цель статьи – изложение проблем и усовершенствование методов преподавания курса астрономии в школе, приведены пример решения поставленных задач.

Ключевые слова: *инновационные технологии, инновационные методы обучения.*

Введение

Инновационные технологии в процессе обучения играют важную роль в становлении и развитии познавательной деятельности учащихся. При изучении астрономии в старшей школе применимы различные технологии. Ведущее место занимают компьютерные.

В современной системе образования знакомство с предметом астрономии начинается в дошкольном возрасте. Дети знакомятся с общими понятиями и элементарными явлениями астрономии. Согласно министерской программе «Я у світі» дошкольники знакомятся с фундаментальными, основополагающими терминами, которые являются простыми и в то же время значимыми в дальнейшем. ««Я у світі» є першою державною програмою нового типу, в якій відображено вимоги до оновленого змісту освіти дитини від народження до шести (семи) років життя, зокрема до його інваріантної частини, уніфіковано вимоги до розвиненості, вихованості й навченості дитини раннього та дошкільного віку» [1].

Последующее изучение астрономии продолжается в период с первого по шестой класс в курсе природоведения. И дальнейшее – после пятилетнего перерыва, в одиннадцатом классе.

Астрономия в старшей школе рассматривает такие темы:

- Что изучает астрономия?
- Основы практической астрономии.

- Измерение времени и календарь.
- Законы движения планет.
- Основы космонавтики.
- Методы астрофизических исследований.
- Земля и Луна.
- Планеты земной группы.
- Планеты-гиганты.
- Спутники планет.
- Малые тела Солнечной системы.
- Солнце – наша звезда.
- Физические характеристики звезд.
- Эволюция звезд.
- Строение вселенной.
- Эволюция Вселенной.
- Жизнь во Вселенной.

Вопросами методики преподавания материала и внедрения инновационных и телекоммуникационных технологий занимались многие:
исследованием и разработкой форм и методов самостоятельной работы на уроках астрономии (Лупой К.А.); путями повышения познавательной активности и методами контроля знаний (Клевенский Ю.Н.); методикой организации внеклассной и факультативной работы по астрономии (Попова А.П., Саркисян Е.А.); методическими основами практических работ, демонстраций, наблюдений и других средств обучения (Могилко А.Д., Порошин Ф.М., Яхно Г.С., Ромас И.А.); межпредметными связями курсов физики и астрономии (Ерохина Р.Я.); вопросами содержания, структуры и методики преподавания отдельных разделов курса астрономии (Ильевский И.Д., Чулюкова Е.В., Ковязин Е.И., Шишаков В.А., Миленькая О. В., Ступников В.М.).

Современные диссертационные исследования затрагивают проблемы интегрирования курсов физики и астрономии (Румянцев А.Ю.) и возможности применения компьютерных технологий и телекоммуникационных средств в курсе астрономии (Паболков И.В., Белоозеров Л.), а также проблемы астрономической подготовки учителя физики (Жуков Л.С.) [2].

Основная часть

Инновационные технологии (от англ. Innovation – нововведение, новация) – это наборы общих методов и средств, которые поддерживают этапы реализации нововведений. В педагогической интерпретации под инновационными технологиями подразумевают нововведения в педагогической системе, улучшающие ход и результаты учебно-воспитательного и образовательного процесса. К основным *компонентам* инновационного технологического обучения относят:

- компьютерные технологии (мультимедийное оборудование, компьютерная техника, проекционная аппаратура, аудио устройства и т.д.);
- игровая форма обучения (игровые ситуации, учебные и деловые игры);
- тренинги, семинары, факультативы, беседы, диалоги;
- экспериментальные лабораторные работы;
- модульное обучение;
- проектная технология;
- информационно-коммуникационные технологии.

С развитием науки и техники, образование в наше время подвергается модернизации в плане использования компьютеров и мультимедийных средств обучения. Это дает новые варианты обучения, которые могут быть направлены на достижение определенных целей: научить детей работать с информацией, развивать у них коммуникативные способности, достигать максимального усвоения материала.

Важную роль играет использование инновационных компьютерных технологий в образовательном процессе старшей школы. Дети этого возраста знакомы с работой компьютера и использованием интернет-ресурсов.

Мы предлагаем создать интернет-ресурс, в котором можно применение: электронных таблиц, графических программ на основе 3D моделирования, аудио и видео уроков. На данном можно создать собственные страницы, на которых учащиеся смогли бы получать всю необходимую информацию для изучения, наблюдения и закрепления материала. На этом сайте они смогут получать доступ к электронным урокам, образцам презентаций, таблицам и схемам, аудио и видео данным, лабораторным работам, книгам. Здесь дети смогут получать домашние контрольные работы и тесты; сразу же их выполнять (в режиме онлайн).

Данный сайт можно оптимизировать под индивидуальные особенности учащихся. Придерживаясь норм и правил гигиены, доступ к сайту оптимизировать расписанием. Для наглядности при изучении тем курса астрономии, на сайте предполагается использовать видео уроки. Эти уроки могут быть подобны тем, которые разрабатывал телеканал «Бибигон» – информационно-развлекательные мультфильмы.

На базе сайта может быть создан личный кабинет для каждого учащегося. Для удобства учителю предполагается контролировать посещение странички учащегося. Тоесть, он сможет проверять, чем занимался ученик в отведенное на сайте время. *Положительными сторонами проекта можно считать*:

- Каждый зарегистрированный пользователь, получит удаленный доступ к своему персональному кабинету. Для не зарегистрированных пользователей предполагается быстрая регистрация или доступ к ограниченным ресурсам сайта.
- *Информативность.* Если ученик, по какой-либо причине пропустил занятия, то он имеет возможность, получить от преподавателя задание по пропущенным темам, а также выполнить контрольные и самостоятельные работы в режиме онлайн.
- *Наглядность.* Благодаря инновационным технологиям существует возможность наблюдать, например, за движением небесных тел. С помощью мультфильмов производится мотивация детей к изучению учебного материала, за счет визуализации астрономических процессов и явлений.

Выводы

В ближайшей перспективе развития рассматриваемого проекта планируется дальнейшая разработка дополнительных возможностей и функций, связанных с общением и обсуждениями в режиме реального времени, что даст возможность максимально приблизить работу на сайте к школьным условиям. Для устранения незаинтересованности в посещении школьных занятий предлагается ограничить работу сайта в учебное время. Предлагается создать специализированный раздел для online тренингов, ориентированных на учащихся не только старшей школы, но и всех возрастных групп. Это даст возможность всем детям, которые хотят углубленно изучать астрономию, оценивать свои силы и возможности.

Основная цель создания данного проекта – обратить внимание школьников к естественным наукам. Вопрос о создании данного интернет-ресурса остается открытым.

Литература

[1] Базова програма розвитку дитини дошкільного віку «Я у світі» / [ред.–упоряд. О.Л. Кононко]. — [2-ге вид., випр]. — К., 2008. — 430 с.

[2] *Галкина Т.А.* Технология обучения астрономии в средней школе: дис. …кандидата пед. наук : 13.00.02 / Галкина Татьяна Александровна. — М., 2002. — 232 с.

[3] Астрономія: 11 кл.: підручник для загальноосвіт. навч. закл.: рівень стандарту, академічний рівень / М.П. Пришляк; [ред. Я.С. Яцківа]. — Х.: Ранок, 2012. — 160 с. : іл. — Рос. мовою.

УДК 37.016:539.17

Белошапка О.Я., Ігнатенко О.Ю.

[1] *старший викладач кафедри фізики, ДВНЗ «ДДПУ»*

[2] *студент 5 курсу фізико-математичного факультету, ДВНЗ «ДДПУ»*

e-mail: beloshapka_al@mail.ru, fox_36@mail.ru

ВИКОРИСТАННЯ КОМП'ЮТЕРНИХ ТЕХНОЛОГІЙ В ПРОЦЕСІ ВИКЛАДАННЯ АСТРОНОМІЇ

Розглянуті питання підвищення мотивації навчання, активізації розумової діяльності, творчого мислення учнів шляхом впровадження комп'ютерних технологій у процес викладання астрономії. Наведено ряд методичних рекомендацій, які допоможуть спростити процес вивчення астрономії.

Ключові слова: *астрономія, НІТ.*

Вступ

Сучасний період розвитку суспільства характеризується зростаючою значимістю інформатизації освіти. Одним із пріоритетних напрямів інформатизації освіти є застосування нових комп'ютерних технологій до конкретного навчального предмету. Це визначає необхідність використання інформаційних технологій у навчанні астрономії учнів.

Астрономія займає важливе місце в системі природничих наук. Викладання астрономії невіддільне від процесу формування в учня розуміння місця і ролі Людини у Всесвіті. Астрономічні знання лежать в основі наукового світогляду, формують наукову картину світу, знайомлять з сучасними уявленнями про структуру Всесвіту і фізичними процесами,що відбуваються в ній.

В умовах інтенсивної комп'ютеризації сучасної освіти вже розроблені нові інформаційні технології для підтримки природничих дисциплін – електронні підручники, мультимедіа, анімації, моделі та ін., їх застосування стає можливим і необхідним, це відкриває доступ до нових джерел наукового знання. Питання нестачі вітчизняних програмних засобів для вивчення астрономії можна частково вирішувати за допомогою інтернету. У зв'язку з цим, актуальною стає завдання застосування інтерактивних комп'ютерних моделей і розробки теоретичних і практичних основ методики їх використання з метою оснащення курсу астрономії новими навчальними засобами.

Основна частина

Сучасний підручник недостатньо висвітлює інформацію, яку учні повинні отримати в науковому поясненні. Проаналізувавши підручник, виявляється, що в ньому не достатньо пояснень фізичних зв'язків, а також підручник мало ілюстрований. Існуючий підручник більш підходить для гуманітарного класу. Також негативно впливає недостатня комплектація кабінету астрономії астрономічними інструментами і посібниками, або відсутність самого кабінету. Учні у класах мають різну базову підготовку. Це недоліки, які можна компенсувати застосовуючи інтернет.

Інтернет дозволяє застосовувати такі компоненти:
— комп'ютерне моделювання;
— проведення модельних лабораторних робіт;
— використання гіпертекстових навчальних посібників;
— контроль знань, тестування.

Цей поділ досить умовно. Більшість програмних засобів об'єднує в собі ці технології. Застосування цих технологій дозволяє вчителю допомогти уявити учням деякі явища мікросвіту і світу з астрономічними розмірами, та явища, які взагалі неможливо спостерігати [1].

Важливе місце серед наукових методів займає числове моделювання. Числове моделювання – порівняно новий науковий метод, який отримав розвиток завдяки появі ЕОМ. Суть методу полягає в наступному: на основі відомих законів уже вивчених явищ створюється математична модель – абстрактний об'єкт, що підкоряється тим же законам. Математична модель, описана мовою ЕОМ, отримує можливість «ожити». Змінюючи деякі вхідні параметри, експериментатор може простежити за змінами, що відбуваються з моделлю. Змінюючи час, можна спостерігати явище в динаміці, причому масштаб часу моделі може бути значно менше реального, що дозволяє протягом декількох хвилин спостерігати явище, на спостереження якого в реальності довелося б витратити роки. Основна перевага методу полягає в тому, що він дозволяє не тільки спостерігати, а й передбачити результат експерименту при певних особливих умовах.

Метод числового моделювання має переваги перед іншими традиційними методами:
— дає можливість змоделювати ефекти, вивчення яких в реальних умовах неможливо, або дуже важко з технологічних причин, дозволяє моделювати і вивчати явища, які передбачаються будь-якими теоріями;
— є екологічно чистим і не представляє небезпеки для природи і людини;
— забезпечує наочність;

— доступний у використанні [2].

Нами розроблені додатки до кожного уроку – відеофільми, картинки та питання. Питання складені так, щоб учні працювали і над текстом підручника і над матеріалом додатків.

Табл. 1: Календарний план

№ з/п	Тема уроку	Дидактичний матеріал	Домашнє завдання
Введення в астрономію: 6 годин			
1	Предмет і методи астрономії	Відео до уроку: http://www.youtube.com/watch?v=ozTSHzmjUZY	§1
2	Зірки. Відстань до зірок	Відео до уроку: http://www.youtube.com/watch?v=TqM4p1d2138&feature=fvst	§3
3	Зміна вигляду зоряного неба протягом доби	Відео до уроку: http://www.youtube.com/watch?v=TqM4p1d2138&feature=fvst	§4
4	Зміна вигляду зоряного неба протягом року	Відео до уроку: http://www.youtube.com/watch?v=TqM4p1d2138&feature=fvst	§7
5	Способи визначення географічної широти	Відео до уроку: http://www.youtube.com/watch?v=TqM4p1d2138&feature=fvst	§5
6	Основи відліку часу	Відео до уроку: http://www.youtube.com/watch?v=8IyCrzW0GPI	§10
Будова Сонячної системи: 6 годин			
7	Видимий рух планет	Відео до уроку: http://www.youtube.com/watch?v=oM65Qu9nigA	§9
8	Розвиток уявлень про будову Сонячної системи	Відео до уроку: http://www.youtube.com/watch?v=oM65Qu9nigA	§17
9	Закони Кеплера	Відео до уроку: http://www.youtube.com/watch?v=oM65Qu9nigA	§9
10	Узагальнення та уточнення Ньютоном законів Кеплера	Відео до уроку: http://www.youtube.com/watch?v=oM65Qu9nigA	§9
11	Визначення відстаней до тіл Сонячної системи і розмірів цих небесних тіл	Відео до уроку: http://www.youtube.com/watch?v=oM65Qu9nigA	§3
12	Контрольна робота за темою «Будова Сонячної системи»	Відео до уроку: http://www.youtube.com/watch?v=oM65Qu9nigA	

Фізична природа тіл Сонячної системи: 6 годин			
13	Система «Земля – Місяць». Природа Місяця	Відео до уроку: http://www.youtube.com/watch?v=0lDu7f36m-w	§13
14	Планети земної групи	Відео до уроку: http://vk.com/video2955364_137083427	§14
15	Планети гіганти	Відео до уроку: http://www.youtube.com/watch?v=myBPt-8pf6s Питання до відео: 1.Яка маса Юпітера? 2. Яка орбітальна швидкість Сатурна?	§15
16	Астероїди і метеорити	Відео до уроку: http://www.youtube.com/watch?v=myBPt-8pf6s	§16
17	Міжзоряний пил і ГМО. Кругообіг речовини в галактиці	Відео до уроку: http://www.youtube.com/watch?v=jGC460p8GgM (Крабоподібна туманність) http://www.youtube.com/watch?v=438Hdr8Przw (Туманність Оріона)	§25
Сонце та зірки: 10 годин			
18	Загальні відомості про Сонце	Відео до уроку: http://www.youtube.com/watch?v=8_xqZFgwUQ0	§18
19	Будова атмосфери Сонця	Відео до уроку: http://www.youtube.com/watch?v=8_xqZFgwUQ0	§19
20	Внутрішня будова Сонця	Відео до уроку: http://www.youtube.com/watch?v=8_xqZFgwUQ0	§19
21	Сонце і життя Землі	Відео до уроку: http://www.youtube.com/watch?v=8_xqZFgwUQ0	§20
22	Термоядерний синтез. Енергетика зірок	Відео до уроку: http://www.youtube.com/watch?v=kpb5Qre2T9M	§19
23	Просторові швидкості зірок	Відео до уроку: http://www.youtube.com/watch?v=kpb5Qre2T9M	§21
24	Фізична природа зірок	Відео до уроку: http://www.youtube.com/watch?v=kpb5Qre2T9M	§21
25	Зв'язок між фізичними характеристиками зірок	Відео до уроку: http://www.youtube.com/watch?v=kpb5Qre2T9M	§23
26	Подвійні зірки	Відео до уроку: http://www.youtube.com/watch?v=kpb5Qre2T9M	§22
27	Фізичні змінні, нові й наднові зірки	Відео до уроку: http://www.youtube.com/watch?v=kpb5Qre2T9M	§§23,24

Будова та еволюція Всесвіту: 6 годин			
28	Наша Галактика		§26
29	Інші Галактики	Відео до уроку: http://www.youtube.com/watch?v=kpb5Qre2T9M	§27
30	Метагалактика	Відео до уроку: http://www.youtube.com/watch?v=kpb5Qre2T9M	§27
31	Походження і еволюція галактик	Відео до уроку: http://www.youtube.com/watch?v=kpb5Qre2T9M	§29
32	Походження планет	Відео до уроку: http://www.youtube.com/watch?v=kpb5Qre2T9M	§17
33	Підсумкова контрольна робота за темою «Будова та еволюція Всесвіту»	Відео до уроку: http://www.youtube.com/watch?v=kpb5Qre2T9M	

Висновки

Основні напрями використання інформаційних технологій у навчанні астрономії:

- використання комп'ютера та засобів інформаційних технологій для візуалізації різних космічних явищ, процесів і об'єктів (при виконанні лабораторних і дослідних робіт, викладі нового навчального матеріалу тощо);
- застосування програмно-педагогічних засобів навчання (електронні презентації, електронні курси, електронні енциклопедії, комп'ютерні програми, анімації, інтерактивні моделі тощо);
- застосування комп'ютерних телекомунікацій в формуванні астрономічного світогляду.

Результати педагогічного експерименту виявили, що при використанні різних засобів інформаційних технологій у навчанні астрономії найбільш ефективні інтерактивні моделі, що дозволяють зробити навчальний матеріал більш наочним і цікавим. Саме завдяки використанню інтерактивного експерименту учні мають унікальну можливість спостерігати астрономічні явища і процеси, які не можна реально продемонструвати [3].

Література

[1] *Латыпов Н.* Виртуальная сфера или все зависит от точки отсчета / Н. Латыпов // Компьютер в школе. — 1998. — № 1. — С. 23.

[2] *Черемхина И.* Над краем бездны возможностей / И. Черемхина // Компьютер в школе. — 1998. — № 3. — С. 21.

[3] *Набоков М.Е.* Методика преподавания астрономии / М.Е. Набоков. — М.: Учпедгиз, 1955. — 535 с.

УДК 37.016:377/378

Игнатенко А.Ю.

[1] *студент 5 курса физико-математического факультета, ГВУЗ «ДГПУ»*

e-mail: fox_36@mail.ru

ИСТОРИЯ ИССЛЕДОВАНИЯ ТЕРМОЯДЕРНОГО СИНТЕЗА

Рассмотрены вопросы повышения мотивации обучения, активизации умственной деятельности, творческого мышления учеников путем внедрения разработанного спецкурса, который может быть использован преподавателями ВУЗов, учителями школ, студентами и учениками. Спецкурс поможет углубить и расширить знания по физике и повысить эффективность и качество учебно-воспитательного процесса.

Ключевые слова: *термоядерный синтез, ИТЕР, Токамак, Стелларатор.*

Введение

Истощение существующих видов топлива обуславливает переход от органических топлив к широкомасштабной альтернативной энергетике ожидается в середине 21 века. Предполагается, что будущая энергетика будет более широко, чем нынешняя энергетическая система, использовать разнообразные и, в том числе, возобновляемые источники энергии, такие как: солнечная энергия, энергия ветра, гидроэлектроэнергия, выращивание и сжигание биомассы и ядерная энергия. Доля каждого источника энергии в общем производстве энергии будет определяться структурой потребления энергии и экономической эффективностью каждого из этих источников энергии.

Целью данного исследования является разработка методических рекомендаций для подготовки спецкурса «История исследования термоядерного синтеза» – дополнительные разделы физики для студентов III-го курса физико-математического факультета, направление подготовки 6.040203 Физика*.

В этой работе будет рассказано о физических основах термоядерного синтеза, об истории его освоения сначала в качестве термоядерного оружия, а потом в качестве альтернативного источника энергии. При рассказе об управляемом термоядерном синтезе помимо рассмотрения различного способа его получения, мы подробно остановимся на проекте ИТЭР – самом актуальном и перспективном проекте по управляемому термоядерному синтезу.

Особый интерес данной работы представляет раздел об управляемом термоядерном синтезе, в частности информация о проекте ИТЭР, потому что информация о нем доступна в основном на английском языке, а та информация, что на русском очень ограничена и разрознена.

Основная часть

Термоядерный синтез

Термоядерная реакция – разновидность ядерной реакции, при которой легкие атомные ядра объеденяются в более тяжелые. Для того чтобы произошла реакция синтеза, исходные ядра должны преодолеть силу электростатического отталкивания, для этого они должны иметь большую кинетическую энергию. Если предположить, что кинетическая энергия ядер определяется их тепловым движением то можно сказать, что для реакции синтеза нужна большая температура. Поэтому реакция названа «термоядерной».

Управляемый термоядерный синтез (УТС) – синтез более тяжелых атомных ядер из более легких с целью получения энергии, который носит управляемый характер в отличие от взрывного термоядерного синтеза (используемого в термоядерном оружии). Управляемый термоядерный синтез отличается от традиционной ядерной энергетики тем, что в последней используется реакция распада, в ходе которой из тяжелых ядер получаются более легкие ядра [2]. Рассматриваются две принципиальные схемы осуществления управляемого термоядерного синтеза:

1. Квазистационарные системы.

Нагрев и удержание плазмы осуществляется магнитным полем при относительно низком давлении и высокой температуре. Для этого применяются реакторы в виде токамаков, стеллараторов, зеркальных ловушек и торсатронов, которые отличаются конфигурацией магнитого поля. Реактор ИТЭР имеет конфигурацию токамака.

2. Импульсные системы.

В таких системах УТС осуществляется путем кратковременного нагрева небольших мишеней, содержащих дейтерий и тритий, сверхмощными лазерными или ионнными импульсами. Такое облучение вызывает последовательность термоядерных микровзрывов. Исследования первого вида термоядерных реакторов существенно более развиты, чем второго.

Термоядерное сырье

Водород – бесцветный газ, первый элемент периодической системы элементов. Самое легкое вещество. Ион самого распространённого изотопа водорода H^1 – протон.

Некоторые изотопы водорода имеют собственные названия: ^{1}H – протий (H), ^{2}H – дейтерий (D) и ^{3}H – тритий (T). Широко распространен в природе, горюч.

Выделение горючего газа при взаимодействии кислот и металлов наблюдали в XVI и XVII веках на заре становления химии как науки. Знаменитый английский физик и химик Г. Кавендиш в 1766 году исследовал этот газ и назвал его «горючим воздухом». При сжигании «горючий воздух» давал воду, но приверженность Кавендиша теории флогистона помешала ему сделать правильные выводы. Французский химик А. Лавуазье совместно с инженером Ж. Менье, используя специальные газометры, в 1783 г. осуществил синтез воды, а затем и ее анализ, разложив водяной пар раскаленным железом. Таким образом он установил, что «горючий воздух» входит в состав воды и может быть из неё получен. Лавуазье дал водороду название hydrogene (от греческого hydor – вода и gennao – рождаю) – «рождающий воду». Русское наименование «водород» предложил химик М. Ф. Соловьев в 1824 году.

История создания водородной бомбы

12 августа 1953 г. в СССР по схеме, предложенной Л. Д. Сахаровым и названной у нас «слойкой», был успешно испытан первый в мире реальный водородный заряд. В этом заряде в качестве термоядерного горючего был использован, по предложению В. Л. Гинзбурга, литий в виде твердого химического соединения. Это позволило в ходе термоядерной реакции (при взрыве) получить дополнительное количество трития, что заметно повышало мощность заряда.

Испытанный в СССР термоядерный заряд был готов к применению в качестве транспортабельной бомбы, то есть представлял собой первый реальный образец водородного оружия. Он имел несколько больший вес и те же габариты, что и первая советская атомная бомба, испытанная в 1949 г., но в 20 раз превышал её по мощности [4].

Управляемый термоядерный синтез

Проблема управляемого термоядерного синтеза настолько сложна, что самостоятельно с ней не справится ни одна страна. Поэтому мировое сообщество избрало самый оптимальный путь – создание проекта Международного термоядерного экспериментального реактора – ИТЭР, в котором на сегодня участвуют, кроме России, США, Евросоюз, Япония, Китай и Южная Корея.

Управляемый термоядерный синтез – процесс слияния легких атомных ядер, происходящий с выделением энергии при высоких температурах в регулируемых, управляемых условиях. Скорости протекания термоядерных реакций малы из-за кулоновского отталкивания положительно заряженных ядер.

Поэтому процесс синтеза идет с заметной интенсивностью только между легкими ядрами, обладающими малым положительным зарядом и только при высоких температурах, когда кинетическая энергия сталкивающихся ядер оказывается достаточной для преодоления кулоновского потенциального барьера.

Токамак – тороидальная установка для магнитного удержания плазмы. Плазма удерживается не стенками камеры, которые не способны выдержать ее температуру, а специально создаваемым магнитным полем. Особенностью токамака является использование электрического тока, протекающего через плазму для создания полоидального поля, необходимого для равновесия плазмы. Этим он отличается от стелларатора, в котором и тороидальное и полоидальное поле создается с помощью магнитных катушек.

Стелларатор – тип реактора для осуществления управляемого термоядерного синтеза. Изобретен Л. Спитцером в 1951 г. Название реактора происходит от лат. stella – звезда, что должно указывать на схожесть процессов, происходящих в стеллараторе и внутри звёзд. Он являет собой замкнутую магнитную ловушка для удержания высокотемпературной плазмы. Принципиальное отличие стелларатора от токамака заключается в том, что магнитное поле для удержания плазмы полностью создается внешними катушками, что, помимо прочего, позволяет использовать его в непрерывном режиме.

Лазерный термоядерный синтез

К настоящему времени сформировалось самостоятельное направление термоядерных исследований – лазерный термоядерный синтез (ЛТС). Микросфера, наполненная термоядерным топливом, со всех сторон «равномерно» облучается многоканальным лазером. В результате взаимодействия греющего излучения с поверхностью мишени образуется горячая плазма с температурой несколько килоэлектронвольт (так называемая плазменная корона), разлетающаяся навстречу лучу лазера с характерными скоростями от 10 в 7 степени до 10 в 8 степени см/сек. В современных модельных экспериментах на уровне энергий лазерного излучения 10-100 кДж удается достичь высоких (приблизительно 90%) коэффициентов поглощения греющего излучения [3].

Проект ИТЭР (ITER) – проект международного экспериментального термоядерного реактора. Первоначально название ITER было образовано как сокращение английского названия International Thermonuclear Experimental Reactor (Международный термоядерный экспериментальный реактор). В настоящее время оно, официально, не считается аббревиатурой, а связывается с латинским словом iter – путь. Задача ИТЭР заключается в демонстрации осуществимости создания термоядерного реактора и решении физических и технологических проблем, которые могут встретиться на этом пути.

В настоящее время проектирование реактора полностью закончено и выбрано место для его строительства – французский город Кадараш. Страны-участницы: Евросоюз, Индия, Китай, Республика Корея, Россия, США, Япония. ИТЭР относится к термоядерным реакторам типа «токамак» [1].

Выводы

Из проведенного анализа литературы по теме магистерской работы «История исследования термоядерного синтеза» было отмечено, что учебной литературы по данной теме не достаточно.

Разработана рабочая программа спецкурса дополнительные разделы физики «История исследования термоядерного синтеза» для студентов 3-го курса физико-математического факультета, направление подготовки 6.040203 Физика*, в которой предложена тематика лекционного курса и семинарских занятий.

Практическое значение этого исследования заключается в том, что разработанный спецкурс может быть использован преподавателями ВУЗов, учителями школ, студентами и учениками. Спецкурс поможет углубить и расширить знания по физике и повысить эффективность и качество учебно-воспитательного процесса.

Литература

[1] Официальный сайт проекта ИТЭР // `www.iter.org`. — 2013. — 17 апр.

[2] *Киллин Дж.* Управляемый термоядерный синтез / Дж. Киллин. — М.: Мир, 1980. — 466 с.

[3] *Лукьянов С.Ю.* Горячая плазма и управляемый ядерный синтез / С.Ю. Лукьянов. — М.: Наука, 1975. — 398 с.

[4] *Флёров Г.Н.* История атомного проекта / Г.Н. Флеров // Вопросы атомной наукии техники. Серия: Термоядерный синтез. — М.: РНЦ Курчатовский институт, 1998. — Вып. 80. — С. 162.

УДК 37.016:502/504

Белошапка О.Я., Войнов О.Л., Муляр А.С.

[1] *старший викладач кафедри фізики, ДВНЗ «ДДПУ»*

[2] *вчитель фізики, Миколаївська ЗОШ I-III ст. №3 Слов'янської міської ради*

[3] *студент 5 курсу фізико-математичного факультету, ДВНЗ «ДДПУ»*

e-mail: beloshapka_al@mail.ru

ПРО ЕКОЛОГІЧНЕ ВИХОВАННЯ УЧНІВ НА УРОКАХ ПРИРОДНИЧО-НАУКОВИХ ДИСЦИПЛІН

Стаття присвячена актуальним питанням екологічного виховання учнів на уроках природничо-наукових дисциплін.

Ключові слова: *екологічне виховання, екологічна освіта.*

Вступ

Тема екологічного виховання для людини буде актуальна завжди, тим більше в сучасних умовах погіршення якості екології, що пов'язано з екологічною безграмотністю. Для запобігання можливих негативних наслідків вторгнення людини в природу необхідне рішення низки науково-технічних, соціально-політичних, економічних та інших проблем, серед яких одне з перших місць займають педагогічні, виховні, оскільки підростаючі покоління ще на шкільній лаві повинні бути підготовлені до науково обґрунтованого і бережного ставлення до навколишнього природного середовища.

Одним з дискусійних питань є проблема методичної організації екологічної освіти. Більш ефективніше є «екологізація» всіх навчальних предметів, оскільки екологічні проблеми мають глобальний, міждисциплінарний характер. Тобто всі природничо-наукові предмети можуть бути використані у справі вирішення даної задачі.

Вчитель фізики може здійснювати екологічне виховання учнів через предмет, розглядаючи як питання фундаментального, так і прикладного, політехнічного характеру, підбираючи завдання з відповідним змістом, проводячи екскурсії, заплановані шкільною програмою з фізики, організовуючи позакласні заходи.

Учитель повинен розповідати не тільки про позитивні прояви тих чи інших фізичних явищ, необхідно звертати також увагу й на шкідливий вплив виробничої діяльності людини на навколишнє середовище, повинен розповідати про шляхи зменшення негативного впливу людини на природу.

Також екологічним вихованням повинні займатися на уроках хімії, біології, анатомії, географії.

У курсі хімії необхідно приділити увагу екологічним проблемам, що виникають в результаті потужного хімічного впливу людства на біосферу. Розглядаючи хімічні елементи, їх сполуки та характеризуючи їх роль у природі, учні дізнаються про хімічний склад води, повітря, ґрунту як про абіотичний фактор середовища. Формується поняття про природну динамічну рівновагу між хімічними показниками різних елементів екосистеми. Саме в курсі хімічних дисциплін треба розкрити проблеми забруднення природи відходами людської діяльності, зокрема, високоактивними хімічними сполуками, синтезованими людиною, до переробки яких природа виявляється абсолютно «неготовою».

Біологічні дисципліни повинні займати провідне місце в розкритті наукових основ природоохоронної діяльності, зокрема, принципу комплексної охорони природи. У курсах ботаніки, зоології та загальної біології дати уявлення про охоронювані території: історія заповідної справи, статус різних заповідних територій, їх географія, функції, біосферне значення, перспективи розвитку і т. д. У курсі анатомії згадати про вплив генно-модифікованих організмів на дезоксирибонуклеїнову кислоту.

Розробити матеріали з екологічним змістом до уроків фізики з застосуванням інформації про екологічний стан м. Слов'янськ, та області інтегровані уроки з фізики, хімії, географії та біології, позакласні заходи та апробувати ці матеріали на практиці з метою поліпшення екологічних знань учнів є важливим.

Основна частина

В даний час кожна людина, не залежно від її спеціальності, повинна бути екологічно освічена і екологічно культурна. Тільки в цьому випадку вона зможе реально оцінювати наслідки своєї практичної діяльності при взаємодії з природою. Важливим моментом в організації екологічного виховання учнів під час вивчення природничо-наукових дисциплін є визначення його змісту.

Зміст екологічних знань, що складають основу природоохоронної діяльності в процесі вивчення фізики, визначається точками зіткнення предметних областей фізики і екології.

Враховуючи те, що екологія вивчає закономірності і взаємовідносини між живою і неживою природою, а фізика – це наука про форми існування матерії на неживих рівнях її організації, до змісту екологічної освіти в процесі вивчення фізики повинні ввійти всі елементи неживої природи, які визначають умови існування живих істот, та фізична суть процесів обміну між живою і неживою природою.

Згідно з екологічною термінологією, умови існування характеризуються середовищем перебування і екологічними факторами. У земних умовах існує чотири типи середовищ перебування живих організмів: водне, повітряне, ґрунтове та тіло іншої живої істоти. У процесі вивчення фізики можуть бути висвітлені фізичні властивості перших трьох середовищ як агрегатних станів речовини.

Під час викладання матеріалу, пов'язаного з розкриттям фізичних показників середовища існування та абіотичних факторів, першорядного значення набуває перший характер зв'язку між живою і неживою природою.

Наявність наведених зв'язків обумовлює необхідність застосування міжпредметних зв'язків при викладанні екологічного матеріалу в процесі навчання фізики. Значною мірою це зв'язки фізики з дисциплінами біологічного циклу, але важливу роль відіграють зв'язки фізики з хімією, географією.

На території Донецької області, що складає 4,4% площі України, зосереджена п'ята частина її промислового потенціалу. У той же час викиди забруднюючих речовин в атмосферу становлять 40% від викидів по країні, забруднені стоки у водоймища – більше 25%. Як наслідок, техногенне навантаження на одиницю території області з різних шкідливих речовин в 5-10 разів вище середньоукраїнського показника. Протягом року на 1 км2 території області викидаються в атмосферу 70 т забруднюючих речовин. Сказане свідчить про специфіку регіону. У Донбасі, природно, постійне увага приділяється проблемам вугільної промисловості. У зв'язку з масовим закриттям шахт виникла необхідність подолання негативних наслідків цього процесу, названого «реструктуризацією». Реструктуризація вугільної промисловості загострила проблеми зайнятості, зажадала більш глибокого вирішення регіональних проблем формування і використання трудових ресурсів, екології регіону.

У тому, що проблеми екології кричуще, ніхто не сумнівається, як і в тому, що їх украй необхідно вирішувати. Але як? Висока концентрація промислового і сільськогосподарського виробництва, підвищена щільність населення, розвинута транспортна інфраструктура – все це сильно впливає на екологію Донеччини. Висока концентрація потенційно небезпечних виробництв із застарілим устаткуванням створює цілком реальну загрозу техногенних катастроф з важкими екологічними наслідками. У таких умовах говорити про здоров'я населення не доводиться – рівень захворювань дітей і підлітків за останні 5 років в Донецькій області значно виріс, не «відстають» і дорослі.

За даними Міністерства охорони навколишнього середовища України, щільність викидів, що забруднюють атмосферу в нашій області, удвічі вищі, ніж у Дніпропетровській, у 3,5 більше, ніж у Луганській, у сім – ніж у Запорізькій верб 121 разів більше, ніж у Харківській! Основні «забруднювачі» – підприємства вугільної промисловості, чорної металургії та теплові електростанції.

Ненабагато краще і ситуація з водопостачанням – у воді практично всіх річок Донецької області дуже висока концентрація солей. Одна з основних причин – викид високомінералізованих шахтних вод, з якими в річки попадає понад мільйон тонн різних солей. Аналогічна ситуація і з Азовським морем. Під впливом так званої господарської діяльності людини хімічний склад моря погіршився. Підвищений вміст солей і хімічне забруднення призвели до скорочення риби. На узбережжі моря розташовані понад 300 баз відпочинку, пансіонатів, дитячих оздоровчих таборів. Більшість з них необладнаних і самі становлять небезпеку для моря. Останнім часом до всіх «звичним» екологічних проблем додалася ще одна – об'єм ґрунту, пошкодженого повітряної і водною ерозією, «вивів» Донецьку область на перше місце по всій країні!

Урахування вимог до організації процесу екологічного навчання і виховання дає змогу спланувати його, пов'язавши з конкретним фізичним матеріалом. Характерні засоби і методи навчання, застосування яких зумовлює виконання поставлених завдань, форми роботи, до яких вчитель може залучати учнів під час формування екологічних знань, умінь і мотивів, можуть бути різноманітні.

Конкретний вид діяльності може бути обраний залежно від загального сценарію уроку, обсягу часу, який відводиться на розгляд екологічного матеріалу, рівня підготовки учнів і специфіки методики викладання фізики в роботі кожного вчителя.

Наприклад, при вивченні теми: «Фізичні явища, фізика і техніка» розглядається взаємозв'язок природи і людського суспільства, кругообіг речовин у природі і промисловому виробництві, проблема утилізації відходів, вплив господарської діяльності людей на навколишнє середовище (на конкретних прикладах, найближчих до школи підприємств).

При вивченні теми: «Молекули. Дифузія» – поширення шкідливих речовин, виброшенних промисловими підприємствами, в повітрі, воді та ґрунті, небезпека неправильного застосування та зберігання мінеральних добрив та гербіцидів, поняття про ГДК – гранично допустимої концентрації речовини, контроль за станом навколишнього середовища, вимірювання концентрацій шкідливих речовин і порівняння з ГДК, вплив на життя водоймів нафтової плівки на його поверхні.

При вивченні теми: «Густина речовини» розглядається поділ сміття на складові при його утилізації, використання різної густини речовини в роботі очисних споруд.

При вивченні теми: «Взаємодія атомів і молекул» розглядається незмочуваність оперення водоплавних птахів водою і змочування її нафтою та інші.

При вивченні теми: «Джерела світла» розглядається шкідлива дія потужного або високочастотного світла на очі, шкідлива дія на очі хімічних речовин, ультрафіолетового випромінювання.

Таким чином, результати дослідно-експериментальної роботи підтверджують припущення про те, що впровадження екологічних аспектів у вивчення природничо-наукових дисциплін допоможе підвищити рівень екологічної освіченості учнів і більш того підвищить пізнавальний інтерес до предметів.

Висновки

1. Аналіз шкільних підручників і програм показав, що екологічні аспекти в шкільних курсах природничо-наукового циклу висвітлено недостатньо.

2. Доведено, що уроки, доповнені екологічними матеріалами, позитивно впливають на рівень осмислення учнями теоретичних питань курсу фізики і сприяють підвищенню пізнавального інтересу.

3. Виявлено, що вивчення фізики з опорою на екологічні аспекти дозволяє помітно підвищити рівень знань та екологічну освіченість учнів.

Література

[1] *Зверев И.Д.* Экология в школьном обучении / И.Д. Зверев. — М.: Просвещение, 1980. — 190 с.

[2] *Большаков В.Н.* Экология / В.Н. Большаков. — М.: Логос, 2006. — 240 с.

[3] Отношение школьников к природе : педагогическая наука – реформе школы / [под ред. И.Д. Зверева, И.Т. Суравегиной]. — М.: Педагогика, 1988. — 128 с.

[4] *Барановський В.А.* Екологічні проблеми природних вод / В. Барановський // Екологічний вісник. — 2002. — № 3-4. — С. 5 – 7.

[5] *Барановський В.А.* Екологічні проблеми атмосферного повітря / В.А. Барановський // Екологічний вісник. — 2002. — № 1-2. — С. 12 – 14.

[6] Національна доповідь про стан навколишнього природного середовища України в 1998 р. — К.: Видавництво Раєвського, 1999. — 157 с.

[7] Постанова Кабінету Міністрів №554 від 27.07.95. «Про перелік видів діяльності та об'єктів, що становлять підвищену екологічну небезпеку»:

[Електронний ресурс]. — Режим доступу : http://dei.gov.ua.

[8] *Захарченко М.В.* Безпека життєдіяльності у повсякденних умовах виробництва, побуту та у надзвичайних ситуаціях : навч. посіб. / М.В. Захарченко, М.В. Орлов, А.К. Голубєв [та ін.]. — К.: ІЗМИ, 1996. — 196 с.

[9] Безопасность жизнедеятельности : учеб. для вузов / [под ред. С.В. Белова]. — 2-е изд., испр. и доп.. — М.: Высш. шк., 1999. — 448 с.

[10] *Муляр А.С.* Екологічне виховання учнів при вивченні природничо-наукових дисциплін : дипломна робота / А.С. Муляр. — Слов'янський держ. пед. ун-т. — Слов'янськ, 2012. — 130 с.

ЗМІСТ

При підготовці статті необхідно дотримуватись наступних вимог:

1. Рукописи подаються в одному примірнику, надруковані українською або російською мовою на одній стороні аркуша через один інтервал з широкими полями, старанно вичитані і розмічені. Примірник повинен бути оформлений відповідно до зазначених нижче вимог з обов'язковим підписом автора (усіх авторів) статті.

2. Стаття повинна включати:
   (a) прізвище та ініціали автора (авторів) та назва установи, де виконана робота;
   (b) назву статті (якщо заголовок статті довгий, то подати також його короткий варіант, не більше 40 знаків);
   (c) індекс УДК; анотацію (до 5 рядків);
   (d) короткий вступ: постановку задачі, одержані результати;
   (e) формулювання одержаних автором нових результатів і повне їх доведення, які раніше ніде не були опубліковані або подані до розгляду в інший журнал;

3. До (друкованого варіанту) статті обов'язково додається електронний варіант, підготовлений у форматі LaTeX (*.tex) (та його копія у форматі PDF) з використанням стильового файлу (znpfizmatsdpu.sty) журналу та макетного файлу (exampleznp.tex) з дотриманням встановлених параметрів (preambulaznp.tex).

4. Адреса для листування: 84116, м. Слов'янськ, Донецька обл., вул. Батюка, 19, Деканат фізико-математичного факультету ДВНЗ «ДДПУ»;
   e-mail: znpfizmatsdpu@ukr.net, телефони: (06262) 3-26-59.

5. У випадку авторського колективу вказати прізвище та e-mail того з авторів, з ким редколегія може вести листування.

6. Файли прикладу оформлення статей та вимоги можна завантажити за адресою http://slavdpu.dn.ua/fizmatzbirnyk/znpFizmat2013.zip.

7. Статті, підготовлені в порушення зазначених вимог, до розгляду редакційною колегією журналу НЕ приймаються.

8. Статті до четвертого випуску (2014 рік) приймаються до 1 квітня 2014 року.

Збірник наукових праць
фізико-математичного факультету ДДПУ

Випуск №3

За матеріалами
Всеукраїнської науково-практичної конференції
«Актуальні питання сучасної науки і освіти»
Слов'янськ, ДДПУ, 23-25 квітня, 2013 р.

Для студентів, аспірантів та науковців в галузі фізико-математичних наук; вчителів та викладачів фізико-математичних дисциплін в ЗОШ та ВНЗ.

Дизайн, верстка О.А. Кадубовський
Відповідальні за випуск О.А. Кадубовський, В.Є. Величко

Підписано до друку 25.04.2013 р.
Формат 60 × 84 1/16. Ум. др. арк. 16,0.
Тираж 100 прим. Зам. № ???.

Підприємець Маторін Б.І.
84116, м. Слов'янськ, вул. Г. Батюка, 19.
Тел./факс +38 06262 3-20-99. Email: matorinb@ukr.net

Свідоцтво про внесення суб'єкта видавничої справи до Державного реєстру видавців, виготівників і розповсюджувачів видавничої продукції ДК №3141, видане Державним комітетом телебачення та радіомовлення України від 24.03.2008 р.