МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ, МОЛОДІ ТА СПОРТУ УКРАЇНИ
СЛОВ'ЯНСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ ПЕДАГОГІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

ЗБІРНИК
НАУКОВИХ ПРАЦЬ
фізико-математичного факультету
СДПУ

Заснований у 2010 році

Випуск №2

Рекомендовано вченою радою
Слов'янського державного педагогічного університету

Слов'янськ – 2012

УДК 51+53+37.016:[51+53+004].
ББК 22.1+22.3+74.262.21+74.262.22.

Збірник наукових праць фізико-математичного факультету СДПУ. [За матеріалами Всеукраїнської науково-практичної конференції «Актуальні питання науки і освіти»]. — Слов'янськ: СДПУ, 2012. — № 2 — 220 с.

Для студентів, аспірантів та науковців в галузі фізико-математичних наук; вчителів та викладачів фізико-математичних дисциплін в ЗОШ та ВНЗ.

РЕКОМЕНДОВАНО ДО ДРУКУ

вченою радою Слов'янського державного педагогічного університету, протокол № 8 від 05.04.2012р.

За достовірність посилань, цитат і результатів експериментів відповідальність несуть автори.

ISBN 978-966-1554-82-4

Від редакційної колегії

Шановні читачі!
Ви тримаєте в руках другий випуск «Збірника наукових праць фізико-математичного факультету Слов'янського державного педагогічного університету». Видання наукових праць викладачів, студентів та молодих науковців фізико-математичного факультету СДПУ започатковано у 2010 році, коли результати наукових досліджень було опубліковано окремою серією «Фізико-математичні науки» в збірнику наукових праць «Пошуки і знахідки» за матеріалами науково-практичної конференції СДПУ «Актуальні питання науки і освіти» (СДПУ, 20-22 квітня 2010р.).

Метою збірника є підтримка наукової активності як серед студентів, так і серед молодих викладачів СДПУ та інших ВНЗ.

Основу збірника складають повнотекстові статті доповідей на цьогорічній Всеукраїнській науково-практичній конференції «Актуальні питання науки і освіти» (Слов'янськ, СДПУ, 24-26 квітня 2012р.). Основні результати доповідались на секційних засіданнях та були рекомендовані до друку головами секцій, завідувачами випускових кафедр та науковими керівниками випускових робіт.

Засновники збірника мають намір зробити його максимально відкритим як для авторів, так і для читачів. Він виходить один раз на рік у друкованому та електронному вигляді. Електронна версія журналу та інформація щодо співпраці з авторами доступна на сторінках офіційного сайту збірника за адресою `http://slavdpu.dn.ua/fizmatzbirnyk/begin.htm`.

Запрошуємо до співпраці. Наснаги та творчих успіхів!
Члени редакційної колегії.

До 75-річчя Нечволода Миколи Кузьмича

Нечволод Микола Кузьмич народився 11 січня 1937 року в місті Куп'янськ Харківської області. Закінчив Куп'янське педагогічне училище (1955), Харківський державний педагогічний інститут ім. Г.С. Сковороди (1961), аспірантуру Українського фізико-технічного науково-дослідного інституту за фахом фізика твердого тіла (1967).

Учитель Валківської середньої школи, інспектор районного відділу народної освіти, старший викладач, доцент і завідуючий кафедрою фізики, професор, проректор з навчальної і наукової роботи, ректор, з 2003 року – радник ректора і професор кафедри фізики (за сумісництвом) Слов'янського державного педагогічного інституту (з 2002 року – університет), почесний ректор університету.

Доктор фізико-математичних наук, професор, академік Академії наук технологічної кібернетики України, Міжнародної академії наук, технологій та інжинірингу, Міжнародної кадрової академії.

Є науковим керівником науково-технічного напрямку «Низькотемпературна повзучість алмазоподібних напівпровідників», науково-дослідних лабораторій університету з фізики твердого тіла і напівпровідників.

Микола Кузьмич нагороджений

- Золотими медалями та орденом «За розвиток науки і освіти» II тисячоліття Американського біографічного інституту та Міжнародної кадрової академії;
- Золотою медаллю Пошани Америки як видатний іноземний вчений;
- Медалями «За доблесну працю», «Ветеран праці», А.С. Макаренка, «10 років незалежності України»;
- Знаком пошани «За значні досягнення в організації науково-дослідної роботи студентів»;
- Почесними грамотами Міністерства освіти і науки України.

Основні дати життя та діяльності М.К. Нечволода

1937, 11 січня – народився в м. Куп'янську Харківської області.

1955 – закінчив Куп'янське педагогічне училище.

1961 – закінчив стаціонарне відділення фізико-математичного факультету Харківського державного педагогічного інституту ім. Г.С. Сковороди.

1967 – закінчення аспірантури і захист кандидатської дисертації, був направлений на роботу у Слов'янський державний педагогічний інститут.

1967 – 1969 – старший викладач кафедри фізики.

15 лютого 1968 р. – присуджена вчена ступінь кандидата фізико-математичних наук.

1969 – 1970 – завідуючий кафедрою фізики.

1970 – 1974 – проректор з навчальної і наукової роботи.

27 лютого 1977 р. – нагороджений значком «Відмінник народної освіти».

1984 – завершення докторської дисертації.

1989 – присуджена вчена ступінь доктора фізико-математичних наук.

1990 – присуджено вчене звання професора за кафедрою фізики.

1999 – присвоєння Указом Президента України Почесного звання «Заслужений працівник народної освіти України».

1986 – 2003 – ректор Слов'янського державного педагогічного інституту.

1992 – виступив на запрошення ЮНЕСКО з доповіддю «Педагогічна освіта, соціальний прогрес та міжнародне співробітництво в епоху глобальних світових змін».

2001 – був запрошений ЮНЕСКО взяти участь у Міжнародному форумі в Оксфорді (Англія) з проблем вищої освіти.

2001, жовтень – нагороджений золотою медаллю Міжнародної кадрової Академії «За заслуги в освіті».

2001, листопад – за досягнення в галузі науки і освіти Американський біографічний інститут, акредитований при ЮНЕСКО, присвоїв М.К. Нечволоду почесне звання «Видатна людина світу».

2003 – за значні досягнення в галузі фізико-математичних наук ім'я професора М.К. Нечволода внесено Американським біографічним інститутом до першого всесвітнього біографічного довідника «Великі уми XXI століття».

з 2003р. по даний час – Радник ректора Слов'янського державного педагогічного університету.

Микола Кузьмич є автором (співавтором) понад 100 наукових праць.

Основні та найбільш вагомі праці М.К. Нечволода

1. Нечволод М. К. Вплив ультразвукового опромінення на повзучість монокристалів Li F / М. К. Нечволод, И. А. Гиндин, Г. Н. Малик, Я. Д. Стародубов // Укр. физ. журнал. – 1966. – Т. 11, № 11. – С. 1243 – 1246.
2. Нечволод М. К. Про ступінчасту повзучість монокристалів Li F / М. К. Нечволод, И. А. Гиндин, Я. Д. Стародубов // Укр. физ. журнал. – 1966. – Т. 11, № 10. – С.1121 – 1127.
3. Нечволод Н. К. Упрочнение кристаллических тел методом ступенчатой низкотемпературной ползучести / Н. К. Нечволод, И. А. Гиндин, Я. Д. Стародубов // Докл. АН СССР. – 1967. – Т. 174, № 1. – С. 73 – 75.
4. Нечволод Н. К. Влияние ступенчатой низкотемпературной ползучести на электросопротивление и механические свойства меди / Н. К. Нечволод, И. А. Гиндин, Я. Д. Стародубов // Физика металлов и металловедение. – К., 1968. – Т. 26, № 4. – С. 688 – 695.
5. Нечволод Н. К. Влияние ультразвукового облучения на область действия механизма истощения дислокаций в процессе ступенчатой ползучести монокристаллов / Н. К. Нечволод, И. А. Гиндин, Г. Н. Малик // Укр. физ. журнал. – 1968. – Т.13, №11. – С. 1823 – 1827.
6. Нечволод Н. К. Дислокационная структура монокристаллов Li F в условиях резких термических изменений / Н. К. Нечволод, В. А. Надточий // Укр. физ. журнал. – 1969. – Т. 14, № 6. – С. 1046 – 1049.
7. Нечволод Н. К. Ползучесть олова в температурной области фазового превращения / Н. К. Нечволод, И. А. Гиндин, Я. Д. Стародубов // Физическая природа пластической деформации и разрушения металлов. – К., 1969. – С. 95 – 102.
8. Нечволод Н. К. Измерение ЭДС Холла на переменных электрических и магнитных полях / В. А. Надточий, Н. К. Нечволод // Приборы и техника эксперимента. – 1970. – № 2. – С. 167 – 168.
9. Нечволод Н. К. Некоторые закономерности ступенчатой ползучести монокристаллического германия и кремния при комнатной температуре / В. А. Надточий, Н. К. Нечволод, В. П. Алехин, М. Х. Шоршоров // Дефекты структуры в полупроводниках: материалы Всесоюзного совещания. – Новосибирск, 1973. – С. 138 – 141.
10. Нечволод Н. К. О пластической деформации германия и кремния при комнатной температуре в условиях одноосного сжатия / В. А. Надточий, Н. К. Нечволод, М. Х. Шоршоров // Дефекты структуры в полупроводниках : материалы Всесоюзного совещания. – Новосибирск, 1973. – С. 142 – 145.

11. Нечволод Н. К. Некоторые закономерности ступенчатой ползучести монокристаллического германия при 300 K / В. А. Надточий, Н. К. Нечволод, В. П. Алехин // Физика и химия обработки материалов. – 1974. – №5. – С. 112 – 119.
12. Нечволод Н. К. О закономерностях пластической деформации кремния при комнатной температуре / В. А. Надточий, Н. К. Нечволод, В. П. Алехин, М. Х. Шоршоров // Физика и химия обработки материалов. – 1974. – №6. – С. 103 – 108.
13. Нечволод Н. К. О пластической деформации германия при комнатной температуре / В. А. Надточий, Н. К. Нечволод, В. П. Алехин, А. П. Тихонов, М. Х. Шоршоров // Физика и химия обработки материалов. – 1974. – №3. – С. 83 – 90
14. Нечволод Н. К. Установка для исследования ползучести алмазоподобных полупроводниковых материалов при комнатной температуре / В. А. Надточий, Н. К. Нечволод, А. П. Тихонов // Заводская лаборатория. – М., 1974. – Т.40, №1. – С. 112 – 114.
15. Нечволод Н. К. Особенности низкотемпературной микропластической деформации кремния при комнатной температуре / Н. К. Нечволод, В. П. Алехин, В. А. Надточий, М. Х. Шоршоров // Сплавы редких металлов с особыми физическими свойствами : мат. Всес. совещания. – М., 1975. – С. 72 – 76.
16. Нечволод Н. К. Влияние термоциклирования на ступенчатую ползучесть монокристаллов Li F в области действия механизма истощения дислокаций / Н. К. Нечволод, А. Я. Белошапка, В. Я. Белошапка, В. С. Романуша, Б. Е. Шкуратов // Укр физ. журнал. – 1976. – Т.21, №12. – С. 2052 – 2053.
17. Нечволод Н. К. О пластической деформации германия и кремния при комнатной температуре в условиях одноосного сжатия / В. А. Надточий, Н. К. Нечволод, В. П. Алехин // Металлические монокристаллы. Получение и исследование свойств. – М., 1976. – С. 180 – 184.
18. Нечволод Н. К. Особенности микропластической деформации германия в условиях одноосного сжатия при комнатной температуре / В. А. Надточий, Н. К. Нечволод, В. П. Алехин, М. Х. Шоршоров // Металлические монокристаллы. Получение и исследование свойств. – М., 1976. – С. 186 – 193.
19. Нечволод Н. К. Низкотемпературная деформация в монокристаллах германия и кремния / В. А. Надточий, Н. К. Нечволод, В. П. Алехин, В. П. Вареца, А. З. Калимбет, М. Х. Шоршоров // Монокристаллы тугоплавких и редких металлов, сплавов и соединений. – М., 1977. – С. 150 – 156.

20. Нечволод Н. К. Ползучесть кристаллических тел при низких температурах / Н. К. Нечволод. – К.: Вища школа, 1980. – 184 с.
21. Нечволод Н. К. Влияние ступенчатой ползучести в режиме истощения дислокаций на инфракрасные спектры пропускания монокристаллов LiF при 300 К / Н. К. Нечволод, В. А. Глыва, В. П. Зарва, В. А. Золотухин, Г. Н. Романенко // Физика и химия обработки материалов. – 1983. – №1. – С. 92 – 98.
22. Нечволод Н. К. Рентгенографическое и электронно-микроскопическое исследование дислокационной структуры поликристаллической меди после ступенчатой ползучести в температурном интервале 300-77 К / Н. К. Нечволод, Б. А. Брусиловский, В. А. Глыва, Л. Г. Хает // Физика твердого тела. – К., 1987. – Вып. 17. – С. 55 – 59.
23. Нечволод Н. К. Расчет дислокационных донорных уровней в щелочно-галлоидных кристаллах на основе экспериментальных данных по низкотемпературной ползучести / Н. К. Нечволод, В. А. Надточий, В. А. Золотухин // Физика твердого тела. – К., 1988. – Вып. 18. – С. 60 – 62.
24. Нечволод Н. К. Проблемное обучение как условие развития творческого мышления / Н. К. Нечволод, Л. С. Шурыгина // Методологические, дидактические и психологические аспекты проблемного обучения физике : тез. докл. 1-ой Международ. науч. – метод. конф. – Донецк, 1990.
25. Нечволод Н. К. Проблемные ситуации при изучении необратимости / Н. К. Нечволод, Л. С. Шурыгина // Методологические, дидактические и психологические аспекты проблемного обучения физике : тез. докл. II-ой Международ. науч.-метод. конф. – Донецк, 1990.
26. Нечволод Н. К. Проблемные ситуации при формировании понятия температуры / Н. К. Нечволод, Л. С. Шурыгина // Методологические, дидактические и психологические аспекты проблемного обучения физике : тез. докл. II-ой Международ. науч.-метод. конф. – Донецьк, 1990.
27. Nechvolod M. Social progress, pedagogical education and international partnership / M. Nechvolod // Teacher education in an ERA of global change : International Council on Education for teaching, 20 – 24 July 1992. – Paris, 1992. – P. 98.
28. Нечволод М. К. Дослідження поверхневої міграції вакансій в напівпровідниках германію в осцилюючому полі механічних напружень / В. О. Надточій, М. К. Нечволод, Ю. М. Гриценко // Актуальні проблеми сучасної науки. – Слов'янськ, 1993. – С. 9 – 10.
29. Нечволод М. К. Методика викладання теми «Просторова когерентність» / М. К. Нечволод, М. М. Голоденко, В. О. Надточій // Актуальні проблеми

сучасної науки. – Слов'янськ, 1993. – С. 110 – 111.
30. Нечволод Н. К. О низкотемпературной ступенчатой ползучести кристаллических тел как фрактальном физическом процессе / Н. К. Нечволод, В. А. Надточий, Ю. Н. Гриценко // Актуальні проблеми сучасної науки. – Слов'янськ, 1993. – С. 10 – 11.
31. Нечволод Н. К. Численное моделирование дифракции электронов / Н. К. Нечволод, Н. Н. Голоденко, Ю. Н. Гриценко // Компьютерные программы учебного назначения : тез. докл. 1 – ой Международ. конф. – Донецк, 1993. – С. 290 – 291.
32. Нечволод М. К. Голографія і принцип Гюйгенса – Френеля / М. К. Нечволод, М. М. Голоденко, В. О. Надточій // Шляхи удосконалення фундаментальної і професійної підготовки вчителя фізики : тези доп. II Всеукр. конф. – К., 1995.
33. Нечволод Н. К. Дефектный поверхностный слой, возникающий в монокристаллическом Ge при низкотемпературной деформации / В. А. Надточий, Н. К. Нечволод, Н. Н. Голоденко, Ю. Н. Гриценко, О. Н. Панютин // Вакуумная металлизация : сб. науч. тр. – Харьков, 1996. – Т.2. – С. 77 – 81.
34. Нечволод М. К. Фізика як засіб гуманітаризації освітньо-професійної підготовки вчителя технологій / М. К. Нечволод, В. О. Надточій, Л. С. Шуригіна // Проблеми трудової і професійної підготовки : наук. – метод. зб. – К.; Слов'янськ, 1997. – Вип. 1. – С. 51 – 53.
35. Нечволод М. К. Фізика як засіб гуманітаризації освітньо-професійної підготовки вчителя технологій / М. К. Нечволод, В. О. Надточій, Л. С. Шуригіна // Трудова підготовка школярів та підготовка вчителів трудового навчання : історія, сучасність, перспективи розвитку. – К.; Слов'янськ, 1997. – С. 62 – 65.
36. Нечволод М. К. До методики вивчення електричних машин / В. О. Надточій, М. К. Нечволод, М. М. Голоденко, Л. С. Шуригіна // Методичні особливості викладання фізики на сучасному етапі : зб. наук. праць. – Кіровоград, 1998. – Ч. 2. – С. 116 – 117.
37. Нечволод М. К. Комп'ютерне моделювання в навчальному процесі / М. К. Нечволод, Ю. М. Гриценко, В. О. Надточій // Методичні особливості викладання фізики на сучасному етапі : зб. наук. праць. – Кіровоград, 1998. – Ч. 2. – С. 143 – 144.
38. Нечволод М. К. Фізика як засіб гуманітаризації освітньо-професійної підготовки вчителя технологій / М. К. Нечволод, В. О. Надточій // Проблеми освіти : наук.-метод. зб. – К., 1998. – Вип. 11. – С. 52 – 55.

39. Нечволод М. К. Визначення коефіцієнту тертя кочення / М. К. Нечволод, В. О. Надточій, М. М. Голоденко // Наук. – метод, зб. з проблем навчального фізичного експерименту. – Чернігів, 1999. – С. 22.
40. Нечволод Н. К. Влияние предварительного механического нагружения на электрическую прочность высоковольтного стеклопластика / Н. К. Нечволод // Технічна електродинаміка. – 1999. – №4. – С. 16 – 21.
41. Нечволод М. К. Комп'ютерне моделювання коливань при великих амплітудах / М. К. Нечволод, М. М. Голоденко, Ю. М. Гриценко, В. О. Надточій, А. Ф. Прун // Комп'ютерне моделювання та інформаційні технології в освітній діяльності : зб. наук. праць. – Кривий Ріг, 1999. – С. 4 – 6.
42. Нечволод М. К. Про гуманітаризацію і гуманізацію природничо-наукової освіти / М. К. Нечволод, М. М. Голоденко // Гуманізація навчально-виховного процесу у вищій школі: наук. праці міжнар. наук.-практ. конф., 27 – 29 вересня 1999 р. – Слов'янськ, 1999. – С. 32 – 34.
43. Нечволод Н. К. Электрические свойства кремниевых p-n-переходов с дислокациями, созданными низкотемпературной деформацией / В. А. Надточий, Н. К. Нечволод, Н. Н. Голоденко, Д. Г. Сущенко // Proceedings of 4-th International Symposium on Diamond Films and Related Materials. – Kharkov, 1999. – P. 327 – 330.
44. Нечволод М. К. Вимірювання часу життя носіїв заряду та товщини дефектного поверхневого шару напівпровідника методом модуляції провідності у точковому контакті / В. О. Надточій, М. К. Нечволод, Д. Г. Сущенко // Вісн. Донецького ун-ту. Сер. А, Природничі науки. – Донецьк, 2000. – Вип. 1. – С. 98 – 103.
45. Нечволод М. К. До теорії логарифмічної низькотемпературної повзучості, зумовленої виснаженням дислокацій / М. К. Нечволод, М. М. Голоденко, В. О. Надточій // Журнал фізичних досліджень. – 2000. – Т. 4, № 3. – С. 298 – 302.
46. Нечволод Н. К. Исследование электрических свойств Ge и Si, деформированного при низких температурах / В. А. Надточий, Н. К. Нечволод, Д. Г. Сущенко // Физика и техника в высоких давлений. – 2001. – №1. – С. 104 – 110.
47. Нечволод Н. К. Компенсация динамических нагрузок инерционным параметрическим преобразователем энергии / Н. К. Нечволод, Л. В. Пивоваров, В. И. Рукасов, О. В. Субботин // Надійність інструменту та оптимізація технологічних систем : зб. наук. праць. – Краматорськ, 2001. – Вип. 11. – С. 139 – 144.

48. Нечволод Н. К. Компьютерное моделирование опытов Франка-Герца / Н. К. Нечволод, А. М. Берестовой, Н. Н. Голоденко, А. Г. Лебедь, В. А. Надточий // Актуальные проблемы инженерной подготовки специалистов в высших учебных заведениях инженерно-педагогического профиля. – Харьков, 2001. – С. 214.
49. Нечволод М. К. Курс фізики : Запитання і задачі : навч. посіб. для інж.-пед. спец. вищ. навч. закладів / М. К. Нечволод, М. М. Голоденко, А. Ф. Прун. – К.: Вид. центр «Просвіта», 2001. – 231 с.
50. Нечволод М. К. Курс фізики. Електрика і магнетизм : навч. посіб. / М. К. Нечволод, М. М. Голоденко, А. Ф. Прун. – К.: Вид. центр «Просвіта», 2001. – 236 с.
51. Нечволод М. К. Курс фізики: Ч. 1. Механіка. Ч. 2. Основи молекулярної фізики і термодинаміки: навч. посіб. для інж. – пед. спец. вищ. навч. закладів / М. К. Нечволод, М. М. Голоденко, А. Ф. Прун. – К.: Вид. центр «Просвіта», 2001. – 226 с.
52. Нечволод М. К. Курс фізики: Ч. 3. Електрика і магнетизм : навч. посіб. для інж.-пед. спец. вищ. навч. закладів / М. К. Нечволод, М. М. Голоденко, А. Ф. Прун. – К.: Вид. центр «Просвіта», 2001. – 235 с.
53. Нечволод М. К. Курс фізики: Ч. 4. Оптика. Ч. 5. Фізика мікрочастинок : навч. посіб. для інж.-пед. спец. вищ. навч. закладів / М. К. Нечволод, М. М. Голоденко. – К.: Вид. центр «Просвіта», 2001. – 323 с.
54. Нечволод Н. К. Проблемы современных образовательных технологий / Н. К. Нечволод, А. М. Берестовой, Н. Н. Голоденко, В. А. Надточий, Л. С. Шурыгина // Управление качеством профессионального образования : междунар. науч.-метод. конф. (Артемовск, 24-27 апреля 2001 г.): сб. науч. тр. – Донецк, 2001. – С. 265 – 268.
55. Нечволод М. К. Формування в учнів навичок розв'язування задач за допомогою комп'ютерів / М. К. Нечволод, М. М. Голоденко, Ю. М. Гриценко // Проблеми трудової і професійної підготовки : наук.-метод. зб. – Слов'янськ, 2001. – Вип. 4. – С. 129 – 131.
56. Нечволод Н. К. Генерация дислокаций на сферических включениях в кристаллах под действием одноосного напряжения сжатия / В. А. Надточий, Н. К. Нечволод, Я. Г. Беличенко, Н. Н. Голоденко, И. В. Жихарєв // Вісн. Донецького ун – ту. Сер. А. Природничі науки. – Донецьк, 2002. – Вип. 2. – С. 197 – 200.
57. Нечволод Н. К. О рекомбинации неравновесных носителей заряда в дефектном поверхностном слое монокристаллического Ge / В. А. Надточий, Н. К. Нечволод, Н. Н. Голоденко, Д. Г. Сущенко // Физика и химия твердого

тела. – 2002. – Т.2, № 4. – С. 707 – 710.
58. Нечволод Н. К. Микропластичность и электрические свойства Ge и Si, деформированных при низких температурах /В. А. Надточий, Н. К. Нечволод, Н. Н. Голоденко // Вісн. Харківського Національного ун – ту ім. В. Н. Каразіна. Сер. Фізика. – Харків, 2003. – Т. 600, вип. 7. – С. 101 – 108.
59. Nechvolod N. Microplasticity and electrical properties of subsurface layers of diamond – like semiconductors strained at low temperatures / V. Nadtochy, N. Nechvolod, N. Golodenko // Functional Materials 10. – 2003. – №4. – С. 702 – 706.
60. Нечволод М. К. Рух дислокацій у напівпровідниках, спричинений градієнтом напружень / В. О. Надточій, М. К. Нечволод, М. М. Голоденко, І. В. Жихарєв, О. В. Періг // Фізика і хімія твердого тіла. – 2003. – Т.4, №1. – С. 76 – 79.
61. Нечволод Н. К. Структурные изменения в зоне действия лазерного луча в монокристаллическом германии / В. А. Надточий, Н. К. Нечволод, В. П. Алехин, Н. Н. Голоденко, Д. С. Москаль, А. П. Тихонов // Физика и химия обработки металлов. – 2003. – №4. – С. 9 – 12.
62. Нечволод Н. К. Установка для исследования микропластичности полупроводниковых кристаллов / В. А. Надточий, Н. К. Нечволод, Д. С. Москаль // Физика и техника высоких давлений. – 2004. – Т. 14, №2. – С. 117 – 121.
63. Нечволод М. К. Дислокації у приповерхневому шарі Ge, спричинені лазерним імпульсом / В. О. Надточій, М. К. Нечволод, М. М. Голоденко, Д. С. Москаль // Вісн. Харківського Нац. ун-ту ім. В.Н.Каразіна. Сер. Фізика. – Харків, 2005. – Т.601, вип.8. – С. 130 – 135.
64. Нечволод Н. К. Измерение времени жизни носителей заряда и проводимости дефектного приповерхностного слоя Ge при термообработках / В. А. Надточий, Н. К. Нечволод, Н. Н. Голоденко // Физика и техника высоких давлений. – 2005. – Т. 14, №3. – С. 42 – 48.
65. Nechvolod N. Recombination of non-eguilibrium charge carriers injected into Ge through intermediate defective layer / V. Nadtochiy, N. Nechvolod, N. Golodenko // Functional Materials 12. – 2005. – № 1. – С. 45 – 50.
66. Нечволод М. К. Мікропластичність алмазоподібних кристалів / / В. О. Надточій, М. К. Нечволод, Д. С. Москаль // XI Міжнар. конф. з фізики і технології тонких плівок та наносистем, 7-12 травня 2007 р. – Івано-Франківськ, 2007. – Т. 2. – С. 122 – 123.
67. Нечволод Н. К. О механизме упрочнения приповерхностного слоя германия под действием низкотемпературной циклической деформации / В. А. Надточий, Н. К. Нечволод, Д. С. Москаль // XVII Петербургские чте-

ния по проблемам прочности, 10 – 12 апреля 2007 г. : сб. матер. – СПб., 2007. – Ч. II . – С. 126 – 127.
68. Нечволод М. К. Актуалізація та самоактуалізація особистості за допомогою методів резонансного впливу / М. К. Нечволод, С. М. Левченко, О. І. Опря // Проблеми трудової і професійної підготовки : наук. – метод. зб. – Слов'янськ, 2008. – В. 12. – С. 3 – 9.
69. Нечволод М. К. Дифузійно-дислокаційна модель утворення періодичної структури на поверхні напівпровідника при імпульсному лазерному опроміненні / В. О. Надточій, М. К. Нечволод, Д. С. Москаль // 3-я Міжнародна науково-технічна конференція «Сенсорна електроніка та мікросистемні технології (СЕМСТ-3)» : тези доп., 2 – 6 червня 2008 р. – Одеса, 2008. – 185 с.
70. Нечволод Н. К. О роли диффузионных механизмов в процессе релаксации напряжений на концентроторах в монокристаллическом германии / В. А. Надточий, Н. К. Нечволод, А. И. Уколов // XIX Петербургские чтения по вопросам прочности : тези доп. 13 – 15 апреля 2010 г. – Санкт-Петербург, 2010. – С. 298 – 300.
71. Нечволод М. К. Дифузійно-дислокаційна мікропластичнисть монокристалів Ge нижче температурної межі крихкого руйнування / В. О. Надточій, М. К. Нечволод, О. І. Уколов // Фіз. і хім. твердого тіла. – 2010. – №3.

Шановному Миколі Кузьмичу бажаємо міцного здоров'я, творчої наснаги і подальших успіхів у науці та викладацькій роботі!

Професорсько-викладацький склад
фізико-математичного факультету СДПУ.

МАТЕМАТИКА

УДК 517.5

Новиков О.А., Ровенская О.Г., Шулик Т.В.

[1] *канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры математического анализа, СГПУ*

[2] *канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры высшей математики, ДГМА*

[3] *ст. лаборант научного отдела, СГПУ*

e-mail: sgpi@slav.dn.ua

ПРИБЛИЖЕНИЕ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ ПРЯМОУГОЛЬНЫМИ МЕТОДАМИ

Получены интегральные представления уклонений методов приближения, которые определяются прямоугольными матрицами, на классах функций многих переменных.

We obtain integral representations of the deviations of methods of approximation, which are defined by rectangular matrices, for classes of functions of several variables.

Keywords: *Fourier series, classes of functions*

Введение

Классы $\overline{\psi}$-интегралов функций многих переменных были введены в работе [1] (см. также [2-4]). В этих работах изучаются вопросы приближения классов $\overline{\psi}$-интегралов периодических функций многих переменных прямоугольными линейными методами, задаваемыми треугольными суммирующими матрицами. В данной статье получены интегральные представления для верхних граней уклонений прямоугольных линейных средних рядов Фурье, задаваемых прямоугольными суммирующими матрицами на классах функций многих переменных. Для дальнейшего изложения введем ряд обозначений и определений. В одномерном случае вопросы приближения прямоугольными методами изучались в работе [6].

Следуя [5], введем ряд Фурье функции многих переменных и линейные методы их суммирования следующим образом. Пусть R^m – пространство m-мерных векторов $\vec{x} = (x_1, x_2, ..., x_m)$, $T^m = \prod\limits_{i=1}^{m}[-\pi;\pi]$ – m-мерный куб с ребром 2π,

$$N^m = \left\{\vec{x} \in R^m | x_i \in N,\ i = 1, 2, ..., m\right\},$$

$$N_*^m = \left\{\vec{x} \in R^m | x_i \in N_* = N \cup \{0\},\ i = 1, 2, ..., m\right\},$$

$$N_i^m = \left\{ \vec{x} \in R^m | x_i \in N, \ x_j \in N_*, \ i \neq j \right\}.$$

Пусть E^m – множество точек из R^m, координаты которых 0 или 1. Через $L(T^m)$ обозначим множество 2π-периодических по каждой переменной, суммируемых на кубе периодов T^m функций $f(\vec{x}) = f(x_1, x_2, ..., x_m)$.

Пусть $f \in L(T^m)$. Следуя [12, с. 546], каждой паре точек $\vec{s} \in E^m$, $\vec{k} \in N_*^m$, поставим в соответствие коэффициент Фурье функции f

$$a_{\vec{k}}^{\vec{s}}(f) = \frac{1}{\pi^m} \int_{T^m} f(\vec{x}) \prod_{i=1}^{m} \cos\left(k_i x_i - \frac{s_i \pi}{2}\right) dx_i.$$

Каждому вектору $\vec{k} \in N_*^m$ поставим в соответствие гармонику функции $f(\vec{x})$

$$A_{\vec{k}}(f; \vec{x}) = \sum_{\vec{s} \in E^m} a_{\vec{k}}^{\vec{s}}(f) \prod_{i=1}^{m} \cos\left(k_i x_i - \frac{s_i \pi}{2}\right).$$

Следуя [5], ряд Фурье функции $f(\vec{x})$ определим следующим соотношением

$$S[f] = \sum_{\vec{k} \in N_*^m} \frac{1}{2^{q(\vec{k})}} A_{\vec{k}}(f; \vec{x}), \tag{1}$$

где $q(\vec{k})$ – количество нулевых координат вектора $\vec{k}$.

Следуя [6], определим прямоугольные методы суммирования рядов Фурье функций многих переменных. Пусть для каждого $i = 1, 2, ..., m$ задано множество $B^{(i)} \subset (1; +\infty)$, для которого $+\infty$ является предельной точкой. Элементы множества $B^{(i)}$ обозначим δ, $\delta \in B^{(i)}$. Каждой паре чисел $\delta \in B^{(i)}$ и $k = 0; 1; 2; \ldots$, поставим в соответствие число $\lambda_k^{(\delta,i)}$, $\lambda_0^{(\delta,i)} = 1$. Для каждого фиксированного $i = 1, 2, ..., m,$ обозначим $\Lambda_i = \left\{ \lambda_k^{(\delta,i)} \right\}_{\delta \in B^{(i)}}^{k=0,1,\ldots}$

В случае $B^{(i)} = \mathbb{N}$, $i = 1, 2, ..., m,$ получаем $\lambda_k^{(\delta,i)} = \lambda_k^{(n)}$ и при выполнении условия $\lambda_k^{(n)} = 0$ для $k \geq n$, матрица

$$\Lambda_i = \left\{ \lambda_k^{(\delta,i)} \right\}_{\delta \in N}^{k=0,1,\ldots} = \left\{ \lambda_k^{(n)} \right\}_{n \in N}^{k=0,1,\ldots}$$

оказывается треугольной.

В общем случае каждому значению $\delta \in B^{(i)}, i = 1, 2, ..., m,$ соответствует бесконечная строка (последовательность) величин $\lambda_k^{(\delta,i)}, k = 0, 1, 2, \ldots$, а множество $\Lambda_i = \left\{ \lambda_k^{(\delta,i)} \right\}_{\delta \in B^{(i)}}^{k=0,1,\ldots}$ представляет собой семейство строк:

$$\lambda_0^{(\delta,i)}, \lambda_1^{(\delta,i)}, \lambda_2^{(\delta,i)}, \ldots,$$

каждая из которых соответствует своему фиксированному значению $\delta \in B^{(i)}$. Если множество $B^{(i)}$ счетное и $B^{(i)} = \{\delta_1, \delta_2, ...\}$, то соответствующее множество Λ_i можно представить с в виде матрицы, которая в общем случае не является треугольной

$$\begin{pmatrix} \lambda_0^{(\delta_1,i)} & \lambda_1^{(\delta_1,i)} & \lambda_2^{(\delta_1,i)} & \dots \\ \lambda_0^{(\delta_2,i)} & \lambda_1^{(\delta_2,i)} & \lambda_2^{(\delta_2,i)} & \dots \\ & \dots & & \end{pmatrix}$$

Выберем из каждого множества $B^{(i)}, i = 1, 2, ..., m,$ по одному элементу $\delta^{(i)} \in B^{(i)}$ и обозначим $\vec{\delta} = (\delta^{(1)}, \delta^{(2)}, ..., \delta^{(m)})$. Тогда вектор $\vec{\delta}$ пробегает декартово произведение множеств $B^{(i)}, i = 1, 2, ..., m,$: $\vec{\delta} \in \prod_{i=1}^{m} B^{(i)}$. Обозначим

$$\lambda_{\vec{k}}^{(\vec{\delta})} = \lambda_{k_1}^{(\delta,1)} \lambda_{k_2}^{(\delta,2)} ... \lambda_{k_m}^{(\delta,m)} = \prod_{i=1}^{m} \lambda_{k_i}^{(\delta,i)}.$$

Вектору $\vec{\delta}$ и функции $f \in L(T^m)$, имеющей ряд Фурье (1), поставим в соответствие ряд

$$S_{\vec{\delta}}[f] = \sum_{\vec{k} \in N_*^m} \frac{1}{2^{q(\vec{k})}} \prod_{i=1}^{m} \lambda_{k_i}^{(\delta,i)} A_{\vec{k}}(f, \vec{x}) = \sum_{\vec{k} \in N_*^m} \frac{\lambda_{\vec{k}}^{(\vec{\delta})}}{2^{q(\vec{k})}} A_{\vec{k}}(f, \vec{x}), \vec{\delta} \in \prod_{i=1}^{m} B^{(i)}. \qquad (2)$$

При соответствующем выборе набора множеств $\Lambda_{\vec{\delta}} = (\Lambda_1, \Lambda_2, ..., \Lambda_m)$ эти ряды являются рядами Фурье некоторых функций, которые обозначим $U_{\vec{\delta}}(f, \vec{x}, \Lambda)$. Например, если $\lambda_k^{(\delta,i)} = 1$ для всех $k = 0, 1, 2, \dots$, $\delta \in B^{(i)}, i = 1, 2, ..., m,$ то $U_{\vec{\delta}}(f, \vec{x}, \Lambda) = S[f]$. Таким образом,

$$S[U_{\vec{\delta}}(f, \vec{x}, \Lambda)] = \sum_{\vec{k} \in N_*^m} \frac{1}{2^{q(\vec{k})}} \cdot \prod_{i=1}^{m} \lambda_{k_i}^{(\delta,i)} A_{\vec{k}}(f, \vec{x}). \qquad (3)$$

Изучим вопросы приближения операторами $U_{\vec{\delta}}(f, \vec{x}, \Lambda)$ классов функций многих переменных, которые, следуя [1], введем следующим образом.

Пусть $\overline{m} = \{1, 2, ..., m\}$ и через μ обозначено некоторое подмножество из $\overline{m}$, $|\mu|$ количество элементов множества μ, через $\mu(r)$ – всякое r-элементное подмножество из $\overline{m}$ так, что $|\mu(r)| = r$.

Гармоникой, сопряженной с $A_{\vec{k}}(f; \vec{x})$ по переменной x_r, будем называть величину

$$A_{\vec{k}}^{\vec{e}_r}(f; \vec{x}) = \sum_{\vec{s} \in E^m} a_{\vec{k}}^{\vec{s}}(f) \prod_{i \in \overline{m} \setminus \{r\}} \cos\left(k_i x_i - \frac{s_i \pi}{2}\right) \cos\left(k_r x_r - \frac{(s_r + 1)\pi}{2}\right).$$

Пусть $\overline{\psi}_i = (\psi_{i1}(k), \psi_{i2}(k))$, $\overline{\Psi}_i = (\Psi_{i1}(k), \Psi_{i2}(k))$, $i \in \overline{m}$, $k = 0, 1, 2, ...$, – наборы систем чисел таких, что для всех $i \in \overline{m}$, $k \in N$, выполняются условия: $\psi_{i1}(0) = 1$, $\Psi_{i1}(0) = 1$, $\psi_{i2}(0) = 0$, $\Psi_{i2}(0) = 0$,

$$\overline{\psi}_i^2(k) = \psi_{i1}^2(k) + \psi_{i2}^2(k) \neq 0, \ \overline{\Psi}_i^2(k) = \Psi_{i1}^2(k) + \Psi_{i2}^2(k) \neq 0.$$

Если для фиксированного $r \in \overline{m}$ существует функция $f^{\overline{\psi}_r}(\vec{x}) \in L(T^m)$ такая, что

$$S[f^{\overline{\psi}_r}] = \sum_{\vec{k} \in N_r^m} \frac{1}{2^{q(\vec{k})} \overline{\psi}_r^2(k_r)} \Big(\psi_{r1}(k_r) A_{\vec{k}}(f; \vec{x}) - \psi_{r2}(k_r) A_{\vec{k}}^{\vec{e}_r}(f; \vec{x}) \Big), \tag{4}$$

где N_r^m – множество точек $\vec{k} \in N_*^m$, у которых $k_r \neq 0$, то будем говорить, что $f^{\overline{\psi}_r}(\vec{x})$ является частной $\overline{\psi}_r$-производной функции $f(\vec{x})$ по переменной x_r. Для функции $f^{\overline{\psi}_r}(\vec{x})$ будем также использовать естественное для частных производных обозначение $\frac{\partial^{\overline{\psi}_r} f(\vec{x})}{\partial x_r}$.

Для фиксированного набора $\mu \subset \overline{m}$, $\mu = \{r_1, r_2, ..., r_{|\mu|}\}$, смешанной $\overline{\Psi}_\mu$-производной по переменным x_i, $i \in \mu$ будем называть функцию $f^{\overline{\Psi}_\mu}$, которая задается соотношением

$$f^{\overline{\Psi}_\mu}(\vec{x}) = \frac{\partial^{\overline{\Psi}_{r_{|\mu|}}} \partial^{\overline{\Psi}_{r_{|\mu|-1}}} ... \partial^{\overline{\Psi}_{r_1}} f(\vec{x})}{\partial x_{r_{|\mu|}} \partial x_{r_{|\mu|-1}} ... \partial x_{r_1}}.$$

Множество функций $f \in L(T^m)$ таких, что для любых $i \in \overline{m}$ существуют $\overline{\psi}_i$-производные $f^{\overline{\psi}_i}$ и для всех $\mu \subset \overline{m}$ существуют смешанные $\overline{\Psi}_\mu$-производные $f^{\overline{\Psi}_\mu}$, будем обозначать $L^{m\overline{\psi}}$, а подмножество непрерывных функций из $L^{m\overline{\psi}}$ будем обозначать $C^{m\overline{\psi}}$. Множество функций из $C^{m\overline{\psi}}$, удовлетворяющих условиям

$$\text{esssup}|f^{\overline{\psi}_i}(\vec{x})| \leq 1, \ \text{esssup}|f^{\overline{\Psi}_\mu}(\vec{x})| \leq 1, \ i \in \overline{m}, \ \mu \subset \overline{m},$$

будем обозначать $C_\infty^{m\overline{\psi}}$.

Основная часть

Найдем интегральные представления для величин

$$\rho_{\vec{\delta}}(f, \vec{x}, \Lambda) \overset{\text{df}}{=} f(\vec{x}) - U_{\vec{\delta}}(f, \vec{x}, \Lambda). \tag{5}$$

Для этого понадобится следующее утверждение, полученное в работе [1].
Лемма. [1] *Пусть* $f \in C_\infty^{m\overline{\psi}}$. *Тогда для всякого* $\vec{k} \in N_\mu^m$, $\vec{s} \in E^m$, $\mu \subset \overline{m}$, *выполняются равенства*

$$a_{\vec{k}}^{\vec{s}}(f) = \sum_{\zeta \subset \mu} \prod_{i \in \mu \setminus \zeta} \Psi_{i1}(k_i) \prod_{j \in \zeta} (-\Psi_{j2}(k_j)) (-1)^{\sum\limits_{\nu \subset \zeta} s_\nu} a_{\vec{k}}^{\vec{s} + \sum\limits_{\nu \in \zeta} (-1)^{s_\nu} \vec{e}_\nu} (f^{\overline{\Psi}_\mu}), \tag{6}$$

в частности, для $\vec{k} \in N_i^m, \ i \in \overline{m}$,

$$a_{\vec{k}}^{\vec{s}}(f) = \psi_{i1}(k_i) a_{\vec{k}}^{\vec{s}}(f^{\overline{\psi}_i}) - (-1)^{s_i} \psi_{i2}(k_i) a_{\vec{k}}^{\vec{s}+(-1)^{s_i}\vec{e}_i}(f^{\overline{\psi}_i}). \tag{7}$$

Следуя А.И. Степанцу [6, с. 56], через $\{\lambda_i(v)\}, \ i = 1, 2, ..., m$, $v \in [0, +\infty)$, обозначим набор последовательностей, заданных и непрерывных на $[0, +\infty)$ функций, таких, что $\lambda_i\left(\frac{k}{\delta_i}\right) = \lambda_{\delta_i}^{(i)}(k), \ i \in \overline{m}$.

Каждому вектору $\vec{\delta}$ поставим в соответствие набор непрерывных на $[0; +\infty)$ функций $\lambda_i^{(\vec{\delta})}(u), i = 1, 2, ..., m$, так, что каждой координате $\delta^{(i)}$ этого вектора соответствует функция $\lambda_i^{(\vec{\delta})}(u)$ такая, что

$$\lambda_i^{(\vec{\delta})}\left(k/\delta^{(i)}\right) = \lambda_k^{(\delta,i)}, \ \delta^{(i)} \in B^{(i)}, \ i = 1, 2, ..., m.$$

Пусть функции $\tau_{ij}^{(\vec{\delta})}(v)$, $T_{ij}^{(\vec{\delta})}(v)$ для $i = 1, 2, ..., m, \ j = 1; 2$, на промежутке $[\frac{1}{\delta_i}; +\infty)$ определены соотношениями

$$\tau_{ij}^{(\vec{\delta})}(v) = (1 - \lambda_i^{(\vec{\delta})}(v))\psi_{ij}(\delta_i v), T_{ij}^{(\vec{\delta})}(v) = (1 - \lambda_i^{(\vec{\delta})}(v))\Psi_{ij}(n_i v), \tag{8}$$

а на промежутке $[0; \frac{1}{\delta_i}]$ определены так, чтобы эти функции были непрерывными на $[0; +\infty)$ и выполнялись условия $T_{ij}^{(\vec{\delta})}(0) = \tau_{ij}^{(\vec{\delta})}(0) = 0, \ i \in \overline{m}$.

Известно [7, с. 54], что в случае, когда функция $\tau(u)$ определена и непрерывна на $[0; +\infty)$ и имеет суммируемое на R преобразование Фурье

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \tau(u) \cos\left(ut + \frac{\beta\pi}{2}\right) du \right| dt < \infty, \quad \beta \in R,$$

то $\forall u \in [0; +\infty)$ справедливы равенства

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} \tau(v) \cos\left(vt + \frac{\beta\pi}{2}\right) dv \cos\left(ut + \frac{\beta\pi}{2}\right) dt = \tau(u),$$

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} \tau(v) \cos\left(vt + \frac{\beta\pi}{2}\right) dv \sin\left(ut + \frac{\beta\pi}{2}\right) dt = 0. \tag{9}$$

Положим

$$\widehat{\tau}_{ij}^{(\vec{\delta})}(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \tau_{ij}^{(\vec{\delta})}(v) \cos\left(vt - \frac{(j-1)}{2}\pi\right) dv.$$

В принятых обозначениях справедливо следующее утверждение.

Теорема 1. *Пусть функции* $\tau_{ij}^{(\vec{\delta})}(v)$, $T_{ij}^{(\vec{\delta})}(v)$ *определяемые соотношениями (8), имеют суммируемые на* R *преобразования Фурье*

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}|\widehat{\tau}_{ij}^{(\vec{\delta})}(t)|dt<\infty,\ \int\limits_{-\infty}^{\infty}|\widehat{T}_{ij}^{(\vec{\delta})}(t)|dt<\infty,\ i=1,2,...,m,\ j=1,2. \tag{10}$$

Тогда для всякой функции $f\in C_{\infty}^{m\overline{\psi}}$ *в каждой точке* $\vec{x}\in T^m$ *выполняется равенство*

$$\rho_{\vec{\delta}}(f;\vec{x};\Lambda)=\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}f^{\overline{\psi}_k}\left(\vec{x}-\frac{t_k}{\delta^{(k)}}\vec{e}_k\right)\int\limits_{0}^{\infty}\left(\tau_{k1}^{(\vec{\delta})}(v)\cos vt_k+\tau_{k2}^{(\vec{\delta})}(v)\sin vt_k\right)dvdt_k+$$

$$+\sum_{r=2}^{m}(-1)^{r+1}\sum_{\mu(r)\subset\overline{m}}\frac{1}{\pi^r}\int\limits_{R^r}f^{\overline{\Psi}_\mu}\left(\vec{x}-\sum_{j\in\mu(r)}\frac{t_j}{\delta^{(j)}}\vec{e}_j\right)\times$$

$$\times\prod_{\nu\in\mu(r)}\int\limits_{0}^{\infty}\left(T_{\nu1}^{(\vec{\delta})}(v_\nu)\cos v_\nu t_\nu+T_{\nu2}^{(\vec{\delta})}(v_\nu)\sin v_\nu t_\nu\right)dv_\nu dt_\nu. \tag{11}$$

Доказательство. Имея в виду соотношения (3), (5), получаем

$$S[\rho_{\vec{\delta}}]=\sum_{\vec{k}\in N_*^m}\frac{1}{2^{q(\vec{k})}}\left(1-\prod_{i=1}^{m}\lambda_{k_i}^{(\delta,i)}\right)A_{\vec{k}}(f;\vec{x}).$$

Применяя равенство

$$1-\prod_{i=1}^{m}\lambda_{k_i}^{(\delta,i)}=\sum_{i=1}^{m}(-1)^{i+1}\sum_{\mu(i)\subset\overline{m}}\prod_{j\in\mu(i)}\left(1-\lambda_{k_j}^{(\delta,j)}\right),$$

получаем

$$S[\rho_{\vec{\delta}}]=\sum_{\vec{k}\in N_*^m}\frac{1}{2^{q(\vec{k})}}\left(\sum_{i=1}^{m}(-1)^{i+1}\sum_{\mu(i)\subset\overline{m}}\prod_{j\in\mu(i)}\left(1-\lambda_{k_j}^{(\delta,j)}\right)\right)A_{\vec{k}}(f;\vec{x})=$$

$$=\sum_{i=1}^{m}\sum_{\vec{k}\in N_i^m}\frac{1}{2^{q(\vec{k})}}\left(1-\lambda_{k_i}^{(\delta,i)}\right)A_{\vec{k}}(f;\vec{x})+\sum_{i=2}^{m}(-1)^{i+1}\sum_{\mu(i)\subset\overline{m}}\sum_{\vec{k}\in N_\mu^m}\frac{1}{2^{q(\vec{k})}}\times$$

$$\times\prod_{j\in\mu(i)}\left(1-\lambda_{k_j}^{(\delta,j)}\right)A_{\vec{k}}(f;\vec{x})\overset{df}{=}\sum_{i=1}^{m}S_i(f;\vec{x})+\sum_{i=2}^{m}(-1)^{i+1}\sum_{\mu(i)\subset\overline{m}}S_\mu(f;\vec{x}). \tag{12}$$

Далее воспользуемся схемой доказательства, предложенной в работе [7, с. 53]. Найдем коэффициенты Фурье функций

$$\mathcal{I}^{\overline{\Psi}_\mu}(\vec{x}) = \frac{1}{\pi^r}\int\limits_{R^r} f^{\overline{\Psi}_\mu}\left(\vec{x} - \sum_{j\in\mu(r)} \frac{t_j}{\delta^{(j)}}\vec{e}_j\right) \times$$

$$\times \prod_{\nu\in\mu(r)} \int\limits_0^\infty \left(T_{\nu 1}^{(\vec{\delta})}(v_\nu)\cos v_\nu t_\nu + T_{\nu 2}^{(\vec{\delta})}(v_\nu)\sin v_\nu t_\nu\right) dv_\nu dt_\nu,\ \ \mu = \mu(r) \subset \overline{m},$$

$\mathcal{I}^{\overline{\psi}_i}(\vec{x}) = \mathcal{I}^{\overline{\Psi}_\mu}(\vec{x})\,,\ \mu = \mu(r) = \{i\}\,.$

Учитывая условие (10), можем применить изменение порядка интегрирования в следующих преобразованиях

$$\frac{1}{\pi^m}\int\limits_{T^m}\int\limits_{R^r} f^{\overline{\Psi}_\mu}\left(\vec{x} - \sum_{j\in\mu(r)}\frac{t_j}{\delta_j}\vec{e}_j\right)\prod_{\nu\in\mu(r)}\frac{1}{\pi}\int\limits_0^\infty (T_{\nu 1}^{(\vec{\delta})}(v)\cos vt_\nu + T_{\nu 2}^{(\vec{\delta})}(v)\sin vt_\nu)dvdt_\nu\times$$

$$\times\prod_{i=1}^m \cos\left(k_i x_i - \frac{s_i\pi}{2}\right)dx_i = \int\limits_{R^r}\frac{1}{\pi^m}\int\limits_{T^m} f^{\overline{\Psi}_\mu}(\vec{x})\prod_{i\in\overline{m}\setminus\mu(r)}\cos\left(k_i x_i - \frac{s_i\pi}{2}\right)\times$$

$$\times\prod_{j\in\mu(r)}\cos\left(k_j\left(x_j + \frac{t_j}{\delta_j}\right) - \frac{s_j\pi}{2}\right)\prod_{i=1}^m dx_i \prod_{\nu\in\mu(r)}\frac{1}{\pi}\int\limits_0^\infty (T_{\nu 1}^{(\vec{\delta})}(v)\cos vt_\nu +$$

$$+T_{\nu 2}^{(\vec{\delta})}(v)\sin vt_\nu)dvdt_\nu = \int\limits_{R^r}\frac{1}{\pi^m}\int\limits_{T^m} f^{\overline{\Psi}_\mu}(\vec{x})\prod_{i\in\overline{m}\setminus\mu(r)}\cos\left(k_i x_i - \frac{s_i\pi}{2}\right)\times$$

$$\times\prod_{j\in\mu(r)}\left(\cos\left(k_j x_j - \frac{s_j\pi}{2}\right)\cos\frac{k_j}{\delta_j}t_j - \sin\left(k_j x_j - \frac{s_j\pi}{2}\right)\sin\frac{k_j}{\delta_j}t_j\right)\prod_{i=1}^m dx_i\times$$

$$\times\prod_{\nu\in\mu(r)}\frac{1}{\pi}\int\limits_0^\infty (T_{\nu 1}^{(\vec{\delta})}(v)\cos vt_\nu + T_{\nu 2}^{(\vec{\delta})}(v)\sin vt_\nu)dvdt_\nu.$$

Применяя известное равенство

$$\prod_{j\in\mu(r)}(a_j - b_j) = \sum_{\zeta\subset\mu(r)}\prod_{i\in\mu\setminus\zeta} a_i \prod_{j\in\zeta}(-b_j),$$

получаем

$$a_{\vec{k}}^{\vec{s}}(\mathcal{I}^{\overline{\Psi}_\mu}) = \int\limits_{R^r}\frac{1}{\pi^m}\int\limits_{T^m} f^{\overline{\Psi}_\mu}(\vec{x})\prod_{i\in\overline{m}\setminus\mu(r)}\cos\left(k_i x_i - \frac{s_i\pi}{2}\right)\sum_{\zeta\subset\mu(r)}\left(\prod_{i\in\mu\setminus\zeta}\cos\left(k_i x_i - \frac{s_i\pi}{2}\right)\times\right.$$

$$\times\cos\frac{k_i}{n_i}t_i\prod_{j\in\zeta}\left(-\sin\left(k_ix_i-\frac{s_i\pi}{2}\right)\sin\frac{k_i}{n_i}t_i\right)\Bigg)\prod_{i=1}^{m}dx_i\prod_{\nu\in\mu(r)}\frac{1}{\pi}\int\limits_0^\infty(T_{\nu1}^{(\vec\delta)}(v)\cos vt_\nu+$$

$$+T_{\nu2}^{(\vec\delta)}(v)\sin vt_\nu)dvdt_\nu=\sum_{\zeta\subset\mu(r)}\left[\int\limits_{R^r}\frac{1}{\pi^m}\int\limits_{T^m}f^{\overline{\Psi}_\mu}(\vec x)\prod_{i\in\overline{m}\setminus\zeta}\cos\left(k_ix_i-\frac{s_i\pi}{2}\right)dx_i\times\right.$$

$$\times\prod_{j\in\zeta}\sin\left(k_jx_j-\frac{s_j\pi}{2}\right)dx_j\prod_{\nu\in\mu(r)\setminus\zeta}\frac{1}{\pi}\int\limits_0^\infty(T_{\nu1}^{(\vec\delta)}(v)\cos vt_\nu+T_{\nu2}^{(\vec\delta)}(v)\sin vt_\nu)dv\times$$

$$\left.\times\cos\frac{k_\nu}{n_\nu}t_\nu dt_\nu\prod_{\gamma\in\zeta}\frac{1}{\pi}\int\limits_0^\infty(T_{\gamma1}^{(\vec\delta)}(v)\cos vt_\gamma+T_{\gamma2}^{(\vec\delta)}(v)\sin vt_\gamma)dv\sin\frac{k_\gamma}{\delta_\gamma}t_\gamma dt_\gamma(-1)^{|\zeta|}\right].\tag{13}$$

Так как для $\vec s\in E^m$, $\zeta\subset\mu$

$$a_{\vec k}^{\vec s+\sum\limits_{i\in\zeta}(-1)^{s_i}\vec e_i}\left(f^{\overline{\Psi}_\mu}\right)=\frac{(-1)^{\sum\limits_{i\in\zeta}s_i}}{\pi^m}\int\limits_{T^m}f^{\overline{\Psi}_\mu}(\vec x)\prod_{i\in\overline{m}\setminus\zeta}\cos\left(k_ix_i-\frac{s_i\pi}{2}\right)dx_i\times$$

$$\times\prod_{j\in\zeta}\sin\left(k_jx_j-\frac{s_j\pi}{2}\right)dx_j,\quad \vec k\in N_\mu^m, a_{\vec k}^{\vec s+\sum\limits_{i\in\zeta}(-1)^{s_i}\vec e_i}\left(f^{\overline{\Psi}_\mu}\right)=0,\quad \vec k\in N_*^m\setminus N_\mu^m,$$

то применяя (9), на основании (13) получаем

$$a_{\vec k}^{\vec s}\left(\mathcal{I}^{\overline{\Psi}_\mu}\right)=\sum_{\zeta\subset\mu}(-1)^{\sum\limits_{i\in\zeta}s_i}a_{\vec k}^{\vec s+\sum\limits_{j\in\zeta}(-1)^{s_j}\vec e_j}\left(f^{\overline{\Psi}_\mu}\right)\prod_{\nu\in\mu\setminus\zeta}T_{\nu1}^{(\vec\delta)}\left(\frac{k_\nu}{n_\nu}\right)\prod_{l\in\zeta}T_{l2}^{(\vec\delta)}\left(\frac{k_l}{n_l}\right),$$

$$\vec k\in N_\mu^m,\quad a_{\vec k}^{\vec s}\left(\mathcal{I}^{\overline{\Psi}_\mu}\right)=0,\quad \vec k\in N_*^m\setminus N_\mu^m.\tag{14}$$

Учитывая равенство (6), имеем для $\vec k\in N_\mu^m$, $\vec s\in E^m$

$$a_{\vec k}^{\vec s}\left(\mathcal{I}^{\overline{\Psi}_\mu}\right)=\prod_{j\in\mu}\left(1-\lambda_{k_j}^{(\delta,j)}\right)\sum_{\zeta\subset\mu}\prod_{i\in\mu\setminus\zeta}\Psi_{i1}(k_i)\prod_{\nu\in\zeta}\Psi_{\nu2}(k_\nu)a_{\vec k}^{\vec s+\sum\limits_{\nu\in\zeta}(-1)^{s_\nu}\vec e_\nu}\left(f^{\overline{\Psi}_\mu}\right)=$$

$$=\prod_{j\in\mu}\left(1-\lambda_{k_j}^{(\delta,j)}\right)a_{\vec k}^{\vec s}(f).$$

Следовательно,

$$A_{\vec k}\left(\mathcal{I}^{\overline{\Psi}_\mu};\vec x\right)=\prod_{j\in\mu}(1-\lambda_{k_i}^{(\delta,i)})A_{\vec k}(f;\vec x),\quad \vec k\in N_\mu^m.\tag{15}$$

Таким образом, учитывая (12), можем записать, что

$$S\left[\mathcal{I}^{\overline{\Psi}_\mu}\right] = \sum_{\vec{k}\in N_\mu^m} \frac{1}{2^{q(\vec{k})}} \prod_{j\in\mu} \left(1-\lambda_{k_j}^{(\delta,j)}\right) a_{\vec{k}}^{\vec{s}}(f) = S_\mu(f;\vec{x}).$$

В частности $\quad S[\mathcal{I}^{\overline{\psi}_i}] = \sum_{\vec{k}\in N_i} \frac{1}{2^{q(\vec{k})}} \left(1-\lambda_{k_i}^{(\delta,i)}\right) A_{\vec{k}}(f;\vec{x}) = S_i(f;\vec{x}).$

Объединяя последние два соотношения с (12), получаем

$$S\left[\rho_{\vec{\delta}}\right] = S\left[\sum_{i=1}^{m} \mathcal{I}^{\overline{\psi}_i}(f;\vec{x}) + \sum_{i=2}^{m}(-1)^{i+1}\sum_{\mu\subset\overline{m}} \mathcal{I}^{\overline{\Psi}_\mu}(f;\vec{x})\right].$$

Это значит, что для всякой функции $f \in C_\infty^{m\overline{\psi}}$ справедливо равенство (11). $\square$

Литература

[1] *Рукасов В.И.* Приближение классов $\overline{\psi}$-интегралов периодических функций многих переменных прямоугольными линейными средними их рядов Фурье / В.И. Рукасов, О.А. Новиков, В.И. Бодрая // Укр. мат. журн. – 2005. – 57, № 4. – С. 564 – 570.

[2] *Рукасов В.И.* Приближение классов $\overline{\psi}$-интегралов периодических функций двух переменных линейными методами / В.И. Рукасов, О.А. Новиков, В.И. Бодрая // Проблеми теорії наближення функцій та суміжні питання: Зб. праць Ін-ту математики НАН України. – Т. 1, № 1. – Київ: Ін-т математики НАН України, 2004. – С. 250 – 269.

[3] *Ласурия Р.А.* Кратные суммы Фурье на множествах $\overline{\psi}$-дифференцируемых функций / Р.А. Ласурия // Укр. мат. журн. – 2003. – 55, № 7. – С. 911 – 918.

[4] *Задерей П.В.* Интегральные представления уклонений линейных средних рядов Фурье на классах дифференцируемых периодических функций двух переменных / П.В. Задерей // Некоторые вопросы теории аппроксимации функций : Сб. научн. тр. – К.: Ин-т математики АН УССР, 1985. – С. 16 – 28.

[5] *Степанец А.И.* Кратные суммы Фурье на множествах (ψ,β)-дифференцируемых функций / А.И. Степанец, Н.Л. Пачулиа // Укр. мат. журн. – 1991. – 43, № 4. – С. 545 – 555.

[6] *Харкевич Ю.И.* О приближении классов $C_\beta^\psi H_\omega$ линейными средними их рядов Фурье / Харкевич Ю.И. – Киев, 1991. – 59 с. – (Препринт / НАН Украины, ин-т математики ; 91.8).

[7] *Степанец А.И.* Классификация и приближение периодических функций / А.И. Степанец. – К.: Наук. думка, 1987. – 268 с.

УДК 517.5

Кадубовский А.А., Новиков О.А., Ровенская О.Г., Шулик Т.В., Байдуга Е.В.

[1] *канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры геометрии и МПМ, СГПУ*

[2] *канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры математического анализа, СГПУ*

[3] *канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры высшей математики, ДГМА*

[4] *ст. лаборант научного отдела, СГПУ*

[5] *учитель математики, Славянская ОШ №16*

e-mail: sgpi@slav.dn.ua

ПРИБЛИЖЕНИЕ ИНТЕГРАЛОВ ПУАССОНА r–ПОВТОРНЫМИ СУММАМИ ВАЛЛЕ ПУССЕНА

Обчислені значення інтегралів у головному члені асимптотичних формул для точних верхніх меж відхилень r–повторних сум Валле Пуссена на класах інтегралів Пуассона.

Calculated values in the main term of asymptotic equalities for upper bounds of the deviations of the r–repeated de la Vallee Poussin sums taken over classes of Poisson integrals.

Keywords: *Fourier series, asymptotic equalities*

Введение

Следуя [1], обозначим $C^q_\beta H_\omega$ — класс непрерывных 2π–периодических функций $f(x)$, которые можно представить при помощи свертки

$$f(x) = A_0 + \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} \varphi(x+t) P^q_\beta(t)\ dt,$$

в которой

$$P^q_\beta(t) = \sum_{k=1}^{\infty} q^k \cos(kt + \frac{\beta\pi}{2}),\ \ q \in (0;1),\ \ \beta \in R,$$

— ядро Пуассона, а функция $\varphi(\cdot)$ удовлетворяет условие

$$|\varphi(t') - \varphi(t'')| \leq \omega(|t' - t''|), \forall t', t'' \in R,$$

где $\omega(t)$ — произвольный фиксированный модуль непрерывности. Известно [2, с. 32], что классы $C^q_\beta H_\omega$, которые принято называть классами интегралов Пуассона, состоят из функций f, которые являются сужениями на действительную ось функций $F(z)$, аналитических в полосе $|\mathrm{Im} z| \leq \ln\frac{1}{q}/2\ln 2$.

Пусть $S_n(f;x)$ — частичные суммы ряда Фурье функции $f(x)$, p, p_1, $p_2,...,p_r$ — произвольные натуральные числа такие, что $p < n$, $\sum\limits_{k=1}^{r} p_k \overset{\text{df}}{=} \Sigma_p < n$. Тогда суммы Валле Пуссена функции $f(x) \in L^1[-\pi;\pi]$ обычные $V_{n,p}(f,x)$ и r–повторные $V^{(r)}_{n,\overline{p}}(f,x)$, соответственно, задаются соотношениями

$$V_{n,p}(f,x) = \frac{1}{p}\sum_{k=n-p}^{n-1} S_k(f,x),$$

$$V^{(r)}_{n,\overline{p}}(f,x) = \frac{1}{p_1}\sum_{k_1=n-p_1}^{n-1}\frac{1}{p_2}\sum_{k_2=k_1-p_2+1}^{k_1}...\frac{1}{p_r}\sum_{k_r=k_{r-1}-p_r+1}^{k_{r-1}} S_{k_r}(f,x).$$

Вопросам изучения приближений классов интегралов Пуассона посвящен ряд работ С.М. Никольского [3], С.Б. Стечкина, А.И. Степанца [1], В.И. Рукасова и С.О. Чайченко [4], А.С. Сердюка [5], и других. В работе [1] было показано, что при $n \to \infty$ выполняется равенство

$$\mathcal{E}\left(C^q_\beta H_\omega; S_n\right) = \frac{4q^n}{\pi^2}K(q)\theta_n(\omega)\int\limits_0^{\pi/2}\omega\left(\frac{2t}{n}\right)\sin t\;dt + \frac{O(1)q^n}{(1-q)^2 n}\omega(1/n),$$

где $\theta_n(\omega) \in [1/2;1]$, причем $\theta_n(\omega) = 1$, если $\omega(t)$ — выпуклый модуль непрерывности.

В работе [4] для верхних граней отклонений сумм Валле Пуссена получены асимптотические формулы

$$\mathcal{E}\left(C^q_\beta H_\omega; V_{n,p}\right) = \frac{2\theta_n(\omega)q^{n-p+1}}{\pi p(1-q^2)}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\omega\left(\frac{2t}{n-p}\right)\sin t dt +$$

$$+O(1)\omega(\frac{1}{n-p})\left(\frac{q^{n-p+1}}{p(n-p)(1-q)^3} + \frac{q^n}{p(1-q^2)}\right),\; 1 < p < n.$$

Применяя рассуждения работы [6], можно получить аналогичную формулу для верхних граней уклонений полиномов $V^{(r)}_{n,\overline{p}}(f;x)$ $r \in \mathbb{N}$ от функций из классов $C^q_\beta H_\omega$

Теорема. Пусть $q \in (0;1)$, $\beta \in \mathbb{R}$, $\sum_{i=1}^{r} p_i = \Sigma_p < n$ и $\omega(t)$ – произвольный модуль непрерывности. Тогда при $n - \Sigma_p \to \infty$ справедлива асимптотическая формула

$$\mathcal{E}(C^q_\beta H_\omega; V^{(r)}_{n,\overline{p}}) = \frac{2q^{n-\Sigma_p+r}}{\pi^2\prod_{i=1}^{r} p_i}e_{n-\Sigma_p}(\omega)\int\limits_0^{\pi} Z_q^{r+1}(x)dx +$$

$$+O(1)\frac{q^{n-\Sigma_p+r}}{\prod_{i=1}^{r}p_i}\frac{\omega\left((n-\Sigma_p)^{-1}\right)}{(n-\Sigma_p)}\left[\frac{1}{(1-q)^{r+3}}+\frac{1}{(1-q)^{2r}}\right]+$$

$$+O(1)\frac{1}{\prod_{i=1}^{r}p_i}\left(\sum_{\alpha(r-1)\subset\overline{r}}\frac{q^{(n-\Sigma_p^{\alpha(r-1)}+r)}}{(1-q)^{r+1}}\omega\left(\left[n-\Sigma_p^{\alpha(r-1)}\right]^{-1}\right)\right),n-\Sigma_p\to\infty$$

где $\overline{r}=\{1;2;...;r\}$, $\Sigma_p^{\alpha}=\sum\limits_{j\in\alpha}p_j$, $\alpha(i)$ – множество, содержащее i элементов,

$$Z_q(x)=\frac{1}{\sqrt{1-2q\cos x+q^2}};e_{n-\Sigma_p}(\omega)=\theta_\omega(n)\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\omega(2\tau(n-\Sigma_p)^{-1})\sin\tau d\tau,$$

$\theta_\omega(n)\in[1/2;1]$, причем $\theta_\omega(n)=1$, если $\omega(t)$ – выпуклый модуль непрерывности, $O(1)$ – величина равномерно ограниченная по n, q, β, p_i, $i=1,2,...,r$.

Основная часть

Основным результатом данной работе является вычисление значений величин $\int\limits_0^{\pi}Z_q^{r+1}(x)dx$ для произвольных нечетных r.

Теорема 1. *Для всякого* $r=2\nu-1$, $\nu\in\mathbb{N}$,

$$\int\limits_0^{\pi}Z_q^{r+1}(x)dx=\int\limits_0^{\pi}\frac{dt}{(1+q^2-2q\cos t)^{\nu}}=\frac{\pi}{(1-q^2)^{2\nu-1}}\sum_{k=0}^{\nu-1}\left(C_{\nu-1}^k\right)^2q^{2k},\qquad(1)$$

где $C_n^k=\frac{n!}{k!(n-k)!}$ *– коэффициенты биномиального разложения.*

Доказательство. Обозначим $\nu=\frac{r+1}{2}$. В работе [7] показано, что справедлива формула

$$\int\limits_0^{\pi}Z_q^{r+1}(x)dx=$$

$$=\frac{\pi}{4^{\nu-1}(1-q^2)^{2\nu-1}}\sum_{k=0}^{\nu-1}\frac{(2k)!(2(\nu-k-1))!}{(k!)^2((\nu-k-1)!)^2}(1-q)^{2k}(1+q)^{2(\nu-k-1)},\qquad(2)$$

где $\nu=\frac{r+1}{2}$.

Выполняя элементарные преобразования, получаем

$$\frac{\pi}{2^{2(\nu-1)}(1-q^2)^{2\nu-1}}\sum_{k=0}^{\nu-1}\frac{(2k)!(2(\nu-k-1))!}{(k!)^2((\nu-k-1)!)^2}(1-q)^{2k}(1+q)^{2(\nu-k-1)}=$$

$$= \frac{\pi}{2^{2(\nu-1)}(1-q^2)^{2\nu-1}}(1+q)^{2(\nu-1)} \sum_{k=0}^{\nu-1} \left[C_{2k}^{k} C_{2(\nu-1-k)}^{(\nu-1-k)} \cdot \left(\frac{1-q}{1+q} \right)^{2k} \right] =$$

$$= \frac{\pi}{2^{2(\nu-1)}(1-q)^{2\nu-1}} \frac{(1+q)^{2\nu-2}}{(1+q)^{2\nu-1}} \sum_{k=0}^{\nu-1} \left[C_{2k}^{k} C_{2(\nu-1-k)}^{(\nu-1-k)} \cdot \left(\frac{1-q}{1+q} \right)^{2k} \right] =$$

$$= \frac{\pi}{2^{2(\nu-1)}(1-q)^{2\nu-1}(1+q)} \sum_{k=0}^{\nu-1} \left[C_{2k}^{k} C_{2(\nu-k-1)}^{(\nu-k-1)} \left(\frac{1-q}{1+q} \right)^{2k} \right]. \qquad (3)$$

Так как в силу соотношения 1.2.7.38 работы [8]

$$\sum_{k=0}^{n} C_{2k}^{k} C_{2(n-k)}^{(n-k)} x^{2k} = 2^{2n} x^n P_n \left(\frac{1}{2}(x + \frac{1}{x}) \right),$$

где $P_n(z)$ – полином Лежандра, то

$$\sum_{k=0}^{\nu-1} C_{2k}^{k} C_{2(\nu-1-k)}^{(\nu-1-k)} \left(\frac{1-q}{1+q} \right)^{2k} = 2^{2(\nu-1)} \left(\frac{1-q}{1+q} \right)^{\nu-1} P_{\nu-1} \left(\frac{1}{2} \left(\frac{1-q}{1+q} + \frac{1+q}{1-q} \right) \right) =$$

$$= 2^{2(\nu-1)} \left(\frac{1-q}{1+q} \right)^{\nu-1} P_{\nu-1} \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{1-2q+q^2+1+2q+q^2}{1-q^2} \right) =$$

$$= 2^{2(\nu-1)} \left(\frac{1-q}{1+q} \right)^{\nu-1} P_{\nu-1} \left(\frac{1+q^2}{1-q^2} \right). \qquad (4)$$

Известно также, что ([8], с.625)

$$(1-y)^n P_n \left(\frac{1+y}{1-y} \right) = \sum_{k=0}^{n} (C_n^k)^2 y^k.$$

Поэтому при $y = q^2$, $n = \nu - 1$ справедливо равенство

$$(1-q^2)^{\nu-1} P_{\nu-1} \left(\frac{1+q^2}{1-q^2} \right) = \sum_{k=0}^{\nu-1} (C_{\nu-1}^k)^2 q^{2k},$$

т.е.

$$P_{\nu-1} \left(\frac{1+q^2}{1-q^2} \right) = \frac{1}{(1-q^2)^{\nu-1}} \sum_{k=0}^{\nu-1} (C_{\nu-1}^k)^2 q^{2k}.$$

Следовательно, на основании соотношения (4)

$$\sum_{k=0}^{\nu-1} C_{2k}^{k} C_{2(\nu-1-k)}^{(\nu-1-k)} \left(\frac{1-q}{1+q} \right)^{2k} = 2^{2(\nu-1)} \left(\frac{1-q}{1+q} \right)^{\nu-1} \cdot \frac{1}{(1-q^2)^{\nu-1}} \sum_{k=0}^{\nu-1} \left(C_{\nu-1}^k \right)^2 q^{2k} =$$

$$= 2^{2(\nu-1)}\frac{1}{(1+q)^{2(\nu-1)}}\sum_{k=0}^{\nu-1}\left(C_{\nu-1}^{k}\right)^{2}q^{2k}.$$

Сопоставляя последнее соотношение с равенством (3), получаем

$$\frac{\pi}{2^{2(\nu-1)}(1-q^2)^{2\nu-1}}\sum_{k=0}^{\nu-1}\frac{(2k)!}{(k!)^2}\frac{(2(\nu-k-1))!}{((\nu-k-1)!)^2}(1-q)^{2k}(1+q)^{2(\nu-k-1)}=$$

$$=\frac{\pi}{2^{2(\nu-1)}(1-q)^{2\nu-1}(1+q)}\cdot 2^{2(\nu-1)}\frac{1}{(1+q)^{2(\nu-1)}}\cdot\sum_{k=0}^{\nu-1}\left(C_{\nu-1}^{k}\right)^{2}q^{2k}=$$

$$=\frac{\pi}{(1-q^2)^{2\nu-1}}\sum_{k=0}^{\nu-1}\left(C_{\nu-1}^{k}\right)^{2}q^{2k}.$$

Поэтому на основании соотношения (2) немедленно получаем равенство (1).

Литература

[1] *Степанец А.И.* Приближение аналитических непрерывных функций / А. И. Степанец // Мат. сборник. – 2001. – Т. 192, № 1. – С. 113 – 138.

[2] *Степанец А.И.* Классификация и приближение периодических функций / А. И. Степанец. – К.: Наук. думка, 1987. – 268 с.

[3] *Никольский С.М.* Приближение функций тригонометрическими полиномами в среднем / С. М. Никольский // Изв. АН СССР. сер. мат. – 1946. – 10, № 3. – С. 207 – 256.

[4] *Рукасов В.І.* Наближення аналітичних періодичних функцій сумами Валле – Пуссена / В.І. Рукасов, С.О. Чайченко // Укр. мат. журн. – 2002. – Т. 54, № 12. – С. 1653 – 1668.

[5] *Сердюк А.С.* Наближення інтегралів Пуасона сумами Валле Пуссена / А.С. Сердюк // Укр. мат. журн. – 2004. – Т. 56, № 1. – С. 97 – 107.

[6] *Ровенская О.Г.* Приближение интегралов Пуассона повторными суммами Валле Пуссена / О.Г. Ровенская, О.А. Новиков // Нелінійні коливання – 2010. – Т. 13, № 1. – С. 96 – 99.

[7] *Новиков О.А.* Приближение аналитических функций r–повторными суммами Валле Пуссена / О.О. Новиков, Т.В. Шулик, О.Г. Ровенская // Вісник СДПУ Математика вып. 1(4) – 2010. – Т. 13, № 1. – С. 74 – 94.

[8] *Прудников А.П.* Интегралы и ряды: [В 3 т. Т.1: Элементарные функции] / А. П. Прудников, Ю. А. Брычков, О. И. Маричев. – Санкт-Петербург: ФИЗМАТЛИТ, 2003. – 632 с.

УДК 517.5

Ключникова А.Р., Леденева А.С., Качина Ю.М., Маслакова О.Ю., Рухлова И.Ю., Шаталова Е.А.

[1] *студенты 5 курса физико-математического факультета, СГПУ*

e-mail: sgpi@slav.dn.ua

ПРИБЛИЖЕНИЕ КЛАССОВ ФУНКЦИЙ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ ПРЯМОУГОЛЬНЫМИ ЛИНЕЙНЫМИ ОПЕРАТОРАМИ

Отримані асимптотичні формули для верхніх граней відхилень прямокутних операторів на класах (ψ,β)–диференційовних функцій багатьох змінних.

Keywords: *Fourier series, asymptotic equalities*

Введение

Классы (ψ,β)-дифференцируемых функций многих переменных, с двумя наборами функций $\psi(k)$ были введены в работе [1] (см. также [2-4]). В этих работах изучаются вопросы приближения прямоугольными линейными методами классов (ψ,β)-дифференцируемых периодических функций многих переменных, в которых для определения производных по одной переменной и по нескольким переменным применяется два различных набора мультипликаторов. В данной статье изучаются аналогичные вопросы на классах (ψ,β)-дифференцируемых функций m переменных, определяемых m наборами мультипликаторов для каждого числа переменных. На этих классах получены асимптотические формулы для верхних граней уклонений различных прямоугольных линейных средних рядов Фурье, взятых по классам функций многих переменных малой гладкости. В частности, найдены асимптотические равенства, которые обеспечивают решение задачи Колмогорова–Никольского (см. [5, С. 8]) на этих классах для прямоугольных операторов Фурье классических, обобщенных операторов Зигмунда, Валле Пуссена и Рисса.

Для дальнейшего изложения введем ряд обозначений и определений.

Пусть R^m – пространство m-мерных векторов $\vec{x}=(x_1,x_2,...,x_m)$, $T^m=\prod\limits_{i=1}^{m}[-\pi;\pi]$ – m-мерный куб с ребром 2π,

$$N^m=\left\{\vec{x}\in R^m | x_i\in N,\ i=1,2,...,m\right\},$$

$$N_*^m = \left\{\vec{x} \in R^m | x_i \in N_* = N \cup \{0\},\ i = 1, 2, ..., m\right\},$$

$$N_i^m = \left\{\vec{x} \in R^m | x_i \in N,\ x_j \in N_*,\ i \neq j\right\}.$$

Через E^m обозначим множество точек из R^m, координаты которых принимают одно из двух значений: 0 или 1.

Через $L(T^m)$ обозначим множество 2π-периодических по каждой переменной, суммируемых на кубе периодов T^m, функций $f(\vec{x}) = f(x_1, x_2, ..., x_m)$.

Пусть $f \in L(T^m)$. Следуя [1], каждой паре точек $\vec{s} \in E^m$, $\vec{k} \in N_*^m$, поставим в соответствие коэффициент Фурье функции f

$$a_{\vec{k}}^{\vec{s}}(f) = \frac{1}{\pi^m} \int_{T^m} f(\vec{x}) \prod_{i=1}^{m} \cos\left(k_i x_i - \frac{s_i \pi}{2}\right) dx_i.$$

Каждому вектору $\vec{k} \in N_*^m$ поставим в соответствие гармонику функции $f(\vec{x})$

$$A_{\vec{k}}(f; \vec{x}) = \sum_{\vec{s} \in E^m} a_{\vec{k}}^{\vec{s}}(f) \prod_{i=1}^{m} \cos\left(k_i x_i - \frac{s_i \pi}{2}\right).$$

Следуя [3], ряд Фурье функции $f(\vec{x})$ определим следующим соотношением

$$S[f] = \sum_{\vec{k} \in N_*^m} \frac{1}{2^{q(\vec{k})}} A_{\vec{k}}(f; \vec{x}), \tag{1}$$

где $q(\vec{k})$ – количество нулевых координат вектора $\vec{k}$.

Пусть $\overline{m} = \{1, 2, ..., m\}$ и μ – какое-либо подмножество из $\overline{m}$, обозначим через $|\mu|$ количество элементов множества μ и через $\mu(r)$ – всякое r-элементное подмножество из $\overline{m}$ ($|\mu(r)| = r$).

По аналогии с одномерным случаем, гармоникой, сопряженной с $A_{\vec{k}}(f; \vec{x})$ по переменной x_r, будем называть величину

$$A_{\vec{k}}^{\vec{e}_r}(f; \vec{x}) = \sum_{\vec{s} \in E^m} a_{\vec{k}}^{\vec{s}}(f) \prod_{i \in \overline{m} \setminus \{r\}} \cos\left(k_i x_i - \frac{s_i \pi}{2}\right) \cos\left(k_r x_r - \frac{(s_r + 1)\pi}{2}\right).$$

Будем вводить понятие (ψ, β)-производных функций многих переменных, используя схемы введения (ψ, β)-производных функций одной переменной (см. [1]) и обыкновенных частных производных функций многих переменных.

Пусть $\psi_{i,r}(k_i), i = 1, 2, ..., m, r = 1, 2, ..., m,\ k_i \in N_*$ — фиксированные наборы функций натурального аргумента, $\vec{\beta}_r = (\beta_{1,r}, \beta_{2,r}, ..., \beta_{m,r})$ – фиксированные векторы ($\beta_{ir} \in \mathbb{R}$, $i = 1, 2, ..., m$). Если для фиксированного $r \in \overline{m}$

существует функция $\varphi_i^{(1)} \in L(T^m)$ такая, что

$$S[\varphi_i^{(1)}] = \sum_{\vec{k}\in N_r^m} \frac{1}{2^{q(\vec{k})}\psi_{i,1}(k_i)} \left[A_{\vec{k}}(f;\vec{x}) \cos\frac{\beta_{i,1}\pi}{2} - A_{\vec{k}}^{\vec{e}_i}(f;\vec{x}) \sin\frac{\beta_{i,1}\pi}{2} \right], \qquad (2)$$

то будем считать, что $f(\vec{x})$ имеет в качестве частной $(\psi_{i,1};\beta_{i,1})$–производной по переменной x_i, функцию $\varphi_i^{(1)}(\vec{x})$, которую будем обозначать $f_{\beta_{i,1}}^{\psi_{i,1}}(\vec{x})$.

Для фиксированного r–элементного множества $\mu(r) \subset \overline{m}$, $\mu = \{i_1, ..., i_r\}$, смешанной $(\psi_{\mu(r)};\beta)$–производной по переменным x_i, $i \in \mu(r)$, будем называть функцию $f_\beta^{\psi_{\mu(r)}}(\vec{x})$, рядом Фурье которой является результат последовательного применения формулы (2), однако с использованием для определения производной по переменной x_i вместо функций $\psi_{i,1}(k_i)$ и чисел $\beta_{i,1}$ соответственно, $\psi_{i,r}(k_i)$ и чисел $\beta_{i,r}$, $i \in \mu(r), r = 2, 3, ..., m$.

$$f_\beta^{\psi_{\mu(r)}}(\vec{x}) = \frac{\partial_{\beta_{i_r,r}}^{\psi_{i_r,r}} \partial_{\beta_{i_{r-1},r}}^{\psi_{i_{r-1},r}} ... \partial_{\beta_{i_1,r}}^{\psi_{i_1,r}} f(\vec{x})}{\partial x_{i_r} \partial x_{i_{r-1}} ... \partial x_{i_1}}.$$

Множество функций $f \in L(T^m)$ таких, что для любых $i \in \overline{m}$ существуют производные $f_{\beta_{i,1}}^{\psi_{i,1}}(\vec{x})$ и для всех $r = 2, 3, ..., m, \mu(r) \subset \overline{m}$ существуют смешанные $(\psi_{\mu(r)};\beta)$–производные $f_\beta^{\psi_{\mu(r)}}(\vec{x})$, будем обозначать $L_\beta^{m\psi}$, а подмножество непрерывных функций из $L_\beta^{m\psi}$ будем обозначать $C_\beta^{m\psi}$. Множество функций из $C_\beta^{m\psi}$, удовлетворяющих условиям

$$\operatorname{esssup}|f_{\beta_{i,1}}^{\psi_{i,1}}(\vec{x})| \le 1, \ \operatorname{esssup}|f_\beta^{\psi_{\mu(r)}}(\vec{x})| \le 1, \ i \in \overline{m}, \ \mu \subset \overline{m},$$

будем обозначать $C_{\beta,\infty}^{m\psi}$.

Следуя [1], введем множества $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{M}_0'$, $\mathfrak{M}_C$. Будем полагать, что функции $\psi_{i,r}(v)$, $i, r = 1, 2, ..., m;$ являются функциями непрерывного аргумента $v \ge 0$, совпадающими при $v \in N$ с элементами одноименных систем чисел $\psi_{i,r}(k)$, которые использовались выше для определения (ψ,β)–производных.

Через $\mathfrak{M}$ обозначим множество функций $\psi(x)$, непрерывных при $x \ge 0$, монотонно убывающих, выпуклых вниз при $x \ge 1$ и удовлетворяющих условию $\lim\limits_{x\to\infty} \psi(x) = 0$.

Через $\mathfrak{M}'$ обозначим подмножество функций $\psi \in \mathfrak{M}$, для которых

$$\int\limits_1^\infty \frac{\psi(x)}{x} dx < \infty.$$

Функции $\psi(x)$ поставим в соответствие функцию $\eta(x) = \eta(\psi, x)$, связанную при $x \geq 1$ с $\psi(x)$ соотношением $\psi(\eta(x)) = \frac{1}{2}\psi(x)$.

Положим

$$\mu(t) = \mu(\psi, t) = \frac{t}{\eta(t) - t}.$$

Через $\mathfrak{M}'_0$ обозначим множество функций $\psi \in \mathfrak{M}'$, для которых величина $\mu(\psi, t)$ ограничена сверху. Через $\mathfrak{M}_C$ обозначим множество функций $\psi \in \mathfrak{M}$, для которых найдутся константы K_1, K_2 такие, что при всех $x \geq 1$

$$0 < K_1 \leq \mu(\psi, t) \leq K_2 < +\infty.$$

Если для $i = 1, 2, ..., m,$ выполнено $\psi_{i,r} \in \mathfrak{M}'_0 \backslash \mathfrak{M}_C,$ то функции $f \in C^{m\overline{\psi}}_{\infty}$ по аналогии с одномерным случаем естественно называть функциями с малой гладкостью.

Следуя [6] (см. также [1], [2]), прямоугольные линейные средние рядов Фурье определим следующим образом.

Пусть $\Lambda = \{\Lambda_1, \Lambda_2, ..., \Lambda_m\}$ – фиксированный набор бесконечных треугольных числовых матриц, $\Lambda_i = \{\lambda^{(n_i)}_{k_i}\}$, $i = 1, 2, ..., m$, $\vec{n} \in N^m$, $\vec{k} \in N^m_*$, $\lambda^{(n_i)}_0 = 1$ и $\lambda^{(n_i)}_{k_i} = 0$ для $k_i \geq n_i$. Пусть далее $\lambda^{(\vec{n})}_{\vec{k}} = \prod\limits_{i=1}^{m} \lambda^{(n_i)}_{k_i}$ и $G_{\vec{n}} = \prod\limits_{i=1}^{m} [0; n_i - 1]$ – прямоугольный параллелепипед, соответствующий вектору $\vec{n} \in N^m$. Понятно, что $\lambda^{(\vec{n})}_{\vec{k}} = 0$ для любых $\vec{k} \notin G_{\vec{n}}$.

Функции $f \in L(T^m)$, имеющей ряд Фурье (1), поставим в соответствие семейство тригонометрических полиномов

$$U_{\vec{n}}(f; \vec{x}; \Lambda) = \sum_{\vec{k} \in G_{\vec{n}}} 2^{-q(\vec{k})} \lambda^{(\vec{n})}_{\vec{k}} A_{\vec{k}}(f; \vec{x}). \tag{3}$$

Если $\lambda^{(n_i)}_{k_i} = 1$, $\vec{k} \in G_{\vec{n}}$, то соотношение (3) задает прямоугольные частные суммы ряда Фурье $U_{\vec{n}}(f; \vec{x}; \Lambda) = S_{\vec{n}}(f; \vec{x})$. Пусть $\vec{p} = (p_1, p_2, ..., p_m)$, где $p_i \in N_*$, $p_i \leq n_i$, $i = 1, 2, ..., m$. Если величины $\lambda^{(\vec{n})}_{\vec{k}}$, $\vec{k} \in G_{\vec{n}}$, $\vec{n} \in N^m$, задаются соотношениями

$$\lambda^{(n_i)}_{k_i} = \begin{cases} 1, & 0 \leq k_i \leq n_i - p_i, \\ 1 - \frac{k_i - n_i + p_i}{p_i}, & n_i - p_i \leq k_i \leq n_i - 1,\, p_i \in N,\, p_i \leq n_i,\, i \in \{\overline{1, m}\}, \end{cases}$$

то многочлены $U_{\vec{n}}(f; \vec{x}; \Lambda) \overset{\text{df}}{=} V_{\vec{n},\vec{p}}(f; \vec{x})$ являются суммами Валле Пуссена порядка $\vec{p}$.

При $\lambda^{(n_i)}_{k_i} = k_i^2/n_i^2$, $\vec{k} \in G_{\vec{n}}$, многочлены $U_{\vec{n}}(f; \vec{x}; \Lambda) = R_{\vec{n}}(f; \vec{x})$ будем называть прямоугольными суммами Рисса.

При $\lambda_{k_i}^{(n_i)} = k_i^{s_i}/n_i^{s_i}$, $s_i > 0$, $i = 1,2,...,m$, $\vec{k} \in G_{\vec{n}}$, многочлены $U_{\vec{n}}(f;\vec{x};\Lambda) = Z_{\vec{n}}(f;\vec{x})$ будем называть прямоугольными суммами Зигмунда.

Пусть $\varphi_i(x), i = 1,2,...,m$ – непрерывные, монотонно возрастающие при $x \geq 0$ такие, что $\varphi_i(0) = 0$. Если величины $\lambda_{\vec{k}}^{(\vec{n})}$, $\vec{k} \in G_{\vec{n}}$, $\vec{n} \in N^m$, задаются соотношениями

$$\lambda_{k_i}^{(n_i)} = 1 - \frac{\varphi_i(k_i)}{\varphi_i(n_i)},$$

то многочлены $U_{\vec{n}}(f;\vec{x};\Lambda) = Z_{\vec{n}}^{\varphi}(f;\vec{x})$ будем называть обобщенными прямоугольными суммами Зигмунда.

Суммами Фавара порядка $\vec{r} = (r_1, r_2, ..., r_m)$ будем называть полиномы $U_{\vec{n}}(f;\vec{x};\tilde{\Lambda}) = \Phi_{\vec{n},\vec{r}}(f;\vec{x})$, которые определяются треугольными матрицами $\tilde{\Lambda}_i$, $i = 1,2,...,m$, с элементами

$$\tilde{\lambda}_{k_i,r_i}^{(n_i)} = \begin{cases} 1 - k_i^{r_i} \sum\limits_{\nu=1}^{\infty} (-1)^{\nu+1} \left(\frac{1}{(2\nu n_i - k_i)^{r_i}} + \frac{1}{(2\nu n_i + k_i)^{r_i}} \right), & r_i = 2l, \ l \in N, \\ 1 - k_i^{r_i} \sum\limits_{\nu=1}^{\infty} \left(\frac{1}{(2\nu n_i - k_i)^{r_i}} - \frac{1}{(2\nu n_i + k_i)^{r_i}} \right), & r_i = 2l-1, \ l \in N. \end{cases}$$

Величины $\delta_{\vec{n}}(f;\vec{x}) = f(\vec{x}) - U_{\vec{n}}(f;\vec{x})$ являются уклонениями многочленов $U_{\vec{n}}(f;\vec{x})$, $\vec{n} \in N^m$, от функции $f(\vec{x})$.

Целью данной работы является получение асимптотических равенств для величин

$$\mathcal{E}(C_{\beta,\infty}^{m\psi}; U_{\vec{n}}) = \sup_{f \in C_{\beta,\infty}^{m\psi}} ||\delta_{\vec{n}}(f;\vec{x})||_C$$

при $n_i \to \infty$, $i = 1,2,...,m$.

Основная часть

Теорема 1. *Пусть* $\psi_{i,j} \in \mathfrak{M}_0'$, $\beta_{i,j} \in R$ *функции* $\psi_{i,j}(x)\varphi_i(x)$, $i,j = 1,...,m$; *монотонно возрастают и сохраняют характер выпуклости при* $x \geq 1$. *Тогда при* $n_i \to \infty$, $i = 1,2,...,m$, *справедлива асимптотическая формула*

$$\mathcal{E}\left(C_{\beta,\infty}^{m\psi}; Z_{\vec{n}}^{\varphi}\right) = \frac{2}{\pi} \sum_{i=1}^{m} \frac{\sin\frac{\beta_{i,1}\pi}{2}}{\varphi_i(n_i)} \int_1^{n_i} \frac{\psi_{i,1}(x)\varphi_i(x)}{x} dx +$$

$$+ \frac{2}{\pi} \sum_{i=1}^{m} \sin\frac{\beta_{i,1}\pi}{2} \int_{n_i}^{\infty} \frac{\psi_{i,1}(x)}{x} dx + O(1) \left(\sum_{i=1}^{m} \psi_{i,1}(n_i) + \right.$$

$$+\sum_{r=2}^{m}\sum_{\mu(r)\subset\overline{m}}\prod_{j\in\mu(r)}\left\{\psi_{j,r}(n_j)+\sin\frac{\beta_{j,r}\pi}{2}\left[\int\limits_{1}^{n_j}\frac{\psi_{j,r}(x)\varphi_j(x)}{x\varphi_j(n_j)}dx+\int\limits_{n_j}^{\infty}\frac{\psi_{j,r}(x)}{x}dx\right]\right\}\Bigg). \tag{4}$$

Доказательство. Через $\{\lambda_{n_i}(v)\}$, $\vec{n}=(n_1,n_2,...,n_m)\in N^m$, обозначим семейство заданных и непрерывных на [0;1] функций таких, что $\lambda_{k_i}^{(n_i)}=\lambda_{n_i}(\frac{k_i}{n_i})$, $\vec{k}\in G_{\vec{n}}$.

Введем функции

$$\tau_{i,r}(v)=\begin{cases}(1-\lambda_{n_i}(v))\psi_{i,r}(n_iv), & \frac{1}{n_i}\le v\le 1;\\ \psi_{i,r}(n_iv), & 1\le v, i=1,2,...,m;\end{cases} \tag{5}$$

которые на $[0;\frac{1}{n_i}]$ заданы так, что $\tau_{i,r}(v)$ непрерывны на положительной полуоси и выполнено условие $\tau_{i,r}(0)=0$, $i,r=1,2,...,m$.

В работе [7] показано, что для функций $\tau_{i,r}$, $i,r=1,2,...,m$, заданных соотношенем (5), и имещих суммируемые на R преобразования Фурье:

$$A(\tau_{i,r})=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left|\int\limits_{0}^{\infty}\tau_{i,r}(x)\cos(xt+\frac{\beta\pi}{2})dx\right|dt<\infty,$$

при $n_i\to\infty$, $i=1,2,...,m$, справедливо равенство:

$$\mathcal{E}\left(C_{\beta,\infty}^{m\psi};U_{\vec{n}}\right)=\sum_{i=1}^{m}\frac{\sin\frac{\beta_{i,1}\pi}{2}}{\pi}\int\limits_{|t|\le1}\left|\int\limits_{1}^{\infty}\psi_{i,1}(n_ix)\sin xtdx\right|dt+$$

$$+\sum_{i=1}^{m}\frac{1}{\pi}\int\limits_{|t|\ge1}\left|\int\limits_{0}^{\infty}\tau_{i,1}(x)\cos(xt+\frac{\beta_{i,1}\pi}{2})dx\right|dt+O(1)\Bigg(\sum_{i=1}^{m}\int\limits_{|t|\le1}\left|\int\limits_{0}^{\infty}\tau_{i,1}(x)\cos xtdx\right|dt+$$

$$+\sum_{i=1}^{m}\sin\frac{\beta_{i,1}\pi}{2}\int\limits_{|t|\le1}\left|\int\limits_{0}^{1}\tau_{i,1}(x)\sin xtdx\right|dt+\sum_{i=1}^{m}a(\tau_{i,1})+\sum_{r=2}^{m}\sum_{\mu(r)\subset\overline{m}}\prod_{j\in\mu(r)}A(\tau_{j,r})\Bigg), \tag{6}$$

где

$$a(\tau_{i,1})=\frac{1}{\pi}\int\limits_{|t|\ge\frac{\pi n_i}{2}}^{\infty}\left|\int\limits_{0}^{\infty}\tau_{i,1}(x)\cos(xt+\frac{\beta_{i,1}\pi}{2})dx\right|dt.$$

Таким образом, изучение величин $\mathcal{E}\left(C_{\beta,\infty}^{m\psi};Z_{\vec{n}}^{\varphi}\right)$ сводится к вычислению соответствующих одномерных несобственных интегралов.

Функции $\tau_{i,r}(x)$, $i,r=1,2,...,m$, $j=1,2$, которые определены соотношением (5), для обобщенных сумм Зигмунда представим в следующем виде

$$\tau_{i,r}(x)=\begin{cases}\psi_{i,r}(1)\varphi_i(1)nx, & 0\le x\le\frac{1}{n_i},\\ \psi_{i,r}(n_ix)\varphi(n_ix), & \frac{1}{n_i}\le x\le 1,\\ \psi_{i,r}(n_ix), & 1\le x,\ i=1,2,...,m.\end{cases}$$

Применяя рассуждения работы [8], получаем асимптотические формулы

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{|t|\le 1}\left|\int\limits_1^\infty\psi_{i,1}(n_ix)\sin xt dx\right|dt=\frac{2}{\pi}\int\limits_{n_i}^\infty\frac{\psi_{i,1}(x)}{x}dx+O(1)\psi_{i,1}(n_i),$$

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{|t|\ge 1}\left|\int\limits_0^\infty\tau_{i,1}(x)\cos(xt+\frac{\beta_{i,1}\pi}{2})dx\right|dt=\frac{\sin\frac{\beta_{i,1}\pi}{2}}{\varphi_i(n_i)}\int\limits_1^{n_i}\frac{\psi_{i,1}(x)\varphi_i(x)}{x}dx+O(1)\psi_{i,1}(n_i),$$

$$a(\tau_{i,1})=O(1)\psi_{i,1}(n_i),$$

$$A(\tau_{i,r})=O(1)\left(\sin\frac{\beta_{i,r}\pi}{2}\int\limits_{n_i}^\infty\frac{\psi_{i,r}(x)}{x}dx+\frac{\sin\frac{\beta_{i,r}\pi}{2}}{\varphi_i(n_i)}\int\limits_1^{n_i}\frac{\psi_{i,r}(x)\varphi_i(x)}{x}dx+\psi_{i,r}(n_i)\right),$$

$$\int\limits_{|t|<1}\left|\int\limits_0^\infty\tau_{i,1}(v)\cos vt dv\right|dt=O(1)\psi_{i,1}(n_i).$$

Подставляя эти соотношения в формулу (6), получаем асимптотическую формулу (4). □

Применяя аналогичные рассуждения, получаем следующие утверждения.

Теорема 2. *Пусть* $\psi_{i,r}\in\mathfrak{M}_0'$, $\beta_{i,r}\in R$ *функции* $\psi_{i,r}(x)x^{s_i}$, $i,r=1,2,...,m$; *монотонно возрастают и сохраняют характер выпуклости при* $x\ge 1$. *Тогда при* $n_i\to\infty$, $i=1,2,...,m$, *справедлива асимптотическая формула*

$$\mathcal{E}\left(C^{m\psi}_{\beta,\infty};Z^{\vec{s}}_{\vec{n}}\right)=\frac{2}{\pi}\sum_{i=1}^m\frac{\sin\frac{\beta_{i,1}\pi}{2}}{n_i^{s_i}}\int\limits_1^{n_i}\psi_{i,1}(x)x^{s_i-1}dx+$$

$$+\frac{2}{\pi}\sum_{i=1}^m\sin\frac{\beta_{i,1}\pi}{2}\int\limits_{n_i}^\infty\frac{\psi_{i,1}(x)}{x}dx+O(1)\left(\sum_{i=1}^m\psi_{i,1}(n_i)+\right.$$

$$\left.+\sum_{r=2}^m\sum_{\mu(r)\subset\overline{m}}\prod_{j\in\mu(r)}\left[\frac{1}{n_j^{s_j}}\int\limits_1^{n_j}\psi_{j,r}(x)x^{s_j-1}dx+\int\limits_{n_j}^\infty\frac{\psi_{j,r}(x)}{x}dx+\psi_{j,r}(n_j)\right]\right).$$

Теорема 3. *Пусть* $\psi_{i,j} \in \mathfrak{M}'_0$, $\beta_{i,j} \in R$ *функции* $\psi_{i,j}(x)x^2$, $i,j = 1,2,...,m$; *монотонно возрастают и сохраняют характер выпуклости при* $x \geq 1$. *Тогда при* $n_i \to \infty$, $i = 1,2,...,m$, *справедлива асимптотическая формула*

$$\mathcal{E}\left(C^{m\psi}_{\beta,\infty}; R_{\vec{n}}\right) =$$

$$= \frac{2}{\pi}\sum_{i=1}^{m}\frac{\sin\frac{\beta_{i,1}\pi}{2}}{n_i^2}\int_1^{n_i}\psi_{i,1}(x)xdx + \frac{2}{\pi}\sum_{i=1}^{m}\sin\frac{\beta_{i,1}\pi}{2}\int_{n_i}^{\infty}\frac{\psi_{i,1}(x)}{x}dx + O(1)\left(\sum_{i=1}^{m}\psi_{i,1}(n_i) + \right.$$

$$\left. + \sum_{r=2}^{m}\sum_{\mu(r)\subset\overline{m}}\prod_{j\in\mu(r)}\left[\frac{1}{n_j^2}\int_1^{n_j}\psi_{j,r}(x)xdx + \int_{n_j}^{\infty}\frac{\psi_{j,r}(x)}{x}dx + \psi_{j,r}(n_j)\right]\right). \qquad (3)$$

Теорема 4. *Пусть* $\psi_{i,j} \in \mathfrak{M}_C$, $\beta_{i,j} \in \mathbb{R}$, $i,j = 1,2,...,m$, $\lim_{n_i\to\infty} p_i/n_i = 0$, $i = 1,2,...,m$. *Тогда при* $n_i \to \infty$, $i = 1,2,...,m$, *справедлива асимптотическая формула*

$$\mathcal{E}\left(C^{m\psi}_{\infty}; V_{\vec{n},\vec{p}}\right) = \frac{4}{\pi^2}\sum_{i=1}^{m}\psi_{i,1}(n_i)\ln\frac{n_i}{p_i} +$$

$$+ O(1)\left(\sum_{i=1}^{m}\psi_{i,1}(n_i) + \sum_{r=2}^{m}\sum_{\mu(r)\subset\overline{m}}\prod_{j\in\mu(r)}\psi_{j,r}(n_j)\ln\frac{n_j}{p_j}\right).$$

Теорема 5. *Пусть* $\psi_{i,r} \in \mathfrak{M}_C$, $i,r = 1,2,...,m$, $\beta_{i,r} \in \mathbb{R}$. *Тогда при* $n_i \to \infty$, $i = 1,2,...,m$, *справедлива асимптотическая формула*

$$\mathcal{E}\left(C^{m\psi}_{\infty}; S_{\vec{n}}\right) = \frac{4}{\pi^2}\sum_{i=1}^{m}\psi_{i,1}(n_i)\ln n_i +$$

$$+ O(1)\left(\sum_{i=1}^{m}\psi_{i,1}(n_i) + \sum_{r=2}^{m}\sum_{\mu(r)\subset\overline{m}}\prod_{j\in\mu(r)}\psi_{j,r}(n_j)\ln n_j\right).$$

Повторяя рассуждения работы [1] верхних граней уклонений прямоугольных сумм Фавара первого порядка, $r_i = 1, i = 1,2,...,m$, получаем следующее утверждение.

Теорема 6. *Пусть* $\psi_{i,r} \in \mathfrak{M}'_0$, $i,r = 1,2,...,m$, *функции* $x^2\psi_{i,r}(x)$, *для* $x \geq 1$ *монотонно возрастают и сохраняют характер выпуклости.* *Тогда при* $n_i \to \infty$, $i = 1,2,...,m$, *справедлива асимптотическая формула*

$$\mathcal{E}\left(C^{m\psi}_{\beta,\infty}; \Phi_{\vec{n},1}\right) =$$

$$= \frac{\pi}{6}\sum_{i=1}^{m}\frac{\sin\frac{\beta_{i,1}\pi}{2}}{n_i^2}\int\limits_{1}^{n_i}\psi_{i,1}(x)xdx+\frac{2}{\pi}\sum_{i=1}^{m}\sin\frac{\beta_{i,1}\pi}{2}\int\limits_{n_i}^{\infty}\frac{\psi_{i,1}(x)}{x}dx+O(1)\left(\sum_{i=1}^{m}\psi_{i,1}(n_i)+\right.$$

$$\left.+\sum_{r=2}^{m}\sum_{\mu(r)\subset\overline{m}}\prod_{j\in\mu(r)}\left\{\sin\frac{\beta_{j,r}\pi}{2}\left[\frac{1}{n_j^2}\int\limits_{1}^{n_j}\psi_{j,r}(x)xdx+\int\limits_{n_j}^{\infty}\frac{\psi_{j,r}(x)}{x}dx\right]+\psi_{j,r}(n_j)\right\}\right).$$

Литература

[1] *Рукасов В.И.* Приближение классов $\overline{\psi}$-интегралов периодических функций многих переменных прямоугольными линейными средними их рядов Фурье / *В.И. Рукасов, О.А. Новиков, В.И. Бодрая* // Укр. мат. журн. – 2005. – Т. 57, № 4. – С. 564 – 570.

[2] *Рукасов В.И.* Приближение классов $\overline{\psi}$-интегралов периодических функций двух переменных линейными методами / *В.И. Рукасов, О.А. Новиков, В.И. Бодрая* // Проблеми теорії наближення функцій та суміжні питання : зб. праць Ін-ту математики НАН України. – Київ, 2004. – Т. 1, № 1. – С. 250 – 269.

[3] *Степанец А.И.* Кратные суммы Фурье на множествах (ψ,β)-дифференцируемых функций / *А.И. Степанец, Н.Л. Пачулиа* // Укр. мат. журнал. – 1991. – 43, № 4. – С. 545 – 555.

[4] *Ласурия Р.А.* Кратные суммы Фурье на множествах $\overline{\psi}$-дифференцируемых функций / *Р.А. Ласурия* // Укр. мат. журнал. – 2003. – 55, № 7. – С. 911 – 918.

[5] *Степанец А.И.* Классификация и приближение периодических функций / *А.И. Степанец.* – К.: Наук. думка, 1987. – 268 с.

[6] *Степанец А.И.* Равномерные приближения тригонометрическими полиномами / *А.И. Степанец* . – К.: Наук. думка, 1981. – 340 с.

[7] *Рукасов В.И.* Приближение функций с небольшой гладкостью из классов $C_\infty^{\overline{\psi}}$ линейными методами / *В.И. Рукасов, О.А. Новиков* // Теорія наближень та гармонічний аналіз : праці Українського математичного конгресу. – Київ, 2002. – С. 184 – 193.

[8] *Бодрая В.И.* Приближение классов периодических функций многих переменных с малой гладкостью прямоугольными линейными средними их рядов Фурье / *В.И. Бодрая* // Проблеми теорії наближення функцій та суміжні питання : зб. праць Ін-ту математики НАН України. – Київ, 2005. – Т. 2, № 2. – С. 7 – 26.

УДК 517.925

Божко В.О., Бенюх О.В.

[1] *канд. фіз.-мат. наук, доцент кафедри математичного аналізу, СДПУ*

[2] *студентка 5 курсу фізико-математичного факультету, СДПУ*

e-mail: olga.benjukh@mail.ru

ПРО ПЕРІОДИЧНІ РОЗВ'ЯЗКИ І ПРО МЕТОД МАЛОГО ПАРАМЕТРА ДЛЯ СИНГУЛЯРНО ЗБУРЕНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

Розглядаються питання про існування, побудову і про аналітичну структуру періодичних розв'язків систем звичайних диференціальних рівнянь з малим параметром ε при старшій похідній. В некритичному випадку розглядаються спочатку лінійні системи, а потім системи загального вигляду. В критичному випадку розглядається скалярне рівняння (лінійне, а потім нелінійне). Показано, що періодичні розв'язки існують для більшості (по мірі Лебега) значень ε в деякому інтервалі.

Ключові слова: *мажоранта, рівномірна збіжність, ітерації ньютонівського типу, власні значення, амплітуда зміни, радіус збіжності.*

Вступ

В цій статті розглядається ряд питань існування, методів побудови і аналітичної структури періодичних розв'язків систем звичайних диференціальних рівнянь, загальний вигляд яких такий:

$$\varepsilon \cdot \frac{dx}{dt} = P(t)x + \varepsilon \cdot F(t, x), \tag{1}$$

де ε — малий параметр, $P(t)$ — T-періодична матриця, $P(t, x)$ — нелінійна, диференційована функція x, що представляється степеневим рядом або скінченним поліномом по x і T-періодична по t.

Основна частина

1. Розглянемо спочатку простий частинний випадок системи (1), а саме лінійну неоднорідну систему

$$\varepsilon \cdot \frac{dx}{dt} = Ax + F(t), \tag{2}$$

де A — стала матриця, що не має власних значень з нульовою дійсною частиною (некритичний випадок). Аналіз цієї системи дозволяє виявити ряд цікавих фактів.

Як випливає з відомих властивостей лінійних систем, періодичний розв'язок $x(t,\varepsilon)$ системи (2) існує для всіх ε і може бути виражений

$$\begin{aligned} x(t,\varepsilon) = R(t,T,\varepsilon)\cdot \int\limits_t^{t+T} e^{-\frac{A}{\varepsilon}\cdot\theta}\cdot F(\theta)\,d\theta, R(t,T,\varepsilon) = \\ = \frac{1}{\varepsilon}\,\left[e^{-\frac{A}{\varepsilon}\,(t+T)} - e^{-\frac{A}{\varepsilon}\,t}\right]^{-1} \end{aligned} \tag{3}$$

На підставі (3) може бути отримана оцінка

$$\|x(t,\varepsilon)\| \le M\sup_t \|F(t)\|, \tag{4}$$

де стала M в деякому сенсі слабко залежить від ε і залишається скінченною при $\varepsilon \to 0$. Наприклад, нехай власні значення $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ матриці A всі від'ємні, а найменше серед них за модулем (позначимо його через λ_*) відповідає простому елементарному дільнику матриці A. Тоді $\|e^{At}\| \le ce^{-\alpha t}\cdot$ $\cdot\alpha = |\lambda_*|$, c — деяка стала, і можна отримати $M = \frac{c}{\alpha}\cdot\frac{1-Q}{1-cQ}$, $Q = e^{-\frac{\alpha T}{\varepsilon}}$ для тих значень ε, для яких $cQ < 1$. При $\varepsilon \to 0$ маємо $M \to \frac{c}{\alpha}$.

Можна сказати, що оцінка амплітуди зміни $x(t,\varepsilon)$ залежить, в основному, від глобальних властивостей правої частини $F(t)$ вихідного рівняння (від $\sup\limits_t \|F(t)\|$ і слабко від ε (тим менше, чим менше ε).

Звернемось до питання про розвинення $x(t,\varepsilon)$ в степеневий ряд по ε, якщо $F(t)$ – нескінченно диференційована функція. З цією метою застосовуючи до (3) інтегрування частинами, здобудемо розвинення

$$x(t,\varepsilon) = -A^{-1}F(t) - (A^{-1})^2\frac{dF}{dt} - \ldots - \varepsilon^{n-1}(A^{-1})^n\frac{d^{n-1}F}{dt^{n-1}} + R_n, \tag{5}$$

де R_n — залишковий член

$$R_n = \varepsilon^{n-1}R(t,T,\varepsilon)\int\limits_t^{t+T} e^{-\frac{A}{\varepsilon}\cdot\theta}(A^{-1})^n\frac{d^nF}{dt^n}\,d\theta, \tag{5*}$$

$R(t,T,\varepsilon)$ – та ж функція, що і в (3). Цей же ряд (без залишкового члена) ми дістанемо, знаходячи формальне розвинення періодичного розв'язку (2) за степенями ε. Вираз (5*) відрізняється від (3) тільки додатковими членами, і ми отримаємо для R_n оцінку

$$\|R_n\| \leqslant \varepsilon^n M\|A^{-1}\|^n \sup_t\left\|\frac{d^nF(t)}{dt^n}\right\|, \tag{6}$$

де M – та ж стала, що і в (4). Значить тоді, достатня умова збіжності ряду (5) до періодичного розв'язку (2):

$$\varepsilon^n \|A^{-1}\|^n \sup_t \left\| \frac{d^n F(t)}{dt^n} \right\| \underset{n\to\infty}{\to} 0, \text{рівномірно по } t \tag{6*}$$

Істотно підкреслити, що (6*) є і необхідною умовою рівномірної збіжності по t ряда (5), оскільки, якщо вона не виконується, то загальний член ряда (5) не прямує рівномірно по t при $n \to \infty$ до нуля.

Умова (6*) дозволяє, таким чином, визначити радіус збіжності по ε ряда (5) для $x(t, \varepsilon)$. Ми бачимо, що цей радіус збіжності залежить від властивостей похідних функції $F(t)$ (а не від глобальних властивостей).

Наприклад, якщо (2) — скалярне рівняння ($A = a$ - скаляр, $Re\ a \neq 0$) і $F(t) = \sin mt$, то радіус збіжності $\overline{\varepsilon} = \frac{|a|}{m}$ і зменшується разом з m.

Якщо $F(t)$ представляється повним (нескінченним) рядом Фур'є, то $\overline{\varepsilon} = 0$, тобто ряд (5) - без залишкового члена - розбігається і не представляє шуканий періодичний розв'язок. Між іншим факт існування самого періодичного розв'язку і оцінки амплітуди (4) не порушуються при довільному вигляді $F(t)$.

Таким чином розвинення періодичного розв'язку $x(t, \varepsilon)$ системи (2) є його досить специфічною властивістю, залежною від тонкої структури правої частини $F(t)$ і, по суті, не зв'язаною з самим існуванням і амплітудою зміни $x(t, \varepsilon)$. Можна висловити думку, що степеневі ряди по ε мало ефективні для побудови і аналізу періодичних розв'язків (2) і тим більше для рівнянь загального вигляду (1).

2. Розглянемо тепер систему з періодичними коефіцієнтами

$$\varepsilon \frac{dx}{dt} = P(t)x + F(t) \tag{7}$$

в некритичному випадку (відповідні характеристичні показники всі відмінні від нуля). В принципі питання існування, оцінки і розвинення в ряд за степенями ε періодичного розв'язку розв'язуються так, як і для системи (2). Ми дістанемо для цього розв'язку (існуючого при всіх ε) вираз

$$x(t, \varepsilon) = R(t, T, \varepsilon) \int\limits_t^{t+T} \Phi^{-1}\left(\frac{\Theta}{\varepsilon}\right) F(\Theta)\, d\Theta,$$

$$R(t, T, \varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon}\left[\Phi^{-1}\left(\frac{t+T}{\varepsilon}\right) - \Phi^{-1}\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)^{-1}\right], \tag{8}$$

де $\Theta(t)$ – фундаментальна матриця розв'язків однорідної системи $\frac{dx}{dt} = P(t)x$. Має місце аналогічна (4) оцінка. Можна також дістати аналогічне (5) розвинення:

$$\begin{aligned} x(t,\varepsilon) = &- P^{-1}(t)F(t) - \varepsilon^{n-1}P^{-1}(t)\frac{d}{dt}\,(P^{-1}F) - \\ &- \varepsilon^2 P^{-1}(t)\frac{d}{dt}\,\left(P^{-1}\frac{d}{dt}\,(P^{-1}F)\right) - \ldots + R_n, \end{aligned} \tag{9}$$

де

$$R_n = \varepsilon^{n-1}R(t,T,\varepsilon)\int\limits_t^{t+T}\Phi^{-1}\left(\frac{\Theta}{\varepsilon}\right)\overbrace{\frac{d}{d\Theta}\left(P^{-1}\frac{d}{d\Theta}\,\left(P^{-1}\ldots\frac{d}{d\Theta}\left(P^{-1}F\right)\right)\right)}^{n\ \text{разів}}d\Theta \tag{10}$$

При цьому

$$\|R_n\| \le \varepsilon^n M\sup_t\left\|\frac{d}{dt}\left(P^{-1}\frac{d}{dt}\left(P^{-1}\ldots\frac{d}{dt}(P^{-1}F)\right)\right)\right\|. \tag{11}$$

Умова (необхідна і достатня) збіжності ряда (9) $R_n \to 0, n \to \infty$. Перевірка її виконання більш складна, ніж у випадку (6), навіть для простих $P(t), F(t)$. Нами не отриманий приклад (нетривіальний) скінченного радіуса збіжності $\overline{\varepsilon}$ для якої-небудь конкретної системи (7), хоча такі приклади, напевне, можна знайти. Але як би то не було, можна висловити думку про неефективність розвинень за степенями ε. Більш доцільно використовувати або скінченну формулу (8) або безпосередньо шукати $x(t,\varepsilon)$ у вигляді ряда Фур'є.

3. Розглянемо загальну систему (1) в некритичному випадку. Застосуємо для побудови періодичного розв'язку метод простих ітерацій, визначаючи послідовність періодичних функцій $x_1(t,\varepsilon), x_2(t,\varepsilon), \ldots,$ що задовольняють рівнянням

$$\varepsilon\frac{dx_j}{dt} = P(t)x_j + \varepsilon F(t, x_{j-1}),\ j = 1,2,3,\ldots,\ x_0 \equiv 0. \tag{12}$$

Ми маємо оцінки вигляду (4)

$$\|x_j(t,\varepsilon)\| \le \varepsilon M\sup_t\|F(t,x_{j-1})\| \tag{13}$$

Для аналізу збіжності послідовності $\{x_j(t,\varepsilon)\}$ застосуємо метод функціональних мажорантних рівнянь (див., напр., [5]). Згідно цьому складається на підставі оцінок (13) функціональне рівняння

$$u = \varepsilon MU(u), \tag{14}$$

де $U(u)$ — відповідна мажоранта для $F(t,x)$. Це рівняння визначає u як функцію ε. Збіжність послідовності $\{x_j(t,\varepsilon)\}$ до розв'язку вихідного рівняння гарантується при всіх ε, для яких (14) має додатний (дійсний) розв'язок $u(\varepsilon)$, а це має місце при $0 \le \varepsilon \le \overline{\varepsilon}$, причому $\overline{\varepsilon}$ ефективно знаходиться при аналізі (14) (див., напр., [3]). Таким чином при $\varepsilon \in (0, \overline{\varepsilon}]$ можна представити шуканий розв'язок у вигляді збіжного ряда:

$$x(t,\varepsilon) = x_1(t,\varepsilon) + [x_2(t,\varepsilon) - x_1(t,\varepsilon)] + [x_3(t,\varepsilon) - x_2(t,\varepsilon)] + \dots, \tag{15}$$

причому $x_k - x_{k-1}$ мають порядок ε^k. Ми дістали ряд, k-й член якого має порядок ε^k, але це не чистий степеневий ряд по ε.

4. Перейдемо до аналізу критичного випадку, але обмежимось одним скалярним рівнянням. Спочатку розглянемо лінійне рівняння:

$$\varepsilon \frac{dx}{dt} = ax + f(t),\ a = \sigma i,\ \sigma \text{ — ціле число} \tag{16}$$

і нехай період по t дорівнює 2π.

Періодичний розв'язок (16) існує при всіх таких ε, що відношення $\frac{\sigma}{\varepsilon}$ не дорівнює цілому числу. Цей розв'язок виражається також формулою (3). Проте на довільному $0 < \varepsilon < \varepsilon^*$ знайдеться нескінченна множина значень ε, для яких $\frac{\sigma}{\varepsilon}$ дорівнює цілому числу.

Дістати з (3) для всіх $\varepsilon \in [0, \varepsilon^*]$ оцінку вигляду (4), яка зв'язує $x(t,\varepsilon)$ і $\sup |f(t)|$, неможна. Цей факт добре ілюструється формулою для періодичного розв'язку рівняння (16) у вигляді формального ряда Фур'є:

$$x(t,\varepsilon) = \sum_{0}^{\infty} \frac{f_k}{(\varepsilon k - \sigma)i} e^{ikt}, \tag{17}$$

де f_k — коефіцієнти ряда Фур'є (в комплексній формі) для $f(t)$. Збіжність цього ряда для всіх $\varepsilon \in [0, \varepsilon^*]$ гарантувати неможна, оскільки знаменник $\varepsilon k - \sigma$ при відповідних k і ε можуть бути рівними або близькими до нуля. Різниці $\varepsilon k - \sigma$ можна розглядати як частинний випадок довільних комбінацій $k_1\varepsilon + k_2\sigma$ з довільними цілими числами k_1, k_2.

Ми зустрічаємось, таким чином, з проблемою так званих «малих знаменників», характерною для теорії умовно-періодичних розв'язків. Тому для аналізу цього випадку застосуємо методи цієї теорії.

Згідно теорії дійсних чисел ми маємо на довільному відрізку $[0, \varepsilon^*]$ для більшості (по мірі Лебега) значень ε:

$$|\varepsilon k - \sigma| \ge K(1 + |k|)^{-2}, \tag{18}$$

де K — деяка стала, яка обернено пропорційна мірі вказаної більшості. Якраз для цієї множини значень ε (позначимо її L_ε) можна гарантувати існування періодичного розв'язку рівняння (16) і наступну оцінку, яку отримуємо при аналізі ряда (17) з врахуванням (18) і оцінок (див.[4]) коефіцієнтів Фур'є f_k для $f(t)$.

Якщо $|f(t) \leq M$ в смузі $|Im\, t| \leq \rho$, то для $\varepsilon \in L_\varepsilon$

$$|x(t,\varepsilon)| \leq \frac{MQ}{\delta^3},\ Q = \frac{4e}{K} \tag{19}$$

в більш вузькій смузі $|Im\, t| \leq \rho - 2\delta$, де δ — довільне число, менше $\frac{\rho}{2}$.

5. З метою наступного аналізу нелінійного рівняння розглянемо рівняння вигляду

$$\varepsilon\frac{dx}{dt} = (a + \varepsilon\rho(t))x + f(t), \tag{20}$$

де $a, f(t)$ – ті ж, що і в (16), а $p(t)$ — неперервна періодична функція. Оскільки періодичний розв'язок $x(t,\varepsilon)$ виражається в скінченній формі, то виявляється можливим отримати при $\varepsilon \in L_\varepsilon$, якщо $|f(t)| \leq M$, $|Im\ t| \leq \rho$, оцінку

$$|x(t,\varepsilon)| \leq \frac{MQQ_1}{\delta^3},\ |Im\, t| \leq \rho - 2\delta, \tag{21}$$

де M, Q – ті ж, що в (15), а стала Q_1 визначається лише по функції $p(t)$. Ця оцінка груба, але якісно задовільна.

6. Перейдемо до аналізу нелінійного (скалярного) рівняння:

$$\varepsilon\frac{dx}{dt} = ax + f(t,x) \tag{22}$$

в критичному випадку ($a = \sigma i$, σ — ціле число). Нехай в деякій (комплексній) області $x \in D$ і при $|Im\, t| \leq \rho$

$$|f(t,0)| \leq M_0,\ |f'_x(t,x)| \leq M_1,\ |f''_{xx}(t,x)| \leq 2N, \tag{23}$$

де M_0, M_1, N – деякі сталі. Будуємо ітерації $x_j(t,\varepsilon), j = 1,2,3,\ldots$ ньютоновського типу, що володіють прискореною збіжністю (див. [1]) і визначаються з рівнянь

$$\varepsilon\frac{dx_1}{dt} = ax_1 + \varepsilon f(t,0) \tag{24}$$

$$\varepsilon\frac{dy_2}{dt} = (a + \varepsilon f'_x(t,x_1))y_2 + \varepsilon[f(t,x_1) - f(t,0)],\ x_2 = x_1 + y_2 \tag{25}$$

$$\varepsilon\frac{dy_3}{dt} = (a + \varepsilon f'_x(t,x_2)y_3 + \varepsilon[f(t,x_1+y_2) - f(t,x_1) - f'_x(t,x_1)y_2],$$
$$x_3 = x_2 + y_3 \tag{26}$$

. . . .

При $\varepsilon \in L_\varepsilon$ ми дістанемо для періодичних розв'язків оцінки за допомогою (19), (21) і (23):

$$|x_1(t,\varepsilon)| \le \varepsilon\frac{M_0Q_0}{\delta^3} = m_0, \quad |Im\, t| \le \rho - 2\delta,\ Q_0 = \frac{4e}{K},$$

$$|y_2(t,\varepsilon)| \le \varepsilon m_0\frac{M_1Q_0Q_1}{\delta^3} = m_1, \quad |Im\, t| \le \rho - 4\delta, \tag{27}$$

$$|y_3(t,\varepsilon)| \le \varepsilon N m_1^2\frac{Q_0Q_1}{\delta_1^3} = m_2, \quad |Im\, t| \le \rho - 4\delta - 2\delta_1, \quad \delta_1 = m_1^{\frac{1}{T}},$$
$$|y_4(t,\varepsilon)| \le \varepsilon N m_2^2\frac{Q_0Q_1}{\delta_2^3} = m_3, \quad |Im\, t| \le \rho - 4\delta - 2\delta_1 - 2\delta_2, \quad \delta_2 = m_2^{\frac{1}{T}},$$

. . . .

де $Q_1 = e^{2M_1}$ і T-деяке число. Можна показати, що, коли

$$\varepsilon N Q_0 Q_1 \delta_1 < 1,\ T > \frac{4}{1-\alpha},\ 0 < \alpha < 1, \tag{28}$$

то $m_2 < m_1^{1-\alpha},\ m_3 < m_2^{1-\alpha}, \ldots$ і ряд $\sum\limits_{s=2}^{\infty} y_s(t,\varepsilon)$, а разом з тим і послідовність $\{x_j(t,\varepsilon)\}$ збігається до періодичного розв'язку рівняння (22). Це – прискорена збіжність, близька до квадратичної збіжності. Умови (28) дають оцінку (правда, грубу) області збіжності по ε.

Таким чином ми маємо конструктивне доведення існування для $\varepsilon \in L_\varepsilon$ і методику побудови періодичних розв'язків рівняння (22) в критичному випадку.

Висновки

Результати проведених досліджень дозволяють констатувати, що розвинення періодичних розв'язків в степеневий ряд по малому параметру, взагалі кажучи, мало ефективні. А доведення, приведене у випадку одного рівняння (22), безпосередньо не годиться у випадку системи рівнянь загального вигляду в критичному випадку. Але, напевне, аналогічний результат справедливий і у випадку систем (див. [2]).

Література

[1] *Ryabov Ju.F.* The method for construction of semianalytical periodic and quasiperiodic solution in the theory of nonlinear oscillations / Ju.A. Ryabov // Proceed of 4 Conf. on Nolinear Oscillations. – Prague, 1968. – P. 231 – 236.

[2] *Божко В.А.* О периодических решениях системы дифференциальных уравнений в критическом случае / В.А. Божко, Л.Г. Федоренко // 3-я Уральская региональная конференция «Функционально-дифференциальные уравнения и их приложения» : тезисы докладов. – Пермь, 1988. – С. 216.

[3] *Божко В.О.* Метод ітерацій для побудови періодичних розв'язків сингулярно збурених нелінійних диференціальних рівнянь / В.О. Божко, В.І. Ковальов // Пошуки і знахідки. Серія: фізико-математичні науки : збірник наукових праць за матеріалами наукової конференції СДПУ, 20 – 22 квітня 2010 р. – Слов'янськ, 2010. – Т. 1. – С. 25 – 27.

[4] *Гребеников Е.А.* Новые качественные методы небесной механики / Е.А. Гребеников, Ю.А. Рябов. – М.: Наука, 1971. – 252 с.

[5] *Рябов Ю.А.* Об одном способе оценки области применимости метода малого параметра в теории нелинейных колебаний / Ю.А. Рябов // Инженерный журнал АН СССР. – 1961. – Т. 1, № 1. – С. 5 – 32.

УДК 519.652+519.653

Волков С.В.

[1] *ст. викладач кафедри «Природничих наук», КІІ ДВНЗ «ДонНТУ»*

e-mail: sergey.v.volkov@mail.ru

УЗАГАЛЬНЕННЯ МЕТОДУ ПОБУДОВИ ІНТЕРПОЛЯЦІЙНОГО МНОГОЧЛЕНА ЛАГРАНЖА-СИЛЬВЕСТРА

В роботі запропоновано новий, універсальний, найбільш лаконічний метод розв'язання задачі інтерполяції функції алгебраїчними поліномами. Суттєво скорочено шлях отримання необхідних співвідношень, записаних компактно – через визначник Вандермонда, що дає можливість спростити відповідні розрахунки.

Ключові слова: *інтерполяція, інтерполяція Ерміта, визначник Вандермонда, многочлен Лагранжа–Сильвестра.*

Вступ

Найпростіша задача інтерполяції полягає в апроксимації деякої неперервної функції $f(x)$ поліномом $W_n(x) = \sum\limits_{l=0}^{n} c_l x^l$, що приймає в заданих точках $x_k \in X$, $X : \left\{x_k,\ k = \overline{0,s},\ n \le s,\ x_k = x_l \Leftrightarrow k = l\right\}$ ті ж значення, що і функція $f(x)$, тобто $W_n(x_k) = f(x_k)$.

Для загального випадку, довільно заданих вузлів інтерполяції, цей розв'язок визначається формулою Лагранжа. Як частинні випадки, з неї можна отримати відомі інтерполяційні формули: Ньютона, Гаусса, Стирлінга та ін. $[1,3,5,6]$.

Якщо $f(x)$ неперервна разом зі своїми похідними то узагальнена задача інтерполяції (інтерполяція Ерміта), полягає в побудові многочлена $W(x)$, що фіксує не тільки значення функції, а й довільне число послідовних похідних. Очевидно, $W(x)$ є розв'язком системи рівнянь

$$W^{(i_k)}(x_k) - f^{(i_k)}(x_k) = 0, \quad \begin{cases} k = \overline{0,s}\ , \\ i_k = \overline{0, m_k - 1}\ . \end{cases} \tag{1}$$

Зрозуміло, що коли $m_k \equiv 1$ та під $f^{(0)}(x)$ розуміємо значення самої функції, ми маємо найпростіший випадок розв'язку системи (1), а саме, многочлен Лагранжа. У випадку $m_k \equiv 2$, (1) може бути розв'язана за допомогою многочленна Ерміта.

В інших випадках розв'язок системи (1) значно ускладнюється, і задачу на його відшукання називають загальною інтерполяцією Ерміта, при цьому $W(x)$ називають інтерполяційним многочленом Лагранжа–Сильвестра $[2,4,6]$.

Відоме загальне правило знаходження та побудови розв'язків системи (1), сенс якого полягає у застосуванні, так званих, базисних многочленів $l_{ki}(x)$, які володіють відповідними базисними інтерполяційними властивостями. Враховуючи $l_{ki}(x)$, можемо скласти інтерполяційний многочлен, але їх структура та спосіб побудови є громіздкими $[2,4,6]$.

Основна частина

В роботі пропонується нова конструкція побудови розв'язків системи (1), яка основана на визначнику Вандермонда.

Твердження 1. *Розв'язок системи* (1)*, многочлен Лагранжа-Сильвестра, знаходиться у вигляд визначника* (2), (3)

$$W(x)=\begin{vmatrix} Z_0(x) & . & Z_k(x) & . & Z_s(x) \\ (x-x_0)^{m_0} & . & (x-x_k)^{m_k} & . & (x-x_s)^{m_s} \\ (x-x_0)^{1+m_0} & . & (x-x_k)^{1+m_k} & . & (x-x_s)^{1+m_s} \\ . & . & . & . & . \\ (x-x_0)^{s+m_0-1} & . & (x-x_k)^{s+m_k-1} & . & (x-x_s)^{s+m_s-1} \end{vmatrix}, \qquad (2)$$

або в спрощеному позначенні

$$W(x)=\det\left[Z_k(x)\,;(x-x_k)^{i+m_k-1}\right]_{i=1,\,k=0}^{s}, \qquad (3)$$

де

$$Z_k(x)=\sum_{i=0}^{m_k-1}\frac{\overline{f}^{(i)}(x_k)}{i!}(x-x_k)^i, \quad \overline{f}(x)=\frac{f(x)}{\det\left[1\,;(x-x_k)^{i+m_k-1}\right]_{i=1,\,k=0}^{s}}.$$

Доведення. Встановимо, по перше, що $W(x)$ є многочлен степені не більш за $\sum_{k=0}^{s} m_k-1$ (забезпечить однозначність розв'язку системи (1)) і, по друге, задовольняє системі (1).

Перше встановити неважко. Застосовуючи теорему Лапласа, розкладемо визначник (2) за першим рядком і винесемо спільні множники з кожного алгебраїчного доповнення

$$W(x)=\sum_{i=0}^{s}(-1)^i Z_i(x)\prod_{k\neq i=0}^{s}(x-x_k)^{m_k}\det\left[1;(x-x_k)^{l-1}\right]_{\substack{k\neq i\\ k=0,\ l=2}}^{s}, \qquad (4)$$

останні множники в (4) є не що інше, як визначники Вандермонда

$$\det\left[1;(x-x_k)^{l-1}\right]^{s}_{\substack{k\neq i\\ k=0,\, l=2}}=$$

$$=\begin{vmatrix} 1 & . & 1 & 1 & . & 1\\ (x-x_0) & . & (x-x_{i-1}) & (x-x_{i+1}) & . & (x-x_s)\\ (x-x_0)^2 & . & (x-x_{i-1})^2 & (x-x_{i+1})^2 & . & (x-x_s)^2\\ . & . & . & . & . & .\\ (x-x_0)^{s-1} & . & (x-x_{i-1})^{s-1} & (x-x_{i+1})^{s-1} & . & (x-x_s)^{s-1} \end{vmatrix},$$

а, отже,

$$\det\left[1;(x-x_k)^{l-1}\right]^{s}_{\substack{k\neq i\\ k=0,\, l=2}}=\prod_{\substack{k<l=0\\ l,k\neq i}}^{s}(x_k-x_l)$$

не залежить від змінної x і на степінь $W(x)$ не впливає [1], [3]. Враховуючи це, маємо рівність

$$\deg W(x)=\max_i\left(\deg Z_i(x)+\deg\prod_{k\neq i=0}^{s}(x-x_k)^{m_k}\right)=$$

$$=m_i-1+\sum_{k=0,\,k\neq i}^{s}m_k=\sum_{k=0}^{s}m_k-1,$$

яку й треба було встановити.

Для перевірки другого, зауважимо, що многочлен $W(x)$ буде розв'язком системи (1) коли:

$$W(x)-f(x)=\prod_{k=0}^{s}(x-x_k)^{m_k}\cdot F(x)\,, \tag{5}$$

де $F(x_k)\neq 0,\quad k=\overline{0,s}$.

Виходячи із твердження, різницю (5) запишемо у вигляді визначника

$$W(x)-f(x)=\det\left[\left(Z_k(x)-\overline{f}\right)\,;(x-x_k)^{i+m_k-1}\right]^{s}_{i=1,\,k=0}, \tag{6}$$

з першим рядком, у вигляді

$$Z_k(x)-\overline{f}=Z_k(x)-\sum_{i=0}^{m_k-1}\frac{\overline{f}^{(i)}(x_k)}{i!}(x-x_k)^i=\frac{\overline{f}^{(m_k)}(\xi_k)}{m_k!}(x-x_k)^{m_k}\,. \tag{7}$$

Враховуючи (6) та (7), маємо

$$W(x) - f(x) = \det\left[\frac{\overline{f}^{(m_k)}(\xi_k)}{m_{k!}}(x-x_k)^{m_k};(x-x_k)^{i+m_k-1}\right]_{\substack{i=1\\k=0}}^{s} \Rightarrow$$

$$W(x) - f(x) = \prod_{k=1}^{s}(x-x_k)^{m_k}\det\left[\frac{\overline{f}^{(m_k)}(\xi_k)}{m_k!};(x-x_k)^{i-1}\right]_{\substack{i=1\\k=0}}^{s} \Rightarrow$$

$$W(x) - f(x) = \prod_{k=0}^{s}(x-x_k)^{m_k}F(x) \Rightarrow$$

$$W^{(i_k)}(x_k) - f^{(i_k)}(x_k) = 0, \quad \begin{cases} k = \overline{0,s}\,, \\ i_k = \overline{0,m_k-1}\,. \end{cases}$$

Отже, визначник (2) буде інтерполяційним многочленом Лагранжа–Сильвестра. □

Спираючись на доведену формулу (2) можна отримати ряд наслідків.

Наслідок 1. *Розв'язок системи* (1) *за умови* $m_k \equiv 1$, *многочлен Лагранжа, має вид:*

$$W_n(x) = \frac{1}{\prod\limits_{i<j}^{n}(x_i-x_j)}\begin{vmatrix} f(x_0) & f(x_1) & . & . & f(x_n) \\ x-x_0 & x-x_1 & . & . & x-x_n \\ (x-x_0)^2 & (x-x_1)^2 & . & . & (x-x_n)^2 \\ . & . & . & . & . \\ (x-x_0)^n & (x-x_1)^n & . & . & (x-x_n)^n \end{vmatrix}. \qquad (8)$$

Наслідок 2. *Розв'язок системи* (1) *за умови* $m_k \equiv 1$ *і рівновіддалених вузлів інтерполяції, формула Ньютона, має вид:*

$$W_n(x) = \frac{(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}}{\prod\limits_{j=0}^{n} j!}\begin{vmatrix} f(x_0) & f(x_1) & . & . & f(x_n) \\ q & q-1 & . & . & q-n \\ q^2 & (q-1)^2 & . & . & (q-n)^2 \\ . & . & . & . & . \\ q^n & (q-1)^n & . & . & (q-n)^n \end{vmatrix}, \qquad (9)$$

де $q = \frac{x-x_0}{h}$, $\quad h = x_{i+1} - x_i$, $\; i = \overline{0,n}\,$.

Наслідок 3. *Похідна k-го порядку $\left(k=\overline{1,n}\right)$ многочлена Лагранжа має вид:*

$$W_n^{(k)}(x)=\frac{k!}{\prod\limits_{i<j}^{n}(x_i-x_j)}\begin{vmatrix} f(x_0) & f(x_1) & . & . & f(x_n) \\ 1 & 1 & . & . & 1 \\ x-x_0 & x-x_1 & . & . & x-x_n \\ . & . & . & . & . \\ (x-x_0)^{k-1} & (x-x_1)^{k-1} & . & . & (x-x_n)^{k-1} \\ (x-x_0)^{k+1} & (x-x_1)^{k+1} & . & . & (x-x_n)^{k+1} \\ . & . & . & . & . \\ (x-x_0)^{n} & (x-x_1)^{n} & . & . & (x-x_n)^{n} \end{vmatrix}. \qquad (10)$$

Враховуючи формулу (10), конструкцію визначника Вандермонда можна застосувати і для обчислення (не рекурентно) скінченних різниць довільного порядку.

Наслідок 4. *За умови, що* $[x_i,\ x_{i+1}]=\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}=\frac{y_{i+1}-y_i}{x_{i+1}-x_i}$, *для* $\forall i=\overline{0,n-k}$, *має місце формула:*

$$[x_i,\ x_{i+1},\ \dots,x_{i+k}]=\frac{[x_{i+1},\ \dots,x_{i+k}]-[x_i,\ x_{i+1},\ \dots,x_{i+k-1}]}{x_{i+k}-x_i}=$$

$$=\frac{(-1)^{\frac{k(k-1)}{2}}}{\prod\limits_{i<j}^{k}(x_i-x_j)}\begin{vmatrix} y_i & y_{i+1} & . & . & y_{i+k} \\ 1 & 1 & . & . & 1 \\ x_0 & x_1 & . & . & x_k \\ . & . & . & . & . \\ x_0^{k-1} & x_1^{k-1} & . & . & x_n^{k-1} \end{vmatrix}. \qquad (11)$$

Наслідок 5. *За умови, що* $\Delta y_i=y_{i+1}-y_i$, *а* $\Delta x_i=x_{i+1}-x_i=const$, *для* $\forall i=\overline{0,n-k}$, *має місце формула:*

$$\Delta^k y_0=\frac{(-1)^k}{\prod\limits_{j=0}^{k-1}j!}\begin{vmatrix} y_i & y_{i+1} & . & . & y_{i+k} \\ 1 & 1 & . & . & 1 \\ 0 & 1 & . & . & k \\ . & . & . & . & . \\ 0 & 1 & . & . & k^{k-1} \end{vmatrix}. \qquad (12)$$

Висновки

Запропонована конструкція побудови інтерполяційних многочленів є універсальною. На її базі можлива побудова інтерполяційних многочленів, навіть, для функцій багатьох змінних.

Найпростіший випадок такої реалізації всім відомий як рівняння площини через три задані точки, що не лежать на одній прямій. Очевидно, рівняння площини, є розв'язком задачі інтерполяції функції двох змінних $f(x;y)$ многочленом першого порядку $z = ax + by + c$. Тобто, за умови, що $z_i = f(x_i;y_i)$, $i = 0,1,2$, можна записати:

$$z = W(x;y) = \frac{1}{v_3}\begin{vmatrix} z_0 & z_1 & z_2 \\ x - x_0 & x - x_1 & x - x_2 \\ y - y_0 & y - y_1 & y - y_2 \end{vmatrix}, \tag{13}$$

де v_3 – двомірний аналог визначника Вандермонда.

У межах запропонованих узагальнень вже отримані рівняння інтерполяційних многочленів функції двох змінних. На теперішній час узагальнюється задача Ермітової інтерполяції на функції двох (багатьох) змінних.

Література

[1] *Гончаров В.Л.* Теория интерполирования и приближения функций / В.Л. Гончаров – М.: Гос. издательство технико-теоретической литературы, 1954. – 328 с.

[2] *Гантмахер Ф.Р.* Теория матриц / Ф.Р. Гантмахер – М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1966. – 576 с.

[3] *Демидович Б.П.* Численные методы анализа. Приближение функций, дифференциальные и интегральные уравнения / Б.П. Демидович, И.А. Марон, Э.З. Шувалова. – М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1967. – 368 с.

[4] *Ланкастер П.* Теория матриц : [пер. с англ.] / П. Ланкастер. – М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1982. – 272 с.

[5] *Мусіяка В.Г.* Основи чисельних методів механіки / В.Г. Мусіяка – К.: Вища освіта, 2004. – 240 с.

[6] *Хемминг Р.В.* Численные методы / Р.В. Хемминг – М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1972. – 400 с.

УДК 519.175

Кадубовський О.А., Ірза В.І.

[1] *канд. фіз.-мат. наук, доцент кафедри геометрії та МВМ, СДПУ*

[2] *студентка 5 курсу фізико-математичного факультету, СДПУ*

e-mail: kadubovs@ukr.net, irza_v@ukr.net

k-КОЛЬОРОВІ ХОРДОВІ n-ДІАГРАМИ

В статті розглядається клас k-кольорових хордових діаграм з n хордами. Для натуральних $k > 2$ і $2n = k \cdot p$ встановлено формули для підрахунку як числа неізоморфних (з точністю до повороту), так і числа нееквівалентних (відносно дії діедральної групи) діаграм із зазначеного класу. Також наведено початкові значення числа неізоморфних k-кольорових n-діаграм для $1 < n \leq 15$.

Ключові слова: *хордова n-діаграма, дія групи на множині, група діедра.*

Вступ

Однією з основних задач багатьох галузей математики є задача про класифікацію досліджуваних об'єктів, яка, в свою чергу, вимагає побудову повних інваріантів. В більшості випадків для розв'язання останньої ефективно застосовують певні графи з додатковою інформацією. Конструкції, схожі до кола з відміченими точками, ефективно використовувались, наприклад, в роботах [2, 12, 13]. Добре відомо також, що хордові діаграми використовують і для описання інваріантів вузлів Васильєва.

Всюди нижче під хордовою діаграмою порядку n будемо розуміти конфігурацію на площині, що складається з кола, $2n$ точок на ньому та n хорд, які сполучають вказані точки.

Питаннями переліку певних класів хордових діаграм займалась ціла низка відомих математиків, зокрема автори робіт [3, 4, 5, 6].

Задача про підрахунок числа неізоморфних (відносно дії циклічної групи) та нееквівалентних (відносно дії діедральної групи) n-діаграм була повністю розв'язана в роботах [3], [6].

Двокольорові хордові O- і N-діаграми були використані в роботі [8] при топологічній класифікації функцій певного класу на замкнених орієнтовних та відповідно не орієнтовних поверхнях фіксованого роду. В [9] встановлено формули для підрахунку числа неізоморфних та нееквівалентних двокольорових O- і N-діаграм з n хордами. В [10] встановлено формули для підрахунку числа неізоморфних та нееквівалентних двокольорових O-діаграм, які мають один чорний (або ж білий) цикл.

В роботі [7] підраховано число неізоморфних O-діаграм максимального роду (з одним чорним та одним білим циклом). Число неізоморфних та нееквівалентних планарних O-діаграм (роду 0) підраховано в роботі [1].

Результати, пов'язані з підрахунком числа неізоморфних та нееквівалентних k-кольорових n-діаграм, авторам є невідомими. Дослідженню та розв'язанню зазначених задач й присвячена дана стаття.

1. Основні поняття та попередні відомості

Означення 1. *Нехай на площині задано коло і $2n$ точок на ньому, які є вершинами правильного $2n$-кутника. Розіб'ємо ці точки на n пар і кожну пару з'єднаємо хордою. Отриману конструкцію будемо називати хордовою діаграмою з n хордами або, коротко, n-діаграмою – рис. 1 a).*

Означення 2. *Коло з $2n$ точками на ньому, які є вершинами правильного $2n$-кутника, і фіксованою нумерацією останніх за годинниковою стрілкою будемо називати $2n$-шаблоном – рис. 1 b).*

Надалі будемо вважати, що всі n-діаграми будуються на основі $2n$-шаблону, а множину діаграм, побудованих на ньому, позначати $\Im_n$.

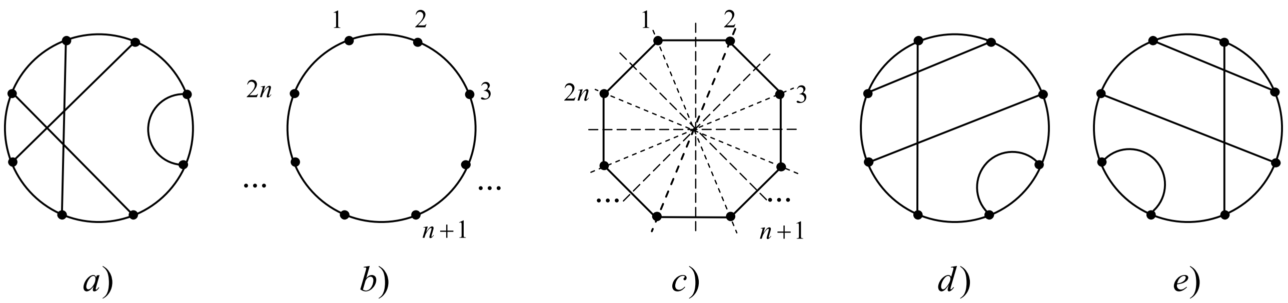


Рис. 1: a) 4-діаграма (O-діаграма); b) $2n$-шаблон; c) правильний $2n$-кутник та його вісі симетрії; d), e) еквівалентні, але не ізоморфні 4-діаграми (N-діаграми)

Означення 3. *Дві хордові n-діаграми будемо називати ізоморфними, якщо одну з них можна отримати в результаті повороту іншої (навколо спільного центру) на деякий кут $\varphi = i \cdot \frac{2\pi}{2n}$, $1 \leq i \leq 2n$.*

Означення 4. *Дві хордові n-діаграми будемо називати еквівалентними, якщо вони ізоморфні або суміщаються в результаті дзеркального відбиття чи композиції дзеркального відбиття і повороту на певний кут.*

Добре відомо (напр. [11]), що всі симетрії правильного $2n$-кутника (рухи площини, при яких він самосуміщується) вичерпуються:

$2n$ поворотами (навколо його центра) на кути, кратні куту $\varphi = \frac{2\pi}{2n}$;

n осьовими симетріями відносно прямих (осей симетрії), що проходять через протилежні вершини, та

n осьовими симетріями відносно прямих (осей симетрії), що проходять через середини протилежних сторін.

Нехай $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & ... & 2n-1 & 2n \\ 2 & 3 & ... & 2n & 1 \end{pmatrix} = (1, 2, ..., 2n)$, а
$\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & ... & n+1 & ... & 2n-1 & 2n \\ 1 & 2n & ... & n+1 & ... & 3 & 2 \end{pmatrix} = (1)\circ(2, 2n)\circ...\circ(n, n+2)\circ(n+1)$.

Тоді симетрії правильного $2n$-кутника можна описати в термінах зазначених перестановок на множині номерів його вершин. А саме:
1) поворот $2n$-кутника навколо його центра на кут $\varphi_j = \frac{j\pi}{n}$, $1 \le j \le 2n$ за годинниковою стрілкою визначається перестановкою σ^j і навпаки;
2) осьова симетрія відносно прямої s_1, що проходить через середини сторін $[1;2]$ і $[n+1; n+2]$, визначається добутком $\tau \cdot \sigma^1$, а відносно прямої s_2, що проходить через середини сторін $[2;3]$ і $[n+2; n+3]$, – добутком $\tau \cdot \sigma^3$;
3) осьова симетрія відносно прямої v_1, що проходить через вершини з номерами 1 і $n+1$, визначається перестановкою τ, а відносно прямої v_2, що проходить через вершини з номерами 2 і $n+2$, – добутком $\tau \cdot \sigma^2$ і т.д..

Очевидно, що симетрії $2n$-шаблону можна описати в аналогічний спосіб. Тому елементи σ^i і $\tau \cdot \sigma^i$ $(i = 1, ..., 2n)$ — всі $4n$ різних елементів групи $D_{2n} = \{\sigma^i,\ \tau \cdot \sigma^i \,|i = 1, 2, ..., 2n\}$ симетрій $2n$-шаблону.

Циклічну групу, породжену перестановкою σ, будемо називати групою циклічних перестановок порядку $2n$ і позначати $C_{2n} = \{\sigma^i \mid i = 1, 2, ..., 2n\}$.

Більш повну інформацію щодо наведених питань можна знайти, наприклад, в [11].

Нехай далі $\alpha = \begin{pmatrix} 1 & k_1 & \dots & k_{2n-1} & k_{2n} \\ k_1 & 1 & \dots & k_{2n} & k_{2n-1} \end{pmatrix}$ — підстановка (інволюція) на множині номерів n_j вершин $2n$-шаблону, яка визначає хорди, а тому і саму хордову n-діаграму $D = D(\alpha)$. Тоді кожну діаграму можна ототожнити з відповідною підстановкою, яку будемо називати склейкою. Множину склейок, що відповідають діаграмам з класу $\Im_n$, будемо позначати $\mathbf{B_{2n}}$.

Відомо (напр. [3, 8, 9]), що групи C_{2n} та D_{2n} діють на множині хордових діаграм (на множині $\mathbf{B_{2n}}$) як спряження. Тобто

Твердження 1. *Діаграма $D(\alpha_1)$ ізоморфна діаграмі $D(\alpha_2)$ тоді і лише тоді, коли $\exists i \in \{1, 2, ..., 2n\}: \quad \alpha_1 = \sigma^{-i} \circ \alpha_2 \circ \sigma^i$;*

діаграма $D(\alpha_1)$ еквівалентна діаграмі $D(\alpha_2)$ тоді і лише тоді, коли $\exists \gamma \in D_{2n}: \quad \alpha_1 = \gamma^{-1} \circ \alpha_2 \circ \gamma$.

2. Основна частина

Розглянемо деяку n-діаграму. Занумеруємо її дуги числами від 1 до $2n$, рухаючись за годинниковою стрілкою від деякої фіксованої дуги, і розфарбуємо їх в k різних кольорів ($k|2n$, $k > 1$) так, щоб дуги, номери яких дають однакову остачу при діленні на k, були зафарбовані одним кольором.

В подальшому будемо вважати, що циклічний порядок k різних кольорів (кольорів дуг діаграми за годинниковою стрілкою) є строго фіксованим.

Означення 5. *Хордову n-діаграму, дуги кола якої пофарбовані в k різних кольорів зазначеним способом, будемо називати k-кольоровою n-діаграмою і позначати $D_{k,n}$ – рис. 2 a).*

Розглянемо $2n$-шаблон (рис. 2 b)). В якості номера дуги візьмемо номер вершини, яка є її початком (наприклад, дуга $(1,2)$ має номер 1; дуга $(2,3)$ має номер 2 і т.д.). Розфарбуємо дуги в k різних кольорів ($k|2n$, $k > 1$) так, щоб дуги, номери яких дають однакову остачу при діленні на k, були зафарбовані одним кольором. $2n$-шаблон, дуги кола якого пофарбовано у вказаний спосіб, будемо називати **k-кольоровим $2n$-шаблоном** — рис. 2 c).

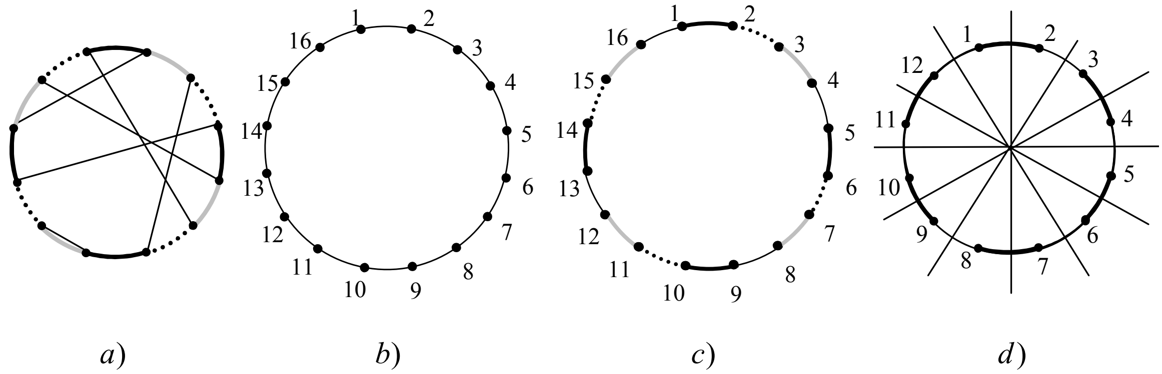


Рис. 2: a) 3-кольорова 6-діаграма; b) $2n$-шаблон ($n = 8$); c) k-кольоровий $2n$-шаблон ($n = 8$, $k = 4$); d) вісі симетрії 2-кольорового 12-шаблону

2.1 Симетрії k-кольорового $2n$-шаблону

Група симетрій 2-кольорового $2n$-шаблону складається з n поворотів на «парні» кути (кути виду $\omega_i = 2i\frac{\pi}{n}$, $1 \le i \le n$) та n осьових симетрій відносно осей, що проходять через середини протилежних дуг шаблону [9]. В якості твірних зазначеної групи симетрій можна обрати перестановки

$$\xi = \sigma^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & ... & 2n-1 & 2n \\ 3 & 4 & ... & 1 & 2 \end{pmatrix}, \ \lambda = \begin{pmatrix} 1 & 2 & ... & 2n-1 & 2n \\ 2n & 2n-1 & ... & 2 & 1 \end{pmatrix}. \quad (1)$$

І тому група симетрій 2-кольорового $2n$-шаблону може бути представлена у вигляді $D_{2n}^* = \left\{\xi^i, \lambda \circ \xi^i | \ i = 1, ..., n\right\}$.

Тепер дослідимо симетрії k-кольорового $2n$-шаблону.

Твердження 2. *Нехай $k>2$ і k є дільником натурального числа $2n$. Тоді група симетрій k-кольорового $2n$-шаблону складається з $\frac{2n}{k}$ елементів – поворотів на кути виду $\varphi_j = kj\cdot\frac{\pi}{n}$, $j\in\{1,2,...\frac{2n}{k}\}$.*

Доведення. При обертаннях k-кольоровий $2n$-шаблон самосуміщується лише коли кут повороту є «кратним k», тобто лише при поворотах на кути $\varphi_k = km\cdot\frac{\pi}{n}$, $1\le m\le\frac{2n}{k}$. Тому для доведення твердження достатньо показати, що при $k>2$ k-кольоровий $2n$-шаблон не має осей симетрії.

Припустимо, що k-кольоровий $2n$-шаблон має вісь симетрії, яка проходить через протилежні вершини шаблону (наприклад, вершини з номерами i та $i+n$). Це означає, що дуги $(i-1,i)$ та $(i,i+1)$ зафарбовані однаково. Проте цього бути не може, оскільки номери цих дуг ($i-1$ та i відповідно) дають різні остачі при діленні на k ($k>2$), і тому, за визначенням k-кольорового $2n$-шаблону, пофарбовані різними кольорами.

Припустимо тепер, що k-кольоровий $2n$-шаблон має вісь симетрії, яка проходить через середини протилежних дуг (наприклад, дуги $(i,i+1)$ та $(i+n,i+n+1)$). Це означає, що дуги $(i-1,i)$ та $(i+1,i+2)$ мають бути зафарбовані однаково. Але це неможливо, оскільки номери цих дуг ($i-1$ та $i+1$ відповідно) дають різні остачі при діленні на k ($k>2$). □

Таким чином, група симетрій k-кольорового $2n$-шаблону складається з $\frac{2n}{k}$ елементів. Її будемо позначати $D^*_{\frac{2n}{k}} = \left\{\sigma^{k\cdot j} \mid j=1,...,\frac{2n}{k}\right\}$ та називати групою діедра k-кольорового $2n$-шаблону.

Зауваження 1. *При натуральних k, що ділять $2n$, група $D^*_{\frac{2n}{k}}$ є групою $C^*_{\frac{2n}{k}}$ циклічних перестановок порядку $\frac{2n}{k}$, що породжується перестановкою*

$$\varsigma = \sigma^k = \begin{pmatrix} 1 & 2 & ... & 2n-k & 2n-k+1 & ... & 2n-1 & 2n \\ k+1 & k+2 & ... & 2n & 1 & & ... & k-1 & k \end{pmatrix}. \qquad (2)$$

2.2 Ізоморфізм та еквівалентність k-кольорових n-діаграм

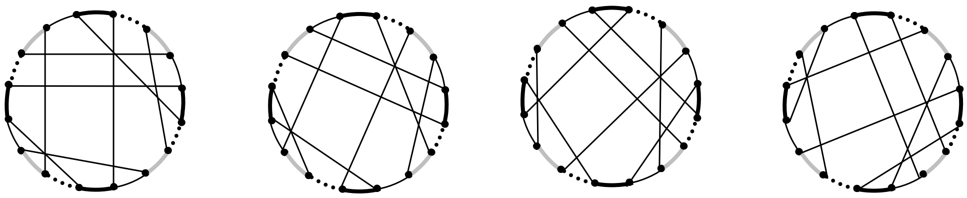
Добре відомо, що число хордових n-діаграм (побудованих на $2n$-шаблоні) становить $d_n = (2n-1)!! = \frac{(2n)!}{2^n\cdot n!}$. Як було зазначено раніше, циклічний порядок k різних кольорів (кольорів дуг діаграми у напрямку за годинниковою стрілкою) є строго фіксованим. Оскільки кожну n-діаграму можна розфарбувати k різними способами зі збереженням циклічного порядку кольорів, то, з урахуванням *означення* 5., в якості числа $d_{k,n}$ k-кольорових n-діаграм слід прийняти величину $d_{k,n} = k\cdot d_n$.

Проте, оскільки *кінцевою метою* є підрахунок числа саме неізоморфних k-кольорових n-діаграм, доведемо наступне допоміжне твердження.

Твердження 3. *Число неізоморфних k-кольорових n-діаграм з фіксованим циклічним порядком кольорів дуг співпадає з числом неізоморфних k-кольорових n-діаграм, побудованих на k-кольоровому $2n$-шаблоні з таким самим циклічним порядком кольорів.*

Доведення. Для доведення достатньо показати, що для кожної діаграми $D_{k,n}(\alpha)$, $\alpha \in \mathbf{B_{2n}}$, побудованої на k-кольоровому $2n$-шаблоні (з фіксованим циклічним порядком кольорів), існують ще $k-1$ діаграм (побудованих на цьому ж шаблоні), які при відповідній циклічній зміні кольорів є ізоморфними з діаграмою $D_{k,n}(\alpha)$. Надалі множину діаграм, побудованих на фіксованому k-кольоровому $2n$-шаблоні, будемо позначати $\Im_{k,n}$.

Отже, нехай $\alpha = (a_1, b_1) \circ ... \circ (a_n, b_n)$ – довільна, але фіксована склейка з $\mathbf{B_{2n}}$, а $D_{k,n} = D_{k,n}(\alpha)$ – рис. 3 a).



a) b) c) d)

Рис. 3: a) $D_{k,n}(\alpha)$; b) $D_{k,n}(\alpha_1)$; c) $D_{k,n}(\alpha_2)$; d) $D_{k,n}(\alpha_3)$

Розглянемо склейку $\alpha_1 = \alpha + 1 \bmod(2n) =$
$= (a_1 + 1 \bmod(2n), b_1 + 1 \bmod(2n)) \circ ...$
$... \circ (a_n + 1 \bmod(2n), b_n + 1 \bmod(2n)) \in \mathbf{B_{2n}}$.
Очевидно, що діаграма $D_{k,n}(\alpha_1)$ належить множині $\Im_{k,n}$ (рис. 3 b)). Якщо дуги діаграми $D_{k,n}(\alpha_1)$ перефарбувати так, щоб кожна дуга «отримала» колір попередньої дуги (у напрямку за годинниковою стрілкою), то одержана в такий спосіб діаграма $D'_{k,n}(\alpha_1)$ буде ізоморфною діаграмі $D_{k,n}(\alpha)$.

Таким чином, склейки α_j ($j = 1, 2, ..., k-1$), що визначають шукані $k-1$ діаграм $D_{k,n}(\alpha_j)$, можна подати у вигляді $\alpha_j = \alpha + j \bmod(2n)$. При кожному фіксованому j циклічне перефарбування дуг діаграми $D_{k,n}(\alpha_j)$ відбувається за правилом: кожну дугу (діаграми $D_{k,n}(\alpha_j)$) під номером i слід пофарбувати у колір дуги шаблону під номером $(i - j \bmod(2n))$. □

Зауваження 2. *З урахуванням попереднього твердження в якості числа $d_{k,n}$ k-кольорових n-діаграм з фіксованим циклічним порядком кольорів дуг природно обрати число діаграм з класу $\Im_{k,n}$, що побудовані на фіксованому k-кольоровому $2n$-шаблоні (з відповідним циклічним порядком кольорів дуг шаблону). Тобто, в якості числа $d_{k,n}$ можна прийняти число d_n. Отже*

$$|\Im_{k,n}| = d_{k,n} = d_n = (2n-1)!!. \tag{3}$$

З урахуванням *твердження* 1., має місце наступний критерій ізоморфності діаграм з класу $\Im_{k,n}$.

Наслідок 1. *Діаграма* $D_{k,n}(\alpha_1)$ *ізоморфна діаграмі* $D_{k,n}(\alpha_2)$ *тоді і лише тоді, коли* $\exists j \in \left\{1, 2, ..., \frac{2n}{k}\right\}: \quad \alpha_1 = \sigma^{-j\cdot k} \circ \alpha_2 \circ \sigma^{j\cdot k}$.

2.3 Число неізоморфних та нееквівалентних діаграм з класу $\Im_{k,n}$

Теорема 1. *Для довільного натурального* $n \geq 2$ *число* $d^*_{k,n}$ *неізоморфних діаграм з класу* $\Im_{k,n}$ *можна обчислити за допомогою наступних формул*

$$d^*_{k,n} = \frac{k}{2n}\left((2n-1)!! + \sum_{kj|2n,\ kj\neq 2n} \phi\left(\frac{2n}{kj}\right)\rho(n,kj)\right), \tag{4}$$

$$\rho(n,kj) = \begin{cases} (kj-1)!!\cdot\left(\frac{2n}{kj}\right)^{\frac{kj}{2}}, & \frac{2n}{kj} = 2l+1 \\ \sum\limits_{r=0}^{[kj/2]} C^{2r}_{kj}\cdot(2r-1)!!\cdot\left(\frac{2n}{kj}\right)^r, & \frac{2n}{kj} = 2l, \end{cases} \tag{5}$$

де $\phi(q)$ *— арифметична функція Ейлера.*

Доведення. З урахуванням *зауваження* 1. і *наслідку* 1. число $d^*_{k,n}$ співпадає з числом орбіт дії групи $C^*_{\frac{2n}{k}}$ на множині діаграм з класу $\Im_{k,n}$ (на множині $\mathbf{B_{2n}}$). І тому за лемою Бернсайда (напр. [11]) та з урахуванням результатів роботи [3], шукане число $d^*_{k,n}$ можна обчислити за формулою

$$d^*_{k,n} = \frac{1}{|C^*_{\frac{2n}{k}}|}\left(|\Im_{k,n}| + \sum_{kj|2n\ kj\neq 2n} \phi\left(\frac{2n}{kj}\right)\cdot\rho(n,kj)\right), \tag{6}$$

де $\rho(n,kj)$ – число діаграм з класу $\Im_{k,n}$, які самосуміщуються при повороті на кут $\varphi_{k,j} = kj\cdot\frac{\pi}{n}$ за годинниковою стрілкою. Не важко бачити, що $\rho(n,kj)$ співпадає з числом звичайних n-діаграм (з класу $\Im_n$), які самосуміщуються при повороті на кут $\varphi_{k,j}$ за годинниковою стрілкою.

В роботах [3] і [6] було встановлено, що для кожного дільника i числа n величину $\rho(n,i)$ можна обчислити за формулами

$$\rho(n,i) = \begin{cases} (i-1)!!\cdot\left(\frac{2n}{i}\right)^{i/2}, & \frac{2n}{i} = 2l+1 \\ \sum\limits_{r=0}^{[i/2]} C^{2r}_{i}\cdot(2r-1)!!\cdot\left(\frac{2n}{i}\right)^r, & \frac{2n}{i} = 2l. \end{cases} \tag{7}$$

Поклавши в (7) $i = kj$, одержимо формули (5). $\square$

Зауваження 3. *При* $k=1$ *і* $k=2$ *співвідношення* $(4),(5)$ *також визначають число неізоморфних хордових* n*-діаграм* $(\Im_n \equiv \Im_{1,n})$ *та число неізоморфних двокольорових* n*-діаграм (з класу* $\Im_{2,n}$*) відповідно. Крім того, у випадку* $k=2n$ *кожна діаграма з класу* $\Im_{2n,n}$ *може суміститися виключно із собою і лише при повороті на кут* 2π*. Це означає, що будь-які дві діаграми з класу* $\Im_{2n,n}$ *не є ізоморфними, тобто що* $d^*_{2n,n} = d_{2n,n} = (2n-1)!!$*. При* $k=2n$ *співвідношення* $(4),(5)$ *дають такий самий результат.*

Твердження 4. *При* $k>2$ *число нееквівалентних діаграм з класу* $\Im_{k,n}$ *дорівнює числу неізоморфних діаграм з класу* $\Im_{k,n}$*.*

Справедливість твердження є наслідком *твердження* 2. та *зауваження* 1.

Всюди вище циклічний порядок k (різних) кольорів (кольорів дуг n-діаграм за годинниковою стрілкою) був чітко фіксованим. Очевидно, що на $2n$-шаблоні у напрямку за (або проти) годинниковою стрілкою можна зафіксувати $(k-1)!$ різних циклічних порядків кольорів. Крім того, при $k>2$ дві k-кольорові n-діаграми з різними циклічними порядками кольорів дуг не можуть бути ізоморфними. Тому має місце

Наслідок 2. *Нехай* $k>2$ *є дільником числа* $2n$*. Тоді число* $\overline{d^*_{k,n}}$ *неізоморфних* k*-кольорових* n*-діаграм можна визначити за формулою*

$$\overline{d^*_{k,n}} = (k-1)! \cdot d^*_{k,n}. \tag{8}$$

Нижче на рисунках 4, 5, 6, 7, 8 і 9 зображено всі неізоморфні діаграми з класів $\Im_{3,3}$, $\Im_{2,3}$, $\Im_{1,3}$, $\Im_{1,4}$, $\Im_{2,4}$ та $\Im_{4,4}$ відповідно.

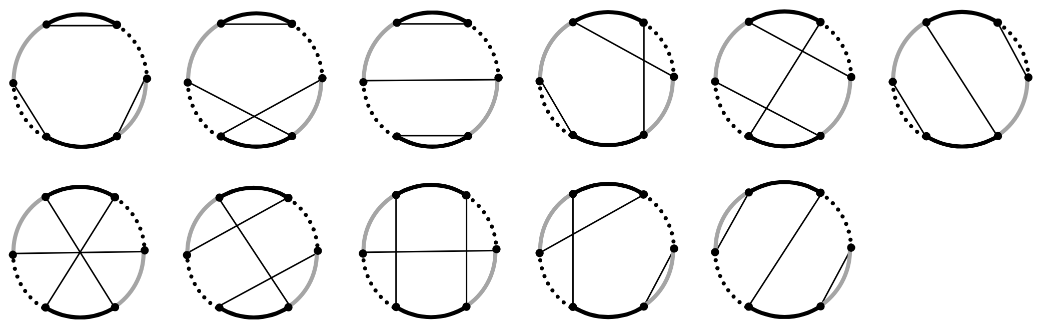


Рис. 4: Всі 11 неізоморфних діаграми з класу $\Im_{3,3}$

Рис. 5: Всі 7 неізоморфних діаграми з класу $\Im_{2,3}$

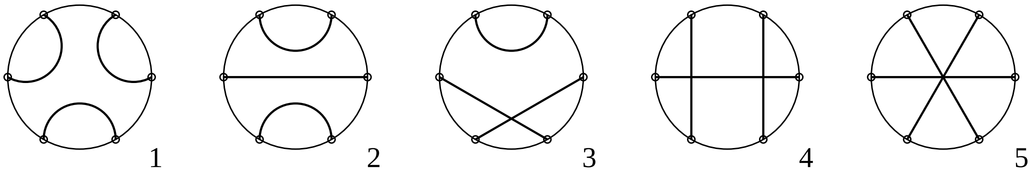


Рис. 6: Всі неізоморфні діаграми з класу $\Im_{1,3}$

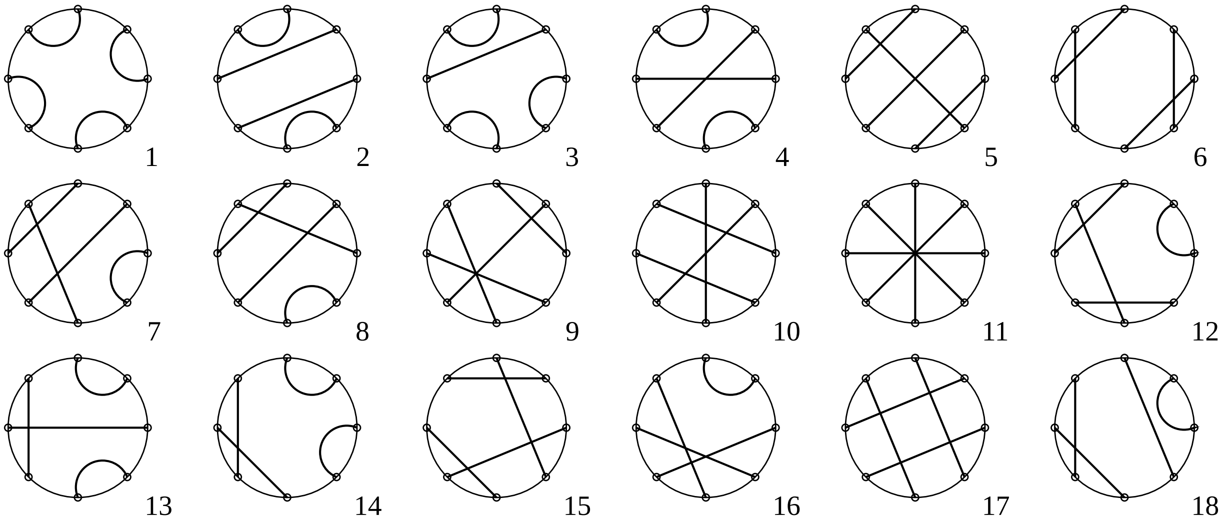


Рис. 7: Всі неізоморфні діаграми з класу $\Im_{1,4}$

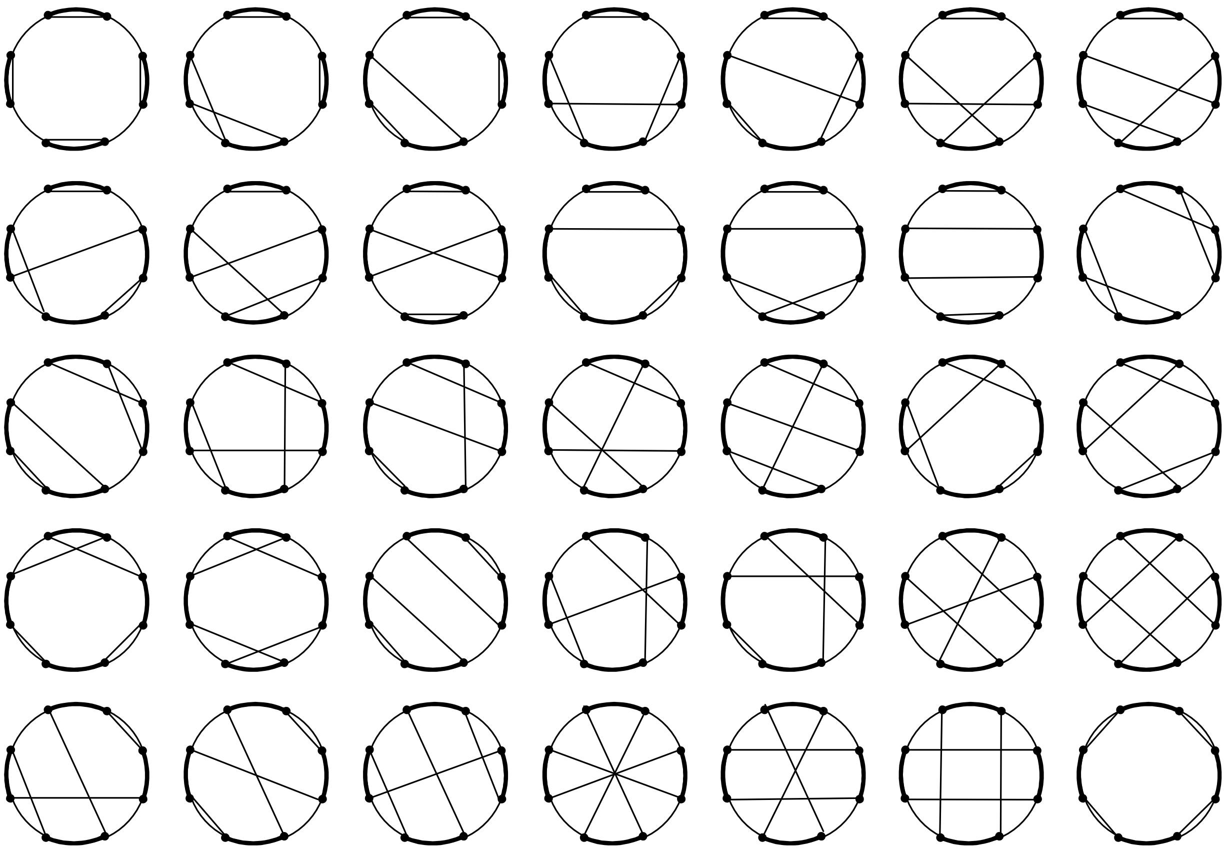


Рис. 8: Всі 35 неізоморфних діаграм з класу $\Im_{2,4}$

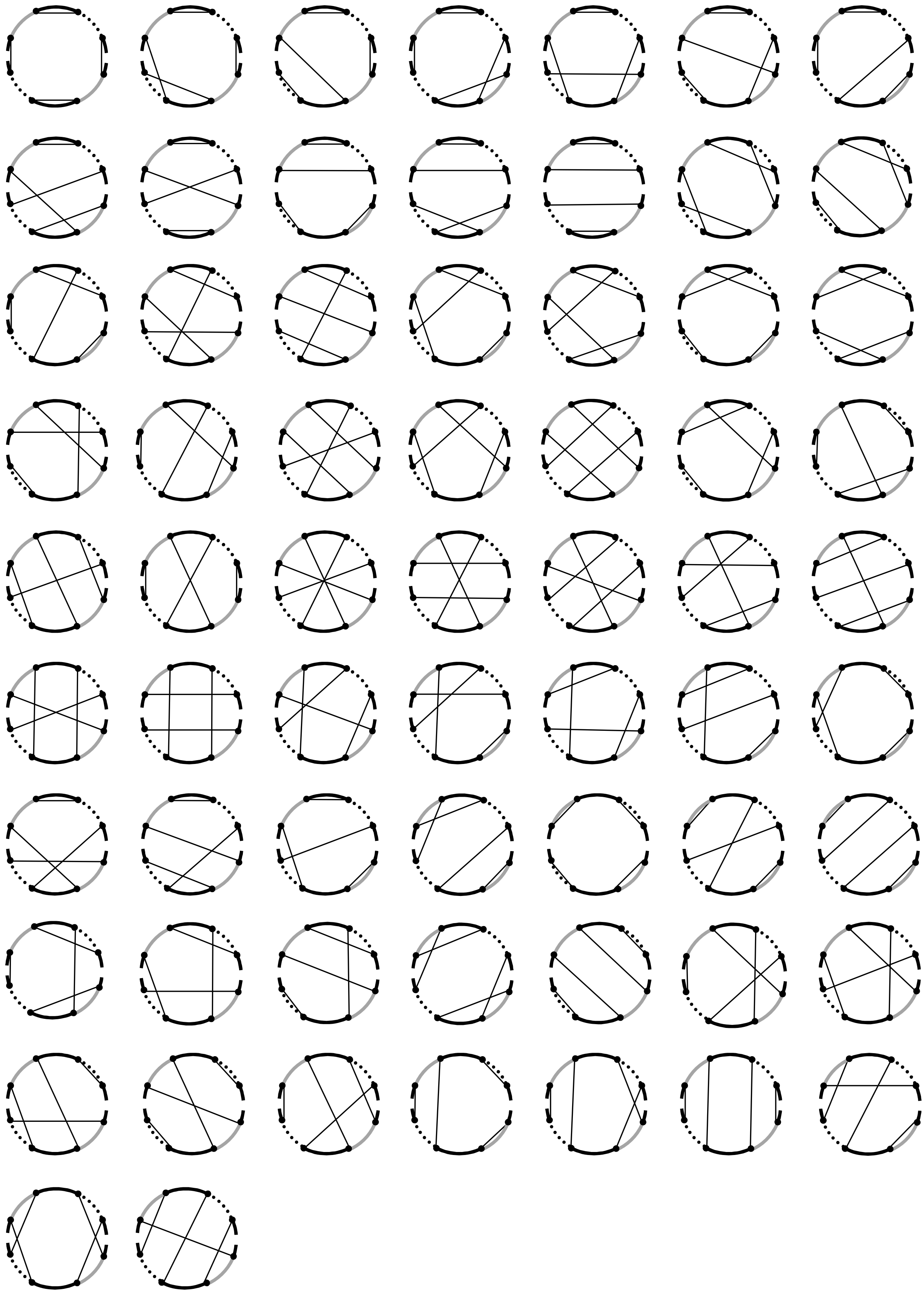


Рис. 9: Всі 65 неізоморфних діаграм з класу $\Im_{4,4}$

n	$2n$	$k\|2n$	$d^*_{k,n}$	n	$2n$	$k\|2n$	$d^*_{k,n}$
2	4	1	2	10	20	1	32 743 182
2	4	2	3	10	20	2	65 486 307
2	4	4	3	10	20	4	130 945 875
3	6	1	5	10	20	5	163 715 822
3	6	2	7	10	20	10	327 431 363
3	6	3	11	10	20	20	654 729 075
3	6	6	15	11	22	1	624 999 093
4	8	1	18	11	22	2	1 249 937 335
4	8	2	35	11	22	11	6 874 989 963
4	8	4	65	11	22	22	13 749 310 575
4	8	8	105	12	24	1	13 176 573 910
5	10	1	105	12	24	2	26 353 147 811
5	10	2	193	12	24	3	39 529 719 560
5	10	5	513	12	24	4	52 706 295 033
5	10	10	945	12	24	6	79 059 439 095
6	12	1	902	12	24	8	105 411 386 745
6	12	2	1 799	12	24	12	158 118 876 449
6	12	3	2 688	12	24	24	316 234 143 225
6	12	4	3 483	13	26	1	304 072 048 265
6	12	6	5 363	13	26	2	608 142 583 137
6	12	12	10 395	13	26	13	3 952 936 627 361
7	14	1	9 749	13	26	26	7 905 853 580 625
7	14	2	19 311	14	28	1	7 623 505 722 158
7	14	7	68 219	14	28	2	15 247 011 443 103
7	14	14	135 135	14	28	4	30 494 006 668 251
8	16	1	127 072	14	28	7	53 364 540 054 860
8	16	2	254 143	14	28	14	106 729 080 101 235
8	16	4	508 277	14	28	28	213 458 046 676 875
8	16	8	1 016 481	15	30	1	206 342 800 616 597
8	16	16	2 027 025	15	30	2	412 685 556 939 751
9	18	1	1 915 951	15	30	3	619 028 401 803 731
9	18	2	3 828 921	15	30	5	1 031 714 003 081 693
9	18	3	5 747 843	15	30	6	1 238 056 670 727 375
9	18	6	11 486 745	15	30	10	2 063 427 784 696 215
9	18	9	17 243 105	15	30	15	3 095 142 009 014 843
9	18	18	34 459 425	15	30	30	6 190 283 353 629 375

Табл. 1: Початкові значення числа неізоморфних діаграм з класів $\Im_{k,n}$ $(1 < n \leq 15,\ k|2n)$

Висновки

Встановлені в роботі формули для підрахунку числа неізоморфних та нееквівалентних діаграм з класу $\Im_{k,n}$ є узагальненням аналогічних результатів для хордових, зокрема двокольорових n-діаграм. Проте залишається нез'ясованим питання про підрахунок числа $\overline{d^{**}_{k,n}}$ нееквівалентних k-кольорових n-діаграм при $k > 2$.

На думку авторів, цілком досяжним є одержання аналогічних узагальнень й для більш специфічних класів хордових n-діаграм.

Література

[1] *Callan D.* Non-crossing Partitions under Rotation and Reflection [Electronic resource] / D. Callan, L. Smiley // Arxiv: math. – 2000. – 15 p. – Access mode: http://arxiv.org/abs/math.CO/0510447.

[2] *Fleitas G.* Classification of Gradient like flows on dimensions two and three / G. Fleitas // Bol. Soc. Brasil. Mat. – 1975. – Vol. 6. – P. 155 – 183.

[3] *Gori R.* Counting non-isomorphic chord diagrams / R. Gori, M. Marcus // Theoretical Computer Science. – 1998. – No. 204. – P. 55 – 73.

[4] *Harer J.* The Euler characteristic of the moduli space of curves / J. Harer, D. Zagier // Inventiones mathematical. – 1986. – No. 85. – P. 457 – 485.

[5] *Riordan J.* The distribution of crossings of chords joining pairs of $2n$ points on a circle / J. Riordan // Math. Comp. – 1975. – No. 29 – P. 215 – 222.

[6] *Stoimenov A.* Enumeration of chord diagrams and an upper bound for Vassiliev invariants / A. Stoimenov // Journal of Knot and its Ramifications. – 1998. – Vol. 7, No. 1. – P. 93 – 114.

[7] *Кадубовський О.А.* Про один клас хордових діаграм максимального роду / О.А. Кадубовський // Вісник Київського університету. Серія: фізико-математичні науки. – 2006. – Вип. 1. – С. 17 – 27.

[8] *Кадубовський О.А.* Топологічна еквівалентність функцій на орієнтованих поверхнях / О.А. Кадубовський // Укр. мат. жур. – 2006. – Т. 58, № 3. – С. 343 – 351.

[9] *Кадубовський О.А.* Двокольорові O- і N-діаграми / О.А. Кадубовський, О.В. Сторожилова, Н.В. Сторожилова // Пошуки і знахідки. Серія: фізико-математичні науки. – 2010. – Т. 1, Вип. 1. – С. 41 – 50.

[10] *Кадубовський О.А.* Двокольорові O-діаграми з одним чорним циклом / О.А. Кадубовський, Ю.С. Сaприкіна, С.Ю. Мазур // Пошуки і знахідки. Серія: фізико-математичні науки. – 2010. – Т. 1, Вип. 1. – С. 51 – 60.

[11] *Калужнин Л.А.* Преобразования и перестановки / Л.А. Калужнин. В.И. Сущанский // М.: Наука, 1979. – 112 с.

[12] *Ошемков А.А.* Функции Морса на двумерных поверхностях. Кодирование особенностей / А.А. Ошемков // Труды МИРАН. – 1994. – Т. 205. – С. 131 – 140.

[13] *Шарко В.В.* Гладкая и топологическая эквивалентность функций на поверхностях / В.В. Шарко // Укр. мат. жур. – 2003. – Т. 55, № 5. – С. 687 – 700.

УДК 512.622.23:004

Рябухо О.М., Іванова К.Ю.

[1] *канд. фіз.-мат. наук, доцент, зав. кафедри алгебри, СДПУ*

[2] *студентка 5 курсу фізико-математичного факультету, СДПУ*

e-mail: kafedra_algebry_sdpu@mail.ru

РЕАЛІЗАЦІЯ ЗАДАЧІ ПОДІЛУ ТАЄМНИЦІ В МАТЕМАТИЧНОМУ ПАКЕТІ MAXIMA

В роботі проведено аналіз літератури щодо дослідження задачі поділу таємниці. Розроблено програмну реалізацію даної задачі в математичному пакеті Maxima. Проведено порівняльний аналіз програмної реалізації задачі поділу таємниці двома способами: за схемою Шаміра та схемою Асмута-Блума.

Ключові слова: *задача поділу таємниці, поліном Лагранжа, китайська теорема про остачу.*

Вступ

Криптографічна задача поділу таємниці (англ. Secret sharing) виникає у випадку необхідності забезпечення колегіальності прийняття рішення. Її суть полягає в тому, що сукупність даних, яка дозволяє повністю відновити секретний ключ (таємницю), розподіляється між членами певної групи з n осіб в такий спосіб, що кожному з них дістається доля таємниці (англ. Shadow), і подальше відновлення ключа можливе лише за присутності всіх (або певної мінімальної кількості k) членів групи. У разі невиконання цієї умови секретний ключ гарантовано не відновлюється.

Задача поділу таємниці містить два алгоритми: перший призначений для обчислення долей за заданим значенням секретного ключа (розподіл таємниці) і другий — для відновлення ключа за відомими долями (реконструкція таємниці).

Основне призначення розподілу таємниці — захист ключа від втрати. Зазвичай для захисту від втрати ключа роблять декілька копій. Зі збільшенням числа копій ключа зростає імовірність його компрометації (розголошення), якщо ж число копій мале, то зростає ризик втрати ключа, через можливість загубити його. Тому краще «розподілити» ключ між декількома особами в такий спосіб, щоб була можливість його відновлення при різних обставинах: кількома уповноваженими групами з певним складом учасників. Тим самим запобігають повної втрати ключа.

Пороговою схемою або схемою поділу таємниці називається схема, яка дозволяє «розподілити» таємницю між декількома учасниками в такий спосіб, щоб заздалегідь визначені уповноважені особи могли однозначно відновити таємницю, а неуповноважені – не отримали жодної додаткової інформації про можливе значення таємниці.

У (k, n)-порогових схемах повідомлення ділиться на n частин так, що будь-які k частини можуть відновити повідомлення.

Мета роботи: дослідити та програмно реалізувати задачу поділу таємниці за схемою Шаміра та схемою Асмута-Блума. Зробити порівняльний аналіз відповідних програм.

Загальні відомості про задачу поділу таємниці за схемами Шаміра та Асмута - Блума

Ідея порогової схеми була незалежно запропонована в 1979 році Аді Шаміром та Джорджем Блеклі. Для створення порогової схеми Шамір користувався поліноміальними рівняннями в скінченному полі [3]. Спочатку обирається просте число P, яке більше кількості можливих часток (долей) і більше найбільшої з можливих таємниць. Щоб зробити таємницю загальною, генерується довільний многочлен степеня $k-1$. Наприклад, якщо необхідно створити (6,10)-порогову схему, то генерується многочлен 5-го степеня:

$$f(x) = (ax^5 + bx^4 + cx^3 + dx^2 + hx + S) \mod P,$$

де P — це випадкове просте число, більше будь-якого з коефіцієнтів; S — таємниця (повідомлення).

Коефіцієнти a, b, c, d, h обираються випадково, вони зберігаються в таємниці і відкидаються після розподілу часток. Просте число P повинно бути опубліковане.

Частки (долі) отримуються за допомогою обчислення значення многочлену в n різних точках: $S_i = f(x_i)$.

Для відновлення таємниці необхідна наявність 6 часток (долей). Ця необхідність зумовлена тим, що для відшукання невідомих коефіцієнтів многочлену 4-го степеня з 6-ма невідомими потрібно 6 будь-яких значень часток. Трьох чи чотирьох буде недостатньо, а шести або восьми буде з надлишком. Для відновлення таємниці S за 6-ма частками S_1, S_2, S_3, S_4, S_5, S_6 будується многочлен $f(x)$ за інтерполяційною формулою Лагранжа

$$f(x) = \sum_{e=1}^{k} f(i_e) \prod_{j \neq e} \frac{x - i_j}{i_e - i_j}. \quad (1)$$

Тоді вільний член поліному і буде таємницею $S = f(0) = a_0$.

В 1983 році в роботах С. Асмута, Д. Блума та М. Міньота були описані інші підходи до розв'язання задачі поділу таємниці. Вони запропонували в якості вихідної бази обрати кільце цілих чисел. В цьому кільці в якості таємниці пропонувалося брати деяке ціле число, а в якості часткової таємниці учасника — його конгруенцію за деяким модулем. Відновлення таємниці в таких системах відбувається шляхом розв'язання системи конгруенцій, найчастіше, за допомогою китайської теореми про лишки. Такі схеми називаються модулярними.

Для (k, n)-порогової схеми обирається велике просте число p, більше S. Потім обираються числа, менші p – $d_1, d_2, \ldots, d_n$, для яких:

1) значення d_i впорядковані за зростанням, $d_i < d_{i+1}$;
2) всі числа послідовності $d_1, d_2, \ldots, d_n$ попарно взаємнопрості;
3) $d_1 \cdot d_2 \cdot \ldots \cdot d_k > p \cdot d_{n-k+2} \cdot d_{n-k+3} \cdot \ldots \cdot d_n$.

Щоб розподілити частки, спочатку обираємо випадкове число r та обчислюємо $s = S + rp$. Частками (долями) є $s_i \equiv s \mod d_i$. Об'єднавши будь-які k часток, можна відновити S, використовуючи китайську теорему про лишки. Для довільних k чисел $s_{i_1}, \ldots, s_{i_k}$ єдиним розв'язком системи конгруенцій

$$\begin{cases} x \equiv s_{i_1} \pmod{d_{i_1}} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x \equiv s_{i_k} \pmod{d_{i_k}} \end{cases} \tag{2}$$

буде таємний ключ s.

Процедура відновлення ключа неможлива для меншої ніж k кількості часток. Так для довільних $k-1$ чисел $s_{i_1}, \ldots, s_{i_{k-1}}$ система

$$\begin{cases} x \equiv s_{i_1} \pmod{d_{i_1}} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x \equiv s_{i_{k-1}} \pmod{d_{i_{k-1}}} \end{cases}$$

матиме безліч розв'язків.

Програмна реалізація задачі поділу таємниці в пакеті Maxima

Алгоритм поділу таємниці $S \in Z_P$ за схемою Шаміра

1. Обирається n різних, ненульових елементів з Z_P.
2. Випадковим чином в Z_P обираються $k-1$ елементи $a_1, \ldots, a_{k-1}$.

3. Для кожного $1 \le i \le n$ обчислюються $S_i = f(x_i)$, де

$$f(x) = S + \sum_{j=1}^{k-1} a_j x^j \mod P.$$

4. Кожний учасник $1 \le i \le n$ отримує долю $(S_i,\ P)$.

Алгортм відновлення таємниці за наявними 6-ма частками.

1. Будуємо поліном Лагранжа за формулою 1.
2. Знаходимо його значення при $x = 0$, отримаємо таємницю $S = f(0)$.

Алгоритм поділу таємниці $S \in Z_P$ за схемою Асмута-Блума

1. Обирається просте число P та n взаємно простих чисел.
2. Перевіряються умови: $\forall i : d_i > P, \quad d_1 < \ldots < d_i < \ldots < d_n$ та $d_1 \cdot \ldots \cdot d_k > P \cdot d_{k+1} \cdot \ldots \cdot d_n$.
3. Обирається випадкове число r та обчислюється $s = S + rP$.
4. Обчислюються частки за формулою $s_i = s \mod d_i$.

Алгортм відновлення таємниці за наявними 6-ма частками.

1. Будуємо систему конгруенцій виду 2 та розв'язуємо її за допомогою китайської теореми про лишки.
2. Відновлюємо таємницю як розв'язок системи конгруенцій 2.

Приклад 1. *Нехай необхідно розділити таємницю $S = 97$ між 10 учасниками таким чином, щоб будь-які 6 з них могли відновити цю таємницю. Реалізуємо $(6, 10)$-порогову схему.*

Схема Шаміра	**Схема Асмута-Блума**
Обирається деяке просте число $P = 101$ Будуємо многочлен $f(x) = (64 \cdot x^5 + 27 \cdot x^4 + 18 \cdot x^3 +$ $+31 \cdot x^2 + 7 \cdot x + 97) \mod 101$	В якості простого числа оберемо $P = 101$ В якості взаємно простих $\forall i : i \in \{103, 107, 109, 113, 127, 131,$ $137, 139, 149, 151\}$, $i > P = 101$ $103 < 107 < 109 < 113 < 127 <$ $< 131 < 137 < 139 < 149 < 151$ $\cdot 131 > 101 \cdot 137 \cdot 139 \cdot 149 \cdot 151$ $103 \cdot 107 \cdot 109 \cdot 113 \cdot 127$ $r = 51,\ s = 5248$

<table>
<tr>
<td>Отримані долі
$\{413, 49\}$, $\{432, 48\}$, $\{451, 71\}$, $\{470, 50\}$, $\{489, 78\}$, $\{508, 38\}$, $\{527, 40\}$, $\{546, 50\}$, $\{565, 24\}$, $\{584, 42\}$.

Відновлення таємниці
$\{432, 48\}$, $\{470, 50\}$, $\{489, 78\}$, $\{508, 38\}$, $\{565, 24\}$, $\{584, 42\}$

Будуємо інтерполяційний поліном Лагранжа
$f(x) = 48 \cdot \frac{(x-470)\cdot(x-489)\cdot(x-508)}{(432-470)\cdot(432-489)\cdot(432-508)} \cdot \frac{(x-565)\cdot(x-584)}{(432-565)\cdot(432-584)} + 50 \cdot \frac{(x-432)\cdot(x-489)}{(470-432)\cdot(470-489)} \cdot \frac{(x-508)\cdot(x-565)\cdot(x-584)}{(470-508)\cdot(407-565)\cdot(470-584)} + 78 \cdot \frac{(x-432)}{(489-432)} \cdot \frac{(x-470)\cdot(x-508)\cdot(x-565)\cdot(x-584)}{(489-470)\cdot(489-508)\cdot(489-565)\cdot(489-584)} + 38 \cdot \frac{(x-432)\cdot(x-470)\cdot(x-489)\cdot(x-565)}{(508-432)\cdot(508-470)\cdot(508-489)\cdot(508-565)} \cdot \frac{(x-584)}{(508-584)} + 24 \cdot \frac{(x-432)\cdot(x-470)\cdot(x-489)}{(565-432)\cdot(565-470)\cdot(565-489)} \cdot \frac{(x-508)\cdot(x-584)}{(565-508)\cdot(565-584)} + 42 \cdot \frac{(x-432)\cdot(x-470)}{(489-432)\cdot(489-470)} \cdot \frac{(x-489)\cdot(x-508)\cdot(x-565)}{(489-508)\cdot(489-565)\cdot(584-565)}$
Вільний член полінома і є таємниця</td>
<td>Отримані долі
$\{101, 103, 98\}, \{101, 107, 5\}, \{101, 109, 16\}, \{101, 113, 50\}, \{101, 127, 41\}, \{101, 131, 8\}, \{101, 137, 42\}, \{101, 139, 105\}, \{101, 149, 33\}, \{101, 151, 114\}$
Відновлення таємниці
$\{101, 107, 5\}$, $\{101, 109, 16\}$, $\{101, 113, 50\}$, $\{101, 131, 8\}$, $\{101, 139, 105\}$, $\{101, 151, 114\}$
Складемо відповідну систему конгруенцій
$\begin{cases} x \equiv 5 \pmod{107} \\ x \equiv 16 \pmod{109} \\ x \equiv 50 \pmod{113} \\ x \equiv 8 \pmod{131} \\ x \equiv 105 \pmod{139} \\ x \equiv 114 \pmod{151} \end{cases}$
Розв'язавши систему конгруенцій відновимо таємницю</td>
</tr>
</table>

Порівняльний аналіз реалізованих схем

Схема Шаміра	**Схема Асмута-Блума**
Потребує генерації двох простих чисел.	Потребує генерації $2+n$ простих чисел, причому n простих чисел необхідно обрати у порядку зростання.
Кількість учасників, які можуть відновити таємницю задається одразу.	Необхідна перевірка заявлених долей на можливість відновлення таємниці.
Для обчислення долей будується поліном степеня $k-1$.	Для обчислення долей обирається випадкове число.
Обидві схеми крипостійкі до атак.	

Описані схеми також були реалізовані в математичному пакеті Maple, в середовищі Delphi та на мові програмування PHP. Математичні пакети Maxima та Maple оперують однаковими вбудованими функціями та виконують чисельні розрахунки високої точності. Завдяки цьому, на етапі відновлення таємниці, був побудований інтерполяційний многочлен Лагранжа та розв'язана система конгруенцій за допомогою китайської теореми про лишки. Що дає можливість відновлення таємниці. Але між цими математичними пакетами є певні відмінності. При виведенні результатів команд Maxima виводить кінцевий результат, а Maple виводить поетапне виконання вказаної команди. На відміну від комерційних Maple, та Delphi математичний пакет Maxima є вільно розповсюдженою системою комп'ютерної алгебри, яка розрахована на широке коло користувачів.

Мова PHP на відміну від вище згаданих математичних пакетів є серверною мовою web-програмування і має розвинену обчислювальну частину. Наявність в мові повноцінного набору керуючих конструкцій, дозволяє реалізовувати алгоритми будь-якої складності. Синтаксис мови майже співпадає із синтаксисом мови C, тому працювати з нею може вузьке коло користувачів.

Delphi дає можливість створювати програми в стилі візуального конструювання форм, розмістивши на них будь-які візуальні елементи. Середовище Delphi має складний інтерфейс. Програма в середовищі Delphi реалізує деякий код тільки як реакцію на події, які зумовлені діями користувачів (натискання кнопок, рух миші і тому подібне).

Висновки

В статті наведені приклади реалізації задачі поділу таємниці за схемами Шаміра та Асмута-Блума в системі компютерної алгебри Maxima. Проведений порівняльний аналіз реалізованих схем в різних програмних середовищах.

Література

[1] *Берник В.* Математические и компьютерные основы криптологии / В. Берник, С. Матвеев, Ю. Харин. – М.: Новое знание, 2003. – 382 с.

[2] *Саломаа А.* Криптография с открытым ключом : [пер. с англ.] / А. Саломаа. – М.: Мир, 1995. – 318 с.

[3] *Тилборг ван Х.К.А.* Системы разделения секрета : [пер. з англ.] / ван Х.К.А. Тилборг // Основы криптологии. Профессиональное руководство и интерактивный учебник. – М.: Мир, 2006. – С. 314 – 334.

[4] *Чичкарёв Е.А.* Компьютерная математика с Maxima. Руководство для школьников и студентов / Е.А. Чичкарёв. – М.: ALT Linux, 2009. – 233 с.
[5] *Шнайер Б.* Разделение секрета : [пер. с англ.] / Б. Шнайер // Прикладная криптография. Протоколы, алгоритмы, исходные тексты на языке Си. – М.: Триумф, 2002. – С. 93 – 96.
[6] *Шнайер Б.* Алгоритмы разделения секрета : [пер. с англ.] / Б. Шнайер // Прикладная криптография. Протоколы, алгоритмы, исходные тексты на языке Си. – М.: Триумф, 2002. – С. 588 – 591.

УДК 512.53

Рябухо О.М., Турка Т.В., Литвиненко Л.П.

[1] *канд. фіз.-мат. наук, доцент, зав. кафедри алгебри, СДПУ*

[2] *асистент кафедри алгебри, СДПУ*

[3] *студентка 5 курсу фізико-математичного факультету, СДПУ*

e-mail: kafedra_algebry_sdpu@mail.ru

НАПІВГРУПА ВІДПОВІДНОСТЕЙ СКІНЧЕННОЇ ГРУПИ

Дослідження полягає у вивченні напівгрупи відповідностей скінченної групи, зокрема обчислено порядки напівгрупи відповідностей знакозмінної групи четвертого порядку $S(A_4)$ та групи кватерніонів восьмого порядку $S(Q_8)$.

Ключові слова: *напівгрупа відповідностей, порядок напівгрупи, знакозмінна група, група кватерніонів.*

Вступ

Поняття напівгрупи та відповідний термін виникли на початку XX століття, а систематичні дослідження напівгруп почалися в кінці 20-х років. До 60-х років теорія напівгруп сформувалася в область алгебри, що динамічно розвивається, з багатою проблематикою і різноманітними застосуваннями. В ці роки з'явилися і перші монографії, які цілком присвячені теорії напівгруп.

Першим задачу вивчення напівгруп відповідностей поставив Курош О.Г. в своєму курсі з теорії універсальних алгебр (див. [1]). Однак зроблено в цьому напрямку небагато. Є кілька робіт (наприклад, Іскандер [2], [3]), де вивчалася будова напівгрупи $S(G)$ як решітки відносно природного часткового порядку. Але напівгрупи відповідностей конкретних універсальних алгебр майже не досліджувалися.

У роботі [4] обчислено порядок напівгруп $S(G)$, коли G є скінченною групою. Зокрема, явно вказано порядок $|S(G)|$ для трьох класичних серій скінченних груп: циклічних, діедральних та елементарних абелевих.

Продовжуючи роботу над вивченням напівгруп відповідностей скінченних груп, ми обчислили порядок напівгруп відповідностей знакозмінної групи степеня чотири $S(A_4)$ та групи кватерніонів восьмого порядку $S(Q_8)$.

Порядок напівгрупи відповідностей

Нехай G — універсальна алгебра. Якщо підалгебру з $G \times G$ розглядати як бінарне відношення на G, то множина $S(G)$ всіх підалгебр з $G \times G$ є напівгрупою відносно деморганівського добутку відношень. Напівгрупа $S(G)$ називається *напівгрупою відповідностей* алгебри G.

У роботі [4] показано, що коли G — група, то елементи напівгрупи $S(G)$ можна ототожнити з п'ятірками вигляду $(H_1, G_1, H_2, G_2, \varphi)$, де $H_1 \lhd G_1 < G$, $H_2 \lhd G_2 < G$, а φ — ізоморфізм факторгрупи G_1/H_1 на факторгрупу G_2/H_2. При цьому відповідний елемент напівгрупи $S(G)$ — як підмножина із $G \times G$ — має вигляд

$$(H_1, G_1, H_2, G_2, \varphi) = \bigcup_{a \in G_1} (aH_1 \times \varphi(aH_1)).$$

Множини вигляду $aH_1 \times bH_2$, де $bH_2 = \varphi(aH_1)$ є блоками елемента $A = (H_1, G_1, H_2, G_2, \varphi)$.

Якщо $H, N \leq G$ і $N \lhd H$, то факторгрупа H/N називається фактором групи G. Вибираємо з кожного класу ізоморфних факторів групи G по представнику і позначаємо через $\mathfrak{F}(G)$ множину цих представників. Тоді для кожного з можливих факторів $F \in \mathfrak{F}$ число K_F є потужністю відповідного класу ізоморфних факторів, тобто

$$K_F = |\{(N, H) | N \lhd H \ i \ H/N \simeq F\}|.$$

Теорема 1. *Для будь-якої скінченної групи G порядок напівгрупи відповідностей $S(G)$ дорівнює*

$$|S(G)| = \sum_{F \in \mathfrak{F}(G)} K_F^2 \cdot |\mathrm{Aut}\ F|. \tag{1}$$

Порядок напівгрупи відповідностей $S(A_4)$.

A_4 — група парних підстановок степеня 4. Підгрупи E, A_4 і K_4 є нормальними в групі A_4. Група $K_4 = \{\varepsilon, (12)(34), (13)(24), (14)(23)\}$, так звана четверна група Кляйна, має підгрупи E, K_4, $\langle (12)(34) \rangle$, $\langle (13)(24) \rangle$, $\langle (14)(23) \rangle$. Всі вони будуть нормальними в групі K_4.

Скориставшись теоремою про порядок напівгрупи відповідностей скінченної групи знайдемо порядок напівгрупи відповідностей групи парних підстановок степеня 4, тобто $|S(A_4)|$.

Задача 1. *Обчислити порядок напівгрупи відповідностей $S(A_4)$ знакозмінної групи A_4, тобто $|S(A_4)|$.*

Розв'язання. Згідно теореми 2 [4] для будь-якої скінченної групи, зокрема групи A_4, порядок напівгрупи відповідностей $S(A_4)$ дорівнює

$$|S(A_4)| = \sum_{F \in \mathfrak{F}(A_4)} K_F^2 \cdot |Aut\ F|, \tag{2}$$

де $\mathfrak{F}(A_4)$ — множина всіх представників класів ізоморфних факторів F групи A_4:

$$\mathfrak{F}(A_4) = \{E, C_2, C_3, K_4, A_4\}.$$

До кожної підгрупи групи A_4, класи ізоморфних факторів, їх потужність (число K_F) та потужність групи автоморфізмів проілюструємо за допомогою таблиці:

$H \le A_4 \times A_4$	$\|H\|$	F	K_F	$\|\text{Aut } F\|$
E	1	E	$K_E = 10$	$\|\text{Aut } E\| = 1$
C_2	3	E, C_2	$K_{C_2} = 6$	$\|\text{Aut } C_2\| = 1$
C_3	4	E, C_3	$K_{C_3} = 5$	$\|\text{Aut } C_3\| = 2$
K_4	1	E, C_2, K_4	$K_{K_4} = 1$	$\|\text{Aut } K_4\| = 6$
A_4	1	E, K_4, A_4	$K_{A_4} = 1$	$\|\text{Aut } A_4\| = 12$

Тепер скориставшись формулою 3 обчислимо потужність напівгрупи відповідностей знакозмінної групи степеня 4.

$$\begin{gathered}|S(A_4)| = K_E^2 \cdot |\text{Aut } E| + K_{C_2}^2 \cdot |\text{Aut } C_2| + K_{C_3}^2 \cdot |\text{Aut } C_3| + \\ + K_{K_4}^2 \cdot |\text{Aut } K_4| + K_{A_4}^2 \cdot |\text{Aut } A_4| = \\ = 10^2 \cdot 1 + 6^2 \cdot 1 + 5^2 \cdot 2 + 1^2 \cdot 6 + 1^2 \cdot 12 = 204.\end{gathered}$$

Порядок напівгрупи відповідностей $S(Q_8)$.

В теорії груп, група кватерніонів Q_8 є неабелевою групою порядку 8, ізоморфною множині восьми визначенним кватерніонам з операцією множення. В групі Q_8 маємо підгрупи E, Q_8, $\{\pm 1\}$, $< i >$, $< j >$, $< k >$. Всі вони є нормальними.

Задача 2. *Обчислити порядок напівгрупи відповідностей $S(Q_8)$ групи кватерніонів Q_8, тобто $|S(Q_8)|$.*

Розв'язання. Згідно теореми 1 для будь-якої скінченної групи Q_8 порядок напівгрупи відповідностей $S(Q_8)$ дорівнює

$$|S(Q_8)| = \sum_{F \in \mathfrak{F}(Q_8)} K_F^2 \cdot |Aut\ F|, \tag{3}$$

де $\mathfrak{F}(Q_8)$ — множина всіх представників класів ізоморфних факторів F групи Q_8:

$$\mathfrak{F}(Q_8) = \{E, C_2, C_4, K_4, Q_8\}.$$

До кожної підгрупи групи Q_8, класи ізоморфних факторів, їх потужність (число K_F) та потужність групи автоморфізмів проілюструємо за допомогою наступної таблиці

$H \leq Q_8 \times Q_8$	$\|H\|$	F	K_F	$\|\mathrm{Aut}\ F\|$
E	1	E	$K_E = 6$	$\|\mathrm{Aut}\ E\| = 1$
C_2	1	E, C_2	$K_{C_2} = 7$	$\|\mathrm{Aut}\ C_2\| = 1$
C_4	3	E, C_2, C_4	$K_{C_4} = 3$	$\|\mathrm{Aut}\ C_4\| = 2$
Q_8	1	E, C_2, K_4, Q_8	$K_{K_4} = 1$ $K_{Q_8} = 1$	$\|\mathrm{Aut}\ K_4\| = 6$ $\|\mathrm{Aut}\ Q_8\| = 24$

Тепер скориставшись формулою 3 обчислимо потужність напівгрупи відповідностей групи кватерніонів порядку 8.

$$|S(Q_8)| = K_E^2 \cdot |\mathrm{Aut}\ E| + K_{C_2}^2 \cdot |\mathrm{Aut}\ C_2| + K_{C_4}^2 \cdot |\mathrm{Aut}\ C_4| +$$
$$+ K_{K_4}^2 \cdot |\mathrm{Aut}\ K_4| + K_{Q_8}^2 \cdot |\mathrm{Aut}\ Q_8| =$$
$$= 6^2 \cdot 1 + 7^2 \cdot 1 + 3^2 \cdot 2 + 1^2 \cdot 6 + 1^2 \cdot 24 = 133.$$

Висновки

В роботі ми продовжили вивчати порядок напівгруп відповідностей $S(G)$, коли G є скінченною групою. Зокрема, обчислили порядки напівгруп відповідностей знакозмінної групи $|S(A_4)|$ та групи кватерніонів $|S(Q_8)|$.

Література

[1] *Курош А.Г.* Общая алгебра / А.Г. Курош. – М.: Наука, 1974. – 160 с.

[2] *Искандер А.А.* Структура соответствий универсальной алгебры. – Изв. АНСССР, сер. матем. – 1965. – т.29. – С. 1357 – 1372.

[3] *Искандер А.А.* Частичные универсальные алгебры с задаными структурами подалгебр и соответствий / А. А. Искандер // Матем. сборник. – 1960. – т. 70. – С. 438 – 456.

[4] *Ганюшкін О.Г.* Порядок напівгрупи відповідностей скінченної групи / О.Г. Ганюшкін, Т.В. Турка // Вісник Київського університету. Серія : фіз.-мат. науки. – 2009. – вип. № 3. – С. 9 – 13.

УДК 512.623.314(091)

Рябухо О.М., Вороніна О.Л.

[1] *канд. фіз.-мат. наук, доцент кафедри алгебри, СДПУ*

[2] *студентка 5 курсу фізико-математичного факультету, СДПУ*

e-mail: kafedra_algebry_sdpu@mail.ru

ПОБУДОВА ГРУП ҐАЛУА ДЕЯКИХ ТИПІВ РІВНЯНЬ

В роботі наведена основна теорема теорії Ґалуа, описана характеризація груп Ґалуа біквадратних многочленів, показано приклад побудови групи Ґалуа.

Ключові слова: *теорія Ґалуа, група Ґалуа, незвіний многочлен.*

Вступ

7 листопада 2011 року науковий математичний світ відзначив 200-ту річницю з дня народження Еваріста Ґалуа (1811 – 1832), одного із найбільш видатних математиків 19-го століття. Ідеї Ґалуа протягом кількох десятиліть залишалися незрозумілими для математиків світу, але в подальшому вони одержали визнання і мали великий вплив на розвиток всієї математики. Свої ідеї Ґалуа залишив у прощальному листі для друга, написаному напередодні дуелі, яка трагічно обірвала його життя.

Основна проблема, над якою працював молодий математик — це проблема розв'язності загальних алгебраїчних рівнянь. Незнайомий з роботами П.Руфіні та Н.Абеля, він не тільки незалежно від них прийшов до того ж результату, але й знайшов критерій розв'язності загальних алгебраїчних рівнянь у радикалах. Створена ним теорія, відома як теорія Ґалуа, описана в термінах теорії груп. Тим самим геніальний математик заклав основи **теорії груп**. Він ввів поняття **розв'язної групи**, **простої групи**, **нормальної підгрупи**, які й донині залишаються найбільш використовуваними у загальній теорії груп. Він же ввів і сам термін **група**: (le groupe), хоча і не дав строгого визначення. В своїх дослідженнях Ґалуа довів простоту знакозмінної групи A_n, де $n \geq 5$, довів теореми про примітивні групи перестановок, про транзитивні групи простого степеня, які стали прообразом загальних класифікаційних результатів, одержаних через півтора століття потому.

Дана робота присвячена характеризації многочленів за їх групами Ґалуа.

Мета дослідження полягає у вивченні основних положень теорії Ґалуа та побудови груп Ґалуа для деяких типів рівнянь.

В роботі наводиться характеризація груп Ґалуа біквадратних многочленів, описується приклад побудови групи Ґалуа.

Основна теорема теорії Ґалуа

Нехай $p(x) = \prod\limits_{1 \le i \le 4} (x - a_i) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d$ — многочлен з полем розкладу F над основним полем K і нехай $K^2 = \{k^2; k \in K\}$ позначає множину квадратів всіх елементів із K. Якщо $p(x)$ незвідний і сепарабельний (не має кратних коренів), то група Ґалуа $\mathrm{Gal}\,(F/K)$ діє транзитивно на множині його чотирьох коренів, отже ізоморфна одній із транзитивних підгруп S_4: четверній групі Кляйна K_4; циклічній групі четвертого порядку C_4; діедральній групі 8 порядку D_4, знакозмінній групі A_4 або дорівнює самій S_4. Ми припускаємо, що характеристика поля $K \neq 2$. Це гарантує нам, що незвідний многочлен $p(x)$ буде сепарабельним.

Теорема 1. *Нехай K — поле характеристики $\neq 2$. Припустимо, що $p(x)$ незвідний многочлен над K, $r(x)$ — його кубічна резольвента, поле розкладу якої дорівнює E, D — дискримінант $r(x)$. Тоді*

(1) *$Gal\,(F/K) \cong S_4$, тоді і тільки тоді, коли існує многочлен $r(x)$ незвідний над K і $D \notin K^2$;*

(2) *$Gal\,(F/K) \cong A_4$, тоді і тільки тоді, коли існує многочлен $r(x)$ незвідний над K і $D \in K^2$;*

(3) *$Gal\,(F/K) \cong V$, тоді і тільки тоді, коли многочлен $r(x)$ розкладається на лінійні множники над K;*

(4) *$Gal\,(F/K) \cong C_4$, тоді і тільки тоді, коли многочлен $r(x)$ має тільки один корінь t в K і $p(x) = (x^2 - tx + d)(x^2 + ax + (b - t))$ — розклад $g(x)$ на множники над E;*

(5) *$Gal\,(F/K) \cong D_4$, тоді і тільки тоді, коли многочлен $r(x)$ має тільки один корінь t в K і $g(x)$ не розкладається на множники над E.*

Дослідження груп Ґалуа біквадратних многочленів

Розглянемо незвідні многочлени виду

$$h(x) = x^4 + bx^2 + d; \quad b, d \in K,$$

де K – характеристики $\neq 2$. Спочатку сформулюємо наступний критерій незвідності для таких многочленів.

Теорема 2. *Нехай $h(x) = x^4 + bx^2 + d$ многочлен над полем K, причому характеристика $\neq 2$, і $\pm\alpha$, $\pm\beta$ корені. Тоді наступні умови еквівалентні*

(1) *$h(x)$ незвідний над K;*

(2) α^2, $\alpha+\beta$, $\alpha-\beta \notin K$;
(3) b^2-4d, $-b+2\sqrt{d}$, $-b-2\sqrt{d} \notin K^2$.

Теорема 3. *Нехай* $h(x)=x^4+bx^2+d$ *незвідний над* K, *характеристики* $K\neq 2$. *Нехай* $\pm\alpha$, $\pm\beta$ *корені із його поля розкладу* F. *Тоді:*
(1) $Gal(F/K)\cong V \longleftrightarrow d\in K^2 \leftrightarrow \alpha\beta\in K$;
(2) $Gal(F/K)\cong C_4 \longleftrightarrow d(b^2-4d)\in K^2$; $K(\alpha\beta)\in K(\alpha^2)$;
(3) $Gal(F/K)\cong D_4 \longleftrightarrow di\ d(b^2-4d)\notin K^2 \leftrightarrow \alpha\beta\notin K(\alpha^2)$.

Приклади знаходження групи Ґалуа

Приклад 1. *Нехай* k,j *– різні вільні від квадратів цілі числа і* $r\neq 0$, $s\in Q$. *Знайти групу Ґалуа многочлену* $r(x)=x^4-2(r^2k+s^2j)x^2+(r^2k-s^2j)^2$

Розв'язання. Нехай k,j — різні вільні від квадрата цілі числа і $r\neq 0$, $s\in Q$. Тоді

$$r(x)=x^4-2(r^2k+s^2j)x^2+(r^2k-s^2j)^2$$

незвідний над полем Q, тому, що

$$b^2-4d=16r^2s^2kj,$$

$$-b+2\sqrt{d}=4r^2k,$$

$$-b-2\sqrt{d}=4s^2j$$

не є квадратами в Q. З теореми 3. випливає, що Gal $(F/Q)\cong V$, тому, що $d=(r^2k-s^2j)\in Q^2$.

Нормальне розширення Q має групу Ґалуа, ізоморфну V, тоді і тільки тоді, коли воно може бути представлене у вигляді $Q(\sqrt{k};\sqrt{j})$ для двох різних вільних від квадратів цілих чисел k і j. Так як корені $\pm(r\sqrt{k}+s\sqrt{j})$ і $\pm(r\sqrt{k}-s\sqrt{j})$ з $u(x)$ знаходяться в $Q(\sqrt{k};\sqrt{j})$, то кожне нормальне розширення з групою Ґалуа V можна одержати як поле розкладу многочлену цього виду.

Приклад 2. *Нехай* $m,n\in Z$, *де* $m^2+n^2\in Q^2$. *Знайти групу Ґалуа многочлену* $v(x)=x^4-2(m^2+n^2)x^2+n^2(m^2+n^2)$.

Розв'язання. Нехай $m,n\in Z$, де $m^2+n^2\in Q^2$. Тоді многочлен

$$v(x)=x^4-2(m^2+n^2)x^2+n^2(m^2+n^2)$$

незвідний над полем Q, тому, що з умови $m^2+n^2\in Q$ випливає, що

$$b^2-4d=4m^2(m^2+n^2),$$

$$-b \pm 2\sqrt{d} = 2(m^2+n^2) \pm 2m\sqrt{m^2+n^2}$$

не є квадратами в Q. За теоремою 3. отримуємо, що Gal $(F/Q) \cong C_4$, тому, що

$$d(b^2-4d) = 4m^2n^2(m^2+n^2) \in Q^2.$$

Приклад 3. *Знайти групу Ґалуа многочлену* $w(x) = x^4 - px^2 + q$, *де* p, q *довільні пари різних непарних чисел.*

Розв'язання. Для довільних пар різних непарних чисел p, q многочлен $w(x) = x^4 - px^2 + q$ є незвідним над Q. Це безпосередньо випливає із теореми 2. Звідки ми можемо вивести, що $b^2 - 4d = p^2 - 4q \notin Q^2$, так як $p \pm 2\sqrt{q} \notin Q^2$.

Без втрати загальності можна припустити, що $p^2-4q > 0$. Покладемо, що $p^2 - 4q = t^2$ для деякого цілого числа $t > 0$. Тоді t непарне і кожний із множників $4q = (p+t)(p-t)$ парний. Оскільки q просте число і $0 < p-t < p+t$, то $p - t = 2$ і $p + t = 2q$.

Однак звідси випливає, що $p = q + 1$, а це суперечить припущенню, що p і q непарні.

Відповідно, $d = q$ і $d(b^2-4d) = q(p^2-4q)$ не є квадратами в Q, значить, Gal $(F/Q) \cong D_4$ згідно теоремі 3.

Таким чином, більш загальні приклади многочленів з групою Ґалуа D_4 дають ті, що мають пару дійсних і пару комплексних коренів. Відмітимо, що многочлен $w(x)$ має всі дійсні корені, якщо $p^2 - 4q > 0$.

Висновки

В статті наведені основна теорема теорії Ґалуа, характеризація груп Ґалуа біквадратних многочленів та описані приклади побудови груп Ґалуа незвідних над полем Q біквадратних многочленів.

Література

[1] *Артін Е.* Теорія Галуа : [пер. з нім.] / Е. Артін. – К.: Радянська школа, 1963. – 220 с.

[2] *Ван дер Варден Б.Л.* Алгебра : [пер. с нем.] / Б.Л. Ван дер Варден. – М.: Наука, 1979. – 623 с.

[3] *Чеботарев Н.Г.* Основы теории Галуа : в 2-х т. / Н.Г. Чеботарев. – М.: ОНТИ, С. 1934 – 1937.

[4] *Постников М.М.* Теория Галуа / М.М. Постников. – М.: Физматлит, 1963. – 200 с.

УДК 512.53(091)

Рябухо О.М., Парконєна Н.С.

[1] *канд. фіз.-мат. наук, доцент кафедри алгебри, СДПУ*

[2] *студентка 5 курсу фізико-математичного факультету, СДПУ*

e-mail: kafedra_algebry_sdpu@mail.ru

ДОСЛІДЖЕННЯ А.К. СУШКЕВИЧА З ТЕОРІЇ НАПІВГРУП ПЕРЕТВОРЕНЬ НАД НЕСКІНЧЕННИМИ МНОЖИНАМИ

Наводиться коротка характеризація наукових досліджень професора А.К. Сушкевича з теорії напівгруп перетворень над нескінченними множинами. Описано відношення еквівалентності на напівгрупі перетворень над зліченною множиною, яке узагальнює відношення спряженості на ній.

Ключові слова: *А.К. Сушкевич, напівгрупа перетворень, симетрична група, спряжені перетворення.*

Вступ

50 років тому пішов з життя видатний український математик, професор Харківського університету Антон Казимирович Сушкевич, який заслужено вважається одним з фундаторів сучасної теорії напівгруп. Антон Казимирович Сушкевич був одним з ініціаторів дослідження напівгруп перетворень над нескінченними множинами. Цій проблематиці присвячені, зокрема, його праці [2–5] і розділ монографії [1]. А.К.Сушкевич уперше ввів до розгляду напівгрупи ін'єктивних і сюр'єктивних перетворень над нескінченними множинами, охарактеризував їх основні властивості і показав, яку роль відіграють ці напівгрупи при вивченні будови всієї напівгрупи перетворень даної множини [2–4].

Метою нашої замітки є коротка характеризація наукових досліджень професора А.К. Сушкевича з теорії напівгруп перетворень над нескінченними множинами та опис відношення еквівалентності на напівгрупі перетворень над зліченною множиною, яке узагальнює відношення спряженості на ній.

Життєвий шлях А.К. Сушкевича

Сушкевич Антон Казимирович народився 10 (22) січня 1889 року в Борисоглебську Тамбовської губернії. В 1906-1911 роках навчався в Берліні, слухав лекції І. Шура, Л. Шварца, М. Бланка та ін. Повернувшись на Батьківщину (1913), здав екстерном державні іспити в Петербурзькому університеті, а в

1917 році склав магістерські екзамени в Харківському університеті. В 1925 році він захистив докторську дисертацію в м.Харкові.

Свою педагогічну діяльність А.К.Сушкевич розпочав у 1916 році, коли він викладав математику у різних гімназіях міста Харкова. З початку 1918 року він працює приват-доцентом Харківського університету, з 1920 року — ад'юнкт-професором. З 1921 по 1929 рік А.К.Сушкевич — професор Воронежського університету. Наприкінці 1929 року А.К.Сушкевич був обраний дійсним членом Українського Науково Дослідного інституту математики і механіки та переїхав до Харкова.

Водночас А.К.Сушкевич працював професором Харківського геодезичного інституту. З 1933 року і до кінця свого життя він працював в Харківському державному університеті імені М.А.Горького (зараз це Харківський державний університет імені Н.К. Каразіна), де очолював кафедру алгебри та теорії чисел. З 1937 року А.К.Сушкевич — незмінний керівник харківського математичного товариства.

Дослідження А.К. Сушкевича з теорії напівгруп

Наукові інтереси А.К.Сушкевича пов'язані з різноманітними галузями алгебри. Найбільша кількість робіт, і зокрема найвизначніші [1], відносяться до теорії узагальнених груп, тобто до теорії множин з однією алгебраїчною операцією. Він поклав початок систематичному вивченню цієї галузі. Виділив і розглянув основні властивості дій, вивчив зв'язок між ними. Накреслив ряд напрямків в загальній теорії алгебраїчних дій, визначених наявністю тих чи інших властивостей. Працями А.К.Сушкевича покладено початок дослідження деяких типів скінчених квазігруп, встановив їх зв'язок зі скінченними групами, а саме, розглянув дію, обернену до дії множення у групі.

Дослідження Сушкевичем напівгруп підстановок започаткували інший важливий напрямок в теорії напівгруп — напівгрупи перетворень. Було доведено, що кожна скінчена абстрактна напівгрупа може бути ізоморфно представленою напівгрупою однозначних відображень в себе деякої множини. Наступне розповсюдження цього результату на довільні напівгрупи показало, що кожну асоціативну дію можна розглядати як суперпозицію загальних (оборотних або необоротних) перетворень. Сушкевич вперше розглянув напівгрупи відображень зліченної множини в себе (так звані нескінченні підстановки). Він побудував представлення деяких класів напівгруп скінченими та нескінченими підстановками. Пізніше напівгрупи перетворень та представлення напівгруп перетвореннями розглядалися В.Вагнером (Саратовська алгебраїчна школа), Л.Глускіним (Харків), Є.Ляпіним (Ленінград), А.Мальцевим

(Новосибірськ). Серед досліджень Сушкевича конкретних напівгруп, крім підстановок, слід згадати ряд результатів, які стосуються напівгруп особливих та нескінченних матриць і представлень напівгруп такими матрицями. Матричні напівгрупи пізніше розглядали А.Мальцев, Є.Халезов, Л.Глускін, І.Понизовський та інші алгебраїсти.

Необхідні визначення і допоміжні результати

Ми ототожнюватимемо зліченну множину з множиною натуральних чисел N. Нехай $T(N)$ — напівгрупа всіх (скрізь визначених) перетворень множини N, $In(N)$ — її піднапівгрупа ін'єктивних перетворень, а $Sur(N)$ — піднапівгрупа сюр'єктивних перетворень. Перетином напівгруп $In(N)$ і $Sur(N)$ є, очевидно, симетрична група $S(N)$, а напівгрупою, що ними породжується, є вся $T(N)$.

Далі ми скрізь вважатимемо, що композиція (добуток) перетворень із $T(N)$ діє на числа із N зліва направо, тобто для довільних $f, g \in T(N)$ та $x \in N$

$$(f \cdot g)(x) = g(f(x)).$$

У роботі [3] доведено таке твердження:

Лема 1. *Для довільної підстановки $f \in S(N)$ існують перетворення $g \in In(N)$ та $h \in Sur(N)$ такі, що має місце рівність*

$$f = g \cdot h, \tag{1}$$

причому перетворення g можна вибрати довільним чином, а перетворення h при фіксованому g — кількома способами.

З леми 1 випливає, що для кожної підстановки $f \in S(N)$ існує безліч розкладів вигляду (1). Зокрема, це буде правильно і для тотожної підстановки $e \in S(N)$.

Означення 1. *Пару перетворень (g, h), $g \in In(N)$, $h \in Sur(N)$ назвемо допустимою парою, якщо виконується умова допустимості*

$$g \cdot h = e.$$

Нехай U — множина допустимих пар перетворень із напівгрупи $T(N)$. Тоді множина U має потужність континуум, оскільки перша компонента допустимої пари може бути довільним перетворенням з $In(N)$, а напівгрупа $In(N)$ має потужність континуум. Введемо на множині U дію множення згідно з правилом

$$(g_1, h_1) \cdot (g_2, h_2) = (g_1 \cdot g_2, h_2 \cdot h_1), \tag{2}$$

де $g_1, g_2 \in In(N)$, $h_1, h_2 \in Sur(N)$.

Лема 2. *Множина U відносно дії множення, визначеної рівністю* (2), *утворює моноїд.*

Нагадаємо, що два перетворення $g, h \in T(N)$ називаються спряженими, якщо існує підстановка $u \in S(N)$ така, що має місце рівність

$$g = u^{-1} \cdot h \cdot u.$$

Відношення спряженості є відношенням еквівалентності на всій напівгрупі $T(N)$. Його класи еквівалентності називаються класами спряженості.

Лема 3. *Перетворення, спряжене до перетворення з $In(N)$, міститься в $In(N)$, а перетворення, спряжене до перетворення з $Sur(N)$, міститься в $Sur(N)$.*

Доведення — безпосередня перевірка.

Спряженість у сенсі Сушкевича

Використовуючи поняття допустимої пари перетворень можна природним чином визначити нове відношення спряженості елементів у напівгрупі $T(N)$, яке є узагальненням звичайної спряженості, визначеної вище в п. .

Означення 2. *Перетворення f, $g \in T(N)$ назвемо спряженими за Сушкевичем (позначимо $f \sim_S g$), якщо існують допустимі пари* (g_1, h_1), $(g_2, h_2) \in U$ *такі, що мають місце рівності*

$$f = g_1 \cdot g \cdot h_1, \;\; g = g_2 \cdot f \cdot h_2. \tag{3}$$

Теорема 1. *Спряженість за Сушкевичем є відношенням еквівалентності на $T(N)$.*

Доведення. Пересвідчимось, що спряженість за Сушкевичем $\sim_S$ є рефлексивним, симетричним і транзитивним відношенням. Позаяк пара $(\varepsilon, \varepsilon)$ є допустимою, то відношення $\sim_S$ є рефлексивним. Якщо $f \sim_S g$, де f, $g \in T(N)$, то існують пари (g_1, h_1), $(g_2, h_2) \in U$ такі, що виконуються рівності (3). А оскільки ці рівності симетричні щодо заміни f та g, то також маємо $g \sim_S f$.

Нехай $f \sim_S g$ та $g \sim_S h$. Це означає, що існують допустимі пари (g_1, h_1), (g_2, h_2) та (g_1', h_1'), (g_2', h_2') такі, що

$$f = g_1 \cdot g \cdot h_1, \;\; g = g_2 \cdot f \cdot h_2, \;\; g = g_1' \cdot h \cdot h_1', \;\; h = g_2' \cdot g \cdot h_2'.$$

Звідси дістаємо рівності

$$f = g_1 \cdot g_1' \cdot h \cdot h_1' \cdot h_1, \;\; h = g_2' \cdot g_2 \cdot f \cdot h_2 \cdot h_2'.$$

Оскільки $In(N)$ та $Sur(N)$ — напівгрупи, то перетворення $g_1 \cdot g_1'$, $g_2' \cdot g_2$ містяться в $In(N)$, а $h_1' \cdot h_1$, $h_2 \cdot h_2'$ належать до $Sur(N)$. Крім того,

$$g_1 \cdot g_1' \cdot h_1' \cdot h_1 = g_1 \cdot e \cdot h_1 = g_1 \cdot h_1 = e.$$

Аналогічно $g_2' \cdot g_2 \cdot h_2 \cdot h_2' = e$, тобто пари $(g_1 \cdot g_1', h_1' \cdot h_1)$ та $(g_2' \cdot g_2, h_2 \cdot h_2')$ є допустимими. Це означає, що $f \sim_S h$, і відношення $\sim_S$ транзитивне. Таким чином, $\sim_S$ є еквівалентністю. □

Висновки

Кожні два перетворення з $T(N)$, спряжені в звичайному сенсі, будуть спряженими в сенсі Сушкевича.

Справді, якщо перетворення $u, v \in T(N)$ є спряженими, то існує підстановка $f \in S(N)$ така, що $u = f^{-1}vf$, а отже, $v = fuf^{-1}$. Тому допустимі пари (f^{-1}, f) та (f, f^{-1}) будуть визначати спряженість перетворень u та v в сенсі Сушкевича. Обернене не є правильним, а саме, із спряженості перетворень у сенсі Сушкевича не випливає їх спряженість у звичайному розумінні.

Література

[1] *Сушкевич А.К.* Теория обобщенных групп / А.К. Сушкевич. – К.: ДНТВУ, 1937. – 176 с.

[2] *Сушкевич А.К.* Исследования о бесконечных подстановках / А.К. Сушкевич // Записки НО і ІМ ХДУ і Харківського математичного товариства. – Харків, 1940. – № 18. – С. 27 – 37.

[3] *Сушкевич А.К.* Исследования о бесконечных подстановках / А.К. Сушкевич // Сборник посвященный памяти академика Дмитрия Александровича Граве / под. ред. О.Ю. Шмидта, Б.Н. Делоне, Н.Г. Чеботарева. – М.; Ленинград, 1940. – С. 245 – 255.

[4] *Suschkewitsch A.K.* Uber einen merkurdigen Typus der verallgemeinerten unendlichen Gruppen / A.K. Suschkewitsch // Записки Харківського Математичного товариства. – Х., 1934. – Т. 9, сер. 4. – С. 39 – 44.

[5] *Suschkewitsch A.K.* Uber suchungen uber verallgemeinerten Substitutionen / A.K. Suschkewitsch // Atti del Congresso Internaz. del Hatem. – Bologna, 1928. – T. 2. – P. 147 – 157.

УДК 512.552.3, 511.14

Пащенко З.Д., Плахотя О.В.

[1] *канд. фіз.-мат. наук, доцент кафедри алгебри, СДПУ*

[2] *студентка 5 курсу фізико-математичного факультету, СДПУ*

e-mail: kafedra_algebry_sdpu@mail.ru

РЕШЕТО ЕРАТОСФЕНА ДЛЯ ГАУСОВИХ ЧИСЕЛ

Побудовано аналог відомого решета Ератосфена для гаусових чисел. Описано його алгоритм. В якості прикладу знайдено всі прості гаусові числа, модуль яких не перевищує 12. Наведено приклад побудови канонічного розкладу гаусового числа.

Ключові слова: *гаусові числа, решето Ератосфена, прості числа, асоційовані числа, канонічний розклад*

Вступ

В теорії факторіальних кілець основним є питання канонічного розкладу елементів. Для цього досліджуються оборотні та прості елементи.

Відомо, що всі евклідові кільця є факторіальними. Достатньо дослідженим є евклідове кільце Z цілих чисел. Його оборотними елементами є числа 1 і -1, всі прості додатні числа p знаходяться за допомогою відомого решета Ератосфена, а тому всі прості числа будуть $\pm p$.

Нагадаємо, що решето Ератосфена використовується для знаходження простих чисел, що не перевищують n. Викреслювання складених чисел закінчується, коли процес доходить до простого числа, що перевищує $\sqrt{n}$. Канонічний розклад натурального числа a знаходиться відбором простих дільників числа a.

Евклідове кільце многочленів над полем раціональних чисел не має такої процедури, яка б дозволяла перевіряти незвідність многочленів, якщо їх степені $n \geq 5$. Тому задача знаходження канонічного розкладу не завжди розв'язна.

Множина цілих гаусових чисел $Z[i] = \{a+bi | a, b \in Z\}$ утворює евклідове кільце, у якого $\delta(a+bi) = \sqrt{a^2+b^2}$, тобто $\delta(z) = |z|$. Нас цікавить питання про можливість знаходження канонічного розкладу довільного гаусового числа. Дослідження ведуться по аналогії з кільцем цілих чисел.

В кільці гаусових чисел оборотними є числа $1, i, -1, -i$. Якщо p – простий елемент кільця $Z[i]$, який знаходиться в першій чверті комплексної площини, то всі асоційовані з ним числа, $pi, -p, -pi$ – також прості, і будуть знаходитись у другій, третій, четвертій чверті відповідно, оскільки множенню на $i, -1, -i$ відповідає поворот на кути $\frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}$ відповідно.

Тому достатньо знайти всі прості числа, що знаходяться в першій чверті. Для цього побудовано аналог решета Ератосфена для гаусових чисел, суть якого викладена в цій статті.

Основна частина

Теоретичною основою для побудови аналогу решета Ератосфена для гаусових чисел є наступні теореми:

Теорема 1. *Модуль меншого за модулем дільника цілого гаусового числа z не перевищує $\sqrt{|z|}$.*

Доведення. Нехай $z_1 \in Z[i]$ – менший за модулем дільник z, тоді

$$\exists z_2 \in Z[i]: \quad |z_2| \geq |z_1| \text{ і } z = z_1 \cdot z_2.$$

А значить $|z| = |z_1| \cdot |z_2|$.

Якщо $|z_1| > \sqrt{|z|}$, то $|z_2| = \frac{|z|}{|z_1|} < \frac{|z|}{\sqrt{|z|}} = \sqrt{|z|} < |z_1|$. Тобто маємо, що $|z_2| < |z_1|$, що суперечить умові. □

Наслідком цієї теореми є наступна теорема:

Теорема 2. *Якщо гаусове число z не ділиться ні на яке просте число модуля меншого, ніж $\sqrt{|z|}$, то z – просте.*

Зауважимо, що всі числа першої четверті комплексної площини $Z[i]$, які діляться на $p = c + di$, мають вигляд:

$$(tc + t_1|p|^2) + (td + t_2|p|^2)i, \quad t \in N, \quad t_1, t_2 \in Z_0.$$

Крім того, якщо $p \in Z$, то $(a + bi) \vdots p$, якщо $a = p \cdot t_1$ і $b = p \cdot t_2$, $t_1, t_2 \in N$.

Зауваження 1. *Числа першої чверті, кратні $c + di, d \neq 0$, знаходяться зліва, справа, зверху та знизу з кроком $c^2 + d^2$ від чисел вигляду $ct + dti$, $t \in N$, тобто кроком кратності є квадрат модуля числа $c + di$.*

Зауваження 2. *Числа першої чверті, кратні $c, c \in N$, мають вигляд $ct_1 + dt_2 i, t_1, t_2 \in N_0$, тобто кроком кратності є модуль числа c.*

Знайдемо всі прості цілі гаусові числа, модуль яких не перевищує заданого числа n (аналог решета Ератосфена).

1. Розглянемо всі гаусові числа $a+bi$ першої чверті ($a>0$, $b\geq 0$) такі, що $\sqrt{a^2+b^2}\leq n$.

Будемо їх розташовувати у вигляді таблиці, яка відповідає зображенню комплексних чисел на комплексній площині. Якщо їх розташовувати в порядку зростання модуля, то їх можна записати так:

$1,\ 1+i,\ 2,\ 1+2i,\ 2+i,\ 2+2i,\ 3,\ 1+3i,\ 3+i,\ 2+3i,\ 3+2i,\ \ldots$.

Решето Ератосфена для гаусових чисел починається із найменших за модулем чисел $\neq 1$. Очевидно, що найменше за модулем гаусове число – $1+i$, тому за Теоремою 2 воно просте.

Таким чином, викреслюємо всі гаусові числа, що діляться на $1+i$: спочатку викреслюємо всі числа вигляду $(1+i)k$, $k\in Z$, далі вправо, вліво, вверх, вниз від вже викреслених чисел вигляду $(1+i)k$, $k\in Z$ викреслюємо кожне друге число, так як $|1+i|^2=2$. Викреслюються числа: 2, $2+2i$, $1+3i$, $3+i$, $\ldots$.

2. Всі числа $z\in Z_I[i]$, $z\neq 1+i$ з найменшим модулем, що залишились не викресленими, є простими. А саме: $1+2i$ і $2+i$.

Вибираємо число $1+2i$ і викреслюємо всі числа, що діляться на нього. Викреслюємо всі числа вигляду $(1+2i)m$, $m\in Z$. Знаходимо квадрат модуля числа $1+2i$: $|1+2i|^2=1+2^2=5$. Далі вправо, вліво, вверх, вниз викреслюємо кожне п'яте число (так як $|1+2i|^2=5$), починаючи від вже викреслених вигляду $(1+2i)m$, $m\in Z$. Викреслюються числа: $3+i$, $2+4i$, 5, $4+3i$, $3+6i$, $1+7i$, $\ldots$.

Вибираємо число $2+i$ і викреслюємо всі числа, що діляться на нього (аналогічно). Викреслюються числа: $1+3i$, $4+2i$, 5, $3+4i$, $2+6i$, $6+3i$, $5+5i$, $\ldots$.

3. З чисел, що залишились не викресленими, вибираємо найменше за модулем, воно буде простим. Це число 3, $|3|=3$. Вибираємо число 3 і викреслюємо всі числа, що діляться на нього.

Спочатку викреслюємо всі числа вигляду $3\cdot c$, $c\in N$, далі по вертикалі, починаючи від вже викреслених чисел вигляду $3\cdot c$, $c\in N$, викреслюємо кожне третє число (так як $|3|=3$). Викреслюються числа: $3+3i$, 6, $3+6i$, $6+3i$, $6+6i$, 9, $3+9i$, $9+3i$, $\ldots$.

4. Далі вибираємо найменші за модулем числа серед тих, що залишились не викресленими, і викреслюємо їм кратні і т.д.

Процес продовжуємо до тих пір, доки модуль не викреслених чисел, крім знайдених простих, не буде перевищувати число $\sqrt{n}$. Всі ці не викреслені числа доповнюють множину простих чисел, модуль яких не перевищує n.

Наведемо приклад знаходження всіх простих гаусових чисел, модуль яких не перевищує 12.

Використовуємо аналог решета Ератосфена для гаусових чисел. Процес будемо продовжувати до тих пір, доки модуль не викреслених чисел не буде перевищувати $\sqrt{12}$.

1. Зобразимо у вигляді таблиці всі гаусові числа $a+bi$ першої чверті ($a>0$, $b\geq 0$) такі, що $\sqrt{a^2+b^2}\leq 12$.

~~$1+11i$~~	~~$2+11i$~~	~~$3+11i$~~	$4+11i$	$5+11i$							
$1+10i$	~~$2+10i$~~	$3+10i$	~~$4+10i$~~	~~$5+10i$~~	~~$6+10i$~~						
~~$1+9i$~~	~~$2+9i$~~	~~$3+9i$~~	$4+9i$	~~$5+9i$~~	~~$6+9i$~~	~~$7+9i$~~					
~~$1+8i$~~	~~$2+8i$~~	$3+8i$	~~$4+8i$~~	$5+8i$	~~$6+8i$~~	$7+8i$	~~$8+8i$~~				
~~$1+7i$~~	$2+7i$	~~$3+7i$~~	~~$4+7i$~~	~~$5+7i$~~	~~$6+7i$~~	~~$7+7i$~~	$8+7i$	~~$9+7i$~~			
$1+6i$	~~$2+6i$~~	~~$3+6i$~~	~~$4+6i$~~	$5+6i$	~~$6+6i$~~	~~$7+6i$~~	~~$8+6i$~~	~~$9+6i$~~	~~$10+6i$~~		
~~$1+5i$~~	$2+5i$	~~$3+5i$~~	$4+5i$	~~$5+5i$~~	$6+5i$	~~$7+5i$~~	$8+5i$	~~$9+5i$~~	~~$10+5i$~~		
$1+4i$	~~$2+4i$~~	~~$3+4i$~~	~~$4+4i$~~	$5+4i$	~~$6+4i$~~	~~$7+4i$~~	~~$8+4i$~~	$9+4i$	~~$10+4i$~~	$11+4i$	
~~$1+3i$~~	$2+3i$	~~$3+3i$~~	~~$4+3i$~~	~~$5+3i$~~	~~$6+3i$~~	~~$7+3i$~~	$8+3i$	~~$9+3i$~~	$10+3i$	~~$11+3i$~~	
$1+2i$	~~$2+2i$~~	$3+2i$	~~$4+2i$~~	$5+2i$	~~$6+2i$~~	$7+2i$	~~$8+2i$~~	~~$9+2i$~~	~~$10+2i$~~	~~$11+2i$~~	
$1+i$	$2+i$	~~$3+i$~~	$4+i$	~~$5+i$~~	$6+i$	~~$7+i$~~	~~$8+i$~~	~~$9+i$~~	$10+i$	~~$11+i$~~	
1	~~2~~	3	4	~~5~~	~~6~~	7	~~8~~	~~9~~	~~10~~	11	~~12~~

2. Викреслюємо всі числа, що діляться на перше просте число $1+i$, кроком кратності є число 2.

3. З тих, що залишились не викресленими, вибираємо найменші за модулем: $1+2i$ і $2+i$. Викреслюємо всі числа, що діляться на прості числа $1+2i$ і $2+i$. Кроком кратності є число 5.

4. З чисел, що залишились не викресленими, вибираємо найменше за модулем. Це число 3. Виділяємо число 3 і викреслюємо всі числа, що діляться на нього.

5. З чисел, що залишились не викресленими, вибираємо найменші за модулем. Це числа: $2+3i$, $3+2i$. Але $|2+3i|=|3+2i|=\sqrt{13}$, а $\sqrt{13}>\sqrt{12}$, тобто процес викреслювання закінчено і всі числа, що залишились не викресленими у визначеному діапазоні, є простими.

Отже, простими числами, модуль яких не перевищує 12, є: $1+i$, $1+2i$, $2+i$, 3, $2+3i$, $3+2i$, $1+4i$, $4+i$, $2+5i$, $5+2i$, $1+6i$, $6+i$, $4+5i$, $5+4i$, 7, $2+7i$, $7+2i$, $5+6i$, $6+5i$, $3+8i$, $8+3i$, $5+8i$, $8+5i$, $4+9i$, $9+4i$, $1+10i$, $10+i$, $3+10i$, $10+3i$, 11, $7+8i$, $8+7i$, $4+11i$, $11+4i$.

Ці прості гаусові числа розташовані в порядку зростання модуля, і стає очевидним, що не всі прості числа кільця Z є простими в кільці $Z[i]$. Наприклад, 2 і 5 не є простими в $Z[i]$, тоді як 3, 7, 11 – прості як в Z, так і в $Z[i]$.

Решето Ератосфена є зручним оператором для знаходження канонічного розкладу гаусових чисел. Наприклад, $z = 89 + 86i$. $|z| = 17\sqrt{53} < 123$, $\sqrt{|z|} < 12$, тобто всі його прості дільники знаходяться серед чисел, знайдених у попередньому прикладі: $1+i$, $1+2i$, $2+i$, 3, $2+3i$, $3+2i$, $1+4i$, $4+i$, $2+5i$, $5+2i$, $1+6i$, $6+i$, $4+5i$, $5+4i$, 7, $2+7i$, $7+2i$, $5+6i$, $6+5i$, $3+8i$, $8+3i$, $5+8i$, $8+5i$, $4+9i$, $9+4i$, $1+10i$, $10+i$, $3+10i$, $10+3i$, 11, $7+8i$, $8+7i$, $4+11i$, $11+4i$.

Звичайним перебором цих чисел знайдемо прості дільники z. Першим таким дільником виявляється $4+i$: $z = (4+i)(x+yi)$. Цей дільник перевіряємо на кратність: z ділиться на $(4+i)^2$, і z не ділиться на $(4+i)^3$ – тобто кратність 2: $z = (4+i)^2(7+2i)$. Оскільки $7+2i$ – просте гаусове число, $z = (4+i)^2(7+2i)$ - канонічних розклад гаусового числа z.

Висновки

Побудовано алгоритм знаходження простих гаусових чисел, модуль яких не перевищує довільного взятого додатнього числа. Це дає можливість створити процедуру перевірки на простоту чи складеність довільного гаусового числа, а також забезпечує цілковиту розв'язність задачі знаходження канонічного розкладу гаусових чисел.

Література

[1] *Крутецкий Р.О.* Алгебра и арифметика комплексных чисел : пособие для учителей средних школ / Р.О. Крутецкий, Д.К. Фадеев. – Л.: Учпедгиз, ленинградское отделение, 1939. – 186 с.

[2] *Костюкова Н.И.* Комбинаторные алгоритмы для программистов : [електронний ресурс]. – Режим доступу : `http://www.intuit.ru/department/algorithms/algocombi/6/2.html`

[3] *Требенко Д.Я.* Алгебра і теория чисел / Д.Я. Требенко, О.О. Требенко. – К.: НПУ імені М.П. Драгоманова, 2006. – Ч 1. – 400 с.

[4] *Виноградов И.М.* Основы теории чисел / И.М. Виноградов. – М.: Наука, 1981. – 176 с.

[5] *Завало С.Т.* Алгебра и теория чисел / С.Т. Завало, В.Н. Костарчук, Б.И. Хацет. – К.: Вища школа, 1974. – Ч 1. – 400 с.

ФІЗИКА

УДК 537.311.322

Надточий В.А., Уколов А.И., Попов О.К., Перебайло С.А.

[1] *доктор физ.-мат. наук, профессор, заведующий кафедрой физики, СГПУ*

[2] *ассистент кафедры общенаучных дисциплин, АДИ ДонНТУ*

[3] *магистрант, СГПУ*

[4] *студент, АДИ ДонНТУ*

e-mail: ukolov_aleksei@mail.ru

ИЗМЕРЕНИЕ ПАРАМЕТРОВ РЕКОМБИНАЦИИ НЕРАВНОВЕСНЫХ НОСИТЕЛЕЙ ЗАРЯДА В ПРИПОВЕРХНОСТНЫХ СЛОЯХ МОНОКРИСТАЛЛИЧЕСКОГО Ge

Рассмотрена конструкция устройства для определения времени жизни неравновесных носителей заряда в приповерхностном дефектном слое монокристаллического германия по результатам измерений эффективного времени жизни, времени жизни в объеме и скорости поверхностной рекомбинации.

Ключевые слова: *полупроводник, эффективное время жизни, скорость поверхностной рекомбинации.*

Введение

Измерение структурно-чувствительных параметров полупроводника дает возможность определить качество материала для изготовления полупроводниковых приборов. В данной работе рассмотрено разработанное авторами измерительное устройство для определения параметров рекомбинации неравновесных носителей заряда с учетом поверхностной рекомбинации. Поверхностная рекомбинация изменяет не только стационарную фотопроводимость, но и кинетику ее установления и затухания. Рассмотрим этот вопрос для пластинки, когда ее толщина намного меньше двух других измерений. Можно проанализировать убывание во времени избыточных носителей с момента выключения их источника. В этом случае мы должны рассматривать зависящее от времени уравнение непрерывности

$$\frac{\partial p}{\partial t} = D\frac{\partial^2 p}{\partial z^2} - \frac{\delta p}{\tau_v} \ , \qquad (1)$$

здесь D – коэффициент диффузии, z – координата по толщине пластины, δp-концентрация неравновесных дырок, τ_v – объемное время жизни дырок. Общее решение уравнения (1) можно записать в виде

$$\delta p(t,z) = \sum_{m=1}^{\infty} \alpha_m \exp^{\frac{-t}{\tau_m}} \cos maz \tag{2}$$

где m – целые числа, α_m, τ_m и a – постоянные. Подставляя (2) в (1), мы находим, что это уравнение удовлетворяется при условии

$$\frac{1}{\tau_m} = \frac{1}{\tau_v} + Da^2m^2\ . \tag{3}$$

Если исключить начальный период затухания фотопроводимости и оставить в (2) член с $m=1$ можно получить, что эффективное время жизни

$$\frac{1}{\tau_{eff}} = \frac{1}{\tau_v} + \frac{1}{\tau_s}, \tag{4}$$

а для образца с дефектным приповерхностным слоем [1]

$$\frac{1}{\tau_{eff}} = \frac{1}{\tau_l} + \frac{1}{\tau_s} + \frac{1}{\tau_v}. \tag{5}$$

В формуле (5) τ_{eff} – измереяемое время жизни, τ_l – время жизни в приповерхностном слое, $\tau_s = b/2s$, где b – коэффициент, учитывающий размеры образца [2], s – скорость поверхностной рекомбинации.

Основная часть

В данной работе предложена конструкция устройства, позволяющего определить τ_{eff}, s, τ_l, τ_v, длину свободного пробега и коэффициент диффузии D носителей заряда на одном измерительном столике, используя необходимые методики. В электрических схемах измерений выполнены некоторые усовершенствования по сравнению с известными в литературе, позволяющие при малых затратах времени получать хорошо воспроизводимые результаты. В конструкции (рис. 1) можно выделить общие детали и отдельные, используемые для операций измерения определенного параметра. Основой является круглая стальная плита (1), на которой крепится индикатор перемещений (2) с чувствительностью 1 мкм/дел., пределами (0-1) мм. и двухкоординатный столик (3). Его перемещение по X (влево - вправо) осуществляется рукояткой (4), а измерение - микронным индикатором (2) или отсчетом по мерочной линейке (5). Перемещение столика (3) по Y (вперед - назад) осуществляется рукояткой (6), а его значение отсчитывается по линейке (7). Таким образом осуществляется двухкоординатное перемещение образца (8), укрепленного пружинным зажимом (9); рукоятка (10) служит для освобождения, переустановки или смены образца.

I. Импульсный метод модуляции проводимости. Вопрос о времени жизни неосновных носителей заряда при измерениях этим методом рассмотрен в [14], где изложена теория механизма рекомбинации через локальные центры и приведена блок-схема. Элементами конструкции для измерений данным методом является деталь (11) вертикальной подачи держателя зонда (12), который укреплен на пружине (13) и свободно перемещается в отверстии планки (14).

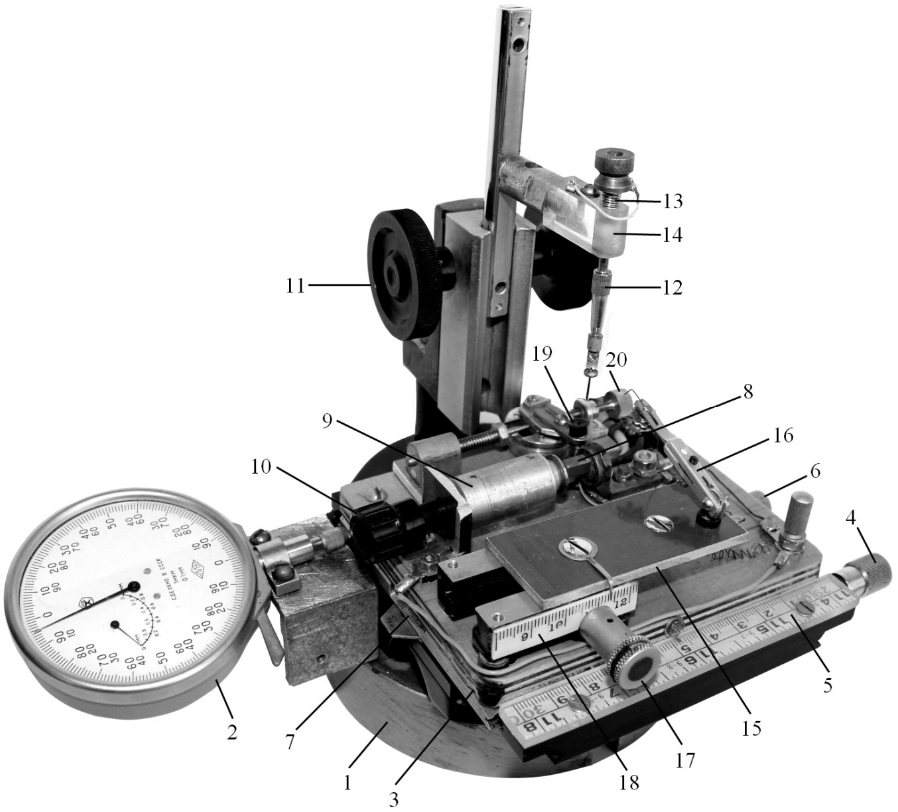


Рис. 1: Фотография измерительной установки

Такое крепление держателя позволяет плавно регулировать давление зонда на поверхность полупроводника. Перед началом измерений образец с дефектами в приповерхностном слое, введенными, например, деформированием при $T = 300\,\mathrm{K}$ [3-4], протравливают в кипящей перекиси водорода H_2O_2, промывают в дистиллированной воде и сушат в потоке горячего воздуха. Затем без загрязнений крепят в зажиме (9) предметного столика; при этом между торцевой поверхностью образца и держателем должен быть обеспечен омический контакт. Контакт между зондом и образцом должен быть малошумящим, что достигается в электрической схеме измерения τ_{eff} (рис. 2). Для этого кратковременным нажатием кнопки Кн и переводом ее в положение 2 производят формовку контакта импульсами тока и добиваются необходимого соотношения сигнал/шум при минимальном напряжении. В предлагаемом варианте электрической схемы (рис. 2)используется генератор прямоугольных импульсов Г5-7А, имеющий систему задержки, которая позволяет получить на выходе опорный импульс и импульс, задержанный на определенное время по отношению к опорному. Напряжение на образец подается через резистор R_1, обеспечивающий режим генератора тока. Диоды $Д_1$-$Д_4$ типа Д310; из них $Д_1$, $Д_2$ и $Д_4$ - корректирующие форму импульсов, а $Д_3$ - выполняет роль ограничителя, т.е. позволяет выделить верхнюю часть импульса напряжения, изменяющуюся в результате инжекции и рекомбинации носителей заряда. Необходимый уровень ограничения устанавливается резистором R_3. Схема при малых временах задержки измерительного импульса дает возможность определять время жизни неосновных носителей заряда τ_l в приповерхностном слое образца, а при больших временах – τ_v в его объеме [5]. Перемещая образец по двум направлениям, можно находить τ в любой точке на поверхности [6].

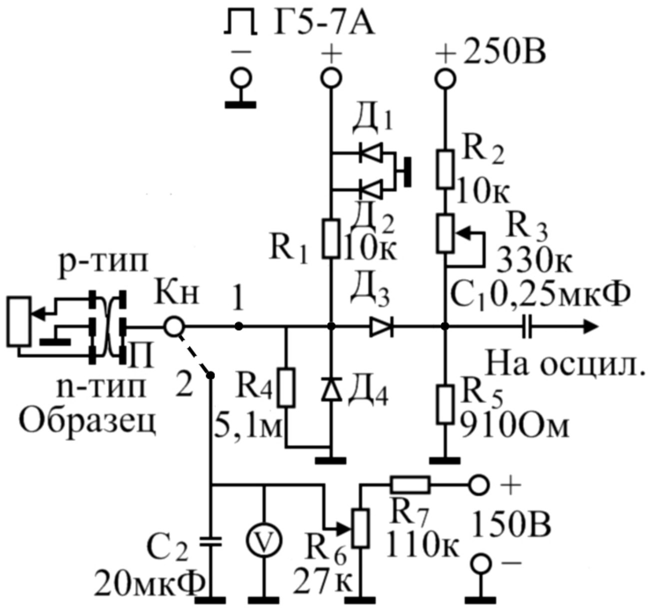


Рис. 2: Электрическая схема измерения времени жизни неравновесных носителей заряда импульсным методом модуляции проводимости

II. Фотоэлектрический метод. Определение диффузионной длины основано на измерении пространственного распределения концентрации неравновесных носителей заряда, возбуждаемых светом [7,8]. Перед измерениями L_D планку (14) (рис. 1) вместе с держателем зонда (12) снимают для установки над образцом (8) источника света с оптической системой (см. рис. 3). В ее состав входит конденсорная линза (К) и щелевая диафрагма (Д), между которыми помещен модулятор света (М). Система обеспечивает освещение образца модулированной по интенсивности полосой света, толщиной $\leq\ 0,1$ мм. В устройстве (рис. 1) используется также второй, закрепленный на первом (3), подвижный столик (15) с держателем зонда (16). Перемещение его по X (влево - вправо) осуществляется рукояткой (17), а отсчет производится по линейке (18). Таким образом в устройстве предусмотрено как перемещение образца (8), так и относительно него – держателя зонда (16), чем достигается измерение L_D на удлиненных образцах без переустановки микрометрического датчика (2) с верхним пределом 1 мм. В отличие от [7-9] в схеме измерения L_D (рис. 3) применен, изготовленный авторами высокостабильный по частоте модулятор интенсивности света на основе камертонного генератора. Использован камертон с собственной частотой колебаний $f_0 = 294$ Гц.

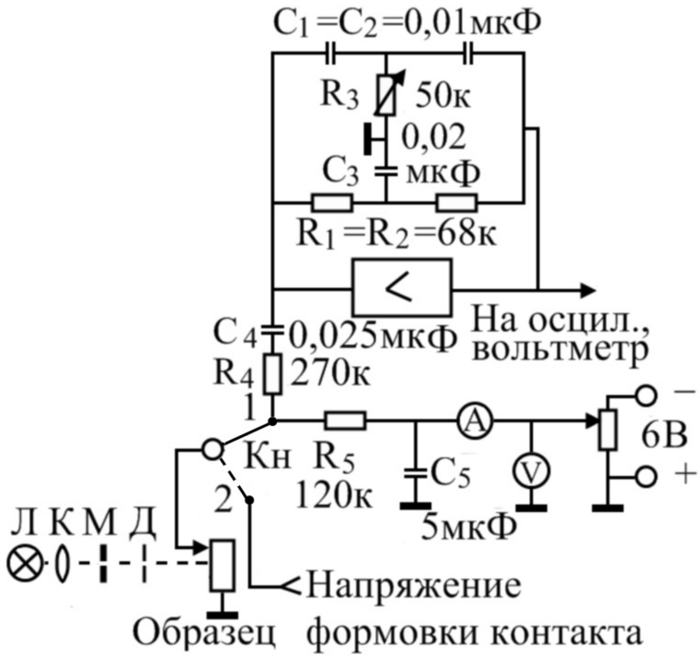


Рис. 3: Электрическая схема измерения диффузионной длины носителей заряда фотоэлектрическим методом

На концах его вибраторов были напаяны тонкие пластинки, между которыми создавался тонкий зазор в виде щели. По обеим сторонам вблизи вибраторов крепились малогабаритный динамический микрофон и электромагнит; микрофон включали на вход низкочастотного усилителя, а к его выходу - в цепь обратной связи - электромагнит, чем обеспечивали самовозбуждение генератора. При соблюдении определенных условий в подобного вида автогенераторах [9] можно добиться практически реализуемой стабильности частоты на порядок более высокий, чем в LC - и RC - генераторах. В схеме (рис.

3) использован также селективный усилитель с двойным Т-образным RC-фильтром [10], настраиваемый на частоту модулятора резистором R_3. При узкой полосе пропускания усилителя существенно повышается соотношение сигнал/шум. В фотоэлектрическом методе измерения L_D используется подвижный световой зонд с энергией фотонов, большей ширины запрещенной зоны. Свет, генерирующий электронно-дырочные пары, поглощается в тонком приповерхностном слое. Поэтому дефекты структуры, создающие глубокие уровни в запрещенной зоне и являющиеся эффективными центрами рекомбинации, могут существенно изменять L_D, а поэтому и время жизни τ неосновных носителей заряда. Значение τ можно определять по формуле $\tau = L_D^2 / D$ при известной величине коэффициента диффузии D (см. ниже).

III. Метод движущегося светового луча позволяет измерить скорость поверхностной рекомбинации, коэффициент диффузии и диффузионную длину неосновных носителей заряда [7,11]. В устройстве (рис. 1) используется осветитель, формирующий узкую полосу света на образце, зеркало, укрепленное на микродвигателе, подвижный столик (15) с держателем зонда (16) и фотодиод (19). При вращении зеркала тонкая и широкая полоса света возбуждает импульс тока в цепи фотодиода и генерацию неравновесных носителей заряда в образце [8,11]. Фотодиодные импульсы используются для синхронизации осциллографа и генератора импульсных сигналов. При подаче на вход Z эти импульсы создают метки времени на осциллограмме, которая имеет вид несимметричной куполообразной кривой и представляет зависимость концентрации неравновесных носителей заряда от времени в контакте зонда с поверхностью полупроводника. Изображение сигнала можно смещать рукояткой (20) в положение, удобное для фотографирования, изменяя его временную задержку относительно импульса запуска развертки.

Выводы

В работе разработано и изготовлено устройство для измерения параметров рекомбинации неравновесных носителей заряда в приповерхностных слоях монокристаллов Ge. Результаты измерений в рассмотренном устройстве в значительной мере зависят от качества монтажа электрических схем. Для получения хорошо воспроизводимых результатов следует принимать меры по уменьшению шумовых составляющих в сигнале и уровня фона от сети переменного тока. Рассмотренное измерительное устройство может быть использовано в учебных целях и для технологического контроля изделий микроэлектронной техники.

Литература

[1] *Готра З.Ю.* Технология микроэлектронных устройств : Справочник / З.Ю. Готра. – М.: Радио и связь, 1991. – 528 с.

[2] *Пека Г.П.* Физика поверхности полупроводников / Г.П. Пека. – К.: Изд. Киевского ун-та, 1967. – 191 с.

[3] *Nadtochy V.* Structure changes caused by the stress gradient in subsurface layers of germanium single crystals / V. Nadtochy, I. Zhikharev, M. Golodenko // Sol. State Phenomena. – 2003. – V. 94. – P. 253 – 256.

[4] *Надточий В.А.* Рентгеновские исследования дефектов структуры в приповерхностных слоях монокристаллов германия и кремния, деформированных при 310 К / В.А. Надточий, И.В. Жихарев, Н.Н. Голоденко // Физ. и техн. высоких давлений. – 2003. – Т. 13, № 1. – С. 91 – 95.

[5] *Уколов А.И.* Измерение времени жизни неосновных носителей заряда в приповерхностном слое монокристаллического Ge зондовым методом / А.И. Уколов, В.А. Надточий, Н.Н. Голоденко // Вісник ХНУ, серія Фізика. – 2011. – Т. 962, № 15. – С. 63 – 66.

[6] *Надточий В.А.* Исследование электрических свойств Ge и Si, деформированных при низких температурах / В.А. Надточий, Н.К. Нечволод, Г.Д. Сущенко // Физ. и техн. высоких давлений. – 2001. – Т. 11, № 1. – С. 104 – 110.

[7] *Павлов Л.П.* Методы измерения параметров полупроводниковых материалов / Л.П. Павлов. – М.: Высшая школа, 1987. – 238 с.

[8] *Шалимова К.В.* Практикум по полупроводникам и полупроводниковым приборам / К.В. Шалимова – М.: Высшая школа, 1968. – 464 с.

[9] *Лугвин В.Г.* Элементы современной низкочастотной электроники / В.Г. Лугвин – М.: Энергия, 1964. – 90 с.

[10] *Барсуков Ф.И.* Генераторы и селективные усилители низкой частоты / Ф.И. Барсуков. – М.: Энергия, 1964. – 82 с.

[11] *Уколов О.І.* Визначення швидкості поверхневої рекомбинації і її впливу на час життя нерівноважних носіїв заряду / О.І. Уколов, В.О. Надточій, А.З. Калимбет // Збірник наукових праць фізико-математичного факультету СДПУ. – 2011. – № 1. – С. 104 – 110.

УДК 620.3

Надточий В.А., Уколов А.И., Костенко С.А, Редникин Д.Ю.

[1] *доктор физ.-мат. наук, профессор, заведующий кафедрой физики, СГПУ*

[2] *ассистент кафедры общенаучных дисциплин, АДИ ДонНТУ*

[3] *магистрант, СГПУ*

[4] *студент, АДИ ДонНТУ*

e-mail: ukolov_aleksei@mail.ru

ИССЛЕДОВАНИЕ НАНОСТРУКТУР НА ПОВЕРХНОСТИ МОНОКРИСТАЛЛИЧЕСКОГО Ge МЕТОДОМ АТОМНО-СИЛОВОЙ МИКРОСКОПИИ

В данной работе методом атомно-силовой микроскопии выполнены исследования поверхности образцов монокристаллического Ge, циклически деформированных одноосным сжатием с одновременным ультразвуковым облучением при температуре $310K$. Деформирование кристаллов порождает на поверхности периодические дефектные структуры, обусловленные массопереносом при наличии градиента напряжений и возникновении направленных диффузионных потоков. Дислокационные петли в приповерхностном слое являются источниками зарождения наноструктур типа ямка-островок. При объединении островков на стадии созревания образуются гребни нанометровой высоты, источниками которых являются дислокационные петли, линейно ориентированные полями точечных дефектов.

Ключевые слова: *полупроводник, наноструктура, диффузия, градиент напряжения, дислокация.*

Введение

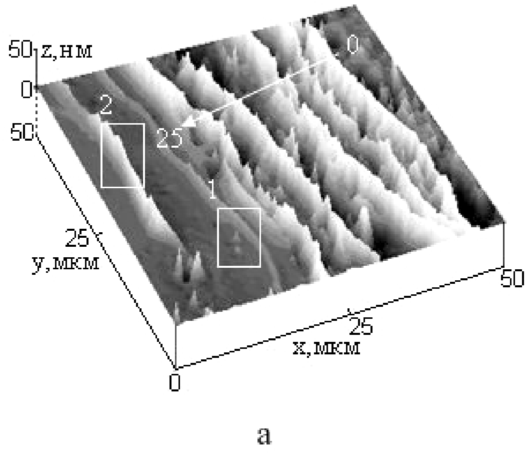
В последнее десятилетие уделяется много внимания исследованию свойств низкоразмерных твердотельных структур с линейными размерами порядка десятков нанометров и менее [1-4]. Структуры столь малых размеров обычно называются наноструктурами и могут проявлять удивительные свойства отличные от свойств объемных материалов. Исследования по получению наноструктур, их диагностике и практическому применению получили название работ в области нанотехнологии. Важнейшую роль играют методы диагностики наноструктур.

Одним из интенсивно развиваемых направлений диагностики наноструктур на сегодняшний день является атомно-силовая микроскопия (АСМ). АСМ – это семейство экспериментальных методов изучения локальных свойств поверхности, основанных на регистрации взаимодействия твердотельного острого зонда с изучаемой поверхностью. Атомно-силовая микроскопия также предоставляет возможность для проведения нанолитографии – локальной модификации поверхности под зондом. Таким образом, АСМ может рассматриваться и в качестве технологического направления по модификации и фабрикации наноразмерных структур [4].

Основная часть

Создание градиента механических напряжений и, соответственно, градиента химического потенциала точечных дефектов порождает диффузию в приповерхностных слоях алмазоподобных кристаллов (Si, Ge) при температурах ниже $0,35T_{\text{пл}}$ [5,6]. При малых длительностях (несколько минут) деформирования в указанных кристаллах генерируются, в основном, точечные дефекты, а при длительностях в несколько часов или суток в приповерхностных слоях, толщиной ≤ 5 мкм, зарождаются и дислокационные петли. Процесс исследования диффузии в тонких приповерхностных слоях с помощью оптической микроскопии затруднен из-за невысокой разрешающей способности метода. Поэтому в данной работе исспользавали АСМ для обнаружения проявления диффузии в процессе низкотемпературного деформирования монокристаллов Ge. Образцы Ge размерами $3 \times 4 \times 10$ мм циклически деформировали одноосным сжатием с одновременным ультразвуковым облучением при $310K$.

В результате АСМ исследования получен снимок трехмерного рельефа поверхности который приведен на рис.1,а, а его профилограмма в указанном стрелкой направлении изображена на рис.1,б.



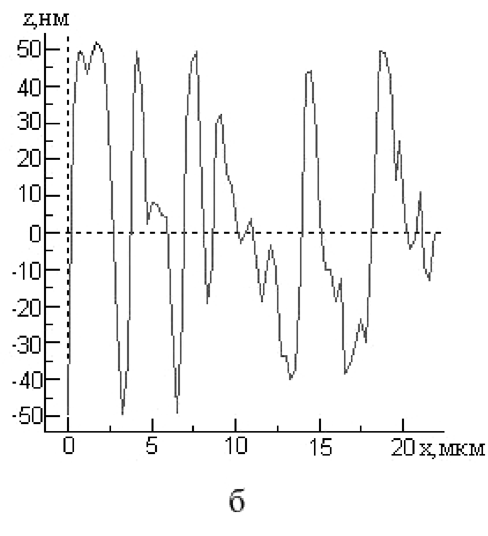


Рис. 1: а – АСМ изображение периодической структуры поверхности Ge, б – профилограмма, полученная сканированием зонда АСМ по направлению, указанному стрелкой на рис.1,а

Оба рисунка свидетельствуют о том, что высота подъемов в виде гребней на поверхности и впадин относительно среднего (нулевого) уровня приблизительно одинаковые.

Интересное явление наблюдается на рис. 2,а, где видно образование пирамидальных островков (они же выделены рамкой 1 на рис.1,а) за счет диффузионного массопереноса вещества с образованием лунки в местах выхода на поверхность дислокационной полупетли. Здесь же указано направление спада напряжения от концентратора, по которому следует ожидать преимущественное перемещение межузельных атомов. На рисунке справа показан вид на островковую структуру перпендикулярно поверхности, где видно, что дислокационная ямка и островок в основании на данной плоскости (112) имеют гексагональную форму. Сканирование через дно ямки и вершину рядом находящегося островка (рис.2,б)показало равенство площадей между прямой среднего уровня поверхности и линиями границ ямки и островка.

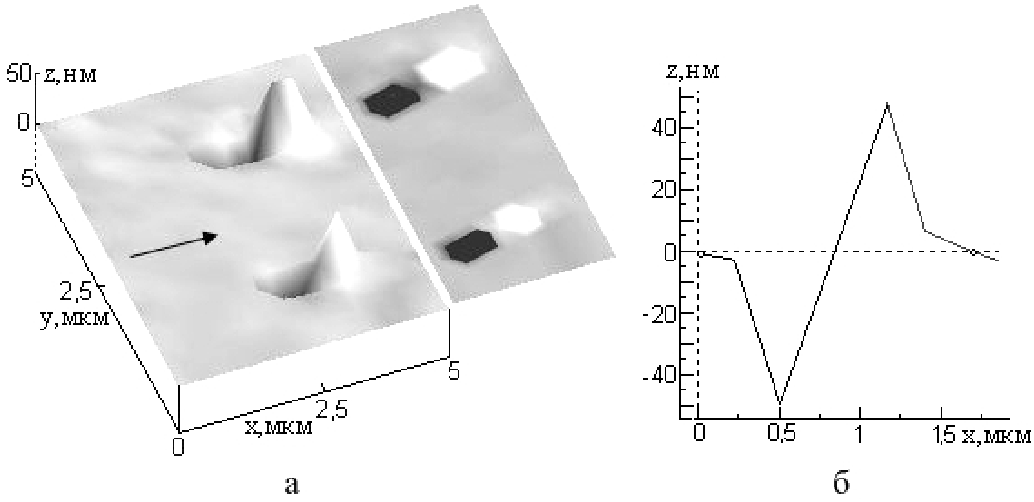


Рис. 2: а - пирамидальные островки и лунки, образовавшиеся на поверхности образца германия после деформирования в результате диффузионного массопереноса; справа - вид на структуру сверху. Изображение получено с участка, выделенного рамкой 1 на рис.1,а ,б - профилограмма, полученная при сканировании поверхности образца германия в направлении, проходящем через дно ямки и вершину рядом находящегося островка; кружками отмечены границы структуры

Профилограммы, полученные сканированием зонда в направлении вершин островков (рис.3,а) и нижних точек дислокационных ямок (рис.3,б) показывают равенство высоты островков и глубины образовавшихся ямок. Равенство объемов дислокационной ямки и островка свидетельствует о том, что самоорганизованный рост пирамидального островка происходил за счет его достройки в основном атомами кристалла, находившимися в объеме дислокационной ямки.

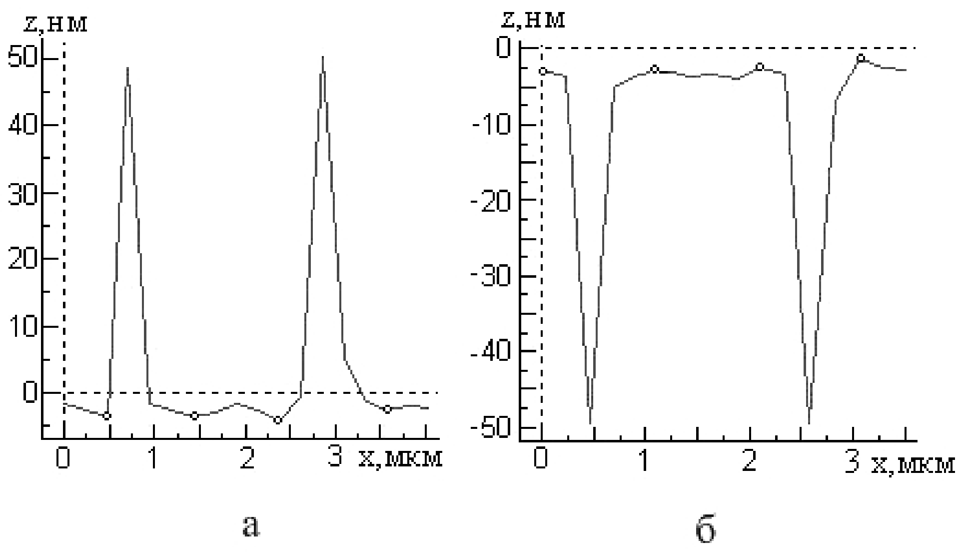


Рис. 3: Профилограммы, полученные при сканировании поверхности образца германия в направлении вершин островков (а) и нижних точек дислокационных ямок (б); кружками на (а) отмечены границы оснований островков, на (б) - границы дислокационных ямок

Рассмотрим особенность напряженного и структурного состояния кристалла вблизи дислокационной петли. На дислокационную полупетлю вблизи свободной поверхности действует сила зеркального изображения и линейного натяжения, в результате чего ее участки вблизи поверхности ориентируются под большим углом, что подтверждается при послойном химическом травлении [7]. В условиях эксперимента на дислокацию действует сила с составляющими параллельно поверхности (рис.2,а) по нормали к дислокационной линии и вдоль дислокации, направленной из глубины к поверхности. Кроме того, дислокация испытывает одновременно действия ультразвука, энергия которого может поглощаться селективно, а компонента возникающей при этом силы, перпендикулярная равновесному положению колеблющейся дислокационной линии, может осуществлять открепление и переход точечных дефектов в ее окрестность [8]. Многочисленные экспериментальные и теоретические исследования диффузии вдоль дислокаций свидетельствуют о наличии в них ускоренного переноса. Ускорение диффузии вдоль дислокации чаще всего объясняют наличием вакансий, концентрация и подвижность которых значительно выше, чем в объеме. Эффект увеличения коэффициента самодиффузии вдоль дислокации может быть бóльшим в приповерхностном слое из-за повышенной концентрации вакансий при УЗ облучении кристалла и наличия градиента напряжения в месте выхода упругого поля дислокации на поверхность. По-видимому, именно фактор напряжения вокруг дислокации и существование его градиента способствует выходу атомов из напряженной области на поверхность, определяет размеры ямки на поверхности, а особенность кристаллографии - ее форму. Движущейся силой образования островка Ge на деформируемой поверхности кристалла, является различие в постоянных решетки перенапряженной части поверхности вблизи ямки и наращиваемого островка.

Рассмотрим теперь механизм образования гребня на поверхности кристалла (рис.4).

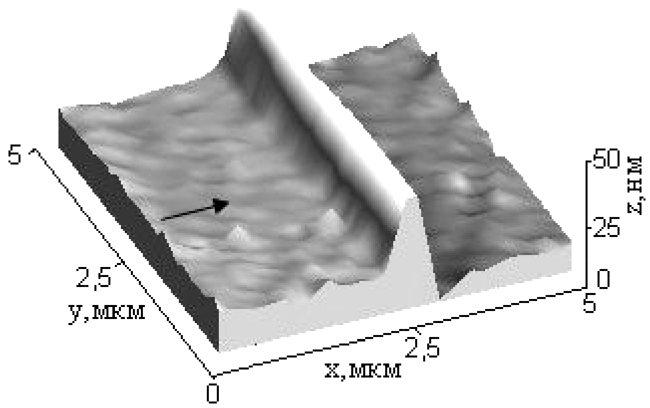


Рис. 4: АСМ-изображение гребня, образованного на поверхности образца германия из совокупности близко расположенных островков; получено с участка, выделенного рамкой 2 на рис. 1,а

Его формирование связано с процессом объединения островков на стадии созревания, а линейность – с особенностью ориентации их источников – дислокационных петель вдоль полосы, где наблюдается пересыщение по межузлиям. Циклическое деформирование образца порождает периодическое поле сжатий и растяжений на поверхности и с ним связанные чередующиеся полосы пересыщений по вакансиям и межузлиям [9]. При этом межузельные петли переориентируются вдоль полос, а при ультразвуковом воздействии являются источниками массопереноса для формирования островков.

Выводы

В работе прямым методом наблюдения с помощью атомно-силовой микроскопии показана возможность массопереноса в монокристаллическом германии вдоль поверхности и вдоль дислокаций на поверхность при наличии градиента механических напряжений.

Описан новый способ получения наноструктур на поверхности монокристаллического Ge, позволяющий, в отличие от широко применяемой для этих целей молекулярно-лучевой эпитаксии (где используется сверхвысокий вакуум $\sim 10^{-8}$ Па и высокие температуры), выполнять необходимые операции для роста при комнатной температуре и атмосферном давлении.

Выращенные таким образом наноструктуры могут представлять интерес для создания перспективных микроэлектронных приборов с использованием квантовых эффектов.

Литература

[1] *Пчеляков О.П.* Кремний-германиевые наноструктуры с квантовыми точками: механизмы образования и электрические свойства / О.П. Пчеляков, Ю.Б. Болховитянов, А.В. Двуреченский [и др.] // ФТП. – 2000. – Т. 34, № 11. – С. 1281 – 1289.

[2] *Кукушкин С.А.* Зарождение когерентных полупроводниковых островков при росте по механизму Странского-Крастанова, индуцированное упругими напряжениями / С.А. Кукушкин, А.В. Осипов, F. Schmitt [и др.] // ФТП. – 2002. – Т. 36, № 10. – С. 1177 – 1185.

[3] *Устинов В.М.* Технология получения и возможности управления характеристиками структур с квантовыми точками / В.М. Устинов // ФТП. – 2004. – Т. 38, № 8. – С. 963 – 970.

[4] *Шкляев А.А.* Создание наноструктур германия и кремния с помощью зонда сканирующего туннельного микроскопа / А.А. Шкляев, М. Ичикава // УФН. – 2006. – Т. 176, № 9. – С. 913 – 930.

[5] *Nadtochiy V.* Microplasticity and electrical properties of subsurface layers of diamond-like semiconductors strained at low temperatures / V. Nadtochiy, N. Golodenko, N. Nechvolod // Functional materials. – 2003. – V. 10, № 4. – P. 702 – 706.

[6] *Надточій В.О.* Рух дислокацій у напівпровідниках, спричинений градієнтом напружень / В.О. Надточій, М.М. Голоденко, М.К. Нечволод [та ін.] // Фіз. і хім. твердого тіла. – 2003. – Т. 4, № 1. – С. 76 – 79.

[7] *Алехин В.П.* Физика прочности и пластичности поверхностных слоев материалов / Алехин В.П. – М.: Наука. – 1983. – 280 с.

[8] *Тяпунина Н.А.* Упрочнение монокристаллов под влиянием ультразвуковых колебаний / Тяпунина Н.А. // Физика деформационного упрочнения. – К.: Наукова думка, 1972. – С. 228 – 246.

[9] *Уколов О.І.* Дифузійно-дислокаційна мікропластичність монокристалів Ge нижче теипературної межі крихкого руйнування / О.І. Уколов, В.О. Надточій, М.К. Нечволод // Фіз. і хім. твердого тіла. – 2010. – Т. 11, № 3. – С. 575 – 579.

УДК 539.376

Нечволод М.К., Малєєв І.В., Надточій В.О., Уколов О.І., Калімбет А.З.

[1] *доктор фіз.-мат. наук, професор кафедри фізики, СДПУ*

[2] *студент 5 курсу фізико-математичного факультету СДПУ*

[3] *доктор фіз.-мат. наук, професор, завідувач кафедри фізики, СДПУ*

[4] *аспірант кафедри фізики, СДПУ*

[5] *старший викладач кафедри фізики, СДПУ*

e-mail: student_299@ukr.net

ВПЛИВ РІЗНИХ ТЕРМІЧНИХ ЗМІН НА ЛОГАРИФМІЧНУ ПОВЗУЧІСТЬ МОНОКРИСТАЛІВ LiF В ОБЛАСТІ ДІЇ ФІЗИЧНОГО МЕХАНІЗМУ ВИСНАЖЕННЯ ДИСЛОКАЦІЙ

Досліджений вплив попереднього відпалу і термоциклічної обробки на ступінчасту логарифмічну повзучість в області дії фізичного механізму виснаження дислокацій. Встановлено, що цей вплив залежить від щільності дислокацій в кристалі, а зміцнюючий ефект такої повзучості пов'язаний зі зменшенням щільності дислокацій в процесі повзучості. Проведений теоретичний аналіз отриманих експериментальних результатів і вказані можливі перспективи їх використання в техніці.

Ключові слова: *LiF, дислокація, відпал, термоциклічна обробка, логарифмічна повзучість.*

Вступ

Відомо [1-7], що різні термічні зміни істотно впливають на дефектну структуру кристалічних матеріалів, і відповідно на їх фізичні властивості, у тому числі повзучість. Зокрема, Нечволодом Н.К. із співробітниками в результаті проведених раніше досліджень [1-3] було встановлено, що термоциклічна обробка (ТЦО) при температурних інтервалах циклу рівних 50, 100, 150^0C значно впливає на дислокаційну структуру матеріалів і змінює їх механічні властивості, у тому числі характеристики повзучості [3]. Проте, відомості про вплив стаціонарного відпалу з подальшою ТЦО на логарифмічну низькотемпературну повзучість (при $T < 0,5T_{\text{плавлення}}$) певною мірою обмежені. Особливий інтерес представляє з'ясування залежності деформації на перехідній стадії повзучості ε від щільності дислокацій ρ, привнесених до кристала кількісно різними комбінаціями стаціонарного відпалу і подальшої ТЦО. Істотно було також визначити активаційні параметри (активаційний об'єм та енергію активації) низькотемпературної ступінчастої повзучості в режимі виснаження дислокацій і їх залежності від тривалості попереднього відпалу та мінімального числа циклів ТЦО з постійним температурним інтервалом термоцикла, при яких генеруються нові одиничні дислокації.

Основна частина

Дослідження проводилися на монокристалах фтористого літію (LiF). Зразки розміром $4 \times 5 \times 7$ мм виколювалися по площинах спайності. Відпал відбувався при температурі 600^0C протягом різного часу $t_{\text{відп}} = 0,5$ год; 24 год. Швидкість нагріву і охолодження до і після відпалу не перевищувала 30 град/годину. Як дислокаційний травник використовувався слабкий водний розчин FeCl [8]. Спостереження дислокаційних структур здійснювалися по фігурах травлення за допомогою металографічного мікроскопа МІМ-7, з'єднаного з цифровою фотокамерою CANON - EOS 550D з подальшим комп'ютерним аналізом фотознімків. Початкова щільність дислокацій $4,5 \cdot 10^5 \text{см}^{-2}$. Погрішність вимірів щільності дислокацій не перевищувала 3%. Подальше термоциклування зразків, що не відпалювалися і відпалювалися, проводилося при температурному інтервалі циклу $\Delta T = 50^0C$. При вказаній температурі зразки витримувалися в муфельній печі 5 хвилин з подальшим зануренням в танучий лід. Час витримки при 0^0C складало 5 секунд. Проміжок часу між закінченням нагріву і початком охолодження складало не більше 3-х секунд. Температура контролювалася за допомогою двох термопар.

Після серій термоциклів зразки випробовувалися на ступінчасту повзучість шляхом одновісного стиснення при $300K$ на установці, описаній в [9]. Установка дозволяє фіксувати деформацію повзучості до 0,25 мкм. Усі зразки випробовувалися на повзучість при однакових ступенях вантаження $\Delta\sigma = \text{г/мм}^2$. Час витримки на кожному ступені складав 30 хвилин, що відповідало виходу повзучості на стаціонарну стадію, зі швидкістю, рівною нулю.

На рис. 1 показані криві ступінчастої повзучості зразків LiF, відпалених і термоциклованих при $\Delta T = 50^0C$ з відповідно різними тривалістю відпалу і кількістю термоциклів. Криві для цих зразків мають певні особливості: а) для усіх зразків стрибок деформації і повзучість на перехідній стадії із зростанням ступеней зменшуються; б) величина стрибка і деформації на перехідній стадії для зразків, відпал і термоциклування яких проводилося відповідно з невеликою тривалістю і кількістю циклів, менше, ніж зразка, що піддавався тривалішому відпалу і більшій кількості термоциклів; в) швидкість повзучості на стаціонарній стадії для усіх зразків дорівнює нулю.

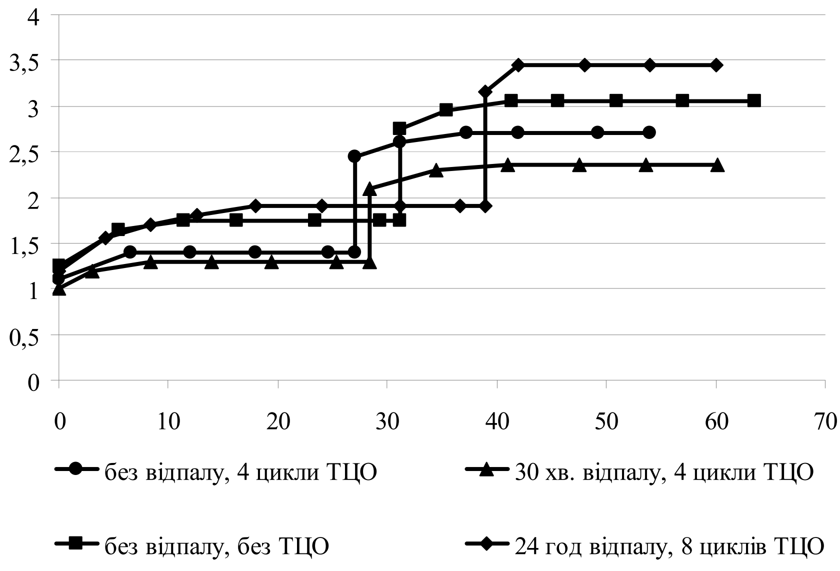


Рис. 1: Криві повзучості зразків LiF при $300K$ після попереднього відпалу і ТЦО.

Спостереження за зміною дислокаційної структури по ямках фігур травлення дозволяють зробити висновок, що повзучість у вибраному режимі визначалася фізичним механізмом виснаження дислокацій: щільність дислокацій при повзучості у вибраному режимі зменшувалася, генерація нових дислокацій не виявлена. Дія цього механізму найяскравіше проявляється на зразку, деформація якого в ході повзучості була більшою в порівнянні з іншими (зразок після попереднього відпалу впродовж 24 годин і 8 циклів ТЦО) (рис. 2).

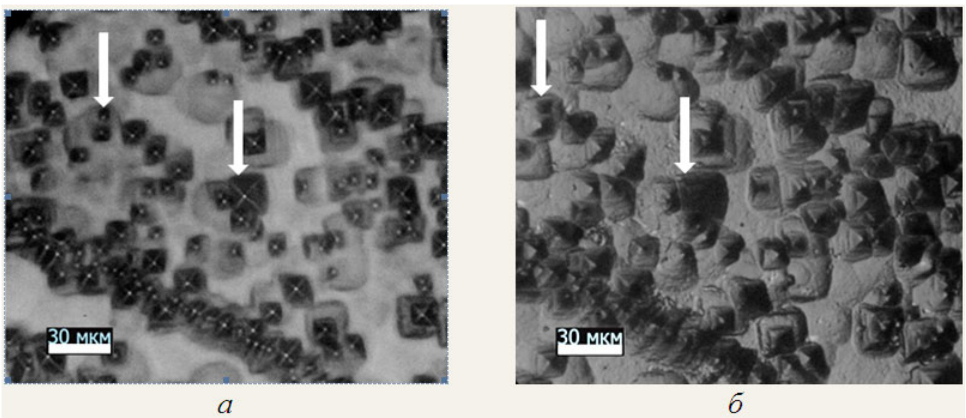


Рис. 2: Дислокаційна структура, отримана на зразку LiF хімічним травленням: а – до випробувань на повзучість; б – та ж поверхня після випробувань на повзучість при $300K$, стрілками вказані дислокації, що вийшли в результаті випробувань.

У зразку, що не відпалювався і пройшов 4 цикли ТЦО щільність дислокацій після ступінчастої повзучості знизилася на 5,2 в порівнянні з початковою. Для зразків, що піддавалися відпалу впродовж 0,5 і 24 годин і відповідно 4 і

8 термоциклам, зменшення щільності дислокацій відносно початкового стану склало відповідно 2,5 і 12. На основі експериментальних кривих повзучості зразків LiF (рис. 1) був отриманий графік залежності деформації на перехідній стадії повзучості ε від щільності дислокацій ρ (рис. 3).

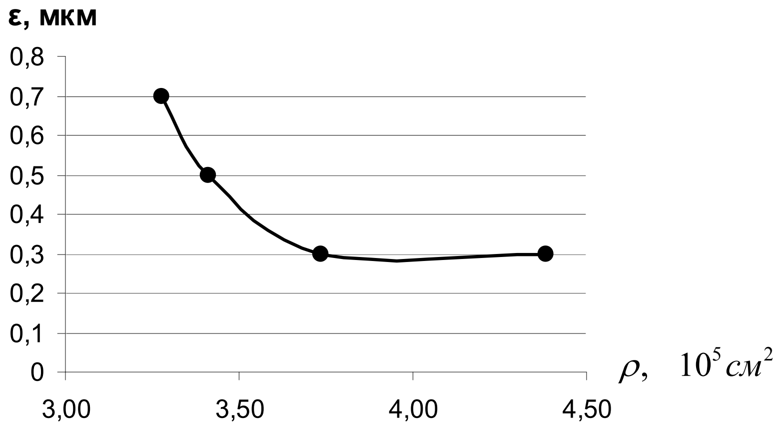


Рис. 3: Залежність деформації на перехідній стадії повзучості на першій ступені навантаження від щільності дислокацій кристалів, що піддавалися різним термічним змінам, після випробувань на повзучість: 1 - без відпалу після 4 циклів ТЦО; 2 - після 30 хвилин відпалу і 4 циклів ТЦО; 3 - без відпалу і без ТЦО; 4 - після 24 годин відпалу і 8 циклів ТЦО;

Проведений нами аналіз результатів досліджень на ступінчасту повзучість зразків LiF при $300K$ показав, що деформація повзучості на перехідних стадіях усіх зразків (див. рис. 1) підкорюється логарифмічному закону:

$$\varepsilon = \alpha \ln(t) \tag{1}$$

де α – деякий постійний коефіцієнт, рівний тангенсу кута нахилу прямої в координатах ε – $\ln(t)$ (рис. 4).

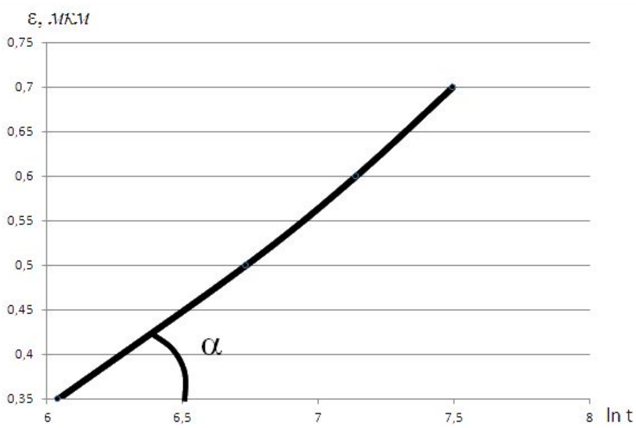


Рис. 4: Залежність деформації повзучості на перехідній стадії зразка LiF після попереднього відпалу впродовж 24 годин і 8 циклів подальшого ТЦО від логарифма часу.

За отриманими нами експериментальними даними (рис. 1-4) були визначені активаційні параметри логарифмічної повзучості (активаційний об'єм V і енергію активації H). Для цього використовувалися відомі [10] співвідношення між ε, V, H і α:

$$\alpha = \frac{kT}{Vh}; \tag{2}$$

де h – коефіцієнт зміцнення,

$$h = \lim_{\Delta\varepsilon \to 0} \frac{\Delta\sigma}{\Delta\varepsilon} = \frac{d\sigma}{d\varepsilon},$$

$$V = \frac{kT}{\alpha h},$$

де k – стала Больцмана,

$$H = Vh\varepsilon. \tag{3}$$

У нашому випадку для початкового зразка (без попередніх відпалу і ТЦО) $V = 1,1 \cdot 10^{-19}$см^3, $H = 0,199$ эВ. Для зразків, що пройшли попередній відпал і ТЦО активаційні параметри логарифмічної повзучості V і H збільшуються в порівнянні з початковим зразком. Очевидно, зі зміною щільності дислокацій ρ відповідно змінюються і параметри d і l (діаметр області, де відбувається термічна активація, і середня відстань між дислокаціями), що і призводить до спостережуваних змін V і H. Мабуть, величину початкової густини дислокацій в наших умовах можна зв'язати з точкою А на правій гілці відомої [11] кривої Бочвара-Одінга, що відображає залежність міцності кристалів від щільності дислокацій в них (рис. 5).

Як видно з приведеної кривої, попередній відпал і термоциклування можуть рухати цю точку як вліво, так і вправо на кривій Бочвара-Одінга, що і спостерігається в наших дослідженнях (див. рис 1-3). З отриманих експериментально значень активаційних параметрів, очевидно, можна зробити висновок, що у разі кристалів LiF, основним механізмом, контролюючим швидкість руху дислокацій в ході повзучості при $T = 300K$, є механізм Пайєрлса-Набарро (перегинна модель руху дислокаційного сегменту) [12].

Як видно з рис. 1 і 3, усі криві ступінчастої повзучості зразків LiF носять логарифмічний характер. Причому зі збільшенням числа ступеней навантаження $\Delta\sigma$ величина деформації на перехідній стадії повзучості (як і величина стрибка деформації) зменшується. Відповідно зі збільшенням числа ступеней навантаження $\Delta\sigma$ зростає коефіцієнт зміцнення $h = \dfrac{d\sigma}{d\varepsilon}$, а швидкість повзучості на перехідній стадії з часом зменшується, як і щільність дислокацій в кристалах. Динаміка вказаного процесу підтверджується і аналізом відомого [10] рівняння для швидкості логарифмічної повзучості:

$$\dot{\varepsilon} = \frac{d\varepsilon}{dt} = Ae^{\frac{-H}{kT}} \tag{4}$$

де: A – деяка стала, а H – енергія активації повзучості.

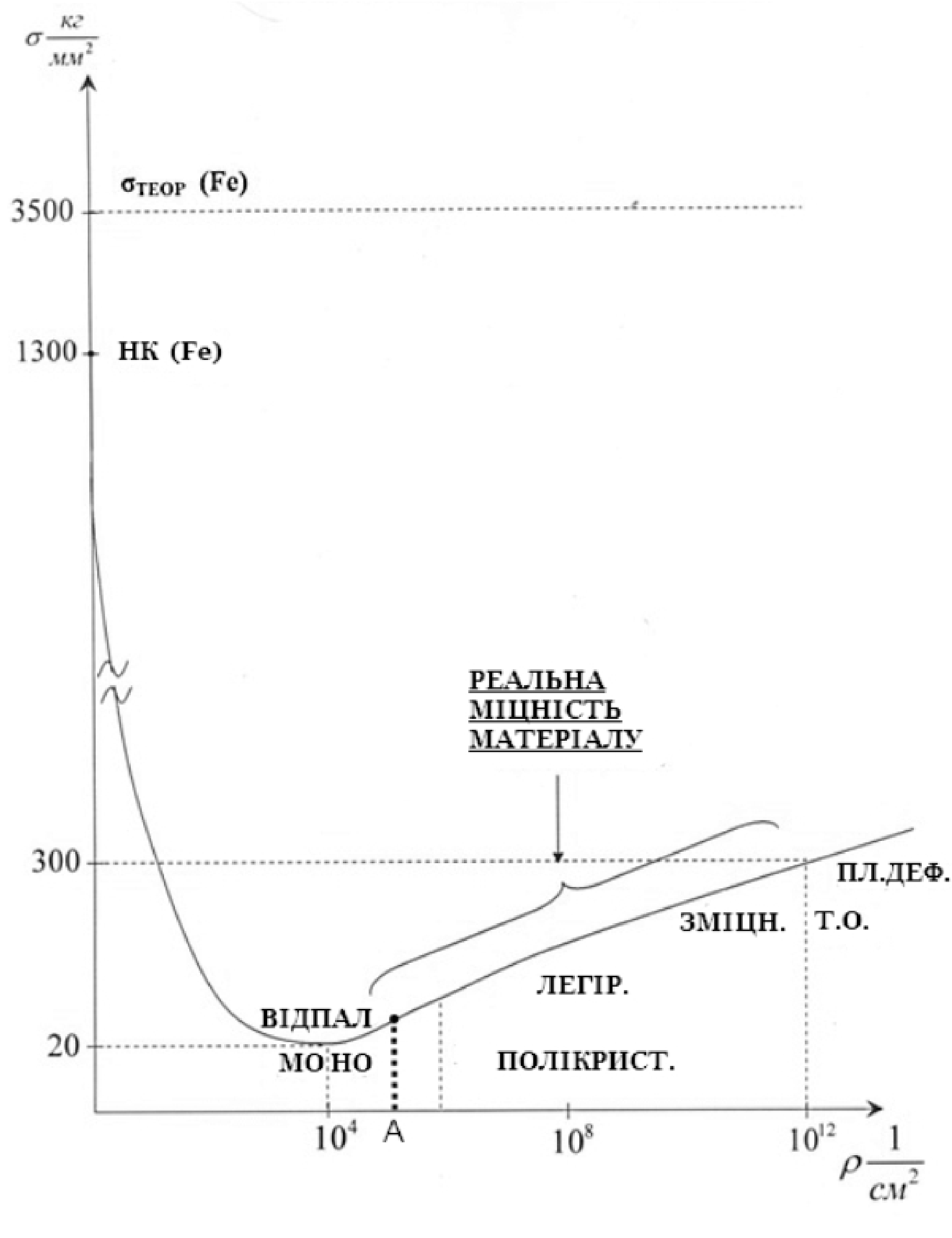


Рис. 5: Крива Бочвара-Одінга (крива залежності міцності кристалів від густини дислокацій в них)

У наших експериментах генерування нових дислокацій в процесі повзучості не виявлене, спостерігався деякий перерозподіл і зменшення щільності початкових дислокацій. Отже, логарифмічна ступінчаста повзучість відбувалася в зоні дії фізичного механізму виснаження дислокацій [10]. Зменшення швидкості повзучості на перехідній стадії кожного ступеня і збільшення коефіцієнта зміцнення h пов'язане (як випливає з рівняння (4)) зі зростанням енергії активації H в процесі повзучості на перехідній стадії. Причому, через наявність відомого [10] спектру розподілу дислокацій за напругами активації, в першу чергу рухаються дислокації, що мають найбільш низьку напругу активації старту. З цієї причини напруга активації старту дислокацій в процесі повзучості з часом збільшується, швидкість повзучості зменшується, матеріал зміцнюється. Але на відміну від звичайного наклепу (зміцнення за рахунок збільшення щільності дефектів в кристалічних матеріалах) при ступінчастій логарифмічній повзучості в зоні дії фізичного механізму виснаження дислокацій одночасно повинні підвищуватися не лише механічні, але і інші фізичні властивості матеріалів (електричні, оптичні і ін.) внаслідок значної залежності останніх від міри дефектності структури. Це підтверджується і у ряді раніше проведених нами досліджень [10], у тому числі на металах, напівпровідниках, лужно-галоїдних кристалах. Зокрема, застосовуючи ступінчасту логарифмічну повзучість в зоні дії фізичного механізму виснаження дислокацій можна значно поліпшити разом з механічними і оптичні властивості монокристалів LiF, які широко застосовуються в оптиці інфрачервоного діапазону [13]. Зокрема, при виведенні на орбіту космічних телескопів з оптикою інфрачервоного діапазону на LiF виникають термічні перепади, які призводять до підвищення щільності дислокацій в LiF, і відповідно до зниження оптичних параметрів [4].

Застосування вказаної вище методики ступінчастої логарифмічної повзучості в режимі виснаження дислокацій, дозволяють і в цьому випадку отримати позитивний ефект.

Висновки

1. У дослідженнях, проведених на монокристалах LiF, встановлено, що попередній відпал різної тривалості і подальше термоциклування (до появи нових одиничних дислокацій і постійним температурним інтервалам термоцикла) істотно впливають на ступінчасту логарифмічну повзучість при $300K$ в зоні дії фізичного механізму виснаження дислокацій залежно від щільності дислокацій. В процесі такої повзучості матеріал зміцнюється за рахунок зменшення щільності дислокацій.

2. За експериментальними даними розраховані активаційні параметри логарифмічної повзучості: активаційний об'єм і енергія активації. Їх величина дозволяє зробити висновок про те, що основним механізмом, контролюючим швидкість руху дислокацій в LiF в процесі повзучості при $300K$ є механізм

Пайерлса-Набарро (перегинна модель руху дислокаційного сегменту).

3. Практична важливість проведених досліджень полягає в тому, що в умовах тривалого навантаження працюють деталі сучасних машин, механізмів і пристроїв (лопатки авіаційних газотурбінних двигунів, вали верстатів гарячої прокатки, штампи та ін.). Отримані результати необхідно також враховувати при розробці технологій отримання кристалічних матеріалів з підвищеним комплексом фізичних властивостей, які використовуються в сучасній техніці, зокрема в напівпровідникових приладах, оптичних пристроях інфрачервоного діапазону і інших.

Література

[1] *Нечволод Н.К.* Влияние термических изменений на дислокационную структуру монокристаллов LiF / Н.К. Нечволод, Р.В. Мыкыта, Д.С. Москаль, А.И. Уколов, А.З. Калимбет // Вісник Донбаської державної машинобудівної академії : тематичний збірник наукових праць. – 2011. – № 1(22). – С. 215 – 220.

[2] *Нечволод Н.К.* Дислокационная структура монокристаллов LiF в условиях резких термических изменений / Н.К. Нечволод, В.А. Надточий // Укр. физ. журнал. – 1969.– Т. 5, № 6. – С. 1046 – 1049.

[3] *Нечволод Н.К.* Влияние термоциклирования на ступенчатую ползучесть монокристаллов LiF при 300 K в области действия механизма истощения дислокаций / Н.К. Нечволод, А.Я. Белошапка, В.Я. Белошапка, В.С. Романуша, Б.Е. Шкуратов // Укр. физ. журнал. – 1976. – Т. 21, № 12. – С. 2052 – 2054.

[4] *Нечволод Н.К.* Влияние ступенчатой ползучести в режиме истощения дислокаций на инфракрасные спектры пропускания монокристаллов LiF при 300К / Н.К. Нечволод, В.А. Глыва, В.П. Зарва, В.А. Золотухин, Г.Н. Романенко // Физика и химия обработки материалов АН СССР. – 1983. – № 1. – С. 70 – 73.

[5] *Тихонов Л.В.* Влияние термоциклической обработки и стационарного отжига на дислокационную структуру германиевого монокристалла / Л.В. Тихонов, Г.В. Харькова // Украинский физический журнал. – 1970. – Т. 15, № 10. – С. 1686 – 1691.

[6] *Эйгельман Л.Г.* Кинетика уменьшения плотности дислокаций в монокристаллах NaCl при изотермическом отжиге / Л.Г. Эйгельман, А.В. Гектин // Украинский физический журнал. – 1978. – № 23(9). – С. 1560 – 1562.

[7] *Попов П.А.* Влияние высокотемпературного отжига на теплопроводность γ-облученных кристаллов LiF и CaF_2 / П.А. Попов, А.И. Коваленко //

Вестник Брянского госуниверситета. – 2008. – № 4. – С. 50 – 55.

[8] *Джонстон В.* Скорость передвижения, плотность дислокаций и пластическая деформация кристаллов фтористого лития / В. Джонстон, Дж. Гилман // Успехи физ. наук. – 1960. – Т. LXX, № 3. – С. 479 – 512.

[9] *Гиндин И.А.* Установка для исследования ползучести и кратковременной прочности материалов при температурах 5-300К / И.А. Гиндин, С.Ф. Кравченко, Я.Д. Стародубов, Н.С. Губин // Заводская лаборатория. – 1970. – Т. 36, № 1.

[10] *Нечволод Н.К.* Ползучесть кристаллических тел при низких температурах / Н.К. Нечволод. – К.: Вища школа, 1980. – 180 с.

[11] *Одинг И.А.* Теория ползучести и длительной прочности металлов / И.А. Одинг, В.С. Иванова, В.В. Бурдукский, В.И. Геминов. – М.: Гос. науч. техн. изд. по черной и цветной металлургии, 1959. – 487 с.

[12] *Ярошевич В.Д.* О механизме термоактивируемой пластической деформации металла при низких температурах / В.Д. Ярошевич // Физика металлов и металловедение. – 1971. – Т. 31, № 4. – С. 856 – 865.

[13] *Kvamme E.* Lithium Fluoride Material Properties as Applied on the NIRCam Instrument / E. Kvamme, J. Earthman, D. Leviton, B. Frey. – 2005. – Proc. SPIE 5904. – P. 212 – 221.

[14] *Панин В.Е.* Эффект поверхностного слоя в деформируемом твердом теле / В.Е. Панин, А.В. Панин // Физическая мезомеханика. – 2005. – Т. 8, № 5. – С. 7 – 15.

[15] *Песчанская Н.Н.* Скачки деформации микронного уровня на разных стадиях ползучести кристаллических тел / Н.Н. Песчанская, В.В. Шпейзман, А.Б. Синани, Б.И. Смирнов // Физика твердого тела. – 2004. – Т. 46, № 11. – С. 1991 – 1995.

УДК 577.32

Костиков А.П.

[1] *доктор физ.-мат. наук, доцент кафедры физики, СГПУ*

e-mail: ap_kostikov@mail.ru

ИССЛЕДОВАНИЕ СВОРАЧИВАНИЯ АЛЬФА-СПИРАЛЬНОГО БЕЛКА МЕТОДОМ УПРАВЛЯЕМОЙ МОЛЕКУЛЯРНОЙ ДИНАМИКИ.

В работе исследовались процессы разворачивания и сворачивания молекулы небольшого альфа-спирального белка методом управляемой молекулярной динамики, компьютерным аналогом атомной силовой микроскопии. Полученные данные позволяют предложить следующую последовательность событий. На начальном этапе самосборки спиральной структуры тратится относительно большое время на инициацию спирали, появление ее «зародышей», затем следуют сравнительно быстрые процессы образования спирали, следующий третий этап – длительный поиск конечной конформации белка.

Ключевые слова: *динамика молекулы белка, сворачивание белка, компьютерное моделирование.*

Одна из самых интересных проблем молекулярной биофизики – проблема самосборки (самопроизвольного сворачивания) белков. В пионерских работах Анфинсена [1] удостоенных в 1972 году Нобелевской премии, было доказано что конечная конформация белка (рибуноклеазы) определяется его первичной химической структурой и что процесс самосборки полностью обратим. Такая обратимость позволила развернуть в последующие годы исследования многими физическими методами во многих научных коллективах. Несмотря на все усилия, количество вопросов по механизму самосборки скорее возрастает, чем уменьшается. Некоторые, ранее неясные закономерности процесса самосборки хорошо уже выяснены, но при этом появляются все новые и новые вопросы, относящие к деталям механизмов сворачивания, разворачивания и динамической стабилизации конечной нативной структуры молекулы. В частности нет ясного понимания от чего зависит скорость сворачивания молекулы. Для некоторых белков этот процесс происходит за времена порядка микросекунд, для других – эти времена лежат в миллисекундном диапазоне. Для наблюдения за такими процессами используются, как правило, методы исследования, дающие интегральные характеристики молекул в образце, т.е. измеряются параметры, усредненные по очень большим ансамблям молекул в образце (статистические закономерности).

В течение последних лет все большее внимание исследователей привлекают методы, позволяющие наблюдать отдельную молекулу, воздействовать на нее различными способами и изучать отклик молекулы на такие воздействия. Один из таких методов появился около 20 лет назад – *Атомная Силовая Микроскопия* (АСМ). В этом методе можно контролировать силы взаимодействий между исследуемым образцом и зондом на расстояниях до нескольких десятков ангстрем. К настоящему времени метод успешно применяется для исследования биологических макромолекул. В одной из первых работ [2], использующих метод АСМ для исследования процесса разворачивания белка, авторам удалось получить интересные данные о механических свойствах молекулы гигантского мышечного белка титина. В течение последнего десятилетия возможности метода АСМ заметно расширились, в частности существенно возросла точность измерений. Параллельно с этим методом развивались методы компьютерного моделирования динамики молекулы, которую подвергают механическому воздействию. Процедура компьютерного моделирования носит название *Управляемая Молекулярная Динамика* (УМД). В этой процедуре моделируется динамика молекулы в условиях, когда один из ее атомов фиксируется в пространстве, а на любой другой атом действует управляемая сила, растягивающая молекулу. Фактически методика УМД полностью моделирует процессы, происходящие с образцом в методе атомной силовой микроскопии.

Авторам работы [3] удалось показать, что метод АСМ можно использовать не только для разворачивания молекулы, но для контролируемого сворачивания той же молекулы. В этой методике для разворачивания молекулы используется растягивающая сила порядка 500 пН, а для запуска обратного процесса растягивающую силу уменьшают в несколько раз, так чтобы мог происходить процесс самопроизвольного сворачивания молекулы. При этом подбором значения силы удается обеспечить достаточно медленное уменьшение длины вытянутой белковой цепочки, позволяющее наблюдать процесс сворачивания линейной цепочки в компактную нативную структуру в реальном времени.

В данной работе мы применили компьютерный вариант той же методики, что и авторы [3] в реальном эксперименте с использованием АСМ. Для наших исследований был выбран небольшой белок (код белка 1bdd), состоящий из 60 аминокислотных остатков, молекулярный вес – 6738 Дальтон. Белок представляет собой три α-спирали, объединенных в один «пучек». На рис.1 показан общий вид этого белка, α-спиральные участки показаны в виде широких лент, неструктурированные участки – в виде тонких лент. Для исследований методом УМД использовался либо весь белок, либо его фрагмент, полипептидная цепь с 40 по 60 аминокислотный остаток – это соответствует α-спирали на С-конце молекулы. На рисунке на этой части белка показаны атомы $C\alpha$ соответствующих аминокислотных остатков.

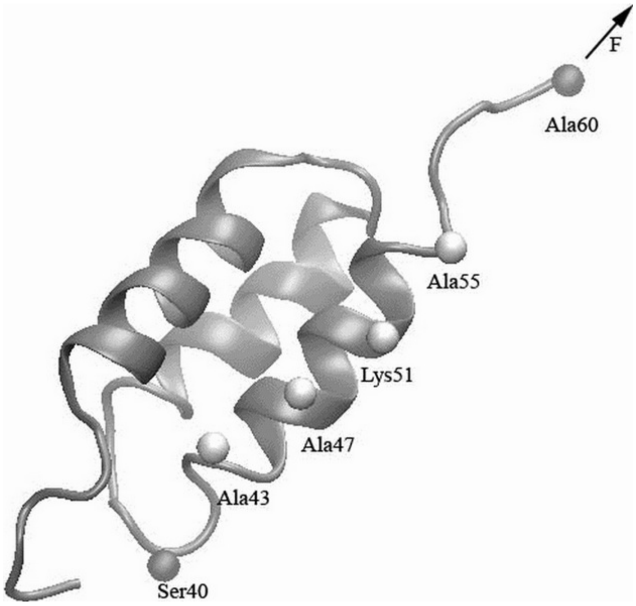


Рис. 1: Белок 1bdd, представляющий «пучек» из трех спиралей, к которому применялся метод управляемой молекулярной динамики. На спиральном участке, который подвергался растягиванию, показан неподвижный атом $C\alpha$ остатка Ser40 и управляемый атом $C\alpha$ остатка Ala60. К последнему остатку приложена сила F, направленная как показано на рисунке. На рисунке показаны также атомы $C\alpha$ аминокислотных остатков, между которыми измерялись расстояния, показанные на рис.2

Для реализации метода компьютерного молекулярно-динамического моделирования использовалась программа моделирования NAMD [4]. Для воздействий на белок, приводящих к нарушениям его пространственной структуры, использовали методы механического воздействия на молекулы – управляемую молекулярную динамику. Процедура подготовки молекулы к компьютерному моделированию динамики проводилась по нашей стандартной методике [5], в которой присутствовали следующие обязательные процедуры: растворение в воде, приведение в равновесие системы белок-вода при нормальных условиях (температуре и давлении).

В наших исследованиях было выполнено несколько серий симуляций, каждая их которых состояла из двух частей. В первой части каждой симуляции белок или его фрагмент растягивали с заданной силой (как правило, 500 пН). В последующей симуляции силу уменьшали не менее, чем в 10 раз, в некоторых случаях эта сила полностью устранялась. Первая часть таких симуляций приводила к разворачиванию белка, за счет его механического растягивания. Во второй части симуляции молекула имела возможность вернуться в исходное состояние, приобрести первоначальную пространственную структуру. Таким образом, вторая часть наших симуляций была призвана моделировать процесс сворачивания молекулы, ее самосборку в условиях максимально приближенных к естественным условиям, воспроизводимым в пробирке. Длительность второй части симуляций были на порядок дольше, чем длительность первой части симуляции. Если первая часть выполнялась за несколько часов реального времени работы компьютера, то вторая часть продолжалась несколько суток.

В результате таких экспериментов мы обнаружили, что если белок или его спиральный фрагмент полностью вытягивается в линейную цепочку, то за время порядка 10 нс не удается наблюдать сколько-нибудь заметного возврата к спиральной структуре. Отсюда следовало, что необходимо либо заметно увеличивать длительность наблюдения, что должно приводить к увеличению длительности симуляции, либо каким-то образом изменить первую часть эксперимента (растягивание молекулы). Наиболее удачными для наших симуляций оказались следующие условия. Процедуре разворачивания подвергалась не вся молекула, а только ее часть. На рис.1 эта часть соответствует участку на С-конце полипептидной цепочки молекулы от Ser40 (фиксированный, неподвижный атом альфа-углерода) до Ala60 (управляемый атом альфа-углерода). Из рисунка видно, что на этом участке имеется три спиральных витка (Ala43-Ala47), (Ala47-Lys51) и (Lys51-Ala55). Значение силы, которую мы прикладывали к управляемому атому составляло 500 пН (пикоНьютон). Растягивание проводили не до полного разворачивания этого участка, а до первых признаков исчезновения спиральной структуры.

На рис.2 можно видеть некоторые результаты одного из таких экспериментов. В течение первых 500 пикосекунд происходило разворачивание указанного участка молекулы, при этом расстояния между атомами альфа-углерода каждого витка спирали увеличивалось от 6 Å до 12 Å. Интересно, что из 500 пс почти полное разворачивание витков спирали происходило за первые 50 пс затем весь растягиваемый участок медленно испытывал небольшое дополнительное удлинение. Затем приложенная сила уменьшалась до 50 пН и продолжалось наблюдение за молекулой. Из рисунка 2 видно, что в представленном эксперименте в течение 1000-1500 пикосекунд 2-й и 3-й витки спирали возвращались практически к исходному виду, а 1-й виток (правый верхний график) восстанавливался до несколько растянутого состояния (10 Å вместо 6 Å). Наблюдение за тем же процессом в течение 10 нс (на рисунке показаны первые 4 нс) не привело к появлению каких-либо новых тенденций.

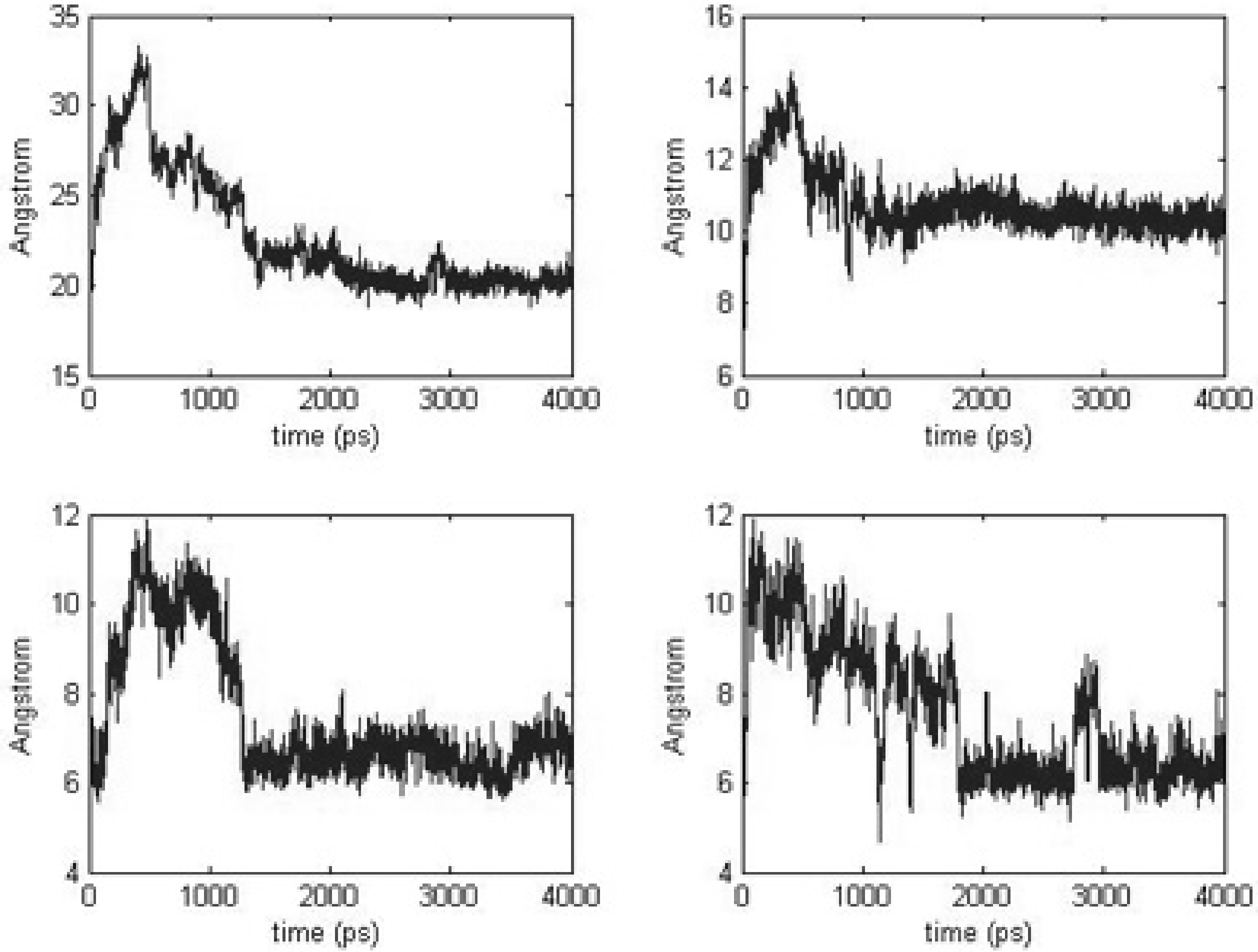


Рис. 2: Зависимости от времени расстояний между парами атомов Cα соответствующих аминокислотных остатков в процессе управляемой молекулярной динамики. Верхний левый график – Ala43-Ala55, верхний правый график – Ala43-Ala47, нижний левый – Ala47-Lys51, нижний правый – Lys51-Ala55.

Заметим, что если в аналогичном эксперименте молекулу растягивали так, что расстояния между атомами Cα витка увеличивалось не до 12 Å, а до 14 Å, процесс самосборки спирального участка резко замедлялся. В наших наблюдениях в течение 10 нс признаки отдельных витков спирали появлялись, однако, процесс сборки всех витков спирали в течение нашего времени симуляции нам не удалось наблюдать. Количественной характеристикой сборки витков спирали могут служить следующие данные. Первый виток (Ala43-Ala47) оставался растянутым до 14 Å в течение всего нашего времени наблюдения, для 2-го (Ala47-Lys51) и 3-го (Lys51-Ala55) витка через 2 нс 14 Å уменьшились до 10 Å и далее изменений мы не наблюдали.

Наши результаты позволяют заключить, что в процессе протекания самосборки белка, даже такого простого, как «пучек» из трех спиралей, использованный в нашей работе, на первом этапе должны появиться «зародыши» вторичной структуры. В данном случае, это фрагменты спиральных участков. После появления таких «зародышей», процесс упорядочивания и образования больших участков конечной структуры (в данном случае – спирального участка между 40-м и 60-м аминокислотными остатками) происходит существенно быстрее. На следующем этапе, требующем дополнительного времени, спиральные участки должны найти конечную, уникальную конформацию, завершающую самосборку белка. По-видимому для инициации спирали, появления «зародышей», требуется преодоление активационного барьера и потому образование первого витка спирали требует много больше времени, чем ее последующее удлинение еще на один виток.

Можно предположить, что под «зародышами» следует понимать сближение соответствующих молекулярных групп на определенные расстояния. Скорее всего это расстояния при которых начинают проявляться водородные связи. Хорошо известно, что именно водородные связи являются определяющими для создания и стабилизации α-спиралей. В нашем случае таким расстоянием было 12 Å между атомами альфа-углерода тех молекулярных групп, которые способны образовать виток спирали.

Литература

[1] *Anfinsen C.B.* Principles that govern the folding of protein chains / C.B. Anfinsen // Science. – 1973. – vol. 181. – P. 223 – 230.

[2] *Smith D.A.* Protein folding: Pulling back the frontiers / D.A. Smith, S.E. Radford // Current Biology. – 2000. – vol. 10. – P. 662 – 664.

[3] *Fernandez J.H.* Force-Clamp Spectroscopy Monitors the Folding Trajectory of a Single Protein / J.H. Fernandez, H. Li // Science. – 2004. – vol. 303. – P. 1674 – 1678.

[4] *Kale L.* NAMD2: Greater scalability for parallel molecular dynamics / L. Kale, R. Skee, M. Bhandarkar, R. Brunner, A. Gursoy, N. Krawetz, J. Phillips, A. Shinozaki, K. Varadarajan, K. Schulten // J. Comp. Phys. – 1999. – vol. 151. – P. 283 – 312.

[5] *Костиков А.П.* Исследование разворачивания белков при механических возмущениях / А.П. Костиков, И.В. Медведева // Сборник «Пошуки і знахідки». – Славянск, 2009. – В. 9, Т. 4. – С. 112 – 117.

УДК 53.089.62

Ткаченко В.М., Калимбет А.З.

[1] *канд. фіз.-мат. наук, доцент кафедри фізики, СДПУ*

[2] *старший викладач кафедри фізики, СДПУ*

e-mail: tkachenkovn1@mail.ru

ВИКОРИСТАННЯ КОМПАКТНИХ ЛЮМІНЕСЦЕНТНИХ ЛАМП ДЛЯ ГРАДУЮВАННЯ МОНОХРОМАТОРА

Проведено порівняльний аналіз дугових ртутних ламп надвисокого тиску і компактних люмінесцентних ламп. Виявлені переваги компактних люмінесцентних ламп дозволяють використовувати їх для виконання лабораторних робіт з фізики у вишах та ЗОШ.

Ключові слова: *спектр, градуювання, монохроматор, люмінесцентна лампа.*

Вступ

Проградуювати монохроматор — це означає кожному показникові α (відносні поділки — градуси) на шкалі барабану приладу поставити у відповідність довжину хвилі випромінювання λ. Зазвичай цю відповідність установлюють у вигляді графіка функціональної залежності $\lambda = f(\alpha)$.

Для градуювання використовують джерела, в спектрі яких довжини хвиль добре відомі. До таких джерел належать газорозрядні трубки наповнені воднем, та інертними газами (гелієм, неоном та ін.). Та найбільший спектральний діапазон охоплюють ртутно-кварцові лампи. Це потужні джерела світла. Випромінювання ламп має лінійчатий спектр з безперервним фоном. Їх використовують у різних оптичних приладах для отримання вузького пучка світла великої інтенсивності. Це дозволяє обирати більше яскравих ліній в спектрі випромінювання при градуюванні монохроматора.

За радянських часів монохроматори УМ - 2 йшли у комплекті з ртутно-кварцовою кульовою лампою ДРШ - 250. Пульт живлення монохроматора УМ - 2 забезпечує нормальну роботу такої лампи. На передній панелі пульта крім вимикачів мережі живлення та лампи розжарювання, є також пускова кнопка та вимикач ртутної лампи.

Лампи ДРШ — це дугові ртутні лампи надвисокого тиску з природним охолодженням. Мають кулясту форму і дають сильне ультрафіолетове випромінювання. Тому, при користуванні лампою, мають бути вжиті заходи для захисту дослідників від дії потужного ультрафіолетового випромінювання лампи, яке надзвичайно небезпечне — викликає незворотні пошкодження зору, сильні опіки на шкірі, а озон, що виділяється при роботі, має токсичну дію. Під час роботи в лампі розвивається тиск понад 10^6 Н/м^2, тому ртутно-кварцова лампа закрита захисним металевим кожухом і поводитися з нею слід обережно, щоб працюючі поблизу лампи були захищені від попадання в них гарячих осколків колби лампи в разі її вибуху. Недоліком лампи є, також, тривалий час розгорання ($2 \div 5$ хв.) і охолодження після вимкнення для повторного запалювання ($10 \div 15$ хв.) [1]. Потрібна підвищена напруга для підпалу. Саме ці недоліки ускладнюють застосування ламп ДРШ для виконання лабораторних робіт з фізики у вишах та загальноосвітніх школах (ЗОШ).

Основна частина

Як відомо, пари ртуті містяться і в люмінесцентних лампах (ЛЛ), але під значно меншим тиском. На внутрішню поверхню лампи нанесений шар люмінофора, який перетворює ультрафіолетове випромінювання ртуті у видиме. Сучасна промисловість виготовляє компактні люмінесцентні лампи (КЛЛ), які мають вигнуту форму колби, що дозволяє розмістити лампу у світильнику менших розмірів із стандартним побутовим патроном. У колбах сучасних КЛЛ вміст вільної ртуті знижено вже до $5 \div 7$ мг на лампу середньої потужності (а в деяких типах амальгамних компактних люмінесцентних ламп ртуті в чистому вигляді практично немає – вона знаходиться у зв'язаному стані , коли лампа вимкнена) [2].

Використання замість чистої ртуті високотемпературних амальгам (на основі Cd і In) дозволяє забезпечити оптимальний тиск парів ртуті в лампі ($P_{Hg} = 0,8 \div 1,0$ Па). Ці лампи мають інтегрований (влаштований в цоколь) електронний пускорегулювальний апарат (ПРА), що значно безпечніше від пускорегулювального пристрою ламп ДРШ. Завдяки застосуванню електронного ПРА КЛЛ мають поліпшені характеристики в порівнянні з традиційними люмінесцентними лампами – більш швидке включення, відсутність мерехтіння і дзижчання [3].

Спектри ЛЛ, загалом-то, схожі (у всіх ламп всередині пари ртуті) і інертний газ (зазвичай аргон), для полегшення запалювання [4]. При протіканні струму в лампі виникає, невидиме людським оком, ультрафіолетове випромінювання. Взаємодія з люмінофором, завдяки явищу люмінесценції, призводить до перетворення цього випромінювання у видиме. Зміною складу люмінофорів можна змінювати відтінок свічення лампи (отримувати лампи з різними спектрами випромінювання) [5]. Але на загальне розташування дискретних спектральних ліній ртуті це не впливає.

Широке застосування ці лампи отримали завдяки своїм високим техніко-економічним характеристикам: їх світлова віддача, або енергоефективність (тобто кількість люменів світла на один Ват споживаної електроенергії) становить 75 $\div$ 90 лм/Вт, тоді як у лампи розжарювання - всього 10 $\div$ 15 лм/Вт, залежно від потужності і типу [6].

При цьому люмінесцентні лампи мають термін служби не 1000 годин, покладені за стандартом лампам розжарювання (на жаль, вони найчастіше не дотягують до стандарту!), а 12 $\div$ 15 тис. годин, тобто в 12 $\div$ 15 разів більше.

Світлова віддача лампи ДРШ - 250 становить близько 50 лм/Вт [7]. Споживана потужність для лампи ДРШ - 250 становить 250 Вт, тоді як для КЛЛ – кілька одиниць Ват.

Саме зазначені переваги ЛЛ перед лампами ДРШ надихнули нас на експериментальні дослідження щодо застосування КЛЛ у навчальному фізичному експерименті, зокрема, для градуювання монохроматора.

У табл. 1 і на рис. 1 наведено експериментальні результати градуювання монохроматора УМ - 2 за найбільш яскравими спектральними лініями випромінювання ртуті КЛЛ PLEOMAX CE 9W.

№ п/п	**Колір лінії ртуті**	λ, нм	α, град.
1	Червона, яскрава	690,7	2890
2	Жовта, права з двох близько розміщених	612,0	2608
3	Жовта-помаранчева	585,2	2488
4	Жовта, права з двох близько розміщених	577,0	2456
5	Жовто-зелена, яскрава	546,1	2268
6	Блакитна	491,6	1850
7	Фіолетова	435,8	1188
8	Бузкова	404,6	636

Табл. 1: Взаємозв'язок між довжинами хвиль найбільш яскравих спектральних ліній ртуті і значеннями кута α, відліченими за шкалою барабана монохроматора УМ - 2, що було встановлено для КЛЛ PLEOMAX CE 9W.

Довжини хвиль спектральних ліній ртуті, що спостерігали ми для КЛЛ, порівнювались з відповідними довжинами хвиль спектральних ліній ртуті для лампи ДРШ - 250 [8].

Зауважимо, що інтенсивності дискретних спектральних ліній випромінювання ртуті КЛЛ PLEOMAX CE 9W достатньо для їх візуального спостереження без особливого напруження зору.

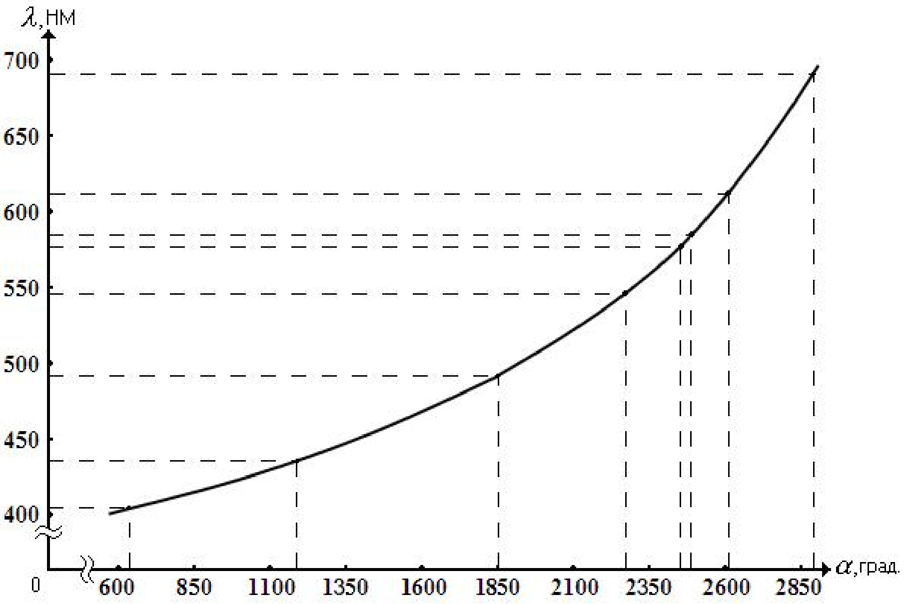


Рис. 1: Градуювальний графік монохроматора УМ - 2, що було побудовано за результатами табл.1.

Висновки

Наведені вище переваги КЛЛ перед ДРШ - 250 з точки зору простоти, екологічності, техніки безпеки і економічності використання, дозволяють рекомендувати використання КЛЛ для виконання лабораторних робіт з фізики у вишах та ЗОШ. Зокрема, для градуювання монохроматора.

Література

[1] Физический энциклопедический словарь / гл. ред. А.М. Прохоров и др. – М.: «Советская энциклопедия», 1984. – 944 с.

[2] `http://general-light.com.ua/news/rabota_kll.html`

[3] *Дурдаев А.А* О перспективах повышения экологичности люминесцентных ламп / А.А. Дурдаев, А.А. Ашрятов, А.С. Федоренко // Электротехнический рынок. – 2007. – №11 (17). – С. 26 – 27.

[4] `http://www.l1957.ru/2009/07/07/ehnergosberegayushhie-lampy/`

[5] *Денисов В.П.* Технология и производство электрических источников света : [учеб. для техникумов] / В.П. Денисов, Ю.Ф. Мельников. – М.: Энергоатомиздат, 1983. – 384 с.

[6] *Айзенберг Ю.Б.* Компактные люминесцентные лампы. Покупать или нет? / Ю.Б. Айзенберг // Иллюминатор. – 2002. – №1. – С. 110 – 113.

[7] `http://www.laboratorium.dp.ua/item/1`

[8] *Гольдин Л.Л.* Руководство к лабораторным занятиям по физике / Л.Л. Гольдин, С.М. Козел [и др.]. – М.: Наука, 1961. – 579 с.

УДК 519.246

Величко В.Є., Батуніна В.П.

[1] *канд. фіз.-мат. наук, доцент кафедри алгебри, СДПУ*

[2] *асистент кафедри алгебри, СДПУ*

e-mail: vladislav.velichko@gmail.com

СТАТИСТИЧНИЙ АНАЛІЗ РЕЗУЛЬТАТІВ ЕКСПЕРИМЕНТУ В ЕЛЕКТРОННИХ ТАБЛИЦЯХ OpenOffice.org Calc

Статистичний аналіз результатів будь-якого експерименту передбачає виконання певної кількості обчислень. Зрозуміло, що такі обчислення зручно виконувати в електронних таблицях. Крім того вони містять велику кількість стандартних статистичних функцій і їх використання буде корисним для статистичного аналізу результатів експерименту.

Ключові слова: *математична статистика, результати експерименту, електронні таблиці*

Вступ

Аналіз результатів експерименту за допомогою математичної статистики зазвичай зводиться до перевірки справедливості припущень, або гіпотез, відносно вивчаємого фізичного явища яке задається отриманими під час експерименту даних. Наприклад, до перевірки припущень про рівносильність результатів виміру однієї і тієї ж постійної величини, якщо виміри виконуються двома незалежними дослідниками на різних установках.

Гіпотезою, яку належить перевірити, може стати правомірність використання фізичної моделі, яку було вибрано для описання експерименту. Оскільки модель дозволяє теоретично передбачити вид функціонального зв'язку між величинами, які вимірюються, то статистичний аналіз експериментальної залежності, який проводиться з врахуванням висновків моделі, дає інформацію про те, чи достатньо справедливий модельний опис.

Основна частина

Покладемо, що даний статистичний розподіл вирівняний за допомогою деякої теоретичної кривої $f(x)$. Як би не гарно не була підібрана теоретична крива, між нею і статистичним розподілом неминучі деякі розбіжності.

Природно постає питання: пояснюються ці питання тільки випадковими обставинами, які пов'язані з обмеженістю кількості спостережень, або вони є суттєвими і пов'язаними з тим, що підібрана крива погано вирівнює цей статистичний розподіл. Відповіддю на поставлене питання є так званий критерій узгодженості.

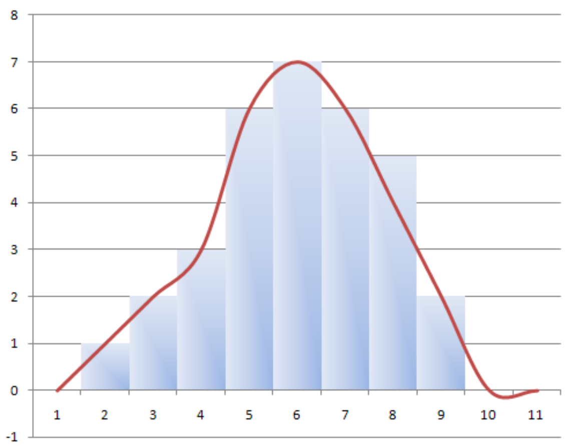


Рис. 1: Статистичний розподіл та теоретична крива $f(x)$

На основі даного статистичного матеріалу перевіряють гіпотезу H, яка полягає в тому, що випадкова величина X підпорядковується деякому закону розподілу $F(x)$. Для того, щоб прийняти або спростувати гіпотезу H, розглянемо деяку величину U, яка характеризує степінь розходження теоретичного і статистичного розподілів. Величина U може бути задана різноманітними способами. Тим не менш вона є випадковою величиною і закон розподілу цієї випадкової величини залежить від закону розподілу випадкової величини X, над якою виконувались дослідження, і від числа досліджень n. Якщо гіпотеза H вірна, то закон розподілу величини U визначається законом розподілу величини X і числом n.

Розглянемо один з багатьох критеріїв узгодженості який найчастіше використовується – «критерій χ^2» Пірсона. Припустимо, що виконано n незалежних дослідів, в кожному з яких випадкова величина X прийняла деяке значення. Результати дослідів зведені в k розрядів і оформлені у вигляді статистичного ряду:

I_i	$x_1;x_2$	$x_2;x_3$	$\dots$	$x_k;x_{k+1}$
p_i^*	p_1^*	p_2^*	$\dots$	p_k^*

Табл. 1: Розподіл випадкової величини за інтервалами.

Необхідно перевірити, чи узгоджуються експериментальні дані з гіпотезою про те, що випадкова величина X має даний закон розподілу заданий функцією розподілу $F(x)$. Назвемо цей закон розподілу теоретичним. Знаючи теоретичний закон розподілу, можна знайти теоретичні імовірності попадання випадкової величини в кожен з розрядів: $p_1, p_2, \dots, p_k$. Перевіряючи узгодженість теоретичного і статистичного розподілів, будемо виходити з розбіжностей між теоретичними ймовірностями p_i і частотами які отримали в результаті експерименту p_i^*. К. Пірсон показав, що при великих значеннях n закон розподілу

$$U = \chi^2 = n \sum_{i=1}^{k} \frac{(p_i^* - p_i)^2}{p_i}$$

практично не залежить від функції розподілу $F(x)$ і від числа дослідів n, а залежить тільки від числа розрядів k, зокрема, цей закон при збільшенні n наближається до так званого розподілу χ^2 [1].

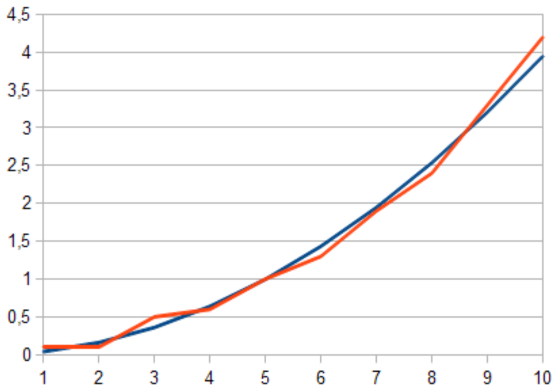


Рис. 2: Статистична крива та теоретична крива $f(x)$

Розподіл χ^2 залежить від параметру r, який називають числом «степенем свободи» і яке рівне кількості розрядів k мінус число незалежних умов («зв'язків»), які накладені на частоти p_i^*. Прикладами таких умов можуть бути: сума ймовірностей рівна одиниці (таку умову накладають завжди), рівність математичних сподівань, рівність дисперсій тощо. Для розподілу χ^2 складені спеціальні таблиці, користуючись якими можна для кожного значення χ^2 і числа степенів свободи r знайти імовірність p того, що величина, яка розподілена за цим законом, перебільшить це значення.

Таким чином, схема використання критерію χ^2 до оцінки узгодженості теоретичного і статистичного розподілу наступна:

1. Визначається міра розходження χ^2 за наведеною формулою.
2. Визначається число степенів свободи r як $r = k - s$.
3. За r і χ^2 за допомогою таблиці визначається імовірність того, що величина, яка має розподіл χ^2 з r степенями свободи, перевершить дане значення χ^2. Якщо ця імовірність мала, гіпотеза відбраковується як неверна. Якщо імовірність велика, гіпотезу можна вважати такою, що не протирічить дослідним даним.

Слід зазначити, що питання про те, якою повинна бути імовірність, щоб відхилити гіпотезу не визначений і не може бути розв'язаний за допомогою математичних міркувань.

Одним із засобів виконань обчислень з великою кількістю даних є електронні таблиці. Це один із зручних засобів обчислень та аналізу даних, в тому числі й статистичного аналізу. Наявність графічного представлення даних в електронних таблицях тільки покращує отримані результати.

Електронні таблиці OpenOffice.org Calc відносяться до програмного забезпечення вільного користування, тим не менш це програмне забезпечення містить 57 вбудованих статистичних функцій, за допомогою яких можна розв'язувати досить складні статистичні задачі.

Однією з таких задач і є задача визначення критерію узгодженості статистичних експериментальних даних та теоретичного розподілу. Візьмемо, для прикладу, результати деякого експерименту. Нехай ці результати залежать від параметра, який впливає на отриманий результат. Виконавши виміри значень по декілька раз для кожного параметру і обчисливши середнє арифметичне розбиваємо на інтервали за параметром і таким чином отримуємо розподіл випадкової величини. Якщо, для прикладу побудувати графік теоретичних значень та статистичних значень то можна отримати «майже схожі» графіки (рис 2).

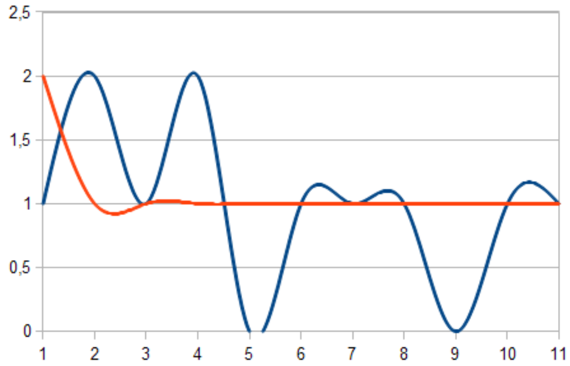


Рис. 3: Статистична крива розподілу та теоретична крива розподілу $f(x)$

Для обчислення критерію χ^2 в електронних таблицях знайдемо максимальне (функція **MAX**) та мінімальне (функція **MIN**) значення нашого інтервалу. Поділимо інтервал значень на певну кількість підінтервалів і за допомогою функції **COUNTIF** з параметрами, що будуть задовольняти побудованим інтервалам, підрахуємо кількість значень які входять до кожного з підінтервалів. Отриману так звану функцію розподілу випадкової величини або ще кажуть – функцію частот випадкової величини. Поділивши отримані значення на загальну кількість вхідних даних отримуємо так звану функцію щільності статистичного розподілу. Аналогічні дії виконуємо і для нашої теоретичної кривої, тобто функції яка максимально близько описує отримані результати, на тих самих значеннях аргументу або параметру на яких отримували статистичні значення. Отримуємо дві функції розподілу випадкової величини (рис 3.) За наведеною формулою критерію Пірсона обчислюємо величину χ^2 та число степенів свободи. Потім за допомогою функції **CHIDIST** за обчисленим значенням χ^2 та числом спетенів свободи обчислюємо імовірність відповідності статистичних даних та теоретичної кривої. Отримана імовірність і буде свідчити про те, наскільки наше припущенна про рівносильність статистичних даних та значень теоретичної кривої.

Слід зазначити, що у випадку, коли буде достатнім наявність тільки одного зв'язку, тобто $r = k-1$, можна скористатись стандартною функцією **CHI-TEST**, чого інколи буде і достатньо. В разі коли ми накладаємо додаткові умови (тобто «зв'язки») необхідно скористатись вищенаведеним способом обчислення за допомогою електронних таблиць.

Висновки

Розвиток інформаційних технологій, а особливо технологій обробки числової інформації дозволяє проводити статистичний аналіз отриманих експериментальних даних, що в свою чергу покращує не тільки наочні результати експерименту але і аналізує якість його проведення. Наявність в електронних таблицях OpenOffice.org Calc досить значної кількості вбудованих статистичних функцій дозволяє виконувати нескладний статистичний аналіз, який буде корисним для осмислення отриманих даних будь-якого експерименту.

Література

[1] *Karl Pearson* On the criterion that a given system of deviations from the probable in the case of a correlated system of variables is such that it can be reasonably supposed to have arisen from random sampling. – Philosophical Magazine, Series 5 50 (302). – P. 157 – 175.

[2] *Кендалл М.* Статистические выводы и связи / М. Кендалл, А. Стьюарт. – М.: Наука, 1973. – 900 с.

[3] База Знаний: Calc. Статистические функции // Инфра-Ресурс. Дата обновления: 28.01.2012
URL: http://wiki.i-rs.ru/wiki/RU/kb/module/calc/function/statistical

УДК 378.016:004

Овчарова О.І.

[1] *ст. викладач кафедри алгебри, СДПУ*

e-mail: kafedra_algebry_sdpu@mail.ru

ФОРМУВАННЯ КОМП'ЮТЕРНОЇ ГРАМОТНОСТІ ТА ІНФОРМАЦІЙНОЇ КУЛЬТУРИ У СТУДЕНТІВ ГУМАНІТАРНИХ СПЕЦІАЛЬНОСТЕЙ НА ЗАНЯТТЯХ З ІНФОРМАТИКИ

Дана стаття присвячена підготовці майбутніх вчителів до використання засобів сучасних інформаційних технологій у навчально-виховному процесі.

Ключові слова: *сучасні інформаційні технології, інформатизація освіти, комп'ютерна грамотність, інформаційна культура.*

Вступ

XXI століття – час переходу до високотехнологічного суспільства, в якому якість людського потенціалу, рівень освіченості й культури всього населення набувають вирішального значення. Інформатизація сучасного суспільства визначає такі соціальні явища як збільшення кількості працюючих в інформаційній сфері, інтелектуалізацію багатьох видів праці, підвищення вимог до загальноосвітньої підготовки спеціалістів, професійної підготовки на основі нових інформаційних технологій. Звідси очевидно, що інформатизація освіти є велінням часу і ключовою умовою розвитку суспільства.

Під комп'ютерною грамотністю розуміють вміння знаходити і сприймати інформацію, застосовуючи комп'ютерні технології, створювати об'єкти і встановлювати зв'язки в гіперсередовищі, конструювати об'єкти та дії у реальному світі та його моделях за допомогою комп'ютера. Вона є елементом інформаційної культури, яка передбачає здатність людини усвідомити і засвоїти інформаційну картину світу як систему символів та знаків, прямих та зворотних інформаційних зв'язків і вільно орієнтуватися в інформаційному суспільстві, адаптуватися до нього.

Основна частина

Комп'ютер – це універсальний засіб навчання, який може бути з успіхом використаний на різноманітних за змістом і організацією навчальних заняттях. Він сприяє активному включенню учнів у навчальний процес, підвищенню інтересу до навчання, кращому розумінню та запам'ятовуванню навчального матеріалу. Комп'ютерізовані навчальні матеріали здатні більш повно адаптуватися до індивідуальних особливостей учнів. Використання комп'ютера у діяльності вчителя передбачає організацію, підтримку і контроль навчального процесу, а також різноманітні види навчально-методичної та організаційно-методичної діяльності, тобто використання комп'ютера для підготовки необхідних навчальних матеріалів (поурочне планування, методичні розробки, індивідуальні завдання, контрольні роботи і т.п.), проведення психолого-педагогічних досліджень, різноманітних тестувань і опрацювання їх результатів і т.д.

Студенти гуманітарних спеціальностей вивчають дисципліни «Інформатика та ТЗН», «Сучасні інформаційні технології». Мета цих курсів – оволодіння майбутніми вчителями засобами сучасних інформаційних технологій і технічними засобами навчання з подальшим використанням їх у навчанні та професійній діяльності.

Більшість сучасних студентів мають певні знання, вміння та навички роботи з комп'ютерною технікою. Але як правило ці знання не систематизовані, не орієнтовані на застосування у навчально-виховному процесі. Тому на заняттях з інформатики студенти гуманітарних спеціальностей не тільки вивчають основні поняття інформатики, структуру, принципи функціонування, програмне забезпечення комп'ютерів, роботу у комп'ютерних мережах, але й набувають знання про застосування цих засобів у педагогічній діяльності, знайомляться з методикою використання сучасних інформаційних технологій та ТЗН на заняттях. Наприклад, при вивченні теми «Електронні таблиці», «Системи управління базами даних» студенти знайомляться з цими засобами опрацювання складних структур даних, а також з можливостями використання їх у навчальних закладах. На лабораторних заняттях студенти виконують завдання, які передбачають створення бази даних школи, побудову діаграм успішності учнів, створення електронних таблиць, які містять відомості про учнів класу, розклад занять тощо.

Важливе значення має вивчення студентами гуманітарних спеціальностей текстового редактору. Крім набуття студентами загальних вмінь та навичок підготовки текстів за допомогою текстового редактору, приділяється увага можливості його використання на уроках мови (перевірка орфографії, граматики, користування словником текстового редактора).

На уроках також можуть бути застосовані слайдові презентації. Вони допомагають вчителю унаочнити викладання нового матеріалу, узагальнити й систематизувати вже набуті знання, визначити рівень навчальних досягнень учнів, враховувати індивідуальні особливості учнів. Тому майбутнім вчителям необхідно оволодіти засобом створення презентацій Power Point. Вивчаючи цю програму, студенти створюють презентації, тематика яких відповідає спеціалізації студентів, знайомляться з методичними та психологічними особливостями їх застосування на уроках.

Останнім часом набули великої популярності комп'ютерні мережі. У системі шкільної освіти вони використовуються для доступу до різноманітної навчальної інформації, підвищення ефективності самостійної діяльності учнів, пов'язаною з різними видами творчих робіт, а також в організації дистанційного навчання. У вищій школі їх використовують для проведення наукових досліджень, оперативного обміну інформацією, дистанційного навчання, проведення консультацій тощо.

При вивченні дисципліни «Сучасні інформаційні технології» студенти гуманітарних спеціальностей знайомляться з роботою у комп'ютерній мережі, інформаційними ресурсами мережі Інтернет, можливостями пошуку інформації за допомогою пошукових систем. Ці знання та вміння можуть бути застосовані студентами у навчанні, науковій роботі, у майбутній професійній діяльності.

Висновки

Інформатизація освіти приводить до корінної зміни функцій педагога. Вчителі стоять перед необхідністю засвоєння нових технологій навчання таких як комп'ютерні навчаючі програми, електронні підручники, мультимедійні системи, телеконференції, електронна пошта тощо. Це визначає актуальність і важливість оволодіння основами інформаційної культури студентами всіх спеціальностей педагогічних навчальних закладів.

Література

[1] *Степанов А.Н.* Информатика: учебное пособие для высших учебных заведений по гуманитарным и социально-экономическим напрвлениям и специальностям / А.Н. Степанов. – Спб: Питер, 2002. – 605 с.

[2] *Коджаспирова Г.М.* Технические средства обучения и методика их использования / Г.М. Коджаспирова. – М.: Academia, 2001. – 255 с.

[3] *Чернилевский Д.В.* Дидактические технологии в высшей школе / Д.В. Чернилевский. – М.: Юнити-Дана, 2002. – 437с.

УДК 004.424.36

Рубан М.М.

[1] *асистент кафедри алгебри, СДПУ*

e-mail: rubannn@gmail.com

ПРОБЛЕМА ВИКОРИСТАННЯ РЕКУРСІЇ НА ПРИКЛАДІ КОНКРЕТНОЇ ЗАДАЧІ

Розглядається один з методів пошуку рекурсивного розв'язку задачі та підхід який дозволяє зробити перехід від рекурсивного розв'язку для лінійного (математичного).

Ключові слова: *рекурсія, алгоритм, енциклопедія послідовностей цілих чисел*

Вступ

Дуже багато уваги приділяється задачам які мають рекурсивний розв'язок, але, як відомо, не завжди задачі на які легко знайти рекурсивний розв'язок повинні розв'язуватися саме цим методом. Загальновідомо, що рекурсія є методом який залежить від кількості пам'яті яку виділено для рішення задачі, тому завжди потрібно робити спроби знаходження аналогічного ітеративного або лінійного розв'язку. Розглянемо такі підходи на конкретній задачі.

В вершинах решітки $n \times n$ міститься n^2 точок (кожна комірка решітки — квадрат розміру 1×1). Скільки існує всіляких квадратів з вершинами в цих точках (сторони квадратів не обов'язково паралельні рядкам і стовпцям решітки)?

Основна частина

За допомогою рисунку (рис. 1) визначимо кількість різних квадратів при $n = 4$. Легко бачити, що квадратів буде рівно $1 + 4 + 9 + 4 + 2 = 20$ штук.

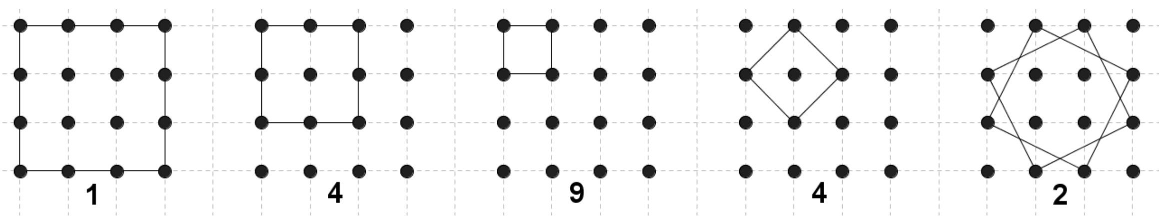


Рис. 1: Різновиди квадратів ($n = 4$).

Знайдемо загальний розв'язок. Позначимо через $S(k)$ загальну кількість різних квадратів які можна побудувати на решітці $k \times k$, де k — довжина зовнішньої границі решітки, тобто решітка складається з $(k+1)^2$ точок.

Зрозуміло, що $S(1) = 1$, тобто лише один квадрат можна побудувати на решітці розміром 1×1. Для того щоб знайти значення $S(k+1)$ помітимо, що при розширенні решітки розміру $k \times k$ до розміру $k+1 \times k+1$ додатково утворюється рівно $(2k+1)$ квадрат розміром 1×1, $(2k-1)$ квадрат розміром 2×2, $(2k-3)$ квадратів розміром 3×3, ..., 3 квадрати $k \times k$ та один квадрат $k+1 \times k+1$. Таким чином отримаємо наступну рекурентну формулу:

$$S(k+1) = S(k) + (2k+1) + (2k-1) + (2k-3) + \cdots + 3 + 1$$

$$S(k+1) = S(k) + \sum_{i=0}^{k}(2i+1) \tag{1}$$

Але при знаходженні формули (1) була врахована лише кількість різноманітних квадратів сторони яких паралельні решітці.

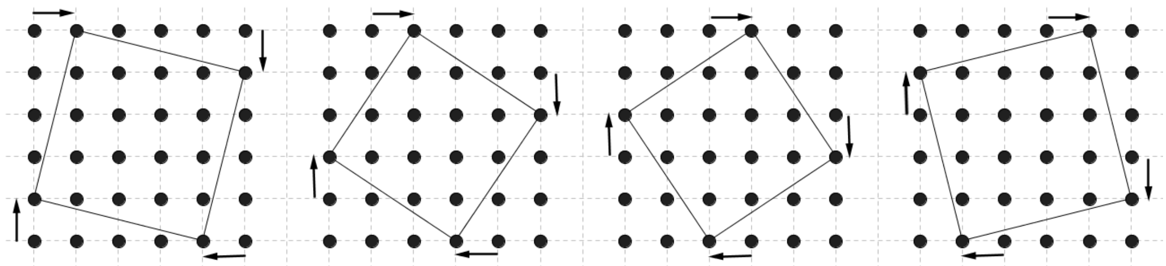


Рис. 2: Отримання r-квадратів шляхом обертання ($n = 6$).

Для знаходження повної формули, потрібно додатково знайти кількість різноманітних квадратів сторони яких не паралельні решітці (назвемо їх r-квадратами). Аналогічно попереднім міркуванням знайдемо кількість r-квадратів (відповідних розімірів) які утворюються при переході від решітки $k \times k$ до $k+1 \times k+1$. Помітимо, що r-квадрати утворюються під час одночасного зміщення всіх вершин в одному напрямку на одну точку (рис. 2 — r-квадрати які отримані для решітки 6×6). Неважко впевнитись що загальну кількість r-квадратів, яка отримується при переході від решітки $k \times k$ до $k+1 \times k+1$, рівна:

$$\sum_{i=0}^{k}(2i+1)(k-i).$$

Таким чином, для знаходження загальної кількості квадратів слід використовувати таку формулу:

$$S(k+1) = S(k) + \sum_{i=0}^{k}(2i+1) + \sum_{i=0}^{k}(2i+1)(k-i) =$$
$$= S(k) + \sum_{i=0}^{k}\left((2i+1) + (2i+1)\,(k-i)\right) =$$
$$= S(k) + \sum_{i=0}^{k}(2i+1)\,(k-i+1) =$$
$$= S(k) + \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}. \qquad (2)$$

Або в більш зручній формі: $S(k) = S(k-1) + \dfrac{(k+1)k(2k+1)}{6}$, $\quad(*)$
де k — довжина зовнішньої границі решітки.

Програмна реалізація даного рішення на мові *Pascal*:

```
function sq(k:int64):int64;
begin
  if (k = 1)
  then sq:=1
  else sq:=sq(k-1)+k*(k+1)*(2*k+1) div 6;
end;
var n:int64;
begin
  read(n);
  writeln(sq(n));
end.
```

Але наведена програма при обчисленні значення для $n \geq 7802$ виведе помилку — переповнення стеку під час обчислення рекурсії, тому слід знайти інший нерекурсивний розв'язок. Для цього звернемо увагу на формулу $(*)$ — для знаходження кожного наступного значення $S(k)$ використовується вже обчислене значення $S(k-1)$, тому якщо при підрахунку зберігати попереднє $S(k-1)$, то легко отримати нерекурсивний алгоритм.

```
var n,s,s0,i:int64;
begin
  read(n);
  s:=0; s0:=0; i:=1;
  while (i <= n) do
```

```
    begin
      s:=s0 + i*(i+1)*(2*i+1) div 6;
      s0:=s;
      i:=i+1;
    end;
    writeln(s);
end.
```

Даний розв'язок вже позбавлений вище описаного обмеження яке стосується переповнення стеку (виключаючи випадки переповнення типу *int64*), тому саме його бажано використовувати як основний.

Розглянувши додатково ряд відповідей (1, 6, 20, 50, 105, 196, ...), які отримуються під час обчислень, та використавши online енциклопедію послідовностей цілих чисел (*The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences*) можна знайти назву цієї послідовності — пірамідальні числа 4 порядку (*4-dimensional pyramidal numbers*) та формулу загального елемента $\dfrac{C^2_{n^2}}{6}$ або $\dfrac{n^2(n^2-1)}{12}$. Використовуючи останню формулу легко отримати лінійний алгоритм розв'язку.

Висновки

Отримані результати підкреслюють той факт, що за допомогою рекурсії велика кількість задач розв'язується легко та красиво, як кажуть «в один рядок». Але під час використання рекурсії досить часто виникають проблеми при її використанні, як було наведено на прикладі, тому в деяких випадках слід прораховувати такі варіанти, та у разі, якщо рекурсивний розв'язок може привести до хибних або помилкових результатів, то краще використати його ітеративний аналог або взагалі, якщо це можливо, лінійний.

Література

[1] *Ахо А.* Структуры данных и алгоритмы : [пер. с англ.] / А. Ахо, Дж. Хопкрофт, Дж. Ульман – Москва: Вильямс, 2007. – 400 с.

[2] *Грэхем Р.* Конкретная математика. Основы информатики / Р. Грэхем, Д. Кнут, О. Паташник – М.: Мир; БИНОМ. Лаборатория знаний, 2006. – 703 с.

[3] *Шень А.* Программирование: теоремы и задачи / А. Шень. – 2-е изд., испр. и доп. – М.: МЦНМО, 2004. – 296 с.

УДК 519.712

Сенченко А.С., Щербак О.В.

[1] *канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры алгебры, СГПУ*

[2] *студентка 5 курса физико-математического факультета, СГПУ*

e-mail: senchenko@pisem.net

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ГЕНЕТИЧЕСКИХ АЛГОРИТМОВ ДЛЯ ТЕСТИРОВАНИЯ БУЛЕВЫХ ФУНКЦИЙ

В работе предложен генетический алгоритм построения контрольных тестов булевых функций. Этот алгоритм выбирает те наборы значений переменных, на которых тестируемые функции принимают различные значения. Предложена программная реализация алгоритма в среде Delphi.

Ключевые слова: *тестирование, генетический алгоритм, конторольный тест*

Введение

Булевы функции эффективно используются при логическом проектировании цифровой и микропроцессорной техники, в теории кодирования и криптографии, а также в математическом моделировании. Их название происходит от фамилии выдающегося английского математика и логика Джорджа Буля, который впервые использовал их для применения символизма к логике. Первоначально булевы функции рассматривались как логические формулы и использовались прежде всего для решения комбинаторных логических задач. В 1938 году Клод Шеннон показал, что релейные схемы могут быть описаны и промоделированы с помощью булевых функций. В дальнейшем булевы функции стали широко использоваться в разработке различных вычислительных и управляющих систем: законы функционирования системы и вся система вообще, обычно описываются булевыми функциями. В связи с этим возникло направление в дискретной математике, занимающееся исследованием булевых функций.

С увеличением сложности вычислительных и управляющих систем, а также с повышением требований, предъявляющихся к надёжности их функционирования, необходимо уделять большое внимание контролю исправности и диагностике неисправностей этих систем. Если неисправности управляющих элементов систем являются достаточно устойчивыми, то для выявления и проверки таких неисправностей можно использовать проверочные контрольные тесты. Поскольку поведение отдельных элементов системы описывается булевыми функциями, то контрольные тесты чаще всего применяют именно к булевым функциям: их сравнивают с эталоном поведения.

Доказано, что построение таких тестов является NP-сложной задачей [2, 3, 5, 6], поэтому все известные алгоритмы являются эвристическими и дают приближенный к оптимальному результат. Было разработано много методов для более-менее эффективного построения контрольных тестов, которые дают высококачественный результат за небольшое время. Большой вклад в развитие тестирования цифровых схем внесли отечественные ученые С.В. Яблонский, О.Б. Лупанов, С.А. Ложкин, Н.П. Редькин, П.П. Пархоменко, Ю.А. Скобцов и зарубежные исследователи Рот, Зориан, Агравал, Фудживара и многие другие. Исследования в данном направлении продолжаются, поскольку использующиеся методы не всегда позволяют строить тесты необходимой полноты из-за неудовлетворительных показателей быстродействия. Наиболее перспективными являются алгоритмы построения тестов с использованием методов теории искусственного интеллекта, в первую очередь, генетических алгоритмов. Поэтому для эффективного построения контрольных тестов булевых функций мы использовали именно генетические алгоритмы.

Постановка задачи

Задачей работы является разработка генетического алгоритма построения контрольных тестов заданных булевых функций и его программная реализация в среде Delphi. Исходные функции могут быть заданы как таблицей истинности, так и аналитически в виде ДНФ. Необходимо выделить такие наборы значений переменных, на которых все функции принимают различные значения. Количество таких наборов должно быть минимально возможное или близкое к нему. Задаются ограничения на количество переменных (до 8) и количество тестируемых булевых функций (до 10).

Основная часть

Булевыми называют функции, аргументы и значения которых принадлежат множеству $\{0,1\}$. Основными булевыми операциями являются отрицание (обозначается чертой сверху), конъюнкция (обозначается $\wedge$, $\cdot$ или знак пропускается как и для умножения), дизъюнкция (обозначается $\vee$), импликация ($\Rightarrow$), эквиваленция ($\Leftrightarrow$) и сумма по модулю два ($\oplus$) [1]. Каждая, отличная от нуля, булева функция может быть записана в виде дизъюнктивной нормальной формы (ДНФ), эта запись является наиболее удобной и часто используется. Булева функция от N переменных имеет 2^N возможных комбинаций значений переменных, такую функцию можно полностью описать таблицей с 2^N строками. В каждой строке будет указано значение функции для различных комбинаций значений переменных. Такая таблица называется таблицей истинности. Строки таблицы истинности будем всегда располагать в порядке двоичного возрастания значений переменных. Поэтому строки могут быть пронумерованы.

Для обеспечения надежного функционирования системы необходимо решить задачу контроля исправности её элементов. Для решения этой задачи С.В. Яблонским предложены [6] логические методы контроля, суть которых заключается в том, что на входы системы подаются некоторые специальным образом подобранные «проверочные» наборы значений переменных и на основе выходных значений системы делается вывод о её исправности и характере неисправностей (при их наличии). Как правило, возможные виды неисправности известны заранее. Таким образом, мы можем выделить булеву функцию, соответствующую исправной системе и функции, соответствующие неисправностям, то есть можно сформировать некоторое конечное множество исследуемых булевых функций M мощности k. Для определения, является ли система исправной и выявления типа неисправности необходимо различить между собой все функции множества M. Таким образом, тестирование булевых функций в нашем случае состоит в том, что для них мы подставляем некоторый набор значений переменных и исследуем значение функций.

Функция $f(x) = 2^x$ при возрастании x растет очень быстро. Поэтому, для функций от среднего количества (40-50) переменных, используемых в реальных вычислительных и управляющих системах, протестировать значения на всех наборах вычислительно сложно. Вследствие этого необходимо выбрать лишь некоторые наборы значений переменных, на которых исследуется поведение функции. Для того, чтобы различить между собой k функций необходимо не менее, чем $\lceil \log_2 n \rceil$ наборов значений (функция $\lceil x \rceil$ означает дополнение до ближайшего целого). Наша задача состоит в том, чтобы выбрать такие наборы значений, которые различают между собой заданные булевы функции. При этом в первую очередь интересуют тесты минимальной длины, количество наборов в которых равно $\lceil \log_2 n \rceil$ и тесты, у которых длина близка к минимальной.

Для решения этой задачи полный перебор всех вариантов таких наборов неэффективен ввиду огромного количества операций. Одним из подходов к решению подобных задач является эволюционное моделирование, впервые сформулированное в 1966 году Л. Фогелем, А. Оуэни и М. Уолшем в работе «Искусственный интеллект и эволюционное моделированне». Этот подход использует принцип природной эволюции процесса. Суть этого подхода заключается в том, что из некоторого начального множества возможных решений (начальной популяции) выбираются наилучшие, из которых специальным образом получаем дополнительные решения. Затем отобранные решения объединяются с новыми в первое поколение решений. Из первого поколения аналогичным образом получаем второе и последующие поколения. Считается, что через определенное достаточно большое количество поколений мы получим наилучший результат.

Этот подход послужил основой появления генетических алгоритмов. Рассмотрим основные понятия, связанные с генетическими алгоритмами. Хромосомой будем считать отдельный вариант решения задачи – некоторую последовательность символов, каждый символ называется геном. Генетический алгоритм случайно или особым образом генерирует начальную популяцию хромосом. Считаем, что все популяции состоят из w хромосом. Для каждой хромосомы с помощью «фитнесс-функции» подсчитывается насколько она подходит для решения задачи. Из начальной популяции выбираем $\frac{w}{2}$ по наилучшим значениям их фитнесс-функции. Эти хромосомы переходят в следующее поколение. Из выбранных хромосом получаем еще $\frac{w}{2}$ хромосом с помощью одной из трех операций: мутации, сдвига или кроссинговера. Мутация состоит в том, что некоторый ген меняет свое значение. Сдвиг состоит в циклическом изменении позиции всех генов на определенное количество единиц. Кроссинговер (в литературе о генетических алгоритмах также используется название кроссовер или скрещивание) – это операция, при которой из двух хромосом порождаются две новые хромосомы. Одноточечный кроссинговер работает так: сначала случайным образом выбирается одна из точек разрыва – участок между соседними генами в строке. Обе родительские хромосомы разрываются на два сегмента по этой точке. Затем первый сегмент первой хромосомы склеивается со вторым сегментом второй хромосомы, а первый сегмент второй хромосомы склеивается со вторым сегментом первой хромосомы. В результате получаются две новые хромосомы. Аналогично работает двухточечный кроссинговер, у которого две точки разрыва и т.д. Например хромосомы 011111011 и 110000111 в результате одноточечного кроссинговера по третьей точке разрыва дадут хромосомы 011000111 и 110111011.

Работа генетического алгоритма представляет собой итерационный процесс, продолжающийся до тех пор, пока не пройдет заданное число поколений или некоторый другой критерий остановки.

Определение операций генетического алгоритма для поставленной задачи

Считаем что в задаче рассматриваются k тестируемых булевых функций от n переменных. Все хромосомы являются последовательностями длиной 2^n, состоящие из нулей и единиц. Каждый ген отвечает за набор значений таблицы истинности с соответствующим номером по правилу: 0 – набор не включается в тест; 1 – включается в тест. Таким образом количеству единиц в хромосоме соответствует количество наборов в тесте. Во всех хромосомах начального поколения количество единиц равно $\lceil \log_2 k \rceil$.

Фитнесс-функция задается как количество различных значений тестируемых функций, то есть хромосома, получившая оценку k, является решением задачи и приводит к останову процесса поиска решения. Для получение хромосом следующих поколений применяются операции сдвига, мутации и одноточечный кроссинговер. При мутации некоторый ген меняет значение 0 на значение 1, а некоторый другой ген - значение 1 на значение 0. При кроссинговере точка разрыва выбирается так, чтобы количество единиц в обеих новых хромосомах совпадало с количеством единиц в родительских хромосомах. Таким образом генетические операции не увеличивают количество единиц в хромосомах.

Если на протяжении 100 поколений ответ не получен, то формируется новое начальное поколение хромосом с количеством единиц на одну больше.

Разработана программная реализация алгоритма в среде программирования Delphi. По результатам тестирования программы выбраны оптимальные параметры вероятностей генетических операций: мутация 0,1 - 0,15; сдвиг 0,1 - 0,15; кроссинговер 0,7 - 0,8. С этими вероятностями количество наборов переменных, участвующих в тесте булевых функций никогда не превышало величину $\lceil \log_2 k \rceil + 1$, то есть никогда не добавлялось более одного набора.

Выводы

В работе предложен генетический алгоритм для тестирования булевых функций. Рассмотрен вариант кодирования исходных данных, оценка фитнесс-функции и способы выполнения генетических операций. Разработана программная реализация алгоритма, выбраны оптимальные на наш взгляд вероятности генетических операций.

Дальнейшие исследования должны рассматривать особенности выполнения генетических операций и их вероятность для отдельных случаев вида тестируемых булевых функций, в частности для случая, когда исходные функции отличаются друг от друга очень слабо.

Литература

[1] *Бондаренко М.Ф.* Комп'ютерна дискретна математика : Підручник / М.Ф. Бондаренко, Н.В. Білоус, А.Г. Руткас. – Х.: «Компанія СМІТ», 2004. – 480 с.

[2] *Коваценко С.В.* Синтез легкотестируемых схем в базисе Жегалкина для инверсных неисправностей / С.В. Ковaценко // Вестник Московского университета. Серия 15. Вычислительная математика и кибернетика. – 2000. – №2. – С. 45 – 47.

[3] *Носков В.Н.* Метод синтеза удобных для контроля комбинационных схем / В.Н. Носков // Дискретная математика. – 1993. – Т.5, вып. 4. – С. 3 – 25.

[4] *Рутковская Д.* Нейронные сети, генетические алгоритмы и нечеткие системы / Д. Рутковская, М. Пилинский, Л. Рутковский. – М.: Горячая линия – Телеком, 2006. – 452 с.

[5] *Хахулин В.Г.* О проверяющих тестах для счетчика честности / В.Г. Хахулин // Дискретная математика. – 1995. – Т.7, вып. 4. – С. 51 – 59.

[6] *Яблонский С.В.* Некоторые вопросы надежности и контроля управляющих систем / С.В. Яблонский // Математические вопросы кибернетики. – 1988. – №1. – С. 5 – 25.

УДК 519.1

Стёпкин А.В.

[1] *заведующий лабораториями факультета экономики и управления, СГПУ*

e-mail: stepkin.andrey@rambler.ru

АЛГОРИТМ РАСПОЗНАВАНИЯ ГРАФА ТРЕМЯ АГЕНТАМИ

Рассматривается проблема распознавания конечных неориентированных графов тремя агентами. Получен алгоритм распознавания, временная и емкостная сложности которого равны $O(n^2)$. При работе два агента, передвигающиеся по графу, используют по две различные краски (всего три краски).

Ключевые слова: *распознавание графа, обход в глубину, обратное ребро, перешеек.*

Введение

Актуальным направлением математической кибернетики является теория дискретных динамических систем [1]. В общей схеме Глушкова – Летичевского эта система представлена в виде модели взаимодействия управляющей и управляемой систем [2]. Ранее подобное взаимодействие было рассмотрено в [3], в предположении, что оно представлено поочередным перемещением двух агентов-исследователей (АИ) по неизвестной среде, заданной конечным графом [2], и обменом данными с агентом-экспериментатором (АЭ), который восстанавливает исследуемый граф, по данным полученным от АИ.

Данная работа посвящена исследованию рассматриваемого взаимодействия, в предположении, что оно представлено процессом одновременного перемещения двух АИ A и B по неизвестной среде, заданной конечным графом (АИ могут окрашивать вершины, ребра и инциденторы графа, воспринимать эти отметки и на их основании осуществлять перемещение), и обменом данными с АЭ (восстанавливает граф, по данным полученным от АИ и передает АИ информацию, необходимую им для функционирования). В работе предложен алгоритм построения маршрутов АИ по графу, позволяющих АЭ точно восстановить граф среды. Для этого у каждого АИ есть две краски: у A это r и b, у B – y и b. Алгоритм основан на методе обхода графа в глубину. При его описании используются результаты и обозначения из [3].

Основным результатом исследования является оптимизация алгоритма распознавания перешейков и обратных ребер, что позволило, в итоге, улучшить временную сложность с $O(n^3)$ [3] до $O(n^2)$, где $n-$число вершин графа.

Основные определения и обозначения

В работе рассматриваются конечные, неориентированные графы без петель и кратных ребер. Понятия, которые не рассмотрены ниже, общеизвестны и с ними можно ознакомиться в [4-6] Пусть $G = (V, E)$ – граф, где V – множество вершин, E – множество ребер (двухэлементных подмножеств (v, u), где $v, u \in V$). Тройку $((v, u), u)$ будем называть инцидентором ребра (v, u) и вершины u. Множество таких троек обозначим I. Множество $L = V \cup E \cup I$ назовем множеством элементов графа G. Функцией раскраски графа G назовем отображение $\mu : L \to \{w, r, y, ry, b\}$, где w интерпретируется как белый цвет, r – красный, y – желтый, ry – красно - желтый b – черный. Пара (G, μ) называется раскрашенным графом. Последовательность $u_1, u_2, ...u_k$ попарно смежных вершин называется путем в графе G, а k – длинной пути. При условии $u_1 = u_k$ путь называется циклом. Окрестностью $Q(v)$ вершины v будем называть множество элементов графа, состоящее из вершины v, всех вершин u смежных с v, всех ребер (v, u) и всех инциденторов $((v, u), v), ((v, u), u)$. Мощность множеств вершин V и ребер E обозначим через n и m соответственно. Ясно что $m \leq \frac{n(n-1)}{2}$. Изоморфизмом графа G и графа H назовем такую биекцию $\varphi : V_G \to V_H$, что $(v, u) \in E_G$ точно тогда, когда $(\varphi(v), \varphi(u)) \in E_H$. Таким образом, изоморфные графы равны с точностью до обозначения вершин и раскраски их элементов.

Агенты A и B передвигаются по графу из вершины v в вершину u по ребру (v,u), могут изменять окраску вершин v, u, ребра (v,u), инциденторов $((v, u), v)$,$((v, u), u)$. Находясь в вершине v, АИ воспринимает метки всех элементов окрестности $Q(v)$. И на основании этих меток определяет, по какому ребру будет перемещаться, и как будет окрашивать элементы графа. АЭ передает, принимает и идентифицирует сообщения, полученные от АИ, обладает конечной, неограниченно растущей внутренней памятью, в которой фиксируется результат функционирования АИ на каждом шаге и строится представление графа G, вначале неизвестного агентам, списками ребер и вершин.

Основна частина

Стратегия решения задачи аналогична стратегии, рассмотренной в [7], со значительными изменениями в режимах работы АИ с перешейками и обратными ребрами. Рассмотрим эти режимы более подробно.

1) Если, при движении вперед, в вершине v было обнаружено обратное ребро, то АИ прекращает работу в обычном режиме и переключается в режим *распознавания обратных ребер.* АИ красит в «свой» цвет ближние

инциденторы всех обратных ребер инцидентных вершине v. Завершив покраску инциденторов, АИ передвигается назад по своему пути, до обнаружения вершины инцидентной помеченному обратному ребру (под помеченным обратным ребром понимается белое ребро, у которого дальний инцидентор и дальняя вершина окрашены в «свой» цвет), переходит по этому ребру, окрашивая его в черный цвет. На этом этапе возможны два случая: 1.1) Распознаны не все, помеченные рассматриваемым АИ, обратные ребра. В этом случае АИ возвращается назад по пройденному на предыдущем шаге ребру, окрашивая в черный цвет ближний инцидентор, и продолжает движение назад по своему пути, до обнаружения следующей вершины, инцидентной помеченному обратному ребру. 1.2) Распознаны все, помеченные рассматриваемым АИ, обратные ребра. В этом случае АИ окрашивает ближний инцидентор ребра, по которому он перешел на предыдущем шаге, в черный цвет и завершает работу в режиме распознавания обратных ребер.

2) Если в процессе обхода графа в вершине v был обнаружен перешеек, то при условии, что все ранее помеченные данным АИ перешейки были распознаны, агент переключается в *режим пометки перешейков*. В этом режиме АИ окрашивает ближние инциденторы всех перешейков, инцидентных вершине v, в черный цвет. В данном режиме работы агент A имеет приоритет над агентом B, поэтому в ситуации, когда оба агента одновременно обнаружат один и тот же перешеек, он будет помечен агентом A. На каждом шаге АИ обмениваются данными с АЭ. По завершению режима пометки перешейков АЭ содержит информацию о количестве помеченных перешейков.

3) Получив от АЭ команду о необходимости распознавания перешейков, АИ переключается в *режим распознавания перешейков*. Если в этот момент агент работает в режиме распознавания обратного ребра, то АИ переключится в режим распознавания перешейков, лишь по завершению распознавания обратного ребра. При переключении в этот режим АИ проверяет наличие из вершины, в которой он находится, других возможных путей перемещения кроме как движение назад по своему пути. Если такие пути есть, то АИ возвращается назад по своему пути, ничего не окрашивая, до обнаружения ближайшей вершины, инцидентной помеченному перешейку (под помеченным перешейком понимается белое ребро, у которого дальний инцидентор окрашен в черный цвет, а дальняя вершина окрашена в «чужой» цвет). Если же таких путей нет, то возвращаясь назад по своему пути, АИ окрашивает его в черный цвет до тех пор, пока не появится вершина с другими возможными путями перемещения, далее АИ возвращается назад по своему пути до обнаружения ближайшей вершины, инцидентной помеченному перешейку. При

обнаружении помеченного перешейка возможны два случая: 3.1) *Помечено один перешеек.* АИ окрашивает ближний инцидентор помеченного перешейка в черный цвет. Далее движется вперед по своему пути, пока не вернется в вершину, в которой было произведено переключение в режим распознавания перешейков. 3.2) *Помечено не менее двух перешейков.* АИ окрашивает ближний инцидентор помеченного перешейка в «свой» цвет. Далее АИ движется назад по своему пути, пока не будет найден следующий помеченный перешеек. При обнаружении помеченного перешейка возможно два варианта: 3.2.1) *Следующий помеченный перешеек не последний.* АИ окрашивает ближний инцидентор в черный цвет. На следующем шаге АИ снова возвращается назад по своему пути до следующего помеченного перешейка. 3.2.2) *Следующий помеченный перешеек последний.* АИ окрашивает ближний инцидентор в «свой» цвет. На следующем шаге АИ переходит по последнему перешейку в чужую область, окрашивая ближний инцидентор в черный цвет. На следующем шаге АИ переходит по первому распознанному перешейку в свою область, окрашивая дальний инцидентор в черный цвет. Далее АИ возвращается в вершину, в которой было произведено переключение в режим распознания перешейков.

4) *Одновременное попадание двух АИ в одну белую вершину.* При одновременном попадании двух АИ в одну белую вершину, каждый АИ окрашивает вершину наполовину, и она становится красно-желтой. Агент B на следующем шаге отступает назад по своему пути. При этом удаляет краску с ближнего инцидентора и ребра, окрашивает дальний инцидентор в черный цвет и переходит в режим пометки перешейков (при этом ребро, по которому он вернулся уже посчитано как первый перешеек, а длина желтого пути уменьшена на одну вершину). Агент A видит разноцветную вершину как свою, но при распознавании окрашивает в черный цвет обе половинки.

Алгоритмы обхода и восстановления. Распознавание графа проводится посредством двух типов алгоритмов: «Обход» и «Восстановление». Первый тип алгоритма описывает обход неизвестного графа G агентами-исследователями, с целью проведения серии элементарных экспериментов и обменом данными с АЭ. Второй тип алгоритма описывает анализ агентом-экспериментатором результатов элементарных экспериментов и их объединение, в результате которого будет построен граф H, изоморфный распознаваемому графу G.

Алгоритм работы агента A: *Вход*: граф G неизвестный АИ и АЭ, все элементы графа G окрашены краской w, агент A помещен в произвольную вершину v.

Выход: все элементы графа G (кроме перешейков, обнаруженных в процессе работы агентов-исследователей), которые попадут в область работы агента A, окрашены краской b, агент A находится в исходной вершине v, пошагово выданы команды АЭ.

Данные: v – рабочая вершина графа G, в которой находится агент A.

1. Агент A красит $(\mu(v) := r)$;
2. запрос AN;
3. *if* $AN \neq 1$ *then do*
4. запрос BN;
5. *if* $BN = 0$ *then* *МЕТИМ_ПЕР_A* (v);
6. *else* *ВЫБОР_ХОДА_A* (v); *end do*;
7. *else* *РАСП_ПЕР_A* (v);

Рассмотрим процедуры, используемые в данном алгоритме.

МЕТИМ_ПЕР_A (v):

1. *if* в $Q(v)$ есть ребро (v,u), у которого $(\mu((v,u),v) = w)\, and\, (\mu((v,u),u) = w)\, and\, (\mu(u) = y)$ *then do*
2. агент A выполняет процедуру *МЕТИМ_AB* (v);
3. *go to* 1 данной процедуры; *end do*;
5. *else do*
6. запрос E;
7. *if* $E = 0$ *then do* *ВЫБОР_ХОДА_A* (v);
8. *else do*
9. агент A выполняет процедуру *ФИКС_A* (v);
10. *go to* 2 алгоритма обхода; *end do*;
11. *end do*;

При выполнении процедуры МЕТИМ_AB(v), агент A выбирает из окрестности $Q(v)$ ребро (v,u), которое удовлетворяет следующему условию $(\mu((v,u),v) = w)\, and\, (\mu((v,u),u) = w)\, and\, (\mu(u) = y)$, окрашивает ближний инцидентор $\mu((v,u),v) := b$ и записывает в список M сообщение: МЕТИМ_AB.

ВЫБОР_ХОДА_A (v):

1. *if* в $Q(v)$ есть ребро, у которого $(\mu(v,u) = w) and (\mu(u) = \mu(v) = r)$ *then do*
2. агент A выполняет процедуру *РАСП_A* (v);
3. *go to* 2 алгоритма обхода; *end do*;
4. *else if* в $Q(v)$ есть ребро, у которого $(\mu(v,u) = w)\, and\, (\mu(u) = w)$ *then do*
5. агент A выполняет процедуру *ВПЕРЕД_A* (v);
6. *go to* 2 алгоритма обхода; *end do*;
7. *else if* в $Q(v)$ есть ребро, у которого

$(\mu((v,u),v)=w)\, and\, (\mu((v,u),u)=w)\, and\, (\mu(u)=y)\ then\ do$
8. агент A выполняет процедуру $СТОИТ\_A(v)$;
9. *go to* 2 алгоритма обхода; *end do*;
10. *else if* в $Q(v)$ есть ребро, у которого
$((\mu((v,u),v)=w) and (\mu((v,u),u)=b) and (\mu(u)=y)) or (\mu(v,u)=y)$ *then do*
11. агент A выполняет процедуру $СТОИТ\_A(v)$;
12. *go to* 2 алгоритма обхода; *end do*;
13. *else if* в $Q(v)$ есть ребро, у которого
$(\mu(v)=r)\, and\, (\mu((v,u),v)=r)\, and\, (\mu(v,u)=r)$ *then do*
14. агент A выполняет процедуру $НАЗАД\_A(v)$;
15. *go to* 2 алгоритма обхода; *end do*;
16. *else* агент A выполняет процедуру $СТОП\_A(v)$;

$РАСП\_A(v)$:

1. *while* в $Q(v)$ есть ребро, у которого $((\mu(v)=\mu(u)=r) and (\mu(v,u)=w))$ *do*
2. агент A красит $(\mu((v,u),v)):=r$;
3. агент A записывает в M: МЕТКА_ОР_А; *end do*;
4. агент A выбирает из окрестности $Q(v)$ ребро (v,u), у которого $(\mu((v,u),v)=r) and (\mu(v,u)=r) and (\mu(u)=r)$, переходит по нему в вершину u;
5. $v:=u$;
6. агент A записывает в M: ОТСТУП_А;
7. *if* в окрестности $Q(v)$ нет ребра (v,u), у которого $(\mu(v,u)=w) and$ $and (\mu((v,u),u)=r) and (\mu(v)=\mu(u)=r)$ *then go to* 4 данной процедуры;
8. *else do*
9. агент A переходит по ребру (v,u), красит $\mu(v,u):=b$;
10. $v:=u$;
11. агент A записывает в список M: ВПЕРЕД_ОР_А; *end do*;
12. запрос $UDOBR\_A$;
13. *if* $UDOBR\_A$ = TRUE *then do*
14. агент A выбирает из $Q(v)$ ребро (v,u), у которого $(\mu(v,u)=b)\, and$ $and\, (\mu((v,u),v)=r)\, and\, (\mu(v)=\mu(u)=r)$ и красит $\mu((v,u),v):=b$;
15. агент A записывает в список M: РЕБРА_РАСПОЗНАНЫ_А; *end do*;
16. *else do*
17. агент A выбирает из $Q(v)$ ребро (v,u), у которого $(\mu(v,u)=b) and$ $and (\mu((v,u),v)=r) and (\mu(v)=\mu(u)=r)$ и переходит по нему в вершину u;
18. агент A красит $\mu((v,u),v):=b$;
19. $v:=u$;
20. *go to* 4 данной процедуры; *end do*;

При выполнении процедуры $ВПЕРЕД\_A(v)$, агент A выбирает из окрестности $Q(v)$ ребро (v,u), у которого $(\mu(v,u) = w) and (\mu(u) = w)$ и переходит по нему в вершину u. При этом окрашивает $\mu(v,u) := r$, $\mu((v,u),u) := r, \mu(u) := r$, выполняет присваивание $v := u$ и записывает в список M сообщение: ВПЕРЕД_А.

Выполняя процедуру $СТОИТ\_A(v)$, агент A не выполняет никаких действий.

В процессе выполнения процедуры $НАЗАД\_A(v)$, агент A выбирает из окрестности $Q(v)$ ребро, для которого выполняется условие $(\mu(v) = r)\, and\, (\mu((v,u),v) = r)\, and\, (\mu(v,u) = r)$, и переходит по нему в вершину u. При этом, производит окрашивание $\mu(v) := b$, $\mu((v,u),v) := b$, $\mu(v,u) := b$, выполняет присваивание $v := u$ и записывает в список M сообщение: $НАЗАД\_A$.

При выполнении процедуры $СТОП\_A(v)$, агент A окрашивает $\mu(v) := b$, записывает в список M сообщение: $СТОП\_A$ и завершает работу.

Выполняя процедуру $ФИКС\_A(v)$, агент A записывает в список M сообщение: $ФИКС\_A$.

$РАСП\_ПЕР\_A(v)$:

1. *if* в $Q(v)$ не обнаружено ребра, у которого
   $(\mu((v,u),v) = w)\, and\, (\mu((v,u),u) = b)\, and\, (\mu(v,u) = w)$ *then do*
2. *if* в $Q(v)$ обнаружено ребро, у которого $((\mu(v,u)=w) and (\mu(u)=w)) or$
   $or ((\mu(v,u)=r) and (\mu((v,u),u)=r)) or ((\mu(v,u)=w) and (\mu(v)=\mu(u)=r))\, or$
   $or ((\mu((v,u),u)=w) and (\mu(u) = y)) or ((\mu((v,u),v)=r) and$
   $and (\mu((v,u),u)=b) and (\mu(v,u)=w))$ *then do*
3. агент A выполняет процедуру $ОТСТУП\_A(v)$;
4. *go to 1* данной процедуры; *end do*;
5. *else do*
6. агент A выполняет процедуру $НАЗАД\_A(v)$;
7. *go to 1* данной процедуры; *end do*;
8. *end do*;
9. *else do*
10. запрос UDP_B;
11. *if* $UDP\_B = TRUE$ *then* $РАСП\_AB(v)$;
12. *else* $РАСП\_ABb(v)$;
13. запрос K;
14. *if* $K \neq 0$ *then go to* 1 данной процедуры;
15. *else do*
16. агент A выполняет процедуру $ОБН\_A(v)$;
17. *if* в $Q(v)$ обнаружено ребро, у которого

$(\mu(v,u)=w)\,and(((\mu((v,u),v)=r)\,and\,(\mu((v,u),u)=b))\,or$
$or\,((\mu((v,u),v)=b)\,and\,(\mu((v,u),u)=r)))$ *then do*
18. агент A выполняет процедуру *ВПЕРЕД_AR_N* (v);
19. *go to* 17 данной процедуры; *end do*;
20. *if* в $Q(v)$ есть ребро, у которого
$(\mu(v,u)=r)\,and\,(\mu((v,u),u)=r)\,and\,(\mu(u)=r)$ *then do*
21. агент A выполняет процедуру *ВПЕРЕД_AR* (v);
22. *go to* 20 данной процедуры; *end do*;
23. *else go to* 2 алгоритма обхода; *end do*;
24. *end do*;

Выполняя процедуру *ОТСТУП_A* (v), агент A выбирает из окрестности $Q(v)$ ребро (v,u), у которого $(\mu((v,u),v)=r)\,and\,(\mu(v,u)=r)$ и переходит по нему в вершину u, выполняет присваивание $v:=u$ и записывает в список M сообщение: ОТСТУП_А.

При выполнении процедуры *РАСП_AB* (v), агент A выбирает из окрестности $Q(v)$ произвольное ребро (v,u), для которого выполняется условие $(\mu((v,u),v)=w)\,and\,(\mu((v,u),u)=b)\,and\,(\mu(v,u)=w)$, окрашивает $\mu((v,u),v):=r$ и записывает в список M сообщение: РАСП_АВ.

Процедура *РАСП_ABb* (v) аналогична процедуре *РАСП_AB* (v), с отличием лишь в том, что инцидентор окрашивается следующим образом $\mu((v,u),v):=b$.

При выполнении процедуры *ОБН_A* (v), агент A записывает в список M сообщение: ОБН_А;

Выполняя процедуру *ВПЕРЕД_AR_N* (v), агент A выбирает из окрестности $Q(v)$ произвольное ребро (v,u), которое удовлетворяет условию $(\mu(v,u)=w)and(((\mu((v,u),v)=r)and(\mu((v,u),u)=b))or((\mu((v,u),v)=b)and(\mu((v,u),u)=r)))$, переходит по нему в вершину u, окрашивая $\mu((v,u),v):=b,\mu((v,u),u):=b$ и выполняет присваивание $v:=u$.

При выполнении процедуры *ВПЕРЕД_AR* (v), агент A выбирает из окрестности $Q(v)$ произвольное ребро (v,u), для которого выполняется условие $(\mu(v,u)=r)\,and\,(\mu((v,u),u)=r)\,and\,(\mu(u)=r)$, переходит по нему в вершину u и выполняет присваивание $v:=u$.

Алгоритм работы агента B: *Вход*: граф G неизвестный АИ и АЭ, все элементы графа G окрашены краской w, агент B помещен в произвольную вершину s.

Выход: все элементы графа G (кроме перешейков, обнаруженных в процессе работы агентов-исследователей), которые попадут в область работы агента B, окрашены краской b, агент B находится в исходной вершине s, пошагово выданы команды АЭ.

Данные: s – рабочая вершина графа G, в которой находится агент B.

1. Агент B красит $(\mu(s) := y)$;
2. запрос BN;
3. *if* $BN \neq 1$ *then do*
4. запрос AN;
5. *if* $\mu(s) = ry$ *then do*
6. агент B выполняет процедуру *ВОЗВРАТ_B* (s);
7. агент B выполняет процедуру *МЕТИМ_ПЕР_B* (s); *end do*;
8. *else if* $AN = 0$ *then МЕТИМ_ПЕР_B* (s);
9. *else ВЫБОР_ХОДА_B* (s); *end do*;
10. *else РАСП_ПЕР_B* (s);

Процедуры агента B, которые не рассматриваются ниже, аналогичны процедурам агента A.

Выполняя процедуру *ВОЗВРАТ_B* (s), агент B выбирает из окрестности $Q(s)$ ребро, у которого $(\mu((s,z),s) = y)\, and\, (\mu(s,z) = y)$ и переходит по нему в вершину z, удаляя краску $(\mu((s,z),s) := w)\, and\, (\mu(s,z) := w)$. При переходе по ребру, агент B окрашивает $\mu((s,z),z) := b$, выполняет присваивание $s := z$ и записывает в список N сообщение: ВОЗВРАТ_B.

МЕТИМ_ПЕР_B (s):

1. *if* в $Q(s)$ есть ребро (s,z), у которого $(\mu((s,z),s) = w) and (\mu((s,z),z) = w) and$ $and((\mu(z) = r) or (\mu(z) = ry))$ *then do*
2. *if* в вершине z ребра (s,z) находится агент A *then do*
3. агент B выполняет процедуру *СТОИТ_B* (s);
4. *go to* 1 данной процедуры; *end do*;
5. *else do*
6. агент B выполняет процедуру *МЕТИМ_ВА* (s);
7. *go to* 1 данной процедуры; *end do*;
8. *end do*;
9. *else do*
10. запрос L;
11. *if* $L = 0$ *then ВЫБОР_ХОДА_B* (s);
12. *else do*
13. агент B выполняет процедуру *ФИКС_B* (s);
14. *go to* 2 алгоритма обхода; *end do*;
15. *end do*;

Выполняя процедуру *МЕТИМ_ВА* (s), агент B выбирает из окрестности $Q(s)$ ребро (s,z), у которого $(\mu((s,z),s) = w) and (\mu((s,z),z) = w) and((\mu(z) = r) or$

$or(\mu(z)=ry))$, окрашивает $\mu((s,z),s)\coloneqq b$ и записывает в список N сообщение: МЕТИМ_ВА.

ВЫБОР_ХОДА_В (s):

1. *if* в $Q(s)$ есть ребро, у которого $(\mu(s,z)=w)and(\mu(s)=\mu(z)=y)$ *then do*
2. агент B выполняет процедуру *РАСП_В* (s);
3. *go to* 2 алгоритма обхода; *end do*;
4. *else if* в $Q(s)$ обнаружено ребро, у которого $(\mu(s,z)=w)and(\mu(z)=w)$ *then do*
5. агент B выполняет процедуру *ВПЕРЕД_В* (s);
6. *go to* 2 алгоритма обхода; *end do*;
7. *else if* в $Q(s)$ есть ребро, у которого $(\mu((s,z),s)=w)and(\mu((s,z),z)=w)and$ $and((\mu(z)=r)or(\mu(z)=ry))$ *then do*
8. агент B выполняет процедуру *СТОИТ_В* (s);
9. *go to* 2 алгоритма обхода; *end do*;
10. *else if* в $Q(s)$ есть ребро, у которого $(\mu(s,z)=w)and(\mu((s,z),s)=w)and$ $and(\mu((s,z),z)=b)$ *then do*
11. агент B выполняет процедуру *СТОИТ_В* (s);
12. *go to* 2 алгоритма обхода; *end do*;
13. *else if* в $Q(s)$ есть ребро, у которого $(\mu(s,z)=y)and(\mu(s)=y)and$ $and(\mu((s,z),s)=y)$ *then do*
14. агент B выполняет процедуру *НАЗАД_В* (s);
15. *go to* 2 алгоритма обхода; *end do*;
16. *else* агент B выполняет процедуру *СТОП_В*;

РАСП_ПЕР_В (s):

1. *if* в $Q(s)$ не обнаружено ребра, у которого $(\mu((s,z),s)=w)\,and$ $and\,(\mu((s,z),z)=b)\,and\,(\mu(s,z)=w)$ *then do*
2. *if* в $Q(s)$ обнаружено ребро, у которого $((\mu(s,z)=w)and(\mu(z)=w))or$ $or((\mu(s,z)=y)and(\mu((s,z),z)=y))or((\mu(s,z)=w)and(\mu(s)=\mu(z)=y))or$ $or((\mu((s,z),z)=w)and((\mu(z)=r)or(\mu(z)=ry)))or$ $or((\mu((s,z),s)=y)and(\mu((s,z),z)=b)and(\mu(s,z)=w))$ *then do*
3. агент B выполняет процедуру *ОТСТУП_В* (s);
4. *go to 1* данной процедуры; *end do*;
5. *else do*
6. агент B выполняет процедуру *НАЗАД_В* (s);
7. *go to 1* данной процедуры; *end do*;
8. *end do*;
9. *else do*
10. запрос UDP_B;
11. *if* $UDP\_B=TRUE$ *then РАСП_ВА* (s);

12. *else* $РАСП\_BAb\left(s\right)$;
13. запрос F;
14. *if* $F \neq 0$ *then go to* 1 данной процедуры;
15. *else do*
16. агент B выполняет процедуру $ОБН\_B\left(s\right)$;
17. *if* в $Q\left(s\right)$ обнаружено ребро, у которого $\left(\mu\left(s,z\right)=w\right) and \left(\left(\left(\mu\left(\left(s,z\right),s\right)=y\right) and \left(\mu\left(\left(s,z\right),z\right)=b\right)\right) or\right.$ $or \left(\left(\mu\left(\left(s,z\right),s\right)=b\right) and \left(\mu\left(\left(s,z\right),z\right)=y\right)\right))$ *then do*
18. агент B выполняет процедуру $ВПЕРЕД\_BR\_N\left(s\right)$;
19. *go to* 17 данной процедуры; *end do*;
20. *if* в $Q\left(s\right)$ есть ребро, у которого $\left(\mu\left(s,z\right)=y\right) and \left(\mu\left(\left(s,z\right),z\right)=y\right) and \left(\mu\left(z\right)=y\right)$ *then do*
21. агент B выполняет процедуру $ВПЕРЕД\_BR\left(s\right)$;
22. *go to* 20 данной процедуры; *end do*;
23. *else go to* 2 алгоритма обхода; *end do*;
24. *end do*;

Выполняя процедуру $РАСП\_BA\left(s\right)$, агент B выбирает из окрестности $Q\left(s\right)$ произвольное ребро $\left(s,z\right)$, для которого выполняется условие $\left(\mu\left(\left(s,z\right),s\right)=w\right) and \left(\mu\left(\left(s,z\right),z\right)=b\right) and \left(\left(\mu\left(s,z\right)=w\right)\right)$, окрашивает $\mu\left(\left(s,z\right),s\right):=y$ и записывает в список N сообщение: РАСП_BA.

Процедура $РАСП\_BAb\left(s\right)$ аналогична процедуре $РАСП\_BA\left(s\right)$, с отличием лишь в том, что инцидентор окрашивается следующим образом $\mu\left(\left(s,z\right),s\right):=b$.

Алгоритм восстановления: *Вход*: списки сообщений M и N от АИ. *Выход*: список вершин V_H и ребер E_H графа H, изоморфного графу G. *Данные*: V_H, E_H списки вершин и ребер графа H, изоморфного графу G. $Сч\_A$, $Сч\_B$ – счетчики числа посещенных вершин графа G агентами A и B соответственно. AN – переменная, в которой значение «1» дает агенту A сигнал для возврата и распознания помеченных агентом B перешейков, значение «0» позволяет агенту A работать дальше в обычном режиме. BN – переменная, в которой значение «1» дает агенту B сигнал для возврата и распознания помеченных агентом A перешейков, значение «0» позволяет агенту B работать дальше в обычном режиме. N_A, N_B – переменные, в которых хранятся номера вершин, из которых агенты A и B соответственно, последний раз помечали перешейки. F – количество перешейков из вершины N_A, помеченных для распознания. K – количество перешейков из вершины N_B, помеченных для распознания. M, N – списки сообщений от агентов A и B соответственно. E – переменная, в которой делается отметка о том, был ли на предыдущем шаге агентом A помечен перешеек (значение «1») или нет (значение «0»). L – переменная, в которой делается отметка о том, был ли на предыдущем шаге агентом B помечен перешеек (значение «1») или нет (значение «0»). i, j – счетчики используемые агентами A и B соответственно при подсчете номеров вторых вершин помеченных перешейков и номеров вторых вершин помеченных обратных ребер. $STOP\_A, STOP\_B$ – переменные, используемые агентами A и B соответственно, для сигнализации АЭ, о завершении распознавания своей области. UDP_A, UDP_B – логические переменные, используемые агентами A и B соответственно, для определения способа окраски инциденторов, рассматриваемого в определенный момент, перешейка. $UDOBR\_A, UDOBR\_B$ – логические переменные, используемые агентами A и B соответственно для определения является ли рассматриваемое обратное ребро последним из помеченных. $KOBR\_A, KOBR\_B$ – переменные, в которые агенты A и B соответственно записывают количество помеченных обратных ребер. $r(1), r(2), ..., r(t)$ – список номеров вершин красного пути, где t – длинна этого списка. $y(1), y(2), ..., y(p)$ – список номеров вершин желтого пути, где p – длинна этого списка. *Mes* – текущее сообщение.

1. $Сч\_A := 1$;
2. $Сч\_B := 2$;
3. $AN := 0, BN := 0, N\_A := 0, N\_B := 0, F := 0, K := 0, M := \varnothing, N := \varnothing, E := 0,$
   $L := 0, i := 0, j := 0, E_H := \varnothing, STOP\_A := 0, STOP\_B := 0, UDP\_A := FALSE,$
   $UDP\_B := FALSE, UDOBR\_A := FALSE, UDOBR\_B := FALSE,$
   $KOBR\_A := 0, KOBR\_B := 0$;
4. $t := 1$;
5. $p := 1$;
6. $r(t) := Сч\_A$;
7. $y(p) := Сч\_B$;
8. $V_H := \{1, 2\}$;
9. *while* $(STOP\_A = 0)$ *or* $(STOP\_B = 0)$ *do*
10.   *if* $M \neq \varnothing$ *then do*
11.   прочитать в *Mes* сообщение и удалить его из очереди M;
12.   *ОБР_СП_A*(); *end do*;
13.   *if* $N \neq \varnothing$ *then do*
14.   прочитать в *Mes* сообщение и удалить его из очереди N;
15.   *ОБР_СП_B*(); *end do*;
16.   *end do*;
17. печать V_H, E_H.

$ОБР\_СП\_A()$:
1. *if* $Mes =$ "ВПЕРЕД_А" *then* $ВПЕРЕД\_A()$;
2. *if* $Mes =$ "МЕТИМ_АВ" *then* $МЕТИМ\_AB()$;
3. *if* $Mes =$ "НАЗАД_А" *then* $НАЗАД\_A()$;
4. *if* $Mes =$ "РАСП_АВ" *then* $РАСП\_AB()$;
5. *if* $Mes =$ "ФИКС_А" *then* $ФИКС\_A()$;
6. *if* $Mes =$ "ОБН_А" *then* $ОБН\_A()$;
7. *if* $Mes =$ "РЕБРА_РАСПОЗНАНЫ_А" *then* $РЕБРА\_РАСПОЗНАНЫ\_A()$;
8. *if* $Mes =$ "ОТСТУП_А" *then* $ОТСТУП\_A()$;
9. *if* $Mes =$ "МЕТКА_ОР_А" *then* $МЕТКА\_OP\_A()$;
10. *if* $Mes =$ "ВПЕРЕД_ОР_А" *then* $ВПЕРЕД\_OP\_A()$;
11. *if* $Mes =$ "СТОП_А" *then* $СТОП\_A()$.

$ВПЕРЕД\_A()$: выполняются операции: $Сч\_A := Сч\_A + 2$; $t := t + 1$; $r(t) := Сч\_A$; $V_H := V_H \cup \{Сч\_A\}$; $E_H := E_H \cup \{(r(t-1), r(t))\}$;
$МЕТИМ\_AB()$: $F := F + 1$; $E := 1$;
$НАЗАД\_A()$: из списка $r(1), ..., r(t)$ удаляется элемент $r(t)$; $t := t - 1$;
$РАСП\_AB()$: $E_H := E_H \cup \{(N\_B, r(t-i))\}$; $K := K - 1$;
$UDP\_B := (((K = Z)\, or\, (K = 1))\, and\, (Z \neq 1))$;
$ФИКС\_A()$: $N\_A := Сч\_A$; $BN := 1$; $E := 0$; $Q := F$;
$UDP\_A := (((F = Q)\, or\, (F = 1))\, and\, (Q \neq 1))$;
$ОБН\_A()$: $AN := 0$; $i := 0$;
$РЕБРА\_РАСПОЗНАНЫ\_A()$: $i := 0$;
$ОТСТУП\_A()$: $i := i + 1$;
$МЕТКА\_OP\_A()$: $KOBR\_A := KOBR\_A + 1$;
$ВПЕРЕД\_OP\_A()$: $KOBR\_A := KOBR\_A - 1$; $UDOBR\_A := (KOBR\_A = 0)$; $E_H := E_H \cup \{(r(t), r(t-i))\}$;
$СТОП\_A()$: $STOP\_A := 1$;

Процедуры работы со списком команд от агента B, которые не рассмотрены ниже, аналогичны процедурам работы со списком команд от агента A.

$ОБР\_СП\_B()$:
1. *if* $Mes =$ "ВПЕРЕД_В" *then* $ВПЕРЕД\_B()$;
2. *if* $Mes =$ "МЕТИМ_ВА" *then* $МЕТИМ\_BA()$;
3. *if* $Mes =$ "НАЗАД_В" *then* $НАЗАД\_B()$;
4. *if* $Mes =$ "РАСП_ВА" *then* $РАСП\_BA()$;
5. *if* $Mes =$ "ФИКС_В" *then* $ФИКС\_B()$;
6. *if* $Mes =$ "ОБН_В" *then* $ОБН\_B()$;
7. *if* $Mes =$ "РЕБРА_РАСПОЗНАНЫ_В" *then* $РЕБРА\_РАСПОЗНАНЫ\_B()$;
8. *if* $Mes =$ "ОТСТУП_В" *then* $ОТСТУП\_B()$;

9. *if* $Mes =$ "МЕТКА_ОР_В" *then* $МЕТКА\_ОР\_В()$;
10. *if* $Mes =$ "ВПЕРЕД_ОР_В" *then* $ВПЕРЕД\_ОР\_В()$;
11. *if* $Mes =$ "ВОЗВРАТ_В" *then* $ВОЗВРАТ\_В()$;
12. *if* $Mes =$ "СТОП_В" *then* $СТОП\_В()$.

$ВОЗВРАТ\_В()$: $E_H := E_H \backslash \{(y(p-1), y(p))\}$; $V_H := V_H \backslash \{ Сч\_В \}$; $Сч\_В := Сч\_В - 2$; $p := p-1$; $y(p) := Сч\_В$; $L := 1$; $K := K+1$.

Свойства алгоритма распознавания.

В начале работы алгоритма распознавания, при $n \geq 3$, как минимум, по одному разу выполняются процедуры: ВПЕРЕД_А(v), ВПЕРЕД_А() и ВПЕРЕД_В(s), ВПЕРЕД_В(). Выполняя процедуры ВПЕРЕД_А(v) и ВПЕРЕД_В(s) АИ посещают белые вершины исследуемого графа G. Процедурами агента АЭ ВПЕРЕД_А() и ВПЕРЕД_В() создаются две новые вершины (по одной вершине для каждой из процедур) графа H.

При одновременном попадании двух АИ в одну белую вершину процедурами ВПЕРЕД_А() и ВПЕРЕД_В() будет создано две новые вершины графа H. Вершина созданная агентом B, на следующем шаге будет удалена командой ВОЗВРАТ_В(), так как она дублирует вершину, созданную агентом A. Таким образом, процесс выполнения описанного алгоритма индуцирует отображение $\varphi : V_G \to V_H$ вершин графа G в вершины графа H. Причем $\varphi(v) = t$ (когда вершина v окрашена в красный цвет и $t = Сч\_А$ и $\varphi(s) = p$ (когда вершина s окрашена в желтый цвет и $p = Сч\_В$). Указанное отображение естественным образом устанавливает неявную нумерацию вершин графа G. Более того, отображение φ является биекцией, поскольку в связном графе G все вершины достижимы из начальных вершин. Поэтому все вершины посещаются агентами, то есть окрашиваются в красный и желтый цвета.

Из описания алгоритма следует, что АИ проходят все ребра графа G, поскольку по окончании алгоритма все ребра становятся черными. При выполнении процедуры ВПЕРЕД_А() или ВПЕРЕД_В() АЭ распознает древесное ребро (v, u) и так нумерует вершину u, что ребру (v, u) однозначно соответствует ребро $(\varphi(v), \varphi(u))$ графа H. При выполнении процедур *ВПЕРЕД_ОР_А*() или *ВПЕРЕД_ОР_В*() АЭ распознает обратное ребро (v, u) графа G и ставит ему в однозначное соответствие ребро $(\varphi(v), \varphi(u))$ графа H. При выполнении процедур *РАСП_АВ*() или *РАСП_ВА*() АЭ распознает перешеек (v, u) графа G и ставит ему в однозначное соответствие ребро $(\varphi(v), \varphi(u))$ графа H. Следовательно, φ является изоморфизмом графа G на граф H.

Теорема 1. *Выполнив алгоритм распознавания, агенты распознают граф* G *с точностью до изоморфизма.*

Подсчитаем временную и емкостную сложности алгоритма в равномерной шкале [6]. Рассмотрим подробнее свойства красного и желтого путей. Из описания алгоритма следует, что на каждом шаге алгоритма красный (желтый) путь – это простой путь, соединяющий начальную вершину v (s – в случае агента B) с номером $\varphi(v) = 1$ ($\varphi(s) = 2$) с вершиной u (z) с номером $\varphi(u) = Сч\_A$ ($\varphi(z) = Сч\_B$). Следовательно, общая длина красного и желтого пути не превосходит n.

При выполнении процедур ВПЕРЕД_А(v), ВПЕРЕД_В(s) и НАЗАД_А(v), НАЗАД_В(s) АИ проходят одно ребро. При выполнении процедур РАСП_А(v), РАСП_В(s) АИ проходят не более $n-2$ (изначально одна вершина уже окрашена в «чужой» цвет) ребер красного (желтого) пути. При выполнении процедур МЕТИМ_АВ(v), МЕТИМ_ВА(s), РАСП_АВ(v), РАСП_АВb(v), РАСП_ВА(s) и РАСП_ВАb(s) АИ не совершают перехода по перешейку, а просто окрашивают его ближний инцидентор. Выполняя процедуры ВПЕРЕД_AR(v), ВПЕРЕД_BR(s) и ОТСТУП_А(v), ОТСТУП_В(s) АИ проходят одно красное (желтое) ребро. При выполнении процедур ВПЕРЕД_AR_N(v), ВПЕРЕД_BR_N(s) АИ проходят один перешеек. При выполнении процедур ФИКС_А(v) ФИКС_В(s) и ОБН_А(v) ОБН_В(s) АИ не передвигаются, а только делают записи в свой список команд для АЭ, на что так же уходит один ход.

При подсчете временной сложности алгоритма будем считать, что инициализация алгоритма, анализ окрестности $Q(v)$ рабочей вершины и выбор одной из возможных процедур занимают некоторое постоянное число единиц времени. Так же будем считать, что выбор ребер, проход по ним АИ и обработка команд АЭ полученных на данном этапе от АИ осуществляется за 1 единицу времени. Тогда временная сложность алгоритма определяется следующими соотношениями: 1. Процедуры ВПЕРЕД_А(v), ВПЕРЕД_В(s), НАЗАД_А(v) и НАЗАД_В(s) выполняются не более чем $2\times(n-1)$ раз, общее время их выполнения оценивается как $O(n)$. 2. На выполнение процедур МЕТИМ_АВ(v), МЕТИМ_ВА(s), РАСП_АВ(v), РАСП_АВb(v), РАСП_ВА(s) и РАСП_ВАb(s) уходит время, которое оценивается как $2\times O(n)\times n$, то есть как $O(n^2)$. 3. Каждая из пар процедур ВПЕРЕД_AR(v), ВПЕРЕД_BR(s) и ОТСТУП_А(v), ОТСТУП_В(s) выполняются за время, оцениваемое как $O(n)\times n$, то есть как $O(n^2)$. 4. На выполнение процедур ВПЕРЕД_AR_N(v), ВПЕРЕД_BR_N(s), ФИКС_А(v), ФИКС_В(s), ОБН_А(v) и ОБН_В(s) уходит время, оцениваемое как $3\times O(n)$, то есть как $O(n)$. 5. Время, затрачиваемое на выполнение процедур РАСП_А(v) и РАСП_В(s), оценивается как $O(n)\times n$, то есть как $O(n^2)$. 6. Время выполнения процедур СТОИТ_А(v) и СТОИТ_В(s) в общей сложности оценивается как $O(n)+O(n^2) = O(n^2)$. Следовательно, суммарная временная сложность $T(n)$ алгоритма удовлетворяет соотношению: $T(n)=O(n^2)$. Емкостная сложность $S(n)$ алгоритма определяется сложностью списков $V_H, E_H, r(1)...r(t), y(1)...y(p)$, сложность которых соответственно определяется величинами $O(n), O(n^2), O(n), O(n)$. Следовательно: $S(n) = O(n^2)$.

Теорема 2. *Временная и емкостная сложности алгоритма равны $O(n^2)$, где n – число вершин графа, при этом алгоритм использует 3 краски.*

Заключение

В работе предложен новый алгоритм распознавания графа среды временной и емкостной сложностей $O(n^2)$. АИ имеют конечную память, независимую от n, и используют по две краски каждый (всего три краски).

Литература

[1] *Кудрявцев В.Б.* О поведении автоматов в лабиринтах / В.Б. Кудрявцев, Щ. Ушчумлич, Г. Калибарда // Дискретная математика. – 1992. – Т. 4, № 3. – С. 3 – 28.

[2] *Кудрявцев В.Б.* Введение в теорию автоматов / В.Б. Кудрявцев, С.В. Алешин, А.С. Подколзин. – М.: Наука, 1985. – 320 с.

[3] *Грунский И.С.* Распознавание конечного графа коллективом агентов / И.С. Грунский, А.В. Стёпкин // Труды ИПММ НАН Украины. – 2009. – Т. 19. – С. 43 – 52.

[4] *Касьянов В. Н.* Графы в программировании: обработка, визуализация и применение / В.Н. Касьянов, В.А. Евстигнеев. – СПБ.: БХВ – Петербург, 2003. – 1104 с.

[5] *Кормен Т.* Алгоритмы: построение и анализ / Т. Кормен, Ч. Лейзерсон, Р. Ривест. – М.: МЦНМО, 2001. – 960 с.

[6] *Ахо А.* Построение и анализ вычислительных алгоритмов / А. Ахо, Дж. Хопкрофт, Дж. Ульман. – М.: Мир, 1979. – 536 с.

[7] *Стёпкин А.В.* Распознавание конечных графов тремя агентами / А.В. Стёпкин // Искусственный интеллект. – 2011. – №2. – С. 84 – 93.

МЕТОДИКА ВИКЛАДАННЯ МАТЕМАТИКИ В ЗОШ ТА ВНЗ

УДК 37.016:51

Беседін Б.Б., Мороз В.Є.

[1] *канд. пед. наук, доцент кафедри геометрії та МВМ, СДПУ*

[2] *студентка 5 курсу фізико-математичного факультету, СДПУ*

e-mail: besedin_boris@ukr.net, valenciy@yandex.ru

ПІДВИЩЕННЯ РІВНЯ МАТЕМАТИЧНИХ ЗНАНЬ УЧНІВ НА ОСНОВІ АНАЛІЗУ ТИПОВИХ ПОМИЛОК

Стаття присвячена проблемі упередження типових помилок під час розв'язання математичних задач, необхідності включення їх аналізу та розгляду в процес навчання математики та розробці методичних рекомендацій щодо вирішення цієї проблеми.

Ключові слова: *упередження помилок, типові помилки, математична підготовка.*

Вступ

Для успішної участі у сучасному суспільному житті особистість повинна володіти певними прийомами математичної діяльності та навичками їх застосувань до розв'язання практичних задач. Певної математичної підготовки і готовності її застосовувати вимагає і вивчення багатьох навчальних предметів загальноосвітньої школи. Значні вимоги до володіння математикою у розв'язанні практичних задач ставлять сучасний ринок праці, отримання якісної професійної освіти, продовження освіти на наступних етапах.

Успіх у досягненні поставленої перед шкільним курсом математики мети визначається не тільки вдосконаленням його змісту, а й методів і прийомів, організаційних форм і засобів навчання. Однією з умов якісного навчання є врахування та упередження помилок під час розв'язання математичних задач.

В науково-методичній літературі пропонуються різноманітні шляхи вдосконалення учбового процесу, однак кількість годин для вивчення математичних курсів постійно знижується. А нові методичні системи або прийоми потребують великої затрати часу. Проблеми, пов'язані з математичними помилками учнів, відображені в працях учених-математиків і педагогів впродовж всієї історії математичної освіти.

В наукових роботах, присвячених дослідженню методичної роботи над математичними помилками школярів, міститься наступне:
— аналіз можливих причин виникнення математичних помилок, школярів;
— виявлення можливих напрямів методичної роботи над математичними помилками школярів;
— розробка різних підходів до побудови систем вправ на запобігання помилкам;
— опис прийомів пізнавальної діяльності при роботі з помилками;
— розкриття різних підходів до типологізації помилок.

Аналіз практики навчання математики показує, що вдосконалення форм та методів роботи вчителів, подолання труднощів та помилок учнів залишається важливим компонентом в організації учбової діяльності.

Основна частина

Формування навичок застосування математики є однією із головних цілей викладання математики. Радикальним засобом реалізації прикладної спрямованості шкільного курсу математики є широке систематичне застосування методу математичного моделювання протягом усього курсу. Це стосується введення понять, виявлення зв'язків між ними, характеру ілюстрацій, доведень, системи вправ і, нарешті, системи контролю. Інакше кажучи, математики треба так навчати, щоб учні вміли її застосовувати.

У будь-якій темі шкільного курсу математики робота починається із введення необхідних понять, означень, далі формулюються твердження та їх доведення, і останнім кроком стає розгляд задач та їх розв'язання. Робота із кожним з цих етапів є важливою і потребує особливої уваги та розуміння. І на кожному з цих етапів можуть виникати помилки у учнів.

Під поняттям розуміють форму мислення, яка відображає загальні, суттєві і специфічні ознаки і особливості предмету чи явища і закріплює їх терміном і/або символом.

З кожним поняттям пов'язані дві важливі характеристики: обсяг і зміст поняття. На цьому етапі важливим завданням є навчити дітей розрізняти ці характеристики та розуміти їх суть.

Відносно поняття не можна говорити, що воно істинне чи хибне, можна вести мову про його коректність. Означення є коректним, якщо виконуються наступні правила:

- правило взаємозамінності – обсяг означуваного поняття повинен співпадати із тим, що задається поняттям (помилкою в даному разі буде таке означення: ромбом називається чотирикутник із взаємно перпендикулярними діагоналями; обсяг поняття ромб вужчий, ніж множина, яка задається означенням);

- відсутність порочного круга (помилкове означення: корінь рівняння це його розв'язок);
- правило несуперечливості – відсутність понять, які суперечать теорії, що вивчається (помилковий термін: круглий квадрат);
- правило однозначності (відсутність омонімії).

При роботі з поняттями мають бути сформовані такі найважливіші дії:

1) означення поняття;
2) підведення під поняття (розпізнавання поняття);
3) виведення наслідків з поняття;
4) класифікація понять.

Для кожної з перерахованих дій вкажемо основні характеристики та операційний склад:

— стосовного першого пункту, то його описано вище доволі детально;

— для другого важливими характеристиками є такі: вибрати зручне означення або необхідний і достатній набір умов, що визначають дане поняття; визначити тип зв'язку між окремими умовами (диз'юнктивний чи кон'юнктивний); якщо зв'язок кон'юнктивний, то перевірити наявність усіх умов, якщо ж диз'юнктивний, то досить однієї (на даному етапі важливо аби учні чітко розуміли сутність кон'юнктивного і диз'юнктивного зв'язків, адже саме з їх нерозумінням пов'язана більшість помилок);

— в процесі виконання третього пункту слід пригадати властивості об'єктів даного поняття, які можна групувати таким чином:

a) не доводжувані,

b) доводжувані,

c) властивості об'єктів, які розглядаються, якщо їх пов'язати з іншими об'єктами;

— класифікація є найважливішим процесом, який дозволяє виявити особливості обсягу поняття. Існує два види класифікації: дихотомія та класифікація за видозміненою ознакою. При роботі з останньою слід особливу увагу приділяти основі класифікації аби уникати неправильних результатів. Наприклад, розбиття множини трикутників на різносторонні, рівносторонні та рівнобедрені — невірна; або на рівнобедрені і прямокутні — в даному випадку взагалі відсутня основа класифікації.

З вище викладеного можна бачити, що навіть на першому етапі роботи з будь-якою темою можуть виникнути помилкові умовиводи, тому їх упередження є необхідним і дуже важливим, оскільки виникнення помилок на початковому етапі може призвести до помилкового сприйняття всієї теми.

Математика, зокрема шкільна оперує великою кількістю висловлень. Працюючи з висловленнями слід ознайомити учнів з основними логічними операціями над висловленнями.

Значна кількість помилок виникає у учнів при побудові заперечень речень із кванторами

$$\overline{\forall x P(x)} \equiv \exists x \overline{P(x)}, \quad \overline{\exists x P(x)} \equiv \forall x \overline{P(x)}.$$

Найбільш розповсюджена помилка при цьому це заміна учнями лише квантора на протилежний, а заперечення самого висловлення не будується. На це треба звертати особливу увагу. А задля наочності краще наводити контр приклади одразу ж.

Важливе місце в процесі навчання математиці займають доведення. Більшість тверджень шкільної математики доводяться. В процесі доведення можуть бути допущені окремі помилки:

a) *силогізми* – помилки, які допускаються навмисне, з метою навчити учнів бачити помилки в міркуваннях і виправляти їх;

b) *паралогізми* – це помилки, які допускаються через незнання, нерозуміння чи недбалість.

Невід'ємним елементом математичної діяльності є задачі та робота з ними. Якщо ж говорити про можливі помилки, яких припускаються учні, то виникнути вони можуть на будь-якому з етапів задачі. Під час аналізу умови можливе невірне розуміння того, що задано і неправильне трактування того, що потрібно довести, або ж неврахування окремих елементів умови. Щодо короткого запису умови, то тут можливі неправильно виконаний рисунок чи неправильно заповнена схема, таблиця. Важливим етапом є пошук розв'язання задачі, від нього залежить результат, тому необхідно доволі детально обговорити план дій і чітко зрозуміти, яким чином його виконувати. Можливі помилки і на етапі здійснення плану розв'язання, однак тут це, скоріше за все, будуть використання невірних тверджень або ж обчислювальні помилки. На етапі перевірки отриманих розв'язків слід бути уважними. Останні ж два етапи навряд чи можуть привести до помилок, однак не варто ставитись до них беззастережно.

Виконавши аналіз типових помилок під час роботи з математичними завданнями ми виділили наступні методичні принципи, що дозволять упереджувати помилки та підвищувати рівень математичних знань учнів:

∗ виділення і врахування типових помилок, пов'язаних із загально математичною підготовкою;

∗ в межах тематичного планування доцільно зробити необхідним постійним елементом виділення типових помилок у кожній конкретній темі;

∗ обов'язкове акцентування на можливих помилках чи хибних умовиводах при поясненні нового матеріалу;

∗ підбір та розв'язання відповідних задач на типові помилки;

∗ використання цікавих (історичних або досить відомих) задач, що приводять до помилок.

Висновки

Проведений аналіз психолого-педагогічної літератури та практики навчання математики дозволив сформулювати певні принципи, що необхідно використовувати вчителям в процесі навчання математики задля упередження типових помилок та підвищення рівня математичної підготовки учнів.

Література

[1] *Груденов Я.И.* Совершенствование методики работы учителя математики: книга для учителя / Я.И. Груденов. – М.: Просвещение, 1990. – 224 с.

[2] *Колягин Ю.М.* Задачи в обучении математике: Ч.1. Математические задачи как средство обучения и развития учащихся / Ю.М. Колягин. – М.: Просвещение, 1977. – 111 с.

[3] *Колягин Ю.М.* О новых пособиях рассказывают их авторы [текст] / Ю.М. Колягин, Л.М. Короткова, Н.В. Савинцева // Математика в школе. – 2002. – № 4. – С. 75 – 77.

[4] *Крупич В.И.* Теоретические основы обучения решению школьных математических задач / В.И. Крупич. – М.: Прометей, 1995. – 166 с.

[5] *Чошанов М.А.* Гибкая технология проблемно-модульного обучения : метод. пособ. – М.: Народное образование, 1996. – 160 с.

УДК 372.851

Бєлік Н.В.

[1] *студентка магістратури фізико-математичного факультету, СДПУ*

e-mail: natalekr@mail.ru

ФОРМУВАННЯ ГОТОВНОСТІ УЧНІВ ДО САМООСВІТИ У ПРОЦЕСІ НАВЧАННЯ МАТЕМАТИКИ

Стаття присвячена проблемі формування готовності учнів до самоосвіти. У якості одного із можливих шляхів вирішення даної проблеми у процесі навчання математики запропоновано спеціальний навчально-методичний комплекс.

Ключові слова: *самоосвіта, самостійна навчально-пізнавальна діяльність, навчально-методичний комплекс.*

Вступ

Одним із пріоритетних напрямків розвитку освіти початку XXI сторіччя національна доктрина передбачає безперервну освіту, навчання особистості протягом життя. Необхідною умовою цього є формування потреби та здатності особистості до самоосвіти [3].

У зв'язку з швидкими темпами накопичення нової інформації, особливо в природничо-математичних науках, уже в школі необхідно готувати школярів до неперервної освіти після її закінчення, що потребує формування в них пізнавального інтересу й самостійності відшукання шляхів його задоволення. «Треба закласти в учнів механізми самоосвіти, самовиховання, самореалізації, саморозвитку, саморегуляції, взаєморозуміння, спілкування, співпраці, необхідні для становлення особистості, здатної без сторонньої допомоги оволодівати знаннями і способами діяльності, розв'язувати пізнавальні задачі з метою подальшого перетворення й вдосконалення навколишньої дійсності. Ця властивість особистості формується головним чином у ході самостійної навчальної діяльності учнів». [1, с.44]

Вимоги сучасного суспільства до загальноосвітньої школи з одного боку, й інтереси особистості, що розвивається, з іншого, викликають необхідність нового підходу до організації навчально-виховного процесу.

Особливу актуальність набуває зараз проблема формування самостійності мислення учнів, спроможності отримувати, аналізувати інформацію і приймати адекватні рішення, використовувати в практичній діяльності нові інформаційні технології.

Аналіз робіт, присвячених проблемам організації навчально-пізнавальної самостійної діяльності школярів у процесі навчання математики, дозволив виділити такі напрямки

— розвиток самостійної пізнавальної діяльності учнів залежить перш за все від вибору вчителем методу вивчення навчального матеріалу (Ю. К. Бабанський, В. А. Крутецький, М. І. Лернер, М. М. Скаткін та ін.);

— основою для формування навичок самостійного навчання учнів є психолого-педагогічні передумови здійснення самостійної роботи у навчальному процесі (Г. О. Балл, С.А. Григулич, В. І. Загвязинський, В. В. Єсіпов та ін.);

— основою розвитку самостійної навчальної діяльності учнів є розвиток самоконтролю (Д. Б. Ельконін, Ж. Сєрікова, В. О. Швець та ін.).

Спільним у поглядах усіх дослідників є те, що успішне розв'язання проблеми вбачається у відшуканні ефективних шляхів організації самостійної навчально-пізнавальної діяльності учнів.

Проблема самоосвіти найчастіше розглядається у контексті післядипломної освіти, однак основа для розвитку відповідних здатностей повинна закладатись у школі, починаючи з початкових класів, розвиваючись упродовж всього навчання. Особливу роль при цьому може відігравати шкільний курс математики. Метою статті є характеристика одного із можливих шляхів планування діяльності вчителя математики з формування готовності учнів до самоосвіти через організацію самостійної роботи як повноцінної діяльності учнів та опис структурних елементів цієї діяльності.

Основна частина

Термін самоосвіта (англ. self-education) трактується як освіта, що отримується самостійно, поза стінами будь-якого навчального закладу, без допомоги викладача; неформальна індивідуальна форма навчальної діяльності.

До слабких сторін самоосвіти слід віднести відсутність керівництва, зворотного зв'язку, несистематичність. Однак нерідко вони компенсуються сильними сторонами: 1) переборюється те, що Джон Дьюї називав спричиненою організацією школи непродуктивною витратою сил; 2) вирішуються (або не здобувають гостроти) проблеми індивідуального підходу, мотивації й свідомості учіння.

Самоосвіта потребує від суб'єкта бачення життєвого змісту в навчанні; свідомої постановки цілей; здатностей до самостійного мислення, самоорганізації й самоконтролю. Це робить її неможливою для багатьох, у першу чергу, для дітей. Однак починаючи з юнацького віку самоосвіта може бути систематичною і дуже результативною. Таким чином самоосвіта – самостійно організовувана суб'єктом діяльність учіння, що задовольняє його потреби в пізнанні й особистісному рості. У такому розумінні самоосвіта стає необхідною складовою саморозвитку. [6]

На сучасному етапі розвитку суспільства кардинально змінилася мета навчання. Якщо раніше навчання ставило за мету здобути певну суму знань, умінь і навичок, то зараз це не стає самоціллю. Адже з кожним роком об'єм інформації майже в кожній галузі науки подвоюється, а то й потроюється і дальше зростання за передбаченнями вчених ітиме в геометричній прогресії. Тобто, людина не в змозі мати повний об'єм знань з того чи іншого предмету. Крім того величезні інформаційні потоки різного спрямування призводять до швидкого «стирання» корисної інформації з пам'яті учнів. Тому на перше місце виступає не стільки здобуття суми знань, скільки розвиток особистості, її готовності до пошуку, аналізу та продуктивного використання інформації.

Аналіз шкільної практики продемонстрував невтішні результати. Так, протягом 2010-2011 навчального року на базі Ярівської ЗОШ (Краснолиманський район Донецької області) нами проводилось оцінювання рівня сформованості готовності до саморозвитку та самоосвіти у школярів різних вікових груп. За спеціальними методиками були досліджені рівень сформованості в учнів вмінь класифікувати і аналізувати, самостійно опрацьовувати математичний текст, здатність розуміння сенсу і логічних відношень між поняттями (за методикою «Аналогія»), об'єм, розподіл і перемикання уваги (за методикою «Розставляння чисел»).

Результати дослідження показали, що високого рівня не досяг жоден із 57 учнів, 8% учнів мають рівень дещо вищий за середній, 33% – середній рівень, 25% – нижче середнього і 33% – низький та дуже низький рівні. Причому слід зазначити, що рівень володіння вміннями і навичками, необхідними для самостійного здобуття знань у старшокласників практично не відрізняються від рівня, продемонстрованого учнями основної школи.

Отримані результати свідчать про те, що розвиток самостійності учнів повинен стати метою діяльності як вчителів так і учнів, тому вчитель повинен створити умови для спонукання учня до самостійної роботи, такий режим самостійної діяльності, який би дав змогу реалізувати головну мету – розвиток особистості учня, її творчого потенціалу.

Самостійність у здобутті знань передбачає оволодіння складними вміннями і навичками бачити сенс та мету роботи, організацію власної самоосвіти, вміння по-новому підходити до питань, що вирішуються, пізнавальну і розумову активність і самостійність, здатність до творчості. Тобто, при самостійній діяльності учень сам визначає мету діяльності, предмет діяльності і засоби діяльності. В процесі діяльності учень постійно співвідносить передбачуваний результат з умовами і предметом діяльності, завдяки чому відбирає засоби діяльності, відповідні способи виконання дій і встановлює послідовність їх застосування [4, с.4]

Процес формування вказаних вмінь та навичок є справою непростою і довготривалою. Математика як навчальний предмет з одного боку володіє величезним потенціалом розвитку розумової активності та самостійності, з іншого боку самостійне оволодіння математичним матеріалом виявляється значно складнішим для самостійного опрацювання у порівнянні з рядом інших дисциплін, потребує володіння як певним змістом так і особливими схемами його побудови і розгортання.

Вчителю доцільно зосередитись на таких напрямках діяльності:
— формувати в учнів системні, узагальнені знання;
— знайомити учнів із загальними схемами побудови математичних теорій, як то: способи введення і розвитку математичного поняття, аксіоматична побудова математичної теорії; отримання алгоритмів чи формальних процедур для розв'язання класів задач тощо;
— приділяти увагу метапредметним умінням, пов'язаним з особливостями опрацювання математичних текстів;
— забезпечити учням розширений доступ до кластеру інформації, актуальної при вивченні певного математичного матеріалу.

Опишемо можливий варіант навчально-методичного комплексу, що сприятиме залученню учнів до самостійного опрацювання математичного матеріалу. Для кожної теми розробляються матеріали, які включають наступні компоненти:
— загальний аналіз теми, її місця і значення в шкільному курсі математики;
— список рекомендованої літератури (обов'язкової та додаткової) з адресами доступу;
— перелік питань для повторення з вказівкою джерел інформації та адресами доступу;
— історичний матеріал, пов'язаний з даною темою;
— термінологічний словник (походження термінів, означень);
— узагальнюючі схеми, таблиці, бажано, опорний конспект;
— завдання для домашнього виконання на весь термін вивчення теми з поділом за рівнями складності з виділенням завдань творчого характеру;
— розширений масив завдань для самостійних, контрольних, підсумкових, залікових робіт;
— тести для первісної перевірки засвоєння опрацьованої інформації.

Найкращі результати досягаються за умови створення комп'ютерного варіанту пропонованого комплексу, оскільки використання інформаційних технологій дозволяє вчителю:
— посилити мотивацію навчання за рахунок використання сучасної техніки;
— змінити характер пізнавальної діяльності учнів (підтримка особистих намагань учнів сформувати власний стиль навчальної роботи);
— візуалізувати навчальну інформацію;
— моделювати та імітувати об'єкти, що вивчаються або досліджуються;
— побудувати простий і зручний механізм навігації в межах матеріалів, що пропонуються для самостійного опрацювання;
— включити до складу електронного матеріалу ілюстрації та схеми, відеоматеріали;
— провести тестову перевірку засвоєння учнями значної кількості інформації.

Висновки

Втілення у навчальний процес описаної форми організації самостійної пізнавальної роботи сприяє підвищенню самооцінки учнів, а також розвитку навичок самоконтролю, саморегуляції, пізнавального інтересу до навчання, і в решті решт, розвитку внутрішньої мотивації учіння. При такій організації навчання у школі учні отримують навички самостійного опрацювання інформації, що є запорукою адекватної орієнтації у дорослому житті, здатності до неперервної самоосвіти та самовдосконалення.

Література

[1] *Григулич С.А.* Формування у старшокласників навичок самостійної роботи при вивченні математики // С.А. Григулич / Математика в школі. – 1998. – № 8. – С.42 – 45.

[2] *Кобзєва Л.О.* Самостійна робота учнів на уроках математики / Л.О. Кобзєва // Скарбниця методичних ідей. – № 1 – 2011 р. – С. 200 – 206.

[3] Національна доктрина розвитку освіти України у XXI столітті // Освіта України. – 2001. – № 29. – С. 4 – 6 // Ліга-Закон : [електронний ресурс]. – Режим доступу: `http://search.ligazakon.ua/l_doc2.nsf/link1/U347_02.html` .

[4] *Саранцев Г.И.* Методика обучения математике на рубеже веков / Г.И. Саранцев // Математика в школе. – № 7 – 2000. – С. 2 – 5.

[5] *Сєрікова Ж.* Розвиток самоконтролю учнів на уроках математики / Ж. Сєрікова // Математика в школі. – № 10. – 2005. – с.43 – 47.

[6] Самообразование // Психологическая энциклопедия: [електр. ресурс]. – Режим доступу: `http://enc-dic.com/enc_psy/Samoobrazovanie-23376.html`.

УДК 37.016:51

Кадубовська В.М., Кадубовська О.Л., Кадубовський О.А.

[1] *вчитель математики вищої кваліфікаційної категорії, Олександрівська ЗОШ №1*

[2] *методист навчального відділу, СДПУ*

[3] *канд. фіз.-мат. наук, доцент кафедри геометрії та МВМ, СДПУ*

e-mail: kadubovs@ukr.net

НАВКОЛО ТЕОРЕМИ СТЮАРТА: НАСЛІДКИ, УЗАГАЛЬНЕННЯ ТА ЗАСТОСУВАННЯ

Дана стаття присвячена методичним аспектам вивчення теореми Стюарта та її наслідків. Також розглядаються деякі узагальнення теореми Стюарта та їх застосування до розв'язування метричних задач планіметрії, зокрема до знаходження довжин відрізків з кінцями на сторонах трикутника.

Ключові слова: *теорема Стюарта, довжини основних відрізків трикутника.*

Вступ

Теорема Стюарта є одним з класичних тверджень геометрії трикутника і в певному розумінні повно представлена в навчальній літературі з елементарної геометрії [1], [6]. Найбільш відомими наслідками теореми Стюарта є формули для обчислення довжин медіан і бісектрис трикутника за його сторонами [2]. Менш відомі застосуванням теореми Стюарта можна знайти в [4], [7], [9].

Слід визнати, що формулювання теореми Стюарта є дещо «складним», і можливо тому це твердження майже не висвітлюється в шкільному курсі геометрії. Навіть в діючому підручнику з геометрії для класів із поглибленим вивченням математики [5] теорему Стюарта наведено лише в якості задачі.

Результати дослідження дозволяють стверджувати, що практичне значення теореми Стюарта та її наслідків, нажаль, залишаються недооціненими в навчальній літературі з геометрії для загальноосвітніх навчальних закладів.

В представленій статті наведено декілька способів доведення теореми Стюарта, як можливі підходи до її впровадження при вивченні відповідних тем шкільного курсу геометрії. Крім низки «ілюструючих» задач (на безпосереднє застосування зазначеного твердження) у статті також наведено і деякі узагальнення теореми Стюарта та їх застосування до обчислення: 1) довжини відрізка з кінцями на сторонах трикутника; 2) довжини відрізка, що сполучає вершину трикутника з внутрішньою його точкою, положення якої визначається відстанями до двох інших вершин трикутника.

Попередні відомості

1. Теорема Стюарта[1] та її наслідки

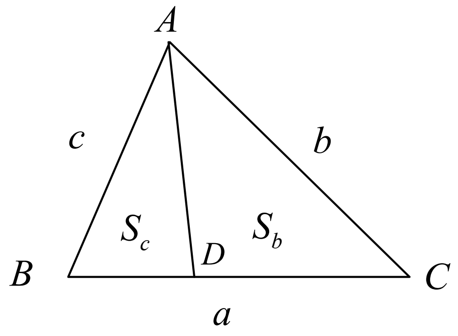
Теорема 1. (Стюарта) *Добуток квадрата відстані вершини трикутника до точки, що належить протилежній стороні, на довжину цієї сторони дорівнює сумі добутків квадратів інших сторін на несуміжні з ними відрізки першої сторони без добутку цих відрізків на довжину основи, тобто*

$$AD^2 \cdot BC = AB^2 \cdot DC + AC^2 \cdot BD - BD \cdot DC \cdot BC,$$

або ж

$$AD^2 = AB^2 \frac{DC}{BC} + AC^2 \frac{BD}{BC} - BD \cdot DC. \tag{1}$$

Якщо (1) записати у векторному вигляді (подати відрізки DC, BD і BC як вектори, а добуток $BD \cdot DC$ – як скалярний добуток $\langle \overrightarrow{BD}, \overrightarrow{DC} \rangle$), то твердження є вірним для будь-якої точки D прямої BC [7].



Як вже було зазначено раніше, формулювання теореми Стюарта є дещо складним, проте запис змісту цього твердження у символьному виді є досить наочним і не важким для запам'ятовування.

Введемо наступні позначення:

$$a = BC, \quad b = AC, \quad c = AB,$$
$$S = S_{\Delta ABC}, \quad S_b = S_{\Delta ADC}, \quad S_c = S_{\Delta ABD}.$$

Оскільки мають місце відношення
$\dfrac{BD}{BC} = \dfrac{S_c}{S}$, $\dfrac{DC}{BC} = \dfrac{S_b}{S}$, то формулу (1) можна подати у вигляді

$$AD^2 = c^2 \frac{DC}{BC} + b^2 \frac{BD}{BC} - a^2 \cdot \frac{BD}{BC} \cdot \frac{DC}{BC} = c^2 \cdot \frac{S_b}{S} + b^2 \cdot \frac{S_c}{S} - a^2 \cdot \frac{S_b \cdot S_c}{S^2}. \tag{2}$$

Зауваження 1. *Аналізуючи формулу* (1)*, не важко бачити, що якщо в* $\triangle ABC$ *відомими є довжини будь-яких чотирьох з п'яти відрізків* AB, BD, DC, CA, AD, *то довжину «п'ятого» не важко знайти, як корінь відповідного квадратного рівняння.*

[1] Теорему названо на честь англійського математика М.Стюарта (Mathew Stewart 1717-1785), який першим сформулював її в роботі «Деякі загальні теореми» у 1746 році. Формулювання теореми Стюарту сповістив його вчитель Р.Симсон, який опублікував доведення цього твердження лише у 1749 році.

Найбільш відомими наслідками з теореми Стюарта є наступні

Наслідок 1. *Нехай* a, b, c *– довжини сторін* BC, AC *і* AB $\triangle ABC$. *Тоді* довжину медіани m_a, *проведеної до сторони* a, *можна знайти за формулою*

$$m_a^2 = \frac{2\left(b^2+c^2\right)-a^2}{4}; \tag{3}$$

довжину бісектриси l_a *кута* A *— за формулою*

$$l_a^2 = b \cdot c \cdot \left(1 - \frac{a^2}{(b+c)^2}\right); \tag{4}$$

довжину висоти h_a, *проведеної до сторони* a, *— за формулою*

$$h_a^2 = \frac{(a+b+c)\cdot(a+b-c)\cdot(a-b+c)\cdot(-a+b+c)}{4a^2}; \tag{5}$$

якщо m_a' – ортогональна проекція медіани m_a на сторону a і $b \geq c$, *то*

$$b^2 - c^2 = 2m_a \cdot m_a'. \tag{6}$$

якщо точка D співпадає з точкою дотику A_1 вписаного у $\triangle ABC$ кола, *то*

$$AD^2 = AA_1^2 = b^2 \cdot \frac{p-b}{a} + c^2 \cdot \frac{p-c}{a} - (p-b)\cdot(p-c), \quad p = \frac{a+b+c}{2}; \tag{7}$$

якщо точка D співпадає з точкою дотику A_2 зовнівписаного кола зі стороною BC $\triangle ABC$, *то*

$$AD^2 = AA_2^2 = b^2 \cdot \frac{p-c}{a} + c^2 \cdot \frac{p-b}{a} - (p-c)(p-b), \tag{8}$$

$$AA_1^2 + AA_2^2 = b^2 + c^2 - 2(p-b)(p-c). \tag{9}$$

З доведенням формул (3) – (6), як наслідків з теореми Стюарта, можна ознайомитись, наприклад, в [1]. Для доведення (7) і (8) достатньо скористатися відомими формулами $BA_1 = p-b$, $CA_1 = p-c$, $BA_2 = p-c$, $CA_2 = p-b$ (напр., в [4], [6]). Формула (9) є наслідком формул (7) і (8).

Зауваження 2. *Помноживши обидві частини рівності* (5) *на вираз* $\frac{1}{4}a^2$, *одержимо добре відому* **формулу Герона** *для обчислення площі трикутника за довжинами його сторін, а саме*

$$S_{\Delta ABC}^2 = \left(\frac{a \cdot h_a}{2}\right)^2 = \frac{(a+b+c)\cdot(a+b-c)\cdot(a-b+c)\cdot(-a+b+c)}{16},$$

або ж у більш звичному вигляді

$$S_{\Delta ABC} = \sqrt{p(p-c)(p-b)(p-a)}. \tag{10}$$

Прикладом безпосереднього застосуванням формули (2) є наступна

Задача 3. *Нехай* D *– точка на стороні* BC *трикутника* ABC*. Відомо, що* $AB = c$*,* $AC = b$*,* $BC = a$ *і* $S_{\triangle ABD} = S^*$*. Тоді довжину відрізка* AD *можна визначити за формулою*

$$AD^2 = b^2 \cdot \frac{S^*}{S} + c^2 \cdot \frac{(S - S^*)}{S} - a^2 \cdot \frac{S^* \cdot (S - S^*)}{S^2}, \tag{11}$$

де $S = S_{\triangle ABC}$*, яку можна визначити за формулою Герона* (10)*.*

Прикладами безпосереднього застосуванням формули (1) є наступні

Задача 4. *Нехай* D *– точка основи* BC *рівнобедреного* $\triangle ABC$*. Відомо, що* $AB = c$*,* $BD = m$*,* $DB = n$*. Тоді має місце рівність*

$$CD^2 = c^2 - mn. \tag{12}$$

Задача 5. *Нехай* X *– точка на гіпотенузі* AB *прямокутного* $\triangle ABC$*. Відомо, що* $AC = b$*,* $BC = a$*,* $AX = m$*,* $XB = n$*. Тоді довжину відрізка* CX *можна визначити за формулою*

$$CX^2 = \frac{a^2 \cdot m^2 + b^2 \cdot n^2}{(m+n)^2}. \tag{13}$$

Звідки довжини медіани CM*, бісектриси* CL *і висоти* CH*, які проведені з вершини прямого кута* $\triangle ABC$*, можна знайти за формулами*

$$CM = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{2}, \quad CL = \frac{ab\sqrt{2}}{a+b}, \quad CH = \frac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2}}. \tag{14}$$

Задача 6. *Нехай* X *– точка на гіпотенузі* AB *прямокутного* $\triangle ABC$*. Відомо, що* $CX = d$*,* $AX = m$*,* $XB = n$ *і* $m > d > n$*. Тоді катети* AC *і* BC *цього трикутника можна визначити за формулами*

$$BC^2 = \frac{m+n}{m-n} \cdot \left(d^2 - n^2\right), \quad AC^2 = \frac{m+n}{m-n} \cdot \left(m^2 - d^2\right). \tag{15}$$

Задача 7. *Нехай* a, b, c *– довжини сторін* BC*,* AC *і* AB $\triangle ABC$*. На промені, доповняльному до променя* CB*, відклали відрізок* $CC_1 = q$*, а на промені, доповняльному до променя* BC*, — відрізок* $BB_1 = p$*. Тоді невідомі сторони трикутника* AB_1C_1 *можна знайти за формулами*

$$AB_1^2 = c^2 \left(1 + \frac{p}{a}\right) - b^2 \frac{p}{a} + p(a+p), \quad AC_1^2 = b^2 \left(1 + \frac{q}{a}\right) - c^2 \frac{q}{a} + q(a+q). \tag{16}$$

Задача 8. *Нехай* D *– точка на стороні* BC *трикутника* ABC. *Відомо, що* $AB = c$, $AC = b$, $AD = d$ *і* $BD : DC = m : n$. *Тоді невідому сторону* BC *трикутника* ABC *можна знайти за формулою*

$$BC^2 = b^2 \cdot \frac{m+n}{n} + c^2 \cdot \frac{m+n}{m} - d^2 \cdot \frac{(m+n)^2}{mn}. \tag{17}$$

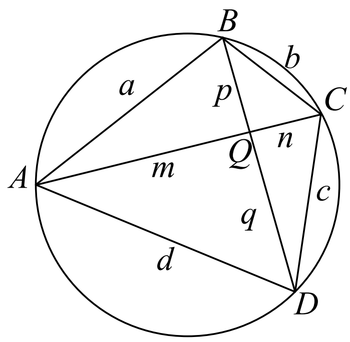
Задача 9. *Нехай* D *– точка на стороні* BC $\triangle ABC$. *Відомо, що:* $AB = c$, $AC = b$, $AD = d$ *а* $BD : DC = m : n$. *Тоді має місце рівність*

$$16S^2_{\triangle ABC} = 4b^2c^2 - \left(\frac{b^2m^2 + c^2n^2 - (m+n)^2 \cdot d^2}{mn}\right)^2. \tag{18}$$

Справедливість (18) є наслідком застосування формули Герона у вигляді $16S^2_{\triangle ABC} = 4b^2c^2 - \left(b^2 + c^2 - a^2\right)^2$ та теореми Стюарта.

Наслідок 2. (Теорема Птолемея) *Нехай* $ABCD$ *– вписаний у коло чотирикутник. Тоді добуток його діагоналей дорівнює сумі добутків його протилежних сторін, тобто*

$$AC \cdot BD = AB \cdot CD + BC \cdot AD. \tag{19}$$



Доведення. Нехай a, b, c, d – довжини сторін AB, BC, CD і DA відповідно, $AC \cap BD = Q$, $AQ = m$, $QC = n$, $BQ = p$, $QD = q$.

Тоді, згідно введених позначень, необхідно довести, що

$$(m+n)(p+q) = ac+bd \Leftrightarrow (m+n)^2(p+q)^2 = (ac+bd)^2.$$

З трикутників BAD і BDC за т. Стюарта маємо

$$m^2 + pq = a^2\frac{q}{p+q} + d^2\frac{p}{p+q}, n^2 + pq = b^2\frac{q}{p+q} + c^2\frac{p}{p+q}.$$

Оскільки $mn = pq$, то додавши останні рівності, матимемо

$$(m+n)^2 = (a^2+b^2)\tfrac{q}{p+q} + (d^2+c^2)\tfrac{p}{p+q}.$$

З іншого боку, оскільки $\frac{p}{q} = \frac{S_{\triangle CBA}}{S_{\triangle ADC}} = \frac{ab\sin\angle CBA}{dc\sin\angle ADC} = \frac{ab}{cd}$, то $\frac{p}{p+q} = \frac{cd}{ab+cd}, \frac{q}{p+q} = \frac{ab}{ab+cd}$. Звідки

$$(m+n)^2 = (a^2+b^2)\tfrac{cd}{ab+cd} + (d^2+c^2)\tfrac{ab}{ab+cd} = \tfrac{(ac+bd)(ad+bc)}{ab+cd}.$$

В аналогічний спосіб можна показати, що $(p+q)^2 = \frac{(ac+bd)(ab+cd)}{ad+bc}$. Отже,

$$(m+n)^2(p+q)^2 = \frac{(ac+bd)(ad+bc)}{ab+cd} \cdot \frac{(ac+bd)(ab+cd)}{ad+bc} = (ac+bd)^2.$$

□

Основна частина

1. Способи доведення теореми Стюарта

1.1. Доведення за допомогою теореми Піфагора

Якщо точка D співпадає з основою H висоти, опущеної з вершини A, то довжину відрізка $AD = AH$ не важко знайти за теоремою Піфагора. Тому доведення теореми стюарта проведемо для випадку, коли точка D сторони BC не співпадає з вказаною основою H.

Отже, нехай E і F – основи перпендикулярів, опущених на пряму AD з вершин B і C відповідно – рис. 1 a).

1) З ΔBED за *теоремою Піфагора* маємо рівність $BE^2 = BD^2 - ED^2$.

З ΔBEA за *теоремою Піфагора* маємо рівність

$BE^2 = AB^2 - AE^2 = AB^2 - (AD - ED)^2 = AB^2 - AD^2 + 2AD \cdot ED - ED^2$.

Звідки $2AD \cdot ED = AD^2 - AB^2 + BD^2$, або ж

$$ED = \frac{AD^2 - AB^2 + BD^2}{2AD}.$$

2) З ΔCFD за *теоремою Піфагора* маємо рівність $CF^2 = CD^2 - DF^2$.

З ΔCFA за *теоремою Піфагора* маємо рівність

$CF^2 = AC^2 - AF^2 = AC^2 - (AD + DF)^2 = AC^2 - AD^2 - 2AD \cdot DF - DF^2$.

Звідки $2AD \cdot DF = AC^2 - AD^2 - CD^2$, або ж

$$DF = \frac{AC^2 - AD^2 - CD^2}{2AD}.$$

3) Оскільки (за гострим кутом) ΔBED є подібним до ΔCFD, то має місце відношення $ED : DF = BD : DC$, або ж

$$\frac{AD^2 - AB^2 + BD^2}{AC^2 - AD^2 - CD^2} = \frac{BD}{DC}.$$

Звідки $\left(AD^2 - AB^2 + BD^2\right) DC = \left(AC^2 - AD^2 - CD^2\right) BD$. Таким чином

$$AD^2 (BD + DC) = AB^2 DC + AC^2 BD - BD^2 DC - DC^2 BD =$$
$$= AB^2 DC + AC^2 BD - BD \cdot DC (BD + DC).$$

Отже, $AD^2 = AB^2 \cdot \frac{DC}{BC} + AC^2 \cdot \frac{BD}{BC} - BD \cdot DC$. □

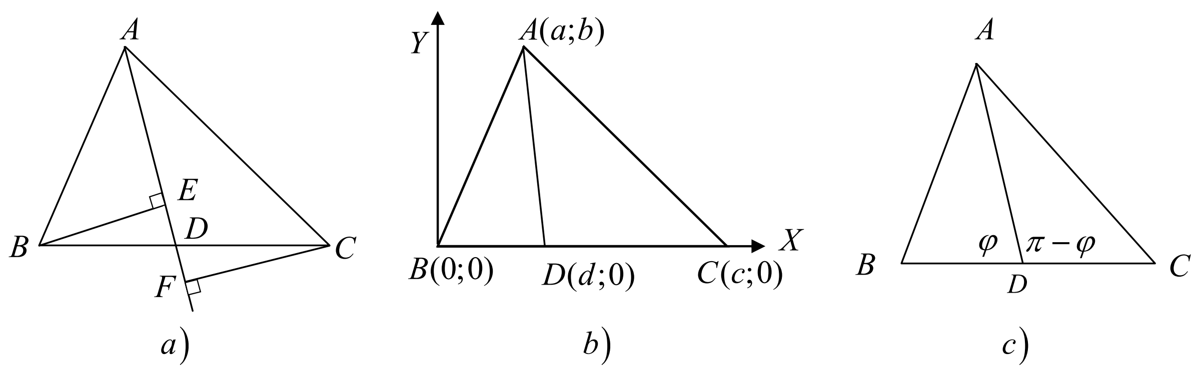


Рис. 1:

1.2. Координатний спосіб доведення

Введемо в площині ΔABC прямокутну систему координат XOY з початком у точці B так, як показано на рис. 1 b). Користуючись формулою для обчислення відстані між двома точками, заданих своїми координатами, знайдемо довжини відрізків, що входять у формулу (1):
$BD = d$; $DC = c - d$; $BC = c$; $AD^2 = (d-a)^2 + (0-b)^2 = (d-a)^2 + b^2$; $AB^2 = a^2 + b^2$; $AC^2 = (c-a)^2 + (0-b)^2 = (a-c)^2 + b^2$.

Підставивши наведені вирази у співвідношення (1), будемо мати

$$\frac{AB^2 \cdot DC + AC^2 \cdot BD}{BC} - BD \cdot DC =$$
$$= \frac{\left(a^2+b^2\right)\cdot(c-d) + \left((a-c)^2 + b^2\right)\cdot d}{c} - d\cdot(c-d) =$$
$$= \frac{a^2(c-d+d) + b^2(c-d+d) + c^2 d - 2acd}{c} - cd + d^2 =$$
$$= a^2 + b^2 + cd - 2ad - cd + d^2 = a^2 - 2ad + d^2 + b^2 = (d-a)^2 + b^2 = AD^2.$$

□

1.3. Доведення за допомогою теореми косинусів

1 спосіб (рис. 1 c)). Нехай $\angle BDA = \varphi$, тоді $\angle ADC = \pi - \varphi$. З ΔBDA за теоремою косинусів маємо рівність $AB^2 = AD^2 + BD^2 - 2AD\cdot DB\cos\varphi$. Звідки

$$AB^2\cdot DC = AD^2\cdot DC + BD^2\cdot DC - 2AD\cdot DB\cdot DC\cos\varphi. \tag{20}$$

З ΔADC за теоремою *косинусів* маємо, що
$AC^2 = AD^2 + DC^2 - 2AD\cdot DC\cos(\pi-\varphi) = AD^2 + DC^2 + 2AD\cdot DC\cos\varphi$. Звідки

$$AC^2\cdot BD = AD^2\cdot BD + DC^2\cdot BD + 2AD\cdot DC\cdot BD\cos\varphi. \tag{21}$$

Тоді з рівностей (20) і (21) маємо
$AB^2\cdot DC + AC^2\cdot BD = AD^2(BD+DC) + BD\cdot DC(BD+DC) =$
$= BC\cdot(AD^2 + BD\cdot DC)$. Звідки $AD^2 = \dfrac{AB^2\cdot DC + AC^2\cdot BD}{BC} - BD\cdot DC$.

□

2 спосіб (рис. 1 c)). Нехай $\angle ABC = \beta$. Тоді з ΔABD за теоремою косинусів маємо рівність $AD^2 = BA^2 + BD^2 - 2BA\cdot BD\cos\beta$.

З ΔAB за теоремою косинусів маємо рівність $\cos\beta = \frac{BA^2+BC^2-AC^2}{2BA\cdot BC}$. Тому
$AD^2 = BA^2 + BD^2 - 2BA\cdot BD\cdot\frac{BA^2+BC^2-AC^2}{2BA\cdot BC} =$
$= BA^2 + BD^2 - BD\cdot\frac{BA^2+BC^2-AC^2}{BC} = BA^2(1-\frac{BD}{BC}) + AC^2\frac{BD}{BC} + BD^2 - BD\cdot BC =$
$= BA^2\frac{DC}{BC} + AC^2\frac{BD}{BC} + BD^2 - BD(BD+DC) = BA^2\frac{DC}{BC} + AC^2\frac{BD}{BC} - BD\cdot DC$.

□

1.4. Векторний спосіб доведення

Нехай D – довільна точка на стороні BC трикутника ABC – рис. 2 a). Доведемо спочатку справедливість наступної векторної рівності

$$\overrightarrow{AD} = \frac{DC}{BC} \cdot \overrightarrow{AB} + \frac{BD}{BC} \cdot \overrightarrow{AC}. \qquad (22)$$

Для цього виконаємо елементарні перетворення у правій її частині

$$\tfrac{DC}{BC} \cdot \overrightarrow{AB} + \tfrac{BD}{BC} \cdot \overrightarrow{AC} = \tfrac{DC}{BC} \cdot \overrightarrow{AB} + \tfrac{BD}{BC} \cdot \left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}\right) =$$
$$= \left(\tfrac{DC}{BC} + \tfrac{BD}{BC}\right) \cdot \overrightarrow{AB} + \tfrac{BD}{BC} \cdot \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD}.$$

Помноживши обидві частини рівності (22) скалярно на вектор $\overrightarrow{AD}$, одержимо рівність $AD^2 = \left\langle \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AD} \right\rangle = \frac{DC}{BC} \cdot \left\langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD} \right\rangle + \frac{BD}{BC} \cdot \left\langle \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD} \right\rangle$.

Користуючись властивостями скалярного добутку векторів, виконаємо наступні перетворення у правій частині останньої рівності:

$$\tfrac{DC}{BC} \cdot \left\langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD} \right\rangle + \tfrac{BD}{BC} \cdot \left\langle \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD} \right\rangle = \tfrac{DC}{BC} \cdot \left\langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} \right\rangle +$$
$$+ \tfrac{BD}{BC} \cdot \left\langle \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} \right\rangle = \tfrac{AB^2 \cdot DC + AC^2 \cdot BD}{BC} + \tfrac{DC}{BC} \cdot \left\langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BD} \right\rangle - \tfrac{BD}{BC} \cdot \left\langle \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{DC} \right\rangle =$$
$$= \tfrac{AB^2 \cdot DC + AC^2 \cdot BD}{BC} + \tfrac{DC}{BC} \cdot \left\langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC} \right\rangle \cdot \tfrac{BD}{BC} - \tfrac{BD}{BC} \cdot \left\langle \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BC} \right\rangle \cdot \tfrac{DC}{BC} =$$
$$= \tfrac{AB^2 \cdot DC + AC^2 \cdot BD}{BC} + \tfrac{BD}{BC} \cdot \tfrac{DC}{BC} \cdot \left(\left\langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC} \right\rangle - \left\langle \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BC} \right\rangle \right) =$$
$$= \tfrac{AB^2 \cdot DC + AC^2 \cdot BD}{BC} - \tfrac{BD}{BC} \cdot \tfrac{DC}{BC} \cdot \left\langle \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BC} \right\rangle = \tfrac{AB^2 \cdot DC + AC^2 \cdot BD}{BC} - BD \cdot DC. \qquad \square$$

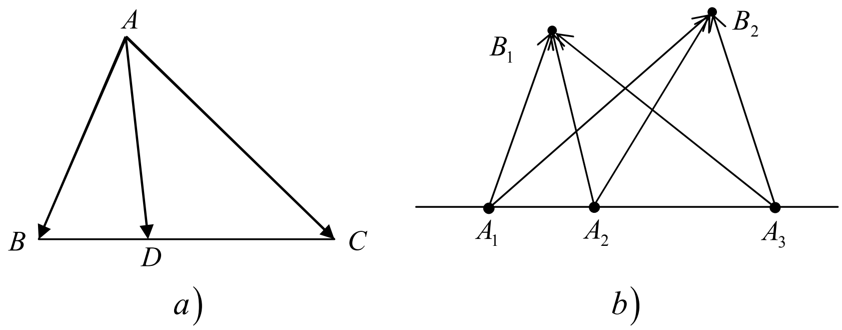


Рис. 2:

1.5. Теорема Стюарта, як наслідок з тотожності Стюарта

Твердження 1. *Нехай A_1, A_2, A_3 – впорядкована трійка різних точок на фіксованій прямій l, а B_1 і B_2 – довільні точки площини, що містить l. Тоді має місце векторна рівність*

$$\frac{\langle \overrightarrow{A_1B_1}, \overrightarrow{A_1B_2} \rangle}{\langle \overrightarrow{A_1A_2}, \overrightarrow{A_1A_3} \rangle} + \frac{\langle \overrightarrow{A_2B_1}, \overrightarrow{A_2B_2} \rangle}{\langle \overrightarrow{A_2A_3}, \overrightarrow{A_2A_1} \rangle} + \frac{\langle \overrightarrow{A_3B_1}, \overrightarrow{A_3B_2} \rangle}{\langle \overrightarrow{A_3A_1}, \overrightarrow{A_3A_2} \rangle} = 1, \qquad (23)$$

де $\langle \overrightarrow{a}, \overrightarrow{b} \rangle$ – скалярний добуток векторів $\overrightarrow{a}$ і $\overrightarrow{b}$.

Спочатку покажемо, що теорема Стюарта є наслідком твердження 1. Дійсно, якщо на прямій задано впорядковану трійку різних точок $A_1 = B$, $A_2 = D$, $A_3 = C$, а точки B_1 і B_2 співпадають з точкою A, яка не належить прямій A_1A_3 (рис. 2 a, b)), то має місце рівність

$$\frac{\overrightarrow{BA}^2}{\langle\overrightarrow{BD},\overrightarrow{BC}\rangle} + \frac{\overrightarrow{DA}^2}{\langle\overrightarrow{DC},\overrightarrow{DB}\rangle} + \frac{\overrightarrow{CA}^2}{\langle\overrightarrow{CB},\overrightarrow{CD}\rangle} = \frac{\overrightarrow{BA}^2}{\langle\overrightarrow{BD},\overrightarrow{BC}\rangle} - \frac{\overrightarrow{DA}^2}{\langle\overrightarrow{DC},\overrightarrow{BD}\rangle} + \frac{\overrightarrow{CA}^2}{\langle\overrightarrow{BC},\overrightarrow{DC}\rangle} = 1\,.$$

Оскільки вектори $\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{BC}$ і $\overrightarrow{DC}$ є паралельними й співнапрямленими, то остання рівність набуває вид

$\frac{BA^2}{BD\cdot BC} - \frac{AD^2}{BD\cdot DC} + \frac{CA^2}{BC\cdot DC} = 1$, або ж $AB^2 \cdot \frac{DC}{BC} - AD^2 + AC^2\frac{BD}{BC} = BD \cdot DC\,.$

Звідки маємо $AD^2 = \frac{AB^2\cdot DC + AC^2\cdot BD}{BC} - BD\cdot DC.$ □

Тепер доведемо *твердження* 1. Для цього введемо наступні позначення: $\left|\overrightarrow{A_1A_2}\right| = m$, $\left|\overrightarrow{A_2A_3}\right| = n$ $(m+n=c)$. Тоді рівність (23) можна подати у вигляді $\frac{\left\langle\overrightarrow{A_1B_1},\overrightarrow{A_1B_2}\right\rangle}{m\cdot c} - \frac{\left\langle\overrightarrow{A_2B_1},\overrightarrow{A_2B_2}\right\rangle}{n\cdot m} + \frac{\left\langle\overrightarrow{A_3B_1},\overrightarrow{A_3B_2}\right\rangle}{c\cdot n} = 1$, або ж

$$n\left\langle\overrightarrow{A_1B_1},\overrightarrow{A_1B_2}\right\rangle - c\left\langle\overrightarrow{A_2B_1},\overrightarrow{A_2B_2}\right\rangle + m\left\langle\overrightarrow{A_3B_1},\overrightarrow{A_3B_2}\right\rangle = mnc. \qquad (24)$$

З урахуванням (22) маємо наступні векторні рівності

$$\begin{cases}\overrightarrow{B_1A_2} = \frac{n}{c}\overrightarrow{B_1A_1} + \frac{m}{c}\overrightarrow{B_1A_3}\\ \overrightarrow{B_2A_2} = \frac{n}{c}\overrightarrow{B_2A_1} + \frac{m}{c}\overrightarrow{B_2A_3},\end{cases} \quad \text{звідки} \quad \begin{cases}\overrightarrow{A_2B_1} = \frac{n}{c}\overrightarrow{A_1B_1} + \frac{m}{c}\overrightarrow{A_3B_1}\\ \overrightarrow{A_2B_2} = \frac{n}{c}\overrightarrow{A_1B_2} + \frac{m}{c}\overrightarrow{A_3B_2}.\end{cases} \qquad (25)$$

Підставимо праві частини рівностей (25) у ліву частину співвідношення (24) та, використовуючи властивості скалярного добутку векторів, виконаємо наступні перетворення

$$n\left\langle\overrightarrow{A_1B_1},\overrightarrow{A_1B_2}\right\rangle - c\left\langle\tfrac{n}{c}\overrightarrow{A_1B_1} + \tfrac{m}{c}\overrightarrow{A_3B_1}, \tfrac{n}{c}\overrightarrow{A_1B_2} + \tfrac{m}{c}\overrightarrow{A_3B_2}\right\rangle + m\left\langle\overrightarrow{A_3B_1},\overrightarrow{A_3B_2}\right\rangle =$$
$$= n\left\langle\overrightarrow{A_1B_1},\overrightarrow{A_1B_2}\right\rangle - \tfrac{n^2}{c}\left\langle\overrightarrow{A_1B_1},\overrightarrow{A_1B_2}\right\rangle - \tfrac{mn}{c}\left\langle\overrightarrow{A_1B_1},\overrightarrow{A_3B_2}\right\rangle - \tfrac{mn}{c}\left\langle\overrightarrow{A_3B_1},\overrightarrow{A_1B_2}\right\rangle -$$
$$-\tfrac{m^2}{c}\left\langle\overrightarrow{A_3B_1},\overrightarrow{A_3B_2}\right\rangle + m\left\langle\overrightarrow{A_3B_1},\overrightarrow{A_3B_2}\right\rangle = \left(n - \tfrac{n^2}{c}\right)\cdot\left\langle\overrightarrow{A_1B_1},\overrightarrow{A_1B_2}\right\rangle -$$
$$-\tfrac{mn}{c}\left\langle\overrightarrow{A_1B_1},\overrightarrow{A_3B_2}\right\rangle - \tfrac{mn}{c}\left\langle\overrightarrow{A_3B_1},\overrightarrow{A_1B_2}\right\rangle + \left(m - \tfrac{m^2}{c}\right)\cdot\left\langle\overrightarrow{A_3B_1},\overrightarrow{A_3B_2}\right\rangle =$$
$$= \tfrac{mn}{c}\cdot\left[\left\langle\overrightarrow{A_1B_1},\overrightarrow{A_1B_2}\right\rangle - \left\langle\overrightarrow{A_1B_1},\overrightarrow{A_3B_2}\right\rangle - \left\langle\overrightarrow{A_3B_1},\overrightarrow{A_1B_2}\right\rangle + \left\langle\overrightarrow{A_3B_1},\overrightarrow{A_3B_2}\right\rangle\right] =$$
$$= \tfrac{mn}{c}\cdot\left[\left\langle\overrightarrow{A_1B_1},\overrightarrow{A_1B_2} - \overrightarrow{A_3B_2}\right\rangle + \left\langle\overrightarrow{A_3B_1},\overrightarrow{A_3B_2} - \overrightarrow{A_1B_2}\right\rangle\right] =$$
$$= \tfrac{mn}{c}\cdot\left[\left\langle\overrightarrow{A_1B_1},\overrightarrow{A_1A_3}\right\rangle + \left\langle\overrightarrow{A_3B_1},\overrightarrow{A_3A_1}\right\rangle\right] = \tfrac{mn}{c}\cdot\left\langle\overrightarrow{A_1A_3},\overrightarrow{A_1A_3}\right\rangle = mnc. \qquad \square$$

Зауваження 3. Твердження 1. *є частинним випадком* тотожності Стюарта *при* $n = 3$ *(напр.* [*3*]*), доведення якої міститься в* [*10*]. *З доведенням цієї тотожності у випадку, коли всі точки* A_i $(i = 1, ..., n)$ *і* B_j $(j = 1, ..., n-1)$ *належать одній прямій, можна ознайомитися в* [*8*].

2. Деякі узагальнення теореми Стюарта та їх наслідки

2.1 Довжина відрізка з кінцями на сторонах трикутника

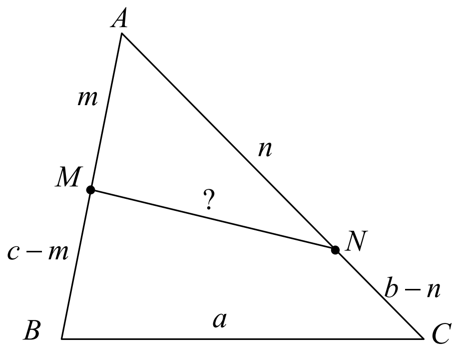
Задача 10. *Нехай a, b, c – довжини сторін BC, AC і AB $\triangle ABC$, а M і N такі точки на сторонах AB і AC, що $AM = m$, $AN = n$. Тоді довжину відрізка MN можна знайти за однією з наступних формул*

$$MN^2 = m^2 + n^2 - \frac{mn}{bc}\left(b^2 + c^2 - a^2\right) = \tag{26}$$

$$= \frac{m}{c}\left(a^2\frac{n}{b} + c^2\frac{b-n}{b} - n(b-n)\right) + \frac{c-m}{c}\left(n^2 - mc\right) = \tag{27}$$

$$= \frac{n}{b}\left(a^2\frac{m}{c} + b^2\frac{c-m}{c} - m(c-m)\right) + \frac{b-n}{b}\left(m^2 - nb\right) = \tag{28}$$

$$= a^2\frac{m}{c}\frac{n}{b} + (mc - nb)\left(\frac{m}{c} - \frac{n}{b}\right). \tag{29}$$



Доведення. З $\triangle AMN$ за теоремою косинусів маємо рівність

$$MN^2 = m^2 + n^2 - 2mn\cos\angle A.$$

З ΔABC за теоремою косинусів маємо рівність

$$\cos\angle A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}.$$

Тому

$$MN^2 = m^2 + n^2 - 2mn\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = m^2 + n^2 - \frac{mn}{ab}\left(b^2 + c^2 - a^2\right).$$

Доведення формул (27) – (29) є звичайною перевіркою справедливості відповідних тотожностей.

Граничні випадки та наслідки

1.1) Якщо точка M співпадає з вершиною B трикутника ABC, то очевидно, що $m = c$, $c - m = 0$, а формула (27) набуває вид

$$MN^2 = a^2\frac{n}{b} + c^2\frac{b-n}{b} - n(b-n) = BN^2$$

та складає зміст *теореми Стюарта.*

Аналогічно, якщо точка N співпадає з вершиною C, то $n = b$, $b - n = 0$, а формула (28) набуває вид $MN^2 = a^2\frac{m}{c} + c^2\frac{c-m}{c} - m(c-m) = CM^2$ та складає зміст *теореми Стюарта* для знаходження відрізка CM $\triangle ABC$.

1.2) Якщо точка M або ж точка N співпадає з вершиною A, то відрізок MN буде співпадати з відрізком AN або ж AM відповідно. Тоді за формулою (26) довжина відрізка MN становить n або ж m відповідно, що співпадає з умовою твердження.

1.3) Нехай відрізок MN є паралельним до сторони BC. Тоді з подібності трикутників AMN і ABC (за кутами) випливає, що $\frac{m}{c} = \frac{b}{n}$. І тому за формулою (29) має місце рівність

$$MN^2 = a^2 \cdot \left(\frac{m}{c}\right)^2, \quad \text{звідки} \quad MN = a \cdot \frac{m}{c}. \tag{30}$$

Оскільки площі подібних трикутників AMN і ABC відносяться як квадрати довжин відповідних сторін, то останню рівність можна подати у вигляді

$$MN^2 = a^2 \cdot \frac{\overline{S}}{S}, \tag{31}$$

де $\overline{S}$ – площа $\triangle AMN$, а S – площа $\triangle ABC$. Як наслідок з (31) маємо справедливість наступного твердження:

якщо відрізок MN є паралельним до сторони BC трикутника ABC та розбиває його на трикутник і трапецію рівних площ, то довжину відрізка MN можна визначити за формулою

$$MN = \frac{a\sqrt{2}}{2}. \tag{32}$$

1.3.1) Якщо відрізок MN є середньою лінією трикутника, тобто $2m = c$, $2n = b$, то за формулою (30) одержимо, що $MN = \frac{a}{2}$. Отже,

довжина середньої лінії трикутника вдвічі менша за сторону, до якої вона є паралельною.

1.4) Нехай відрізок MN є антипаралельним з відрізком BC відносно сторін кута BAC, тобто $\angle AMN = \angle ACB$ а $\angle ANM = \angle ABC$. Тоді з подібності трикутників AMN і ACB маємо рівність $\frac{m}{b} = \frac{n}{c}$. Звідки $mc = nb$ а формула (29) набуває вид

$$MN = a\frac{m}{b} = a\frac{n}{c}. \tag{33}$$

Крім того, *якщо відрізок MN є антипаралельним з відрізком BC відносно сторін кута BAC та розбиває $\triangle ABC$ на трикутник і чотирикутник рівних площ, то довжину відрізка MN також можна визначити за формулою* (32).

1.5) Якщо точки M і N є `основами бісектрис` кутів C і B відповідно, то з урахуванням рівностей $m = \frac{bc}{a+b}$, $n = \frac{bc}{a+c}$ та формули (26) маємо наступне співвідношення

$$MN^2 = \frac{4(p-a)^2(p-b)(p-c)}{bc} = \frac{4(p-a)S^2_{\triangle ABC}}{pbc}. \tag{34}$$

1.6) Якщо точки M і N є `точками дотику вписаного` у $\triangle ABC$ кола, то, як відомо $AM = AN = p - a = \frac{b+c-a}{2}$. Тоді з урахуванням (26) довжину відрізка MN можна обчислити за формулою

$$MN^2 = (p-a)^2 \cdot \left(2 - \frac{b^2+c^2-a^2}{bc}\right) = (p-a)^2 \cdot \left(\frac{a^2-(b-c)^2}{bc}\right) =$$

$$= \frac{4(p-a)^2(p-b)(p-c)}{bc} = \frac{4(p-a)S^2_{\triangle ABC}}{pbc}. \tag{35}$$

1.7) Якщо точки M і N є `точками дотику зовнівписаних кіл` $\triangle ABC$ зі сторонами AB і AC відповідно, то, як відомо $AM = p-b$, $AN = p-c$. Тоді з урахуванням (26) довжину відрізка MN можна обчислити за формулою

$$MN^2 = (p-b)^2 + (p-c)^2 - \frac{(p-b)(p-c)}{bc} \cdot \left(b^2+c^2-a^2\right) =$$

$$= \left((p-b)+(p-c)\right)^2 - (p-b)(p-c) \cdot \left(2 + \frac{b^2+c^2-a^2}{bc}\right) =$$

$$= a^2 - \frac{(p-b)(p-c)4(p-a)p}{bc} = a^2 - \frac{4S^2_{\triangle ABC}}{bc}. \tag{36}$$

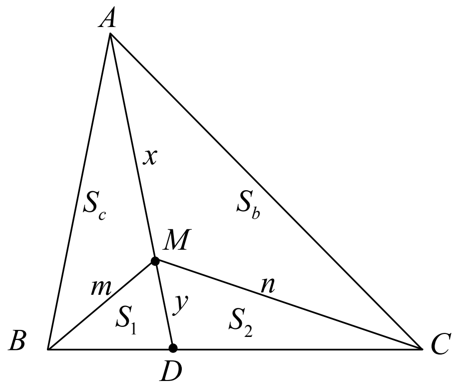
1.8) Якщо точки M і N є `основами висот` $\triangle ABC$, проведених до сторін AB і AC відповідно, то, як відомо $AM = \left|\frac{b^2+c^2-a^2}{2c}\right|$, $AN = \left|\frac{b^2+c^2-a^2}{2b}\right|$. Тоді з урахуванням (26) довжину відрізка MN можна обчислити за формулою

$$MN^2 = (b^2+c^2-a^2)^2 \cdot \left(\frac{1}{4c^2} + \frac{1}{4b^2} + \frac{b^2+c^2-a^2}{4b^2c^2}\right) = (b^2+c^2-a^2)^2 \cdot \left(\frac{a^2}{4b^2c^2}\right).$$

Звідки

$$MN = \frac{a}{2bc} \cdot \left|b^2+c^2-a^2\right|. \tag{37}$$

2.2 Відстань від вершини до внутрішньої точки трикутника.



Фактично, теорема Стюарта дозволяє обчислювати відстань від вершини A трикутника ABC до точки D на протилежній стороні BC у випадках:

1) коли відомі відстані точки D до двох інших вершин трикутника та його сторони, або ж

2) якщо відомі сторони трикутника та відношення площі одного з трикутників (утворених шуканим відрізком AD) до площі даного трикутника – формула (2).

Природним чином виникає наступна задача, яка, на перший погляд, за своїм формулюванням мало чим відрізняється від теореми Стюарта.

Обмежимося розглядом випадку, коли фіксована точка M знаходиться строго всередині трикутника, є відомими відстані $MB = m$ і $MC = n$ та сторони a, b, c трикутника ABC.

Введемо наступні позначення: $S = S_{\triangle ABC}$; $S_a = S_{\triangle MBC}$, $S_b = S_{\triangle MCA}$, $S_c = S_{\triangle MAB}$; $S_1 = S_{\triangle MBD}$, $S_2 = S_{\triangle MDC}$.

Твердження 2. *Нехай задано довжини сторін a, b, c трикутника ABC та відомі відстані m і n від (внутрішньої) точки M до його вершин B і C відповідно. Тоді довжину відрізка MA можна знайти за допомогою наступних співвідношень*

$$AM^2 = b^2\frac{S_c\cdot(S-S_a)}{S^2} + c^2\frac{S_b\cdot(S-S_a)}{S^2} - a^2\frac{S_b\cdot S_c}{S^2}, \tag{38}$$

$$S_b = \frac{S\left(a^2-m^2+n^2\right) - S_a\left(a^2+b^2-c^2\right)}{2a^2}, \tag{39}$$

$$S_c = \frac{S\left(a^2+m^2-n^2\right) - S_a\left(a^2-b^2+c^2\right)}{2a^2}, \tag{40}$$

де

$$16S_a^2 = 4m^2n^2 - \left(m^2+n^2-a^2\right)^2, \tag{41}$$

$$16S^2 = 4b^2c^2 - \left(b^2+c^2-a^2\right)^2. \tag{42}$$

Доведення. Продовжимо відрізок AM до перетину зі стороною BC у точці D та позначимо довжини відрізків AM і MD, як x і y відповідно.

Тоді, з урахуванням (2), довжину відрізка $AD = x + y$ можна визначити за допомогою формули

$$(x+y)^2 = b^2 \cdot \frac{S_c + S_1}{S} + c^2 \cdot \frac{S_b + S_2}{S} - a^2 \cdot \frac{S_b + S_2}{S} \cdot \frac{S_c + S_1}{S}. \qquad (43)$$

Оскільки $\frac{S_c+S_1}{S} = \frac{S_1}{S_a}$, то $\frac{S_c+S_1}{S} = \frac{S_c}{S-S_a}$. Аналогічно, оскільки $\frac{S_b+S_2}{S} = \frac{S_2}{S_a}$, то $\frac{S_b+S_2}{S} = \frac{S_b}{S-S_a}$. Тому рівність (43) набуває вид

$$(x+y)^2 = b^2 \cdot \frac{S_c}{S - S_a} + c^2 \cdot \frac{S_b}{S - S_a} - a^2 \cdot \frac{S_b}{S - S_a} \cdot \frac{S_c}{S - S_a}. \qquad (44)$$

З іншого боку, оскільки $\frac{x+y}{x} = \frac{S}{S-S_a}$, то $(x+y)^2 = x^2 \left(\frac{x+y}{x}\right)^2 = x^2 \left(\frac{S}{S-S_a}\right)^2$. Таким чином, (44) можна подати у вигляді

$$x^2 \left(\frac{S}{S - S_a}\right)^2 = b^2 \cdot \frac{S_c}{S - S_a} + c^2 \cdot \frac{S_b}{S - S_a} - a^2 \cdot \frac{S_b}{S - S_a} \cdot \frac{S_c}{S - S_a},$$

або ж

$$x^2 = b^2 \frac{S_c \cdot (S - S_a)}{S^2} + c^2 \frac{S_b \cdot (S - S_a)}{S^2} - a^2 \frac{S_b \cdot S_c}{S^2}, \qquad (45)$$

що і закінчує доведення формули (38).

Доведемо формулу (40). Для цього введемо наступні позначення $\angle ABM = \varphi$, $\angle MBC = \psi$, $\angle ABC = \beta$. Тоді мають місце рівності

$$S_c = \frac{1}{2} cm \sin\varphi = \frac{1}{2} cm \sin(\beta - \psi) = \frac{1}{2} cm (\sin\beta \cos\psi - \sin\psi \cos\beta). \qquad (46)$$

За теоремою косинусів з $\triangle MBC$ та $\triangle ABC$ маємо співвідношення

$$\cos\psi = \frac{m^2 + a^2 - n^2}{2ma}, \quad \cos\beta = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}. \qquad (47)$$

З формул для обчислення площ $\triangle MBC$ та $\triangle ABC$ маємо наступні рівності

$$\sin\psi = \frac{2S_a}{ma}, \quad \sin\beta = \frac{2S}{ac} \qquad (48)$$

Підставивши вирази (47) і (48) в (46), одержимо формулу (40).

Для доведення формули (39) достатньо скористатися співвідношенням (40) та рівністю $S_b = S - S_a - S_c$.

Співвідношення (41) і (42) є іншим записом формули Герона для обчислення площ відповідних трикутників.

Граничні випадки та наслідки

2.1) Нехай точка M **належить одній зі сторін трикутника**, наприклад, стороні BC. Тоді очевидно, що трикутник BMC вироджується у відрізок BC, а площа $S_a \equiv 0$. І тому формула (38) набуває вид

$$MA^2 = b^2\frac{S_c}{S} + c^2\frac{S_b}{S} - a^2\frac{S_b \cdot S_c}{S^2} \tag{49}$$

та складає зміст `теореми Стюарта`.

2.2) Нехай M **є точкою перетину медіан** (центром тяжіння) даного трикутника. Не важко перевірити, що в цьому випадку мають місце рівності $3S_a = 3S_b = 3S_c = S$. І тому формула (38) набуває вид

$$MA^2 = b^2\frac{S_c}{S}\left(1-\frac{S_a}{S}\right) + c^2\frac{S_b}{S}\left(1-\frac{S_a}{S}\right) - a^2\frac{S_b}{S}\cdot\frac{S_c}{S} =$$

$$= b^2\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{3}\right) + c^2\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{3}\right) - a^2\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3} = \frac{1}{9}\left(2b^2+2c^2-a^2\right) \tag{50}$$

та дає можливість за відомими сторонами трикутника обчислювати відстань від центра тяжіння до його вершин. Безпосереднім наслідком з формули (50) є наступна рівність

$$MA^2 + MB^2 + MC^2 = \frac{1}{3}\left(a^2+b^2+c^2\right). \tag{51}$$

Крім того, порівнюючи формулу (50) з формулою (3) для обчислення довжини медіани m_a за сторонами a, b, c $\triangle ABC$, маємо співвідношення $\dfrac{MA^2}{m_a^2} = \dfrac{4}{9}$, або ж $\dfrac{MA}{m_a} = \dfrac{2}{3}$. Звідки маємо ще одне доведенням того, що

точка перетину медіан трикутника ділить кожну з них у відношенні $2:1$, *рухаючись від вершини.*

2.3) Нехай M **є точкою перетину бісектрис** (інцентром) даного трикутника. Оскільки M в цьому випадку є центром I вписаного кола, то не важко перевірити справедливість наступних рівностей

$$\frac{S_a}{S} = \frac{a}{a+b+c}, \quad \frac{S_b}{S} = \frac{b}{a+b+c}, \quad \frac{S_c}{S} = \frac{c}{a+b+c}.$$

Тому формула (38) набуває вид
$IA^2 = b^2\frac{c}{a+b+c}\left(1-\frac{a}{a+b+c}\right) + c^2\frac{b}{a+b+c}\left(1-\frac{a}{a+b+c}\right) - a^2\frac{b}{a+b+c}\cdot\frac{c}{a+b+c} =$
$= \frac{b+c}{(a+b+c)^2}\cdot bc\cdot(b+c) - \frac{a^2bc}{(a+b+c)^2} = \frac{bc\left((b+c)^2-a^2\right)}{(b+c+a)^2} = bc\frac{b+c-a}{b+c+a}$. Звідки

$$IA^2 = \frac{bc(p-a)}{p}. \tag{52}$$

Порівнюючи формулу (52) з формулою (4) для обчислення довжини бісектриси l_a за сторонами $\triangle ABC$, маємо співвідношення $\dfrac{IA^2}{l_a^2} = \dfrac{(b+c)^2}{(b+c+a)^2}$. Звідки $\dfrac{l_a}{IA} = \dfrac{a+b+c}{b+c}$, $\dfrac{l_a - IA}{IA} = \dfrac{a}{b+c}$. І тому має місце твердження

інцентр ділить бісектрису l_a трикутника ABC у відношенні $\dfrac{b+c}{a}$, рухаючись від вершини.

Наступні результати не є безпосереднім наслідком *твердження* 2, проте в контексті зазначеної задачі автори вважають їх наведення доцільним.

2.4) Нехай M ***є точкою H перетину висот*** (ортоцентром) гострокутного $\triangle ABC$. Оскільки в цьому випадку відрізки AD і HD є висотами трикутників ABC і HBC зі спільною основою $BC = a$, то $AH = \frac{2(S-S_a)}{a}$.

З іншого боку, оскільки $\angle CHB = 180^0 - \angle A$, то точка H', яка є симетричною точці H відносно BC, належить описаному колу $\triangle ABC$. І тому за властивістю хорд кола має місце рівність $BD \cdot DC = AD \cdot DH' = AD \cdot HD$. Звідки $\frac{BC^2}{4} BD \cdot DC = \frac{AD \cdot BC}{2} \cdot \frac{HD \cdot BC}{2} = S \cdot S_a$, $S_a = \frac{a^2 \cdot BD \cdot DC}{4S}$.
Оскільки $BD = c \cdot \cos\beta$, $DC = b \cdot \cos\alpha$, то $S_a = \frac{(a^2-b^2+c^2)(a^2+b^2-c^2)}{16S}$.
Тому $AH = \frac{2(S-S_a)}{a} = \frac{2}{16aS}\left(16S^2 - (a^2-b^2+c^2)(a^2+b^2-c^2)\right)$. Звідки

$$AH = \frac{a(b^2+c^2-a^2)}{4S}. \tag{53}$$

Оскільки $h_a = \frac{2S}{a}$, то з урахуванням (42), маємо $AH \cdot (h_a - AH) =$
$= \frac{a(b^2+c^2-a^2)}{4S}\left(\frac{2S}{a} - \frac{a(b^2+c^2-a^2)}{4S}\right) = \frac{b^2+c^2-a^2}{2} - \frac{a^2}{16S^2}(4b^2c^2 - 16S^2) =$
$= \frac{a^2+b^2+c^2}{2} - \left(\frac{abc}{2S}\right)^2 = const$. Звідки маємо твердження

ортоцентр трикутника ABC ділить кожну його висоту на відрізки, добуток яких є величина стала, що визначається рівністю

$$AH \cdot (h_a - AH) = BH \cdot (h_b - BH) = CH \cdot (h_c - CH) =$$
$$= \frac{a^2+b^2+c^2}{2} - \left(\frac{abc}{2S}\right)^2 = \frac{a^2+b^2+c^2}{2} - 4R^2, \tag{54}$$

де R – радіус описаного навколо $\triangle ABC$ кола.

Крім того, з урахуванням формули (53), не важко встановити справедливість й наступної рівності

$$HA^2 + HB^2 + HC^2 = 12R^2 - \left(a^2+b^2+c^2\right). \tag{55}$$

4. Задачі на застосування теореми Стюарта

1. Сторони паралелограма дорівнюють a і b, діагоналі – e і f. Доведіть, що має місце рівність $e^2 + f^2 = 2\left(a^2 + b^2\right)$.
2. Довжини основ трапеції дорівнюють a і b ($a < b$), бічних сторін – c і d. Позначимо довжини діагоналей трапеції як e і f. Доведіть, що

   (a) $e = \sqrt{\frac{b(c^2-a^2)+a(b^2-d^2)}{b-a}}$, $f = \sqrt{\frac{b(d^2-a^2)+a(b^2-c^2)}{b-a}}$ (або навпаки);

   (b) $e^2 + f^2 = c^2 + d^2 + 2ab$;

   (c) $\frac{1}{2}\sqrt{2c^2 + 2d^2 - (b-a)^2}$ – довжина відрізка, що сполучає середини основ трапеції;

   (d) $e^2 = c^2 + ab = f^2$, якщо $c = d$.
3. На відрізку AB, як на діаметрі побудовано коло. Точка C належить цьому відрізку, причому $AC = 2r_1$, $CB = 2r_2$. На відрізках AC і CB, як на діаметрах побудовано кола. Знайти радіус r четвертого кола, яке дотикається першого кола внутрішнім чином, а двох інших – зовнішнім.
   Відповідь: $r = \frac{r_1 \cdot r_2 (r_1 + r_2)}{r_1^2 + r_1 \cdot r_2 + r_2^2}$.
4. Два кола з центрами в точках O_1 і O_2 з радіусами r_1 і r_2 (відповідно) дотикаються ззовні. На відрізку O_1O_2, як на діаметрі, побудовано третє коло. Знайти радіус кола, що дотикається перших двох кіл ззовні, а третього кола внутрішнім чином.
   Відповідь: $r = \frac{r_1 r_2}{2(r_1 + r_2)}$.
5. Два кола з радіусами r_1 і r_2 ($r_1 > r_2$) дотикаються внутрішнім чином. Знайти радіус r третього кола, що дотикається даних кіл та прямої, яка містить їх центри.
   Відповідь: $r = \frac{4r_1 r_2 (r_1 - r_2)}{(r_1 + r_2)^2}$.
6. На відрізку $AB = 2r_1$, як на діаметрі побудовано коло. Точки C і D належать цьому відрізку, причому $AC = 2r_2$, $DB = 2r_3$, $2r_2 + 2r_3 > 2r_1$. На відрізках AC і DB, як на діаметрах побудовано кола. Знайти радіус r четвертого кола, яке дотикається першого кола внутрішнім чином, а двох інших – зовнішнім.
   Відповідь: $r = \frac{r_1 (r_1 - r_2)(r_1 - r_3)}{r_1^2 - r_2 r_3}$.
7. Нехай d – відстань між центром вписаного у $\triangle ABC$ кола та точкою перетину медіан цього трикутника. Доведіть, що має місце рівність $9d^2 = 9r^2 - 3p^2 + 2\left(a^2 + b^2 + c^2\right)$, де r – радіус вписаного у $\triangle ABC$ кола, a, b, c, p – сторони та півпериметр трикутника ABC.
8. Доведіть, що для $\triangle ABC$ має місце рівність $BI \cdot CI = 2r \cdot IW_a$, де I, r – центр та радіус вписаного у $\triangle ABC$ кола, W_a – точка перетину бісектриси кута A з описаним навколо $\triangle ABC$ колом.

Висновки

Наведені результати дозволяють стверджувати, що застосування теореми Стюарта та її незначних узагальнень є достатньо дієвим підходом до розв'язування широкого кола метричних задач планіметрії. Крім того, є всі підстави стверджувати, що, при знаходженні довжини відрізка з кінцями на сторонах трикутника, застосування теореми Стюарта дещо «прискорює» сам процес розв'язування у порівнянні із традиційними підходами.

На думку авторів цілком досяжним є встановлення аналогічних формул для обчислення довжин відрізків з кінцями на сторонах трапеції. Цікавим також здається дослідження просторового аналогу теореми Стюарта та його застосувань до розв'язування метричних задач на тетраедр. Дослідження питання щодо обчислення довжини відрізка, кінці якого є цілком визначеними відносно заданого трикутника, також привертає до себе увагу і може бути гарним матеріалом для учнівських пошукових робіт.

Література

[1] *Адамар Ж.* Элементарная геометрия. Ч. 1 : Планиметрия / Ж. Адамар [3-е изд]. – М.: УЧПЕДГИЗ, 1948. – 608с.

[2] *Бутузов В.Ф.* Планиметрия. Пособие для углубл. изучения математики. / В.Ф. Бутузов, С.В. Кадомцев и др. – М.: Физматлит, 2005. – 488с.

[3] *Колмогоров Н.А.* Аналог теоремы и тождества Стюарта / Н.А. Колмогоров // Математическое просвещение. – 1936. – Выпуск 7. – С. 22-25.

[4] *Кушнір І.А.* Геометричні формули, що не ввійшли до шкільних підручників: Довідник. / І.А. Кушнір. – К.: Факт, 2002. – 112с.

[5] *Мерзляк А.Г.* Геометрія: Підруч. для 9 кл. шкіл з поглибл. вивченням математики. / А.Г. Мерзляк, В.Б. Полонський, М.С. Якір. – Х.: Гімназія, 2009. – 272с.

[6] *Перепелкин Д.И.* Курс элементарной геометрии. Ч. I : Геометрия на плоскости / Д.И. Перепелкин. – М.; Л.: ГИТТЛ, 1949. – 348с.

[7] *Перехойда О.* Одна цікава геометрична тотожність / О. Перехойда, Р. Ушаков // Математика в школі. – 1999. – С. 41-42.

[8] *Прасолов В.В.* Задачи по планиметрии / В.В. Прасолов [4-е изд., доп.] – М.: МЦНМО, 2001. – 584с.

[9] *Сарбаш Р.* Теорема Стюарта, как ключ к отысканию всех основных целочисленных треугольников с углами 120^0 и 60^0 / Р. Сарбаш // Математика. – 2004. – №46. – С. 41-42.

[10] *Шаль М.* Руководство высшей геометрии / М. Шаль; пер. с фр. А. Безруков. – Москва: Типо-литогр. Т-ва И.Н. Кушнерев, 1910. – 551с.

УДК 37.016

Крилова Л. П.

[1] *вчитель математики вищої кваліфікаційної категорії, ЗОШ I-III ступенів № 51, м. Маріуполь.*

e-mail: znpfizmatsdpu@ukr.net

ТЕХНОЛОГІЯ ТРВЗ – ШЛЯХ ДО ТВОРЧОГО РОЗВИТКУ ДІТЕЙ НА УРОКАХ МАТЕМАТИКИ

Дана стаття присвячена питанню використання технології розвязування винахідницьких задач на уроках математики 7-9 класів.

Ключові слова: *творчі задачі, конструювання уроку.*

Вступ

Зміни в освіті зумовлені змінами в суспільстві: з прискоренням темпів розвитку суспільства перед школою постало важливе завдання щодо створення сприятливих умов для розвитку творчого потенціалу кожного учня, підготовки учнів до життя, формування у дітей таких якостей: мобільність, динамізм, конструктивність. Сучасно звучать слова В.О. Сухомлинського: «Духовне життя дитини повноцінне лише тоді, коли вона живе у світі гри, казки, музики, фантазії, творчості. Ми повинні вчити і виховувати так, щоб дитина почувала себе шукачем і відкривачем знань. Тільки за цієї умови одноманітна, напружена, стомлююча робота школяра забарвлюється радісним почуттям і може принести маленьким людям переживання творця. Без цього дитина – засушена квітка»[3]. Оновлення дидактично-виховної системи на уроках математики, творчого розвитку дітей за теорією розв'язання винахідницьких завдань (ТРВЗ) – Г. Альтшуллєра залишається актуальним. і хоча ТРВЗ як наукова технологія виникла в техніці, але в останні роки практика засвідчила, що ідеї ТРВЗ можуть бути використані в педагогіці. Створена ще в 1996р. в м. Рівне українська лабораторія педагогіки ТРВЗ підтвердила факт, що ТРВЗ відповідає на одне з головних питань дидактики – як дітей навчати творчості, за допомогою яких вправ, прийомів. Крім того, ця технологія сприяє оволодінню учнями методами пошуку нової генерації оригінальних ідей, розвитку фантазії, мислення.

По рівню застосування, за означенням Г. Селевка, ТРВЗ і загальнопедагогічною особистісно-орієнтованою. За напрямком модернізації – альтернативною [8]. Використання на уроках математики на протязі кількох років елементів цієї технології підтвердило результативність у особистісно-орієнтованому підході у навчанні.

Основна частина

Головна ідея теорії Г. С. Альтшуллєра полягає в тому, що технічні рішення виникають і розвиваються не стихійно, а за певними законами; ці закони можна пізнати та використати для свідомого розв'язання винахідницьких завдань.

Творчою основою ТРВЗ і діалектичні закони розвитку технічних систем, які виявлені шляхом аналізу великої маси патентної та науково-технічної інформації. Основними робочими механізмами вдосконалення технічних систем і синтезу нових у ТРВЗ слугують алгоритми розв'язання винахідницьких завдань і система стандартів. Особливе місце в ТРВЗ займає впорядкований інформаційний фонд, який постійно поповнюється: показники геометричних, фізичних, хімічних та біологічних ефектів, явищ, правила пошуку польових ресурсів.

ТРВЗ – це не лише система для розв'язування творчих завдань, а й система виховання та розвитку мислення людини. Головне місце в ній займає життєва стратегія творчої особистості (ЖСТО) та розвиток творчої уяви (РТУ).

Система ТРВЗ зацікавила сучасних педагогів і психологів, які адаптували її для роботи з дітьми спочатку в школі, а потім і в дитячому садку. Роботи Г.С. Альтшуллєра «Алгоритми винаходу» та «Творчість як точна наука» стали основою так званої творчої педагогіки. Згодом з'явилися спеціальні дослідження (В. А. Бухвалов, Б. Л. Злотін, Г. іванов, С.М. Ладошкіна, А.О.Нестеренко, Т.М. Сидорчук, Л.І. Шрагіна, М.Н. Шустерман), в яких була розроблена серія методів і прийомів навчання школярів на базі ТРВЗ.

Мета ТРВЗ – не просто розвинути фантазію дітей, а навчити їх мислити системно, з розумінням процесів, які відбуваються, дати в руки вихователя інструмент для конкретного практичного виховання у дітей якостей творчої особистості, здатної розуміти єдність і протиріччя навколишнього світу, ставити і вирішувати проблеми.

Кожному педагогу, який прагне працювати за даною системою, необхідно спиратися на «заповіді» творчої особистості, розроблені професором К.Вайнцвангом:

- будь хазяїном своєї долі;
- досягни успіху в тому, що ти любиш;
- зроби свій конструктивний внесок у спільну справу;

- будуй свої відносини з людьми на довірі;
- розвивай свої творчі здібності;
- культивуй у собі сміливість;
- піклуйся про своє здоров'я;
- не втрачай віри в себе;
- намагайся мислити позитивно;
- поєднуй матеріальне благополуччя із духовним задоволенням.

Вихідним положенням концепції ТРВЗ стосовно учнів 4-6 класів є принцип природовідповідності. Навчаючи дитину, педагог повинен йти від її природи.

Крім цього, дана технологія спирається на положення Л.С.Виготського про те, що дитина такого віку приймає програму навчання в тій мірі, в якій вона стає її власною.

Технологія ТРВЗ для молодших школярів – це технологія колективних ігор і занять з детальними методичними рекомендаціями. ТРВЗ покликана не заміняти основну програму, а максимально збільшувати її ефективність. На базі будь-якої програми, за якою працює педагог, можна використати перевірені на практиці методи й прийоми ТРВЗ.

Ігри-заняття передбачають самостійний вибір дитиною теми, матеріалу та вид діяльності. Вони вчать дітей виявляти суперечливі властивості предметів, явищ і розв'язувати ці протиріччя. Виявлення та розв'язання протиріч – ключ до творчого мислення.

В арсеналі технології ТРВЗ є багато прийомів усування протиріч, як-от: зміна агрегатного стану речовини, об'єднання-роз'єднання, зміна в часі, прийом копіювання, принцип посередника, дроблення та ін. Ними користуються, як правило, практики-початківці. Досвідчені ж педагоги самі знаходять протиріччя, а також способи їх вирішення в оточуючих об'єктах природного та предметного світу і використовують їх у роботі з дітьми.

Але головне завдання: навчити дітей шукати і знаходити свої рішення, бути винахідливими, що виявляється у творчій фантазії, міркуванні, придумуванні чогось нового.

Останнім часом як головне концептуальне питання педагогіки постала проблема формування творчої особистості. Технологія ТРВЗ володіє широким арсеналом методів, які розвивають пізнавальні та творчі здібності дітей: вміння встановлювати причинно-наслідкові зв'язки, робити висновки, інтегрувати й синтезувати інформацію, аналізувати ситуації, передбачати наслідки, будувати гіпотези, застосовувати нові ідеї та методи розв'язання задач на практиці; здатність висловлювати оригінальні ідеї і винаходити щось нове.

Психолог Л. О. Макрідіна виділяє такі **концептуальні положення технології ТРВЗ**:

○ Теорія – каталізатор творчого розв'язання проблем.

○ Знання – інструмент, основа творчої інтуїції.

○ Творчими здібностями наділена кожна людина (винаходити можуть Усі).

○ ТВОРЧОСТІ треба навчати всіх!

○ ТВОРЧОСТІ, як і будь-якій діяльності, можна навчитися. [2]

Технологія ТРВЗ відрізняється від інших методик тим, що це не поєднання окремих прийомів, а технологія, завдяки якій можна вирішувати різні складні проблеми, задачі, бути в постійному творчому пошуку.

За допомогою ТРВЗ створено принцип, завдяки якому педагог разом з учнями може знаходити логічний вихід з будь-якої ситуації, а учень – грамотно вирішувати свої проблеми.

ТРВЗ забезпечує розв'язання задач на основі логічних операцій, алгоритмів замість порожніх спроб і пошуків наосліп.

Технологія ТРВЗ – це новий інструмент для розвитку творчого мислення дорослих і дітей.

Головні принципи ТРВЗ:

○ усування суперечностей;

○ системний підхід (вміння бачити навколишній світ у взаємозв'язку всіх його елементів);

○ вміння знайти необхідний у даній ситуації резерв.

У педагога, що використовує навіть елементи теорії, діти займаються із захопленням, без перевантажень засвоюють нові знання, розвивають мову й мислення, засвоюють матеріал без «зубріння».

Розвиваючи логічне мислення, нестандартний підхід до розв'язання задач, інтелектуальну творчість – ми даємо дітям потужний інструмент мислення, який допоможе їм в житті знаходити сильні рішення – в будь-якій професійній галузі та життєвій ситуації.

Дитина, що володіє елементами ТРВЗ, може сама розв'язувати свої проблеми, до того ж нестандартно, неординарно. Він вміє приймати рішення і перетворювати проблеми в можливості.

Із стандартних блоків дитячого конструктора можна скласти будинок зайчика або палац принцеси.

Із стандартних деталей збираються абсолютно різні за призначенням і складністю «дорослі» конструкції: механічні, гідравлічні, електронні. Ця ж ідея творчого конструювання покладена в основу «конструктора уроку» запропонованого А.О.Гіном. Опишемо наш досвід використання різних форм і методів організації відповідних частин уроку.

Виділимо такі основні частини уроку (послідовність не дуже важлива):

1. Початок уроку
2. Пояснення нового матеріалу
3. Закріплення, тренування, опрацювання вмінь
4. Повторення
5. Контроль
6. Домашнє завдання
7. Кінець уроку.

1. *Початок уроку.*

Прийом «Здивуй». Геометрія <Коло і круг> – 7 клас.

У чорній скрині вноситься предмет. Вчитель повідомляє: <Існує легенда про грецького винахідника Дедала (майстер, що зробив крила Ікара) і про його племінника талановитого юнака, який вперше в світі придумав гончарний круг, пилки, та те, що тут у скринці. Про цей предмет придумана загадка: «Зговорилися дві ноги робити коло і круги». Відповідь: циркуль.

2. *Вивчення нового матеріалу.*

Прийом «Приваблива мета» – 9 клас. Алгебра <геометрична прогресія>.

Вступне слово вчителя: <Люди часто дивуються, як швидко ростуть числа в геометричній прогресії. Існує така легенда. Індійський цар Сирам запросив до себе винахідника гри в шахи Сету, щоб гідно нагородити його за цей винахід. Сета попросив собі таку нагороду: за першу клітку шахової дошки – одну пшеничну зернину, за другу – 2, за третю – 4, за п'яту – 8 ? так за кожну наступну в 2 рази більше. _Що ж, – відповів цар, – ти отримаєш свою нагороду, але знай, що твоє прохання не гідне моєї щедрості. Завтра тобі слуги принесуть мішок з пшеницею. Однак вранці придворні математики доповіли, що вони підрахували число зернин, яке хоче отримати Сета, число таке велике, що зернин не зберемо не тільки в твоїх засіках, але і на всій землі. 18446744013709551615.

3. *Закріплення, тренувальні вправи.*

Прийом «Вільна дошка». Даються вправи для самостійного розв'язання і всі бажаючі можуть вийти до дошки і записати відповідь. Якщо учень записує правильну відповідь, то йому надається можливість пояснити учням класу розв'язання і відповідно одержати заохочувальний бал.

4. *Повторення.*

Прийом «Своя опора». Учні складають власний опорний конспект з нового матеріалу (слухають вчителя, працюють з підручником). Можна рекомендувати складання розгорнутого плану відповіді. Добре, якщо учні встигають пояснити один одному (хоча б коротко) свої опорні конспекти. Можуть обмінятися ними і перевірити тему. Опору можна назвати «шпаргалкою». Можна провести урок «Види шпаргалок і прийоми їх складання», тобто вчити користуватися опорним конспектом. Краще провести конкурс «шпаргалок», захистити їх перед класом в робочій парі або групі.

5. *Контроль.*

Прийом «Так-ні». Геометрія <Паралелограм> – 8 клас.

Відгадай задумані фігури.

Учні	Вчитель
Це трикутник?	Ні
Це чотирикутник?	Так
Сторони паралельні?	Так
Протилежні сторони рівні?	Так
Діагоналі перпендикулярні?	Так
Всі кути рівні?	Так

Відповідь: квадрат.

6. *Домашнє завдання.*

Прийом «Завдання масивом».

Завдання 1-2 рівнів дається масивом, а учні виконують самі за вибором кількість завдань, мінімум об'єму вправ обговорюється. Як правило, сумлінні учні виконують більше завдань від мінімального об'єму. Так, якщо застосовується навчальний модуль при вивченні теми, то на 1 уроці при ознайомленні зі структурно-годинною моделлю дати мінімум завдань 15 з 60.

Учні стимулюються тим, що з 60 запропонованих завдань частина буде у самостійній роботі, на уроці ТО. Чим більше завдань учень самостійно розв'язав, тим більша імовірність краще впоратись з ТО. Ці 60 вправ учням даються на 5 уроків. Важливий психологічний ефект: самостійний вибір завдань дає додаткову можливість самореалізації, бо відомо, як цього не достає учням в умовах сучасного навчання в 7-9 класах і дуже важливо: підвищується інтерес до предмету. На сам кінець: з масиву завдань учень вибирає той рівень складності, який він може виконати, тобто сам учень відслідковує рівень своєї компетентності. Коли дається завдання масивом, треба слідкувати, щоб були в ньому як задачі, посильні всім, так і досить складні, тобто – тренувальні і творчі завдання.

Виникає атмосфера змагання. Можна ввести в 5-9 класах відкриту відомість, в якій учні відмічають свої «просування до мети».

Розв'язані задачі				
Петрик І.	6,2	6,3	9,3	12,1
Ковальчук К.	12,1	12,2	12,3	9,3
Сдобнікова О.	9,1	9,2	9,3	12,2

Отже, домашнє завдання масивом – добрий помічник вчителю. Розв'язавши завдання, учні обмінюються інформацією, йде знайомство з великим об'ємом задач. Обираючи задачу, учень вчиться оцінювати складність задач, розширює учбовий кругозір, відбувається самоузгодження дитини з рівнем задач, які розв'язуються.

7. *Кінець уроку.*

Прийом «Обернений зв'язок».

А) Учні малюють вираз обличчя людини, що виражає її настрій: все зрозуміло, задовільно, не зрозуміло.

Б) Учні підходять до столу і кладуть прямокутник певного відповідного кольору: червоний, синій, зелений.

Висновки

За умови цілеспрямованої систематичної діяльності вчителя ТРВЗ переростає у ТРТО (теорію розвитку творчої особистості) і сприяє реалізації актуальної проблеми розвитку творчого потенціалу кожного школяра.

Винаходити треба навчати в будь-якому віці. Важливо лише підібрати відповіді до віку об'єкти винаходів та способи навчання.

Якщо мета – первинне ознайомлення з ТРВЗ, вона досяжна в рамках факультативу. Окремі елементи ТРВЗ можуть бути гармонійно вплетені в традиційні предмети, зокрема в процес навчання математики.

Розв'язання творчих задач вимагає завжди конкретних предметних знань, що отримують учні на математиці, фізиці та ін. шкільних уроках. Дуже допомагає звичка до системного аналізу, виділенню головного, діючих протиріч в будь-якому знанні. І заважати це може якщо в проблемній ситуації викладач очікує єдиної відомої йому відповіді, тоді як ТРВЗ привчає знаходити ряд можливих розв'язків.

ТРВЗ – це не педагогіка. ТРВЗ – це метод створення і вдосконалення творчих методик, в тому числі і в галузі педагогіки. Головне, щоб вся діяльність пішла на користь нашим головним користувачам – дітям.

Література

[1] *Альтшуллер Г.С., Верткин И.М.* Как стать гением: Жизненная стратегия творческой личности / Г.С. Альтшуллер, И.М. Верткин. – Минск : Беларусь, 1994. – 480 с.

[2] *Дичківська І.М.* Основи педагогічної інноватики : навчальний посібник / І.М. Дичківська. – Рівне : Зелент, 2001. – 222 с.

[3] *Макрідіна Л.О.* Технологія творчості ТРВЗ / Л.О. Макрідіна // Управління школою. – 2003. – № 32 – С. 12 – 26.

[4] *Сухомлинський В.О.* Серце віддаю дітям / В.О. Сухомлинський. – К.: Рад. шк., 1984. – 288 с.

[5] *Трифонов Д.Н.* Збірник задач з НФЛ: 43 задачі для розвитку уяви / Д.Н. Трифонов // Видавництво ТОО «ТРВЗ Шанс», 1995.

[6] *Гин А.А.* Приемы педагогической техники : Свобода выбора. Открытость. Деятельность. Обратная связь. Идеальность : Пособие для учителей / А.А. Гин. – Гомель : ИПП «Сож», 1999. – 88 с.

[7] *Соловейчик С.* Учение с увлечением / Соловейчик С. // М.: «Детская литература», 1976. – 105 с.

[8] *Селевко Г.К.* Современные образовательные технологии / Г.К. Селевко // – М.: Народное образование, 1998. – 256 с.

УДК 37.016:51

Сьомкін В.С., Сьомкіна В.М.

[1] *канд. пед. наук, доцент кафедри геометрії та МВМ, СДПУ*

[2] *вчитель вищої категорії, старший вчитель ЗОШ № 8, м. Слов'янськ*

e-mail: vladimir-syomkin@yandex.ru

ОБЧИСЛЕННЯ ЕЛЕМЕНТІВ ТРИКУТНИКА ЧЕРЕЗ КООРДИНАТИ ЙОГО ВЕРШИН

В даній статті на прикладі основних елементів трикутника розглянуто застосування координатного методу для їх обчислення. В контексті зазначеного кола задач виділено низку ключових задач. Також запропоновано комп'ютерну реалізацію задач зазначеного типу та відповідні вимоги і поради користування розробленою програмою.

Ключові слова: *елементи трикутника, координатний метод.*

Вступ

Геометрія трикутника є найцікавішим розділом елементарної геометрії. Недарма одній з найпростіших фігур геометрії – трикутнику – присвятили свої дослідження великі математики всіх часів і народів: Піфагор, Евклід, Архімед, Чева, Менелай, Паскаль, Лейбніц, Ньютон, Ейлер, Лагранж та багато інших [3], [4], [5], [6]. Г.П. Бевз зазначає, що «виявлені й доведені ними теореми про властивості трикутника – справжні перлини математики і людського мислення взагалі» [1, с.3]. У результаті таких досліджень геометрія трикутника перетворилася в струнку наукову дисципліну. Такий зв'язок дисципліни з областю шкільної геометрії робить її містком у вищу геометрію [3, с.50] й тому викликає природній інтерес не тільки вчителів математики, але й учнів шкіл.

Протягом 70 – 80-х років XIX сторіччя Лемуан, Брокар, Вігар'є, Нейберг і ряд інших математиків опублікували багато цікавих робіт, присвячених геометрії трикутника. У цих роботах було показано, що із трикутником зв'язане ціле «сузір'я чудових точок», ряд чудових прямих, кіл та інших кривих.

Сьогодні в арсеналі будь-якого дослідника-вченого, методиста, вчителя або учня, що прагне піти далі, ніж цього потребує програма загальноосвітньої школи, – зібрано достатньо міцний геометричний апарат знань про трикутник і його основні елементи. Цей апарат дає змогу розв'язувати складні як теоретичні, так і практичні задачі, що виникають в процесі професійної діяльності.

Знаходження точок перетину медіан, бісектрис, висот трикутника, центрів вписаного та описаного кіл, довжин та рівнянь його сторін та інших елементів, обчислення периметру, площі тощо в багатьох задачах є необхідною умовою досягнення кінцевої мети.

Основна частина

У геометрії застосовуються різні методи розв'язування задач: синтетичний (суто геометричний) метод, векторний, метод координат та інші. Основним методом вважається синтетичний метод, але він потребує досить великої інтелектуальної роботи, у тому числі інтуїції, додаткових побудов, здогадок тощо. Якщо у процесі навчання це є найважливішими складовими самого процесу, то в практичній роботі кожен прагне досягти алгоритмізації обчислень, що найчастіше зустрічаються. Саме в цьому і полягає перевага методу координат перед синтетичним. Справді, координатний метод дуже часто спрощує пошук і самий розв'язок задачі, бо в таких випадках кожна геометрична задача зводиться до алгебраїчної, яку, безумовно, легше алгоритмізувати.

Повертаючись до трикутника як до базової конструкції багатьох геометричних фігур, що підлягають аналізу в процесі розв'язування різних задач, ми кожен раз переконуємося в необхідності мати в своєму арсеналі набір формул, що дають змогу за координатами вершин цього трикутника знайти розміри і рівняння основних його елементів, місце розташування основних точок. На жаль, такої систематизованої добірки формул нами не виявлено, і тому далі ми пропонуємо свої напрацювання в цьому процесі.

При виведенні і остаточному представленні формул і рівнянь ми виходили з трьох основних положень: по-перше, намагалися дотримуватися однотипності методів виведення, по-друге, остаточна формула мала легко читатися і по можливості запам'ятовуватися, по-третє, формула мала бути зручною для автоматизованих обчислень, тобто для програмування.

Отримані формули мають свою «математичну красу», вони, як правило, записані за допомогою одних і тих же математичних конструкцій і супроводжуються симетричністю цих конструкцій.

Нехай маємо трикутник ABC з координатами вершин: $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$.

Довжини сторін трикутника **a,b,c** обчислюються за відомими формулами, наприклад:

$$a = \sqrt{(x_2 - x_3)^2 + (y_2 - y_3)^2}.$$

Рівняння основних елементів трикутника

Рівняння сторони a:
$$(y_3 - y_1)x - (x_3 - x_1)y + y_1x_3 - x_1y_3 = 0.$$
Рівняння медіани m_a :
$$(y_2 + y_3 - 2y_1)x - (x_2 + x_3 - 2x_1)y + (x_2 + x_3)y_1 - (y_2 + y_3)x_1 = 0.$$
Рівняння бісектриси l_a :
$$\big(b(y_1 - y_2) + c(y_1 - y_3)\big)x - \big(b(x_1 - x_2) + c(x_1 - x_3)\big)y + \\ + b(x_1y_2 - x_2y_1) + c(x_1y_3 - x_3y_1) = 0.$$
Рівняння висоти h_a :
$$(x_2 - x_3)x + (y_2 - y_3)y - (x_2 - x_3)x_1 - (y_2 - y_3)y_1 = 0.$$

Довжини основних лінійних елементів трикутника

Довжина медіани m_a :
$$m_a = \frac{1}{2}\sqrt{(x_2 + x_3 - 2x_1)^2 - (y_2 + y_3 - 2y_1)^2}.$$
Довжина бісектриси l_a :
$$l_a = \frac{\big(b(x_1 - x_2) + c(x_1 - x_3)\big)^2 + \big(b(y_1 - y_2) + c(y_1 - y_3)\big)^2}{b + c}.$$
Довжина висоти h_a :
$$h_a = \frac{\big|(x_2 - x_3)y_1 - (y_2 - y_3)x_1 + x_3y_2 - x_2y_3\big|}{\sqrt{(y_2 - y_3)^2 + (x_2 - x_3)^2}}.$$
Радіус вписаного кола:
$$r = \frac{\big|(x_1 - x_3)(y_2 - y_3) - (y_1 - y_3)(x_2 - x_3)\big|}{2(a + b + c)}.$$
Радіус описаного кола:
$$R = \frac{\sqrt{(x_1 - x_2)^2 - (y_1 - y_2)^2}\sqrt{(x_1 - x_3)^2 - (y_1 - y_3)^2}\sqrt{(x_2 - x_3)^2 - (y_2 - y_3)^2}}{2\big|(x_1 - x_3)(y_2 - y_3) - (y_1 - y_3)(x_2 - x_3)\big|}.$$

Координати деяких точок трикутника

Точка перетину медіан (центр тяжіння):
$$x = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \quad y = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}.$$
Точка перетину висот (ортоцентр):
$$x = \frac{(y_1 - y_2)(x_1x_2 + y_1y_2) + (y_2 - y_3)(x_2x_3 + y_2y_3) + (y_3 - y_1)(x_1x_3 + y_1y_3)}{x_1(y_3 - y_2) + x_2(y_1 - y_3) + x_3(y_2 - y_1)},$$
$$y = \frac{(x_2 - x_1)(x_1x_2 + y_1y_2) + (x_3 - x_2)(x_2x_3 + y_2y_3) + (x_1 - x_3)(x_1x_3 + y_1y_3)}{x_1(y_3 - y_2) + x_2(y_1 - y_3) + x_3(y_2 - y_1)}.$$

Центр вписаного кола (точка перетину бісектрис, інцентр):

$$x = \frac{ax_1 + bx_2 + cx_3}{a+b+c}, \quad y = \frac{ay_1 + by_2 + cy_3}{a+b+c}.$$

Центр описаного кола:

$$x = \frac{(y_1 - y_3)\big(x_2^2 + y_2^2\big) + (y_2 - y_1)\big(x_3^2 + y_3^2\big) + (y_3 - y_2)\big(x_1^2 + y_1^2\big)}{2\big(y_1(x_3 - x_2) + y_2(x_1 - x_3) + y_3(x_2 - x_1)\big)},$$

$$y = \frac{(x_3 - x_1)(x_2^2 + y_2^2) + (x_1 - x_2)(x_3^2 + y_3^2) + (x_2 - x_3)(x_1^2 + y_1^2)}{2\big(y_1(x_3 - x_2) + y_2(x_1 - x_3) + y_3(x_2 - x_1)\big)}.$$

Площа трикутника:

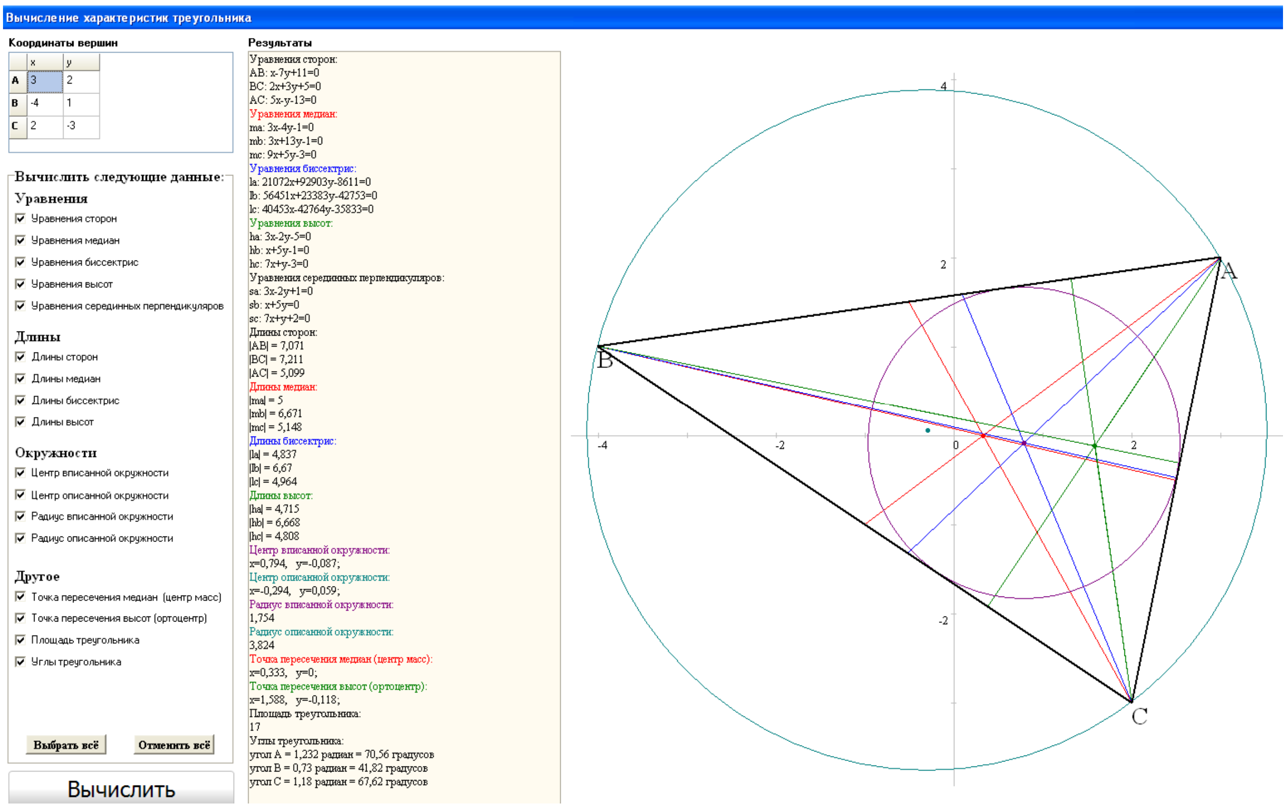
$$S = \frac{1}{2}\big|(x_1 - x_3)(y_2 - y_3) - (y_1 - y_3)(x_2 - x_3)\big|.$$

Кути трикутника:

$$\cos\alpha = \frac{1}{bc}\big((x_1 - x_2)(x_1 - x_3) + (y_1 - y_2)(y_1 - y_3)\big).$$

Комп'ютерна програма

Для демонстрації отриманих у роботі результатів нами була написана програма, що знаходить основні характеристики трикутника.



Програма видає результати як в аналітичному вигляді (рівняння, координати точок, числові значення обраних користувачем характеристик трикутника), так і графічно. Програма має інтуїтивно зрозумілий інтерфейс. Робоче вікно розділено на чотири області:

- У лівому верхньому куті знаходиться таблиця для введення координат вершин трикутника. Якщо користувач у якості вершин трикутника помилково ввів точки, що лежать на одній прямій, то програма виведе відповідне повідомлення.
- Нижче розташований блок вибору опцій, де користувач має можливість вибрати ті характеристики трикутника, що він має за мету знайти.
- Правіше розташоване поле для відображення знайдених характеристик трикутника в аналітичному вигляді.
- Праву сторону робочого вікна займає поле для графічного відображення результату роботи програми.

Для зручності блок вибору опцій поділено на чотири частини: «Рівняння», «Довжини», «Кола», «Інше».

Щоб обчислити та відобразити обрані характеристики, необхідно натиснути кнопку «Обчислити» у лівому нижньому куті робочого вікна.

Малюнок можна переміщувати у графічному вікні. Для цього потрібно зажати ліву клавішу миші й пересунути курсор у потрібному напрямку. Для зміни масштабу малюнка застосовується коліщатко миші (скролінг).

Висновки

Добірка наведених формул, а також програмний засіб «Калькулятор трикутника» можуть стати невеличким довідником по темі «Трикутник» і бути зручним посібником та засобом як в практичній роботі з математики, інформатики, так і для здійснення самоконтролю у процесі розв'язування задач учнями при вивченні теми «Координати на площині».

Література

[1] *Бевз Г.П.* Геометрія трикутника : навчально-методичний посібник для загальноосвітніх навчальних закладів / Г.П. Бевз. – К.: Генеза, 2005. – 120 с.

[2] *Боровик В.Н.* Гармонія і естетика трикутника / В.Н. Боровик, І.В. Зайченко, Л.М. Кобко. – К.: Освіта України, 2006. – С. 176.

[3] *Гайдук Ю.М.* Краткий обзор исследований по геометрии треугольника / Ю.М. Гайдук, А.Н. Хованский // Математика в школе. – 1958. – № 5. – С. 50.

[4] *Гельфанд И.М.* Метод координат / И.М. Гельфанд, Е.Г. Глаголева, А.А. Кириллов. – М.: Наука, 1973. – 88 с.

[5] *Ефремов Д.* Новая геометрия треугольника. – Одесса, 1903. – 351 с.

[6] *Зетель С.И.* Новая геометрия треугольника. – М., 1962. – 96 с.

МЕТОДИКА ВИКЛАДАННЯ ФІЗИКИ ТА АСТРОНОМІЇ В ЗОШ ТА ВНЗ

УДК 531/534 (076)

Овчаренко В.П., Кірпіченко А.В.

[1] *канд. фіз.-мат. наук, доцент кафедри фізики, СДПУ*

[2] *студентка 5 курсу фізико-математичного факультету, СДПУ*

e-mail: vp_ovcharenko@mail.ru

ВИКОРИСТАННЯ НЕСТАНДАРТНИХ ЗАДАЧ В УЧБОВОМУ ПРОЦЕСІ

Розглянуті питання підвищення мотивації навчання, активізації розумової дії, творчого мислення учнів шляхом використання нестандартних задач в учбовому процесі. Наведено ряд методичних рекомендацій, які допоможуть учням розв'язувати такі задачі.

Ключові слова: *стандартні задачі, нестандартні задачі, фізика.*

Основним завданням вивчення фізики в школі є розвиток фізичного мислення через навчання загальним способам дій з фізичними моделями реальної дійсності і способам побудови цих моделей. Навчання побудови моделей в основному здійснюється при розв'язуванні фізичних задач. Навчальні фізичні задачі є дуже ефективним і часто незамінним засобом засвоєння учнями понять і методів шкільного курсу фізики.

Рішення задач служить досягненням всіх тих цілей, які ставляться перед навчання фізики. Кожна конкретна фізична задача призначається для досягнення найчастіше не однієї, а декількох педагогічних, дидактичних, навчальних цілей. І ці цілі характеризуються як змістом задачі, так і призначенням, яке надає завданню вчитель.

Навчальна роль фізичних задач. Цю роль фізичні задачі виконують при формуванні у учнів системи знань, умінь і навичок з фізики. Слід виділити кілька видів задач за їх навчальною метою:

- задачі для засвоєння фізичних понять;
- задачі для оволодіння фізичною символікою;
- задачі для навчання доказам;
- задачі для формування фізичних умінь і навичок;

• задачі, що створюють проблемну ситуацію.

Розвиваюча роль задач. Одне з основних призначень задач полягає в тому, щоб активізувати розумову діяльність учнів на уроці. Фізичні задачі повинні перш за все, будувати думку учнів, змушувати їх працювати, розвиватися, удосконалюватися. Говорячи про активізацію мислення учнів, не можна забувати, що при розв'язуванні фізичних задач учні не тільки виконують побудови, перетворення, запам'ятовують формулювання, а й навчаються чіткому мисленню, вмінню розмірковувати, зіставляти і протиставляти факти, знаходити в них спільне і відмінне, робити вірні виводи. Перерахуємо види задач, які активізують і розвивають мислення учнів:

• задачі та вправи, що вимагають елементів дослідження;
• задачі на доказ;
• задачі та вправи на відшукання помилок;
• цікаві задачі;
• відшукання різних варіантів рішення і вибір кращого з них;
• складання задач учнями;
• задачі-загадки.

Виховна роль задач полягає у формуванні особистісних якостей: сили волі, акуратності, співробітництва тощо [1]. Особлива роль належить задачам з розвиваючою функцією, зміст яких відходить від основного курсу, посильно ускладнює питання програми. Це задачі на кмітливість, розвиток числової і геометричної інтуїції, просторового уявлення, логічного мислення.

За характером розумової діяльності розрізняють стандартні і нестандартні задачі. До стандартних належать задачі, які мають певний алгоритм рішення. Задачі, які не мають загального алгоритму рішення, називаються нестандартними. Нестандартні задачі мають чітко виражену розвиваючу функцію. Функції розв'язування стандартної задачі залежать від того, якими теоретичними знаннями володіють учні до моменту її рішення. Якщо учням відомий алгоритм вирішення цієї задачі, то її можна вважати шаблонною. Якщо до моменту вирішення стандартної задачі загальний метод її вирішення невідомий, то така задача є непересічною (при її розв'язуванні необхідно застосувати загальний метод рішення або будь-який штучний прийом). Нестандартні та нешаблонні задачі (внаслідок спільності їх функції у навчанні) можна об'єднати в одну групу – групу творчих задач [2].

В учнів найчастіше викликає труднощі проблема самостійного вибору методів і прийомів для виконання певного завдання. Зазвичай узагальнені знання формуються з досвідом, в процесі розв'язування задачі. Отже, постає актуальним питання навчання узагальненим методам розв'язування задач, загальнометодичним принципам і відповідним поняттям. Для розв'язування задачі учень повинен володіти певними прийомами і методами, не лише знати закони фізики, але й проявляти здатність до аналітичного мислення.

Проаналізувавши досвід розв'язування нестандартних задач відомий із літератури та впровадження нестандартних задач в учбовий процес вчителями-новаторами, ми склали методичні рекомендації, які допоможуть учням вирішувати цю проблему. Наведемо окремі методичні прийоми навчання учнів розв'язувати нестандартні задачі:

1. Перш за все відзначимо, що навчити учнів розв'язувати нестандартні задачі можна тільки в тому випадку, якщо в учнів буде бажання їх вирішувати, тобто якщо задачі будуть змістовними і цікавими з точки зору учня. Тому задача вчителя - ретельно відбирати цікаві задачі і робити їх привабливими для учнів. Це можуть бути задачі-жарти, задачі-казки, старовинні задачі тощо. Одне безперечно: найбільший інтерес в учнів викликають задачі, взяті з навколишнього життя, задачі, пов'язанні зі знайомими речами, досвідом. Важливо показати учням, що від рішення фізичної задачі можна отримати таке ж задоволення, як від розгаданого кросворда або ребуса.

2. Задачі не повинні бути надто легкими, але і не занадто важкими, тому що учні, не вирішивши задачі або не розібравшись в рішенні, запропонованому вчителем, можуть втратити віру в свої сили. У цьому випадку дуже важливо дотримувати міру допомоги. Перш за все, вчитель не повинен знайомити учнів з уже готовим рішенням. Підказка повинна бути мінімальною. Вчитель повинен переконати учнів в тому, що для успішного розв'язування нестандартних задач необхідно, перш за все вміти думати, здогадуватися. Але цього мало. Потрібні, звичайно, і знання, і досвід у вирішенні незвичайних задач і необхідно досконально володіти певними загальними підходами до вирішення.

3. Щоб допомогти учням, вчитель повинен вміти поставити себе на місце учня, який вирішує задачі, спробувати побачити і зрозуміти джерело його можливих труднощів. Вміла допомога вчителя залишає різну частку самостійної роботи, дає учням розумну частку самостійної роботи, дозволить учням розвинути фізичні здібності, накопичити досвід, який у подальшому допоможе знаходити шлях вирішення нових задач.

4. Вчитель повинен вміло підібрати допоміжні задачі, які будуть свідчити про те, що учні вже володіють певним досвідом розв'язування нестандартних задач.

5. Необхідно прагнути до того, щоб учні відчували радість від рішення важкої для них задачі. Учні повинні бути знайомі і вміти застосовувати, перш

за все, загальні методи розв'язування задач, які з'являються першою сходинкою до розв'язування нестандартних задач. Загальні методи включають:

• метод аналізу фізичної ситуації;

• метод спрощення і ускладнення;

• метод оцінювання;

• загально - часткові методи;

• метод постановки завдання (застосовується для непоставленних задач [3]).

Нестандартна задача – це поставлена задача, яку учні вміють розв'язувати на основі загальних методів, але застосування в процесі її розв'язування тільки цих методів не приводить до мети. Залишається невраховaним якесь «щось» (що і робить задачу нестандартною), деяка «родзинка», про яку потрібно здогадатися. Безумовно, про те, як здогадатися, як її відшукати ніяких загальних і універсальних практичних порад тут дати не можна. Результат можна досягти тільки досвідом розв'язування таких задач. Як це робити ми показали на прикладах розв'язування цілого ряду задач по різним темам курсу фізики. З цією метою було проаналізовано наукову літературу з проблеми дослідження, відібрані, систематизовані і доповнені задачі, вправи, ігри, які б допомогли освоїти методи наукового пізнання учнів. Невловимі і невизначені «щось» в нестандартних завданнях настільки різноманітні, що роблять спробу класифікації таких задач безнадійною. Тому ми показали тільки деякі характерні «щось» і способи їх знаходження. На наш погляд правильне та систематичне застосування нестандартних задач дасть змогу активізувати самостійну пошуково-пізнавальну діяльність учнів, сприятиме розвитку логічного мислення, творчого підходу до сприйняття матеріалу, що дасть змогу виконати загально розвиваючі функції в процесі вивчення фізики.

Література

[1] *Скубій Т.В.* Розвязування навчальних задач з фізики: питання теорії і методики / Т.В. Скубій, В.П. Сергієнко; за заг. ред. Є.В.Коршака. – К.: НПУ ім М.П.Драгоманова, 2004. – 112 с.

[2] *Розумовский В.Г.* Творческие задачи по физике: общие методы / В.Г. Розумовский. – М.: Высшая школа, 1986. – 256 с.

[3] *Беликов Б.С.* Решение задач по физике: Книга для учеников старших классов / Б.С. Беликов. – М.: Просвещение, 1989. – 191 с.

[4] *Семке А.И.* Нестандартные задачи по физике: Для классов естественно-научного профиля / А.И. Семке. – Ярославль: Академия развития, 2007. – 321 с.

УДК 531/534 (076)

Овчаренко В.П., Герусова Е.В.

[1] *канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры физики, СГПУ*

[2] *студентка 5 курса физико-математического факультета, СГПУ*

e-mail: vp_ovcharenko@mail.ru

ПРИМЕНЕНИЕ ИННОВАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ ПРИ ПОДГОТОВКЕ ВЫПУСКНИКОВ К ВНЕШНЕМУ ТЕСТИРОВАНИЮ ПО ФИЗИКЕ

Проанализированы итоги тестирования по физике за несколько лет и указаны основные причины низкого уровня знаний и умений выпускников. Намечены пути повышения эффективности учебного процесса путем внедрения инновационных технологий.

Ключевые слова: *тестирование, инновационные технологии.*

Реформирование школьного образования предусматривает новые подходы к обучению и оцениванию его результатов. Уже в течение нескольких лет введено внешнее независимое тестирование знаний и умений учащихся по многим предметам, в том числе и по физике. Главная цель его - обеспечить объективность при оценке знаний выпускников, создать одинаковые условия для поступления в ВУЗы.

На основе анализа результатов анкетирования учащихся, которые проходили внешнее тестирование, установлено, что на качество знаний сильно влияет организация учебной деятельности на уроке. Более 70% учащихся определяют свою роль на уроках физики как пассивных наблюдателей. Около 21% учащихся никогда сами не проводили исследования. Значительная часть учащихся (более 40%) отмечают, что учителя не связывают учебный материал с современными проблемами в обществе, мало внимания уделяют современным достижениям науки и техники, уроки проводят не используя современные технологии. Низкая эффективность организации учебного процесса приводит к тому, что интерес у учащихся к изучению физики невысок. Данные тестирования показывают, что количество учащихся, выбравших тестирование по физике, составляет малый процент от всех выпускников [1]. Возникает вопрос: как повысить интерес к естественным наукам, привить навыки творческого мышления, умение самостоятельно ориентироваться в сложных вопросах учебного материала, стремиться глубоко освоить предмет, проявить любознательность, твердость характера, индивидуальность в достижении поставленных целей.

Фронтальная система обучения (один учитель против целого класса) имеет жесткие ограничения - педагог не может уделить достаточно внимания каждому ученику. Кроме того, при такой системе даже самый успешный ученик не сможет освоить очень важные в современном обществе навыки:

• умение самому разрабатывать план своих действий и следовать ему;

• умение находить нужные ресурсы для решения своей задачи;

• умение получать и передавать информацию, презентовать результат своего труда - качественно, рационально, эффективно;

• умение использовать компьютер в любой ситуации, независимо от поставленной задачи;

• умение ориентироваться в незнакомой профессиональной области и многое другое [2].

Поэтому для того, чтобы выпускник владел этими умениями и навыками, необходимо проделать большую работу, как ученику, так и учителю. Эта дидактическая цель решается по-разному: разрабатываются адекватные формы, методы, способы, творческие подходы, концептуальные особенности с учетом специфики предмета. Приоритетным направлением обучения является индивидуализация деятельности учащихся, а инновации, которые опираются на достижения дидактики, психологии, конкретные методики и новые подходы к их внедрению в учебный процесс, сыграют немаловажную роль в изучении физики, в формировании умений и навыков, необходимых для прохождения выпускниками внешнего тестирования.

Применение высокоэффективных технологий позволит, с одной стороны, учащимся повысить эффективность освоения учебного материала и, с другой стороны, педагогам уделять больше внимания вопросам индивидуального и личностного роста учащихся, направлять их творческое развитие. Таким образом, инновационные технологии будут способствовать повышению производительности труда учителя. Контроль результативности обучения каждого учащегося и система обратной связи позволят обучать учащихся в соответствии с их индивидуальными возможностями и складом характера. Сегодня технология обучения - это системная категория, структурными составляющими которой являются:

• цели обучения;

• содержание обучения;

• средства педагогического взаимодействия, в том числе их мотивация;

• организация учебного процесса;

- ученик;
- учитель;
- результат деятельности [3].

Стратегия инновационного обучения предполагает системную организацию управления учебно-воспитательным процессом, характерная черта которой заключается в том, что личность учителя по-прежнему выступает в ней как ведущий элемент, но при этом изменяется его позиция по отношению к ученику, к себе самому. Учитель выступает не только как носитель знаний и информации, хранитель норм и традиций, но и как помощник в становлении и развитии личности ученика. Позиция авторитарной власти, право старшего и сильного утрачиваются, взамен их утверждается позиция демократического взаимодействия, сотрудничества, помощи, вдохновения, внимания к инициативе ученика, к становлению и развитию личности.

В процессе подготовки к независимому внешнему тестированию мы предложили использовать следующие технологии.

Технология коллективных учебных занятий - основной организационной формой таких занятий является работа в парах сменного состава по различным методикам. Проведенные нами исследования показали, что несмотря на дополнительные временные и организационные затраты, эта технология дает максимальный образовательный эффект в аспекте формирования системы универсальных знаний.

Индивидуально-ориентированная система обучения – проявляется в разработке учащимися индивидуальных образовательных программ в соответствии с их возможностями и потребностями.

Интегративная технология развивающего обучения – ориентирована на формирование у детей основ умения учиться, формирование процессов самооценивания, инициативности, усвоения норм учебного взаимодействия.

Игровые технологии. В структуру игры как деятельности органично входит целеполагание, реализация цели, а также анализ результатов, в которых личность полностью реализует себя как субъект.

Технология интеграции – позволяет формировать целостное, не разбитое на «предметные области» мировоззрение учащихся. Эта технология способствует формированию психологически адаптивной личности - т.е. личности, легко приспосабливающейся к изменениям внешней среды.

Интерактивные технологии – предполагает активное взаимодействие учащегося с учителем [4, 5].

Эксперимент по внедрению этих технологий проводился на базе школы № 35 г. Краматорска. Изучение опыта работы учителей этой школы показало, что многие учителя используют такие технологии на различных этапах обучения, но конкретно при подготовке к внешнему тестированию не применяли.

Мы предложили использовать инновационные технологии на заключительном этапе обучения

Весь учебный материал по физике был разбит на модули и подмодули. По каждому модулю разработаны ряд уроков по формированию умений и навыков решения тестов разного характера и степени сложности. На каждом уроке предусмотрен промежуточный контроль знаний учащихся, а также представлены тесты для самостоятельной подготовки и самоконтроля. После повторения материала каждого модуля предусматривается урок обобщения знаний, который дает возможность оценить степень усвоения данного раздела физики. На этом уроке проводится обязательное пробное тестирование по теме модуля и итоговый контроль знаний и умений. Результаты итогового контроля по одному из модулей представлены ниже.

В эксперименте принимало участие 32 учащихся 11 класса. Пробное тестирование было проведено по модулю «Молекулярная физика и термодинамика». Задание состояло из 15 тестов разной степени сложности, в том числе

3 – репродуктивного уровня,

10 – аналитико-синтетического уровня, 2 – творческого уровня.

Большинство учащихся справились с заданием, 62% набрали от 160 до 190 баллов, 35% от 140 до 160 баллов, 3% - ниже 140 баллов.

Анкетирование учеников показало, что применение разнообразных форм и методов организации учебной деятельности на уроках физики способствовало возрастанию интереса к изучению этого предмета, стремлению учащихся к самостоятельному усовершенствованию своих знаний. Подготовка к внешнему тестированию стала восприниматься не как обуза, а как захватывающее всепоглощающее интересное занятие, увлекательное соревнование.

Анализ методической литературы, опыта учителей-новаторов по внедрению инновационных технологий в учебный процесс и результаты проведенного педагогического эксперимента дали возможность разработать методические рекомендации по использованию данного опыта на всех этапах изучения физики в том числе и на заключительном при подготовке выпускников к внешнему тестированию. Использование этих рекомендаций позволит после подведения итогов внешнего тестирования правильно оценить эффективность работы каждого учителя. Нет никаких сомнений в том, что такой подход к обучению физики в современных условиях школьного образования перспективен и, можно сказать, необходим.

Литература

[1] *Табачник Д.* Необходимо внимательно проанализировать перечень предметов внешнего тестирования [Электронный ресурс] / Д. Табачник – Режим доступа: `http://ru.osvita.ua/test/news/22546`. – 08.09.2011.

[2] *Касянова Г.В.* Педагогічні технології розвиваючого навчання фізики та можливості їх реалізації у сучасній школі / Г.В. Касянова // Проблеми освіти : наук.-метод. зб., – К., 2004. – Вип. 35. – С. 181 – 186.

[3] Личность как субъект инноваций : [сб. научных трудов / Науч. ред. Волкова М.В.]. – Чебоксары : НИИ педагогики и психологии, 2010. – 200 с.

[4] *Іваницький О.О.* Сучасні освітні технології на уроці фізики / О.О. Іваницький // Фізика та астрономія в школі. – 2002. – №6. – С. 17 – 21.

[5] *Грязнов Ю.* Технології активного навчання фізики: розвивальна, проблемна, модульна / Ю. Грязнов // Фізика та астрономія в школі. – 2006. – №6. – С. 11 – 17.

УДК 531/534 (076)

Олійник Р. В., Куракова О. М.

[1] *канд. пед. наук, доцент кафедри фізики, СДПУ*

[2] *студентка 5 курсу фізико-математичного факультету, СДПУ*

e-mail: oksanakyrakova@yandex.ru

ПРО ДЕЯКІ ОСОБЛИВОСТІ НАВЧАННЯ ФІЗИКИ В КЛАСАХ ГУМАНІТАРНОГО ПРОФІЛЮ

В даній статті наведені деякі особливості навчання фізики у класах гуманітарного профілю, зокрема: цілі характерні для цих класів, ідеї викладання, принципи відбору змісту навчання, засоби, методи, форми навчання, а також деякі методи психодидактики, які характерні для учнів гуманітарного профілю.

Ключові слова: *гуманітарний профіль, гуманітаризація, методологія*

Вступ

Введення профільного навчання в старших класах ЗОШ нині оцінюється як одна з найважливіших інновацій сучасної школи; адже профілізація сприяє профорієнтації та поліпшенню вибору життєвого шляху на професійній ниві.

У зв'язку з цим виникає потреба перегляду цілей, мотивів, змісту курсу фізики, методів та засобів його викладання у класах різних профілів. Особливої уваги, на наш погляд, заслуговує проблема аналізу означених компонентів для класів гуманітарного профілю. Саме в них фізика не є дисципліною, що вивчається учнями з особливою зацікавленістю, інтересом, «необхідними здібностями», а отже із бажаним результатом. Учнів цих класів більш приваблює література, мови, історія, музика, малювання і т.п.

Між тим науковці фізики, дидакти, методисти впевнені, що фізика, незважаючи на профіль навчання, повинна бути обов'язковим предметом шкільної освіти. Фізика – дисципліна, що покликана забезпечити розвиток світогляду майбутньої особистості, відповідного стилю мислення, в тому числі креативного, екологічної культури, експериментальних умінь і дослідницьких навичок. Без цієї науки людина не зрозуміє основи сучасного виробництва, техніки і технологій, методи наукового пізнання і не буде здатна використовувати набуті знання в побуті, практичній та професійній діяльності. Метою нашого дослідження є систематизація та обґрунтування інформації, що стосується особливостей викладання фізики у класах гуманітарного профілю.

На сторінках науково-методичних видань друкуються матеріали, що освітлюють означену проблему, але вони не узагальнені, не сконцентровані; різні автори приділяють увагу окремим питанням, а вчителі-практики надають розрізнені рекомендації щодо втілення цих ідей в навчально-виховний процес ЗОШ. Отже, результатом нашої роботи вбачається розгляд та рекомендації щодо викладання фізики, а саме:

– аналіз особливості мотивації навчання у класах гуманітарного профілю;

– розгляд головних принципів, ідей та методів викладання дисципліни в означених класах, особливостей застосування деяких психодидактичних технологій навчання;

– з'ясування змісту предмету фізики, вимог до шкільних підручників;

– опис результатів викладання фізики у класах гуманітарного профілю у ЗОШ № 145 м. Донецька (з урахуванням означених особливостей).

Основна частина

Навчання фізики, як і інших предметів, має загальні дидактичні цілі: освітні, виховні та розвивальні. Між ними немає чітких меж ні за змістом, ні за методами і засобами їх досягання - вони мають досягатися в єдиному навчально-виховному процесі. [3] Специфіка цілей навчання фізики учнів класів різного профілю визначається в тому, які загальні цілі набувають для них головної значимості. Для учнів гуманітарного класу важливі цілі формування уявлення про шляхи та етапи розвитку фізики у зв'язку з розвитком суспільства, економіки, культури, філософських ідей; формування філософського осмислення наукових істин; формувати уявлення про фізику як про компонент загальнолюдської культури; формування уявлення про те що, фізика впливає на суспільний розвиток і тісно пов'язана із суспільно-економічними науками.

Уваги потребують і ідеї викладання фізики. Головними ідеями в класах гуманітарного профілю стають гуманітаризація, гуманізація, диференціація та інтеграція. Про необхідність гуманітаризації народної освіти наполегливо говорять в останній час, розуміючи її, як повернення школи до проблеми розвитку особистості, виховання громадянських якостей, розвиток мислення, залучення до культурних цінностей.

Проблема гуманітаризації народної освіти повинна вирішувати не перерозподіл годин між природничими та гуманітарними предметами на користь останніх, а за рахунок підсилення гуманітарної направленості усіх предметів і насамперед, фізики. Для цього потрібно перебудувати викладання шкільного курсу дисципліни таким чином, щоб виявити та активно використовувати її величезний гуманітарний потенціал. Для учнів гуманітарного профілю потрібно проводити інтеграцію з іншими предметами, наприклад літературою, мовами, природознавством, біологією і т.п.. Тут важливо підкреслити істотний розвиток ідеї міжпредметних зв'язків, а точніше інтеграції, – перехід від погодження викладання фізики та суміжних предметів до діалектичної взаємодії предмета «Фізика» з іншими навчальними дисциплінами, причому не тільки природничого, але і гуманітарного циклу.

Велике значення для навчально-пізнавальної діяльності мають мотиви навчання. Прийнято розрізняти дві групи мотивів: 1) пізнавальні, пов'язані зі змістом навчальної діяльності та процесом її виконання; 2) соціальні, пов'язані із взаємодією учня з іншими людьми.

Наше дослідження мотивів учнів гуманітарних класів дозволили зробити висновки про те, що «мотив – як потреба» вивчення фізики у цих дітей майже цілком відсутній, учні–гуманітарії найчастіше «запрограмовані» на несприйняття природничо-наукових, непрофільних предметів. Не є визначальними для них мотив, пов'язаний із почуттям відповідальності, найважливішим для них є інтерес. В учнів гуманітарних класів інтерес викликає зміст матеріалу, характер розумової діяльності; на відміну від представників інших напрямів для учнів гуманітарного профілю може бути цікавою різноманітність навчально-пізнавальної діяльності, що ґрунтується на співпраці, змаганні, інтерактиві, успіху, зв'язках з можливою майбутньою діяльністю.

Таким чином, основним мотивом вивчення фізики в класах гуманітарного профілю навчальних закладів, і це підтверджено нашою роботою, є пізнавальний інтерес. Пізнавальний інтерес є одним із найдієвіших мотивів. [3]

Проаналізувавши принципи відбору змісту навчання фізики виділили основні з них для класу з гуманітарною направленістю:

- принцип генералізації, який відноситься до відбору змісту шкільного курсу фізики та його структуруванню, на основі виділення стержневих ідей та об'єднання навколо них навчального матеріалу;
- принцип циклічності – угрупування матеріалу навколо фізичної теорії, що дозволяє формувати в учнів теоретичний спосіб мислення;
- наглядності та доступності;
- єдності змістової та процесуальної компонент навчання. [4]

Наше ознайомлення з підручниками фізики надруковані за старими та новими програмами (авторів як Гончаренко С.У., Коршак Є.В., Божинова Ф.Я., Кірюхін М.М та інші) дозволяє констатувати, що підручник нового покоління для учнів гуманітарного профілю – це підручник, який створений на засадах нової філософії освіти, він має оновлений трансформований зміст, структуру й методичний апарат, розроблений в такий спосіб, аби сприяти особистісно-орієнтованому навчанню, придатний для самонавчання, має зв'язок фізичних знань з життям людини та суспільним розвитком. [2]

Щодо методів навчання у відповідних класах, то вони обов'язково повинні бути двосторонніми, що поєднують навчальну діяльність учителя та навчальну діяльність школяра. Як відомо у відповідності до видів евристичної освітньої діяльності вони поділяються на когнітивні, креативні, організаційно-діяльнісні. Для учнів гуманітарного профілю не менш важливим є інтерактивний метод навчання, що передбачає організацію комфортних умов навчання та виховання, за якої всі учні взаємодіють між собою і вчителем, використовуючи моделювання життєвих та професійних ситуацій пошуку та успіху, співпереживання, суперечностей, ризику, сумніву, переконання, задоволення, аналізу та самооцінки своїх дій, спільне розв'язання проблем. Також виділили метод наочності. [1]

Основною формою навчання фізики в класах гуманітарного профілю (між іншим як і для інших) є звичайно, – урок, але його можливо різноманітити проводячи:

- уроки – пізнавально-розважальні ігри;
- уроки – сценарії популярних телепередач;
- урок – професійно-рольової гри;
- уроки-пошуки;
- уроки-драматизації та інші.

В той же час для учнів гуманітарних класів, на наш погляд, важливо проводити екскурсії, лекції та семінари, інтегровані за змістом з іншими шкільними предметами, що збагачують пізнавальний інтерес до фізики.

Практика викладання фізики у класах гуманітарного профілю свідчать, про те, що поряд з іншими є діти, які ще не визначили свій життєвий шлях, майбутню професійну діяльність; разом з гуманітарними нахилами вони зацікавлені сучасною технікою, виробництвом природними явищами. Для їх навчання, на наш погляд, будуть корисними рекомендації американського вченого та вчителя С.Вайнбреннера який пропонує використання технологій, ефективних у подібних випадках [1]:

- «перший крок» – виявлення потреби учнів;
- ущільнення навчальної програми;
- навчальні контракти;
- «незалежне» навчання;
- тренінг творчих здібностей;
- таксономія мислення.

Висновки

Основне призначення означених технологій – допомогти вчителю у розвитку креативності учнів, що мають різні пізнавальні інтереси та мотиви навчання. [1]

Цікавим для нашого дослідження вважаємо досягнення наукового знання, що займає межу між педагогікою та психологією. Це область науки, що пропонує систему впливу на особистість, названа «психодидактикою». Для учнів гуманітарного профілю вона розробила методичні підходи, що сприятимуть осягненню оптимальних результатів у навчальному процесі. Ми маємо на увазі історико-бібліографічний , модельний, системно-логічний підходи, які стимулюють викладання фізики у гуманітарних класах. Обмежений об'єм статті, не дозволяє нам навести приклади розроблених матеріалів та проведених уроків, які ілюструють особливості викладання фізики у класах гуманітарного профілю. Результати, що отримані нами, під час дослідницької роботи, підтверджують її актуальність та корисність для вчителів–початківців.

Література

[1] Відкритий урок. Фізика. Випуск 3 – 4. – К.: Плеяди, 2003. – 140 с.

[2] *Сіренко Л.* Міжпредметні зв'язки фізики як шлях до посилення єдності навчання та виховання учнів / Л.Сіренко // Фізика. – 2011. – № 30. – С. 4 – 9.

[3] *Тарасов Л.В.* Современная физика в средней школе / Л.В. Тарасов. – М.: Просещение, 1990. – 288 с.

[4] *Каменецкий С.Е.* Теория и методика обучения физики в школе: Общие вопросы : учеб. пособие для пед. вузов / С.Е. Каменецкий, С.В. Степанов, Н.С. Пурышева [и др.]; под ред. С.Е. Каменецкого, Н.С. Пурышевой. – М.: Academia, 2000. – 366 с.

УДК [113/119+530.192]:37.013

Шурыгина Л.С., Шурыгин Е.Г.

[1] *канд. пед. наук, доцент кафедры физики, СГПУ*

[2] *ассистент кафедры математического анализа, СГПУ*

e-mail: znpfizmatsdpu@ukr.net

АНТРОПНЫЙ ПРИНЦИП В НАУКЕ И В СОДЕРЖАНИИ ОБРАЗОВАНИЯ

Проведен научно-методический анализ антропного принципа. Предложены рекомендации по изучению основных понятий, раскрывающих его содержание.

Ключевые слова: *антропные свойства Вселенной, фундаментальные константы, сложные системы, синергетика.*

Мы имеем счастье жить в сложном
и удивительном нелинейном мире.
С.П. Капица

Введение

Изучение антропного принципа предусматривается программой по астрономии для общеобразовательных школ. В школьных учебниках по астрономии есть параграфы с соответствующим названием [1, 2]. Обсуждения антропного принципа в пособиях для будущих учителей обнаружить нам не удалось. Упоминание о нем есть в учебнике по квантовой механике при рассмотрении закона сложения амплитуд вероятности [3, стр. 28-30].

Цель статьи — научно-методический анализ экспериментальных фактов, понятий и представлений, которые наиболее наглядно демонстрируют так называемые антропные свойства Вселенной (Antropos (греч.) – человек). Это тем более необходимо, что антропный принцип не имеет общепризнанного научного объяснения

Основная часть

Антропные свойства Вселенной в учебнике [2] сводятся к утверждению, «що параметри орбіти Землі, її маса, радіус і хімічний склад найбільш сприятливі для існування життя ... . Для цього також потрібне стабільне Сонце» [2, стр. 132]. Это, конечно, верно. Но для понимания антропных свойств Вселенной явно недостаточно. Кроме того, приведенное утверждение далее опровергается следующими рассуждениями: « ... Земля за багатьма параметрами є також закритою системою. Згідно із законами еволюції складних систем у закритій системі зростає безлад і знищується інформація, тому закрита система приречена на смерть» [2, стр.135]. Это утверждение ошибочное. В современной термодинамике [4] различают изолированные (замкнутые) системы, закрытые и открытые. Закрытые системы могут получать от внешней среды энергию или отдавать ее, вещество – не могут. Земля – открытая система. Но, если пренебречь обменом веществом между Землей и космическим пространством (падение метеоритов, поток частиц и т.д.), то Земля – система закрытая. Изменение энтропии в такой системе

$$dS = d_e S + d_i S. \tag{1}$$

Здесь $d_e S$ — изменение энтропии, обусловленное взаимодействием с окружающей средой, $d_i S$ — обусловлено диссипативными процессами внутри системы. Первое слагаемое в (1) может быть как положительным, так и отрицательным. Второе – всегда положительно. Поэтому энтропия закрытой системы может как возрастать, так и убывать, а также оставаться постоянной $(dS \gtrless 0)$. В первом случае происходят процессы структурообразования, самоорганизации, эволюции, во втором – распад структур, хаотизация. Земля получает от Солнца высокоорганизованную энергию и излучает поток радиации с большей энтропией. «Многолетние измерения потоков радиации с помощью приборов, установленных на спутниках, показали, что энергетический баланс Земли в среднем за год близок к нулю, т.е. приток и отток энергии примерно равен» [5]. По данным спутниковых измерений отток энтропии для всей планеты $d_e S = -6,2 \cdot 10^{14}$ Вт $\cdot$ К$^{-1}$. В среднем на единицу площади это составляет $-1,22$ Вт$\cdot$м$^{-2}\cdot$К$^{-1}$. Это соответствует приросту информации $I = 1,22 \cdot 10^{19}$ бит$\cdot$см$^{-2}\cdot$с$^{-1}$ [5, стр. 1091] (Здесь под количеством информации понимают величину, соответствующую уменьшению энтропии). Таким образом, для Земли и ее обитателей вполне возможен переход в более организованное, более упорядоченное состояние или же существование в стационарном режиме ($dS = 0, |d_e S| = d_i S$). Мы слишком близко подошли к экологическому кризису. Но ведь величина $d_i S$ во многом зависит от образа жизни обитателей Земли. И очень важно, чтобы все это понимали.

Под антропными свойствами Вселенной в научной литературе понимают следующее:

– свойства основных структурных элементов Вселенной (ядер, атомов, планет, звезд и т.д.) определяются значениями фундаментальных констант и параметров (масс и зарядов элементарных частиц, $\hbar$, c, постоянных гравитации и тонкой структуры, констант связи сильного и слабого взаимодействий и т.д.);

– во многих случаях даже очень небольшое изменение хотя бы одной из констант привело бы к радикальному изменению процессов эволюции Вселенной и возникновение жизни в известной нам форме было бы невозможным.

Эту ситуацию в литературе часто характеризуют как факт наличия в природе «дружелюбных случайностей». (См., например, [6, стр. 412]).

Рассмотрим примеры таких «счастливых случайностей»:

1. Согласно современным представлениям на некоторых ранних этапах эволюции Вселенной возникают первые структуры, частицы – протоны, нейтроны, электроны. При дальнейшем понижении температуры образуются атомы простейших элементов – водорода и гелия. Для их существования нужен стабильный протон. Как известно, массы нейтрона и протона мало отличаются: $m_n - m_p = 1,33\,\text{МэВ}$, $m_p = 938,3\,\text{МэВ}$, $m_e = 0,511\,\text{МэВ}$. Более тяжелый нейтрон нестабилен, распадаясь на протон, электрон и электронное антинейтрино:

$$n \to p + e^- + \tilde{\nu}_e \tag{2}$$

Если бы масса протона была на $0,1\%$ больше, то реакция (2) была бы запрещена – разность масс нейтрона и протона стала бы меньше массы электрона. Поэтому нейтрон стал бы стабильным, а атом водорода – нестабильным [7]:

$$e^- + p \to n + \nu_e$$

Совокупность реакций $\nu_e + p \leftrightarrow n + e^+$ и $e^- + p \leftrightarrow n + \nu_e$ способствовали бы одинаковой распространенности протонов и нейтронов после первичного нуклеосинтеза. Поэтому основным веществом во Вселенной был бы не водород, а гелий (число протонов и нейтронов в ядре гелия одинаково). Однако водород является топливом для большинства устойчивых звезд типа нашего Солнца. Звезды могли бы образовываться и из гелия, но их поведение было бы другим и время существования значительно короче. Жизнь на планете не успела бы сформироваться. Кроме того, без водорода не было бы ни органических веществ, ни воды.

К аналогичным радикальным изменениям привело бы и небольшое изменение масс электрона или нейтрона. Таким образом, строение Вселенной крайне чувствительно к небольшому «шевелению» масс протона, нейтрона и электрона. Фактически имеет место «тонкая подстройка» масс кварков, которые образуют нуклоны, и электронов.

2. Для формирования планет и возникновения известной нам формы жизни нужны не только водород и гелий, но и более тяжелые элементы. Они образуются благодаря цепочке «алхимических» превращений в недрах звезд. При температуре в сотни миллионов градусов гелий превращается в углерод:

$$3\,{}^4He \to {}^{12}C + 2\gamma, \tag{3}$$

где γ — гамма-квант. Однако вероятность встречи трех ядер гелия в довольно разреженной плазме звезды невелика. Поэтому мала и вероятность такого способа образования углерода, а затем и более тяжелых ядер. Следовательно, их будет недостаточно для формирования планет.

Но, оказывается, эта реакция идет в два этапа. Сначала из двух ядер гелия образуется бериллий ${}^8Be$, ядро которого нестабильно. Не успевшее распасться ядро бериллия слипается с ядром ${}^4He$:

$${}^8Be + {}^4He \to {}^{12}C + 2\gamma \tag{4}$$

Вероятность двухэтапной реакции намного больше вероятности реакции (3). Главная причина этого – вероятность реакции (4) резонансно усиливается наличием у углерода уровня энергии $7,65$ МэВ. Этот уровень всего на $0,3$ МэВ выше суммы энергий покоя ядер ${}^4\,He$ и ${}^8\,Be$. Разрыв в $0,3$ МэВ преодолевается благодаря высокой температуре в недрах звезды.

Углерод в звезде может не только образовываться, но и «сгорать» благодаря реакции

$${}^{12}C + {}^4He \to {}^{16}O \tag{5}$$

Однако, эта реакция очень медленная. Энергетический уровень ${}^{16}\,O$, ближайший к сумме энергий покоя ядер ${}^{12}\,C$ и ${}^4\,He$, меньше этой суммы. Высокая температура эту разницу только увеличивает. Таким образом, благодаря резонансному характеру реакции (4) и нерезонансному – (5), углерода, необходимого для формирования тяжелых элементов, получается достаточно.

Именно эти соображения помогли Ф. Хойлу в 1953 г. предсказать существование у углерода энергетического уровня $7,65$ МэВ. Через неделю после теоретического предсказания он был экспериментально открыт в Калифорнийском технологическом институте. «Когда смотришь на диаграмму энергетических уровней ядра ${}^{12}\,C$ ... и видишь первые три уровня $4,43$ МэВ, $7,65$ МэВ и $9,64$ МэВ, то душу охватывает чувство глубокой благодарности к уровню $7,65$ МэВ за то, что он не спустился на $0,5$ МэВ ниже. Какой малый запас прочности у всего, что нам так дорого!» [8, стр. 188].

3. Обогащенное тяжелыми элементами вещество разбрасывается по галактике взрывами сверхновых. Когда у массивной звезды кончаются запасы ядерного топлива, ядро ее становится неустойчивым относительно гравитационного сжатия. При некоторых условиях наступает гравитационный коллапс. Выделяется огромная гравитационная энергия, большую часть которой уносят потоки нейтрино. Нейтрино очень слабо взаимодействует с обычным веществом. Земля, например, для нейтрино почти прозрачна. Однако, очень плотное, компактное ядро притормаживает улетающие нейтрино, тем самым увеличивая вероятность их взаимодействия с внешней оболочкой звезды. Давление потока нейтрино сбрасывает внешнюю оболочку. Т.е., ядро звезды схлопывается внутрь, внешние слои взрываются наружу. Это — сверхновая звезда. Тяжелые элементы взрывом, благодаря потоку нейтрино, разбрасываются по космосу. Потом эти элементы входят в состав нового поколения звезд, в состав планет и живых организмов. Если бы слабое взаимодействие (нейтрино с веществом) было намного слабее, они (нейтрино) не смогли бы эффективно воздействовать на внешнюю оболочку звезды и вызвать взрыв сверхновой. Если бы слабое взаимодействие было сильнее, то нейтрино было бы захвачено ядром звезды и взрыва тоже не было бы. Т.е. при иной интенсивности слабого взаимодействия химический состав Вселенной был бы другим.

Кроме приведенных «счастливых случайностей», без которых появление известной нам формы жизни было бы невозможно, существует множество других (см., например, [9], с учетом последних открытий в космологии – [6]).

Каждая «дружелюбная случайность» может быть выражена определенным соотношением между фундаментальными константами. Количество таких соотношений намного больше числа фундаментальных констант. Система уравнений, в которой количество неизвестных меньше числа уравнений, имеет решение, если «лишние» уравнения можно как-то выразить через остальные. Эти соотношения должны выражать какие-то законы природы. Мы знаем, что система уравнений имеет решение (поскольку мы существуем). Но соответствующих законов природы не знаем (пока?!).

«Дружелюбные случайности» привлекали и продолжают привлекать внимание многих ученых. Этой проблемой с 1930 г. интересовался один из создателей квантовой механики П. Дирак. Позже – А.Л. Зельманов, Я.Б. Зельдович, И.Д. Новиков, Б. Картер, Дж. Уилер, П. Дэвис, А. Линде и др.. Об антропном принципе писал А.С. Сахаров: «Некоторые авторы считают антропологический принцип неплодотворным и даже не соответствующим научному методу. Я с этим не согласен. Замечу, в частности, что требование применимости фундаментальных законов природы в существенно иных, чем в нашей Вселенной, условиях, может иметь эвристическое значение для нахождения этих законов.» (Цитируется по [8, стр. 187]).

Существуют несколько формулировок антропного принципа. В школьных учебниках по астрономии приводится один из вариантов так называемого слабого антропного принципа.

Слабый антропный принцип:

1. Мы являемся свидетелями процессов определенного типа потому, что процессы другого типа протекают без свидетелей (А.Л. Зельманов).

2. Наше положение во Вселенной с необходимостью является привилегированным в том смысле, что оно должно быть совместимо с нашим существованием как наблюдателей. (Картер Б., [10]).

3. То, что мы ожидаем наблюдать, должно быть ограничено условиями, необходимыми для нашего существования как наблюдателей (Картер Б.).

Сильный антропный принцип:

Вселенная (и, следовательно, фундаментальные параметры, от которых она зависит) должна быть такой, чтобы в ней на некотором этапе эволюции допускалось существование наблюдателя (Картер Б.).

В последнее время антропные свойства Вселенной анализируют в синергетике, что вполне естественно (см., например, [11, 12, 14]). В школьном учебнике по астрономии [2] синергетику определяют как науку, изучающую законы и эволюцию сложных систем. Антропный принцип рассматривается как принцип существования сложного в этом мире. «Чтобы на макроуровне сегодня было возможно существование сложных систем, элементарные процессы на микроуровне изначально должны были протекать очень избирательно» [12, стр. 64]. Понятие сложной системы не раз встречается при обсуждении данной темы. Поэтому возникает необходимость разъяснения содержания данного понятия. Однако следует учесть мудрое предостережение Л.И. Мандельштама об опасности строгих определений для быстро развивающейся теории. По мнению Л.И. Мандельштама такие определения аналогичны заворачиванию ребенка вместо пеленки в колючую проволоку. Рассматриваем поэтому «рабочее» определение.

Под сложностью системы понимают ее многокомпонентность и принципиальную несводимость к простой сумме составляющих ее взаимодействующих подсистем, элементов. Вследствии этого взаимодействия система приобретает новые свойства, отсутствующие у подсистем. Они называются эмерджентными. Эмерджентные свойства системы невозможно вывести из свойств подсистем. Пример эмерджентного свойства — энтропия. Сложные системы не могут быть изучены разбиением их на изолированные части. Редукционизм здесь не применим.

Понятие «сложности» часто дифференцируют. С одной стороны можно говорить о структурной сложности, с другой – о сложности внешних проявлений системы безотносительно к ее внутреннему устройству (см., например, [14, 15]). Эти сложности взаимосвязаны, но не эквивалентны. Чаще имеют ввиду второе значение. Сложное поведение видят в неравновесности, обратных связях, переходных явлениях, способности к переключению между различными типами поведения при изменении внешних условий, в эволюции, «... достаточно сложная система обычно находится в метастабильном состоянии» [16, стр. 153].

В связи с антропным принципом в школьных учебниках обсуждается понятие жизни и живого организма. В последние годы для характеристики феномена жизни используют понятие аутопоэза. Это — самовоспроизведение без изменения организации системы (Autopoiesis (греч.): autos – само, poiein – построение или произведение). Термин предложен известным чилийским нейробиологом У.Р. Матураной: «... живые существа отличаются тем, что их организация порождает в качестве продукта только их самих, без разделения на производителя и продукт. Бытие и сотворение аутопоэзного единства нерасторжимы и в этом заключается присущий только им способ организации» [17]. Именно аутопоэзная организация наиболее популярна сейчас как критерий живого. С точки зрения теории развития сложных систем возникновение жизни является естественным этапом саморазвития материи, одной из форм ее самоорганизации.

Далее кратко остановимся на некоторых, имеющихся в научной литературе, попытках объяснения антропного принципа:

1. Чаще всего привлекается концепция множественности миров. Эта концепция появилась в космологии в связи с проблемой инфляции. Связь антропного принципа с моделью «вечной» инфляции в свете новых открытий в космологии рассматривается в [6, стр. 407-441]. «На первый взгляд антропный принцип противоречит естественно-научному взгляду на законы природы. Однако это не так. Существует возможность того, что Вселенная на самом деле неизмеримо больше, чем ее наблюдаемая часть, и что в разных областях Вселенной, также значительно больших наблюдаемой части, параметры, которые мы считаем фундаментальными, имеют неодинаковые значения (возможно, различны и сами физические законы в нынешнем понимании этого термина). На такую возможность указывают, например, модели «вечной» инфляции». Согласно этой модели во Вселенной имеется огромное чис-

ло областей с различным космологическим возрастом. Предполагается, что в разных областях фундаментальные параметры принимают разные значения. Тогда «... антропный принцип просто отображает тот факт, что наше существование возможно не в произвольном месте Вселенной, а именно там, где для этого есть подходящие условия» [6].

2. Различными учеными высказывались предположения о возможности форм жизни, имеющих различную материально-энергетическую организацию, не связанную с белково-нуклеиновым субстратом. Это поволило В.П. Казначееву выдвинуть интересную гипотезу, связанную с антропным принципом и названную им принципом Великого дополнения: «всякое масштабное изучение форм и потоков косного вещества требует соответственного дополняющего изучения определенной совокупности потоков живого вещества (куда входит изучение природы живого вещества, его организации, в определенных случаях предполагается также изучение природы познающего субъекта, его сознания, характера методов познания и т.д.). Принцип Великого дополнения справедлив и в обратной форме – от изучения живого вещества к косному» [18, стр. 57]. В соответствии с этой гипотезой антропный принцип «является представлением, справедливым лишь в отношении определенной части всей совокупности форм космологического живого вещества» [18, стр. 59].

Эти идеи Казначеева В.П. резонируют с утверждением знаменитых чилийских нейробиологов У.Р. Матураны и Ф.Х. Варела о биологических корнях человеческого познания. Анализируя феномен познания они доказывают, что когнитивный опыт познающего коренится в его биологической структуре, утверждают нераздельность конкретного способа существования и того, каким этот мир предстает перед познающим [17, стр. 23].

Выводы

Целесообразно ли изучение антропного принципа, если отсутствует общепризнанное научное объяснение? По нашему мнению, ответ положителен. И наука, и содержание образования – открытые, развивающиеся системы. При организации учебного процесса это надо учитывать.

Мы считаем также, что соответствующий материал может быть использован и на занятиях по физике. Это позволит создать ряд интересных проблемных ситуаций, поможет сформировать единую естественнонаучную картину мира, сблизить «две культуры» – естественнонаучную и гуманитарную.

Литература

[1] *Климишин И.А.* Астрономия / И.А. Климишин, И.П. Кричко. – К.: Знание. 2003. – 192 с. – (Учебник для 11 кл. общеобраз. уч. заведений).

[2] *Пришляк М.П.* Астрономия: 11 класс / М.П. Пришляк; за заг ред. акад. Я.С. Яцків. – Х.: Ранок, 2011. – 160 с.

[3] *Вакарчук І.О.* Квантова механіка : Підручник / І.О. Вакарчук. – Львів: ЛДУ ім. І.Франка, 1998. – 616 с.

[4] *Пригожин И.* Современная термодинамика: от тепловых двигателей до диссипативных структур / И. Пригожин., Д. Кондепуди. – М.: Мир, 2002. – 461 с.

[5] *Изаков М.Н.* Самоорганизация и информация на планетах и в экосистемах / М.Н. Изаков // УФН. – 1997. – т. 167, №10. – с. 1089 – 1094.

[6] *Рубаков В.А.* Иерархии фундаментальных констант / В.А. Рубаков // УФН. – 2007. – т. 177, №4. – с. 407 – 414.

[7] *Розенталь И.Л.* Элементарные частицы и структура Вселенной / И.Л. Розенталь. – М.: Наука, 1984. – 112 с.

[8] *Окунь Л.Б.* Фундаментальные константы физики / Л.Б. Окунь // УФН. – 1991. – т. 161, №9. – с. 178 – 194.

[9] *Дэвис П.* Случайная Вселенная. / П. Дэвис. – М.: Мир, 1985. – 160 с.

[10] *Картер Б.* Совпадения больших чисел и антропологический принцип в космологии / Космология: теория и наблюдения. – М., 1978. – с. 369 – 379.

[11] *Николис Дж.* Динамика иерархических систем. Эволюционные представления / Дж. Николис. – М.: Наука, 1989. – 488 с.

[12] *Князева Е.Н.* Антропный принцип в синергетике / Е.Н. Князева, С.П. Курдюмов // Вопросы философии. – 1997. – №3. – с. 62 – 79.

[13] *Баранцев Р.Г.* Синергетика в современном естествознании / Р.Г. Баранцев. – М.: УРСС, 2003. – 140 с.

[14] *Николис Дж.* Познание сложного / Дж. Николис, И. Пригожин – М.: Мир, 1990. – 342 с.

[15] *Малинецкий Г.Г.* Современные проблемы нелинейной динамики / Г.Г. Малинецкий, Потанов А.Б. – М.: УРСС, 2000. – 335 с.

[16] *Пригожин И.* От существующего к возникающему: время и сложность в физических науках / И. Пригожин. – М.: УРСС, 2002. – 327 с.

[17] *Матурана У.Р.* Древо познания: биологические корни человеческого понимания : пер с англ. Ю.А. Данилова / У.Р. Матурана, Ф.Х. Варела. – М.: Прогресс-Традиция, 2001. – 224 с.

[18] *Казначеев В.П.* Учение В.И. Вернадского о биосфере и ноосфере / В.П. Казначеев. – Новосибирск : Наука. Сиб. отд-ние, 1989. – 248 с.

ЗМІСТ

Збірник наукових праць
фізико-математичного факультету СДПУ

Випуск №2

За матеріалами
Всеукраїнської науково-практичної конференції
«Актуальні питання сучасної науки і освіти»
Слов'янськ, СДПУ, 24-26 квітня, 2012 р.

Для студентів, аспірантів та науковців в галузі фізико-математичних наук; вчителів та викладачів фізико-математичних дисциплін в ЗОШ та ВНЗ.

Дизайн, верстка О.А. Кадубовський
Відповідальні за випуск В.Є. Величко, О.А. Кадубовський

Підписано до друку 26.04.2012 р.
Формат 60 84 1/16. Ум. др. арк. 13,75.
Тираж 100 прим. Зам. № 426.

Підприємець Маторін Б.І.
84116, м. Слов'янськ, вул. Г. Батюка, 19.
Тел./факс +38 06262 3-20-99. Email: matorinb@ukr.net

Свідоцтво про внесення суб'єкта видавничої справи до Державного реєстру видавців, виготівників і розповсюджувачів видавничої продукції ДК №3141, видане Державним комітетом телебачення та радіомовлення України від 24.03.2008 р.
