УДК 512.54

Зайцева Ю.С., Пащенко З.Д.

[1] *студентка 5 курсу фізико-математичного факультету, СДПУ*

[2] *доцент кафедри алгебри, СДПУ*

e-mail: bgblik_kryglik@mail.ru

СИЛОВСЬКІ p-ПІДГРУПИ

Дана робота відноситься до структурної теорії груп. Розглядаються силовські p-підгрупи в симетричних групах. Побудовано силовську 2-підгрупу в S_8 за знайденою силовською 2-підгрупою в S_4.

Ключові слова: *силовська підгрупа, симетрична група, вінцевий добуток.*

Вступ

Структуру скінченних груп допомагають описувати силовські p-підгрупи. Силовські p-підгрупи скінченних симетричних груп відіграють особливу роль в класі всіх скінченних груп. А саме, кожна скінченна p-група ізоморфно занурюється в силовську p-підгрупу деякої симетричної групи. Це одна з причин актуальності дослідження побудови і властивостей силовських p-підгруп симетричних груп.

Теорема 1. (Силова) *Нехай G-скінченна група, p – просте число.*
Існування. *Для кожного степеня p^α, що ділить порядок G, в G існує підгрупа порядку p^α.*
Вкладення. *Якщо $p^{\alpha+1}$ ділить порядок G, то кожна підгрупа порядку p^α з G вкладена у деяку підгрупу порядку $p^{\alpha+1}$ з G. Зокрема, силовські p-підгрупи з G – це в точності підгрупи порядку p^r, де p^r-максимальний степінь p, що ділить порядок G.*
Спряженість. *Усі силовські p-підгрупи з G спряжені в G.*
Кількість. *Кількість силовських p-підгруп в G конгруентна 1 за модулем p і ділить порядок G [1].*

Основна частина

Нехай p – деяке просте число. Виходячи з того, що $|S_n| = n!$, максимальний порядок $e(n)$, при якому $p^{e(n)}$ ділить $|S_n|$ дорівнює $[\frac{n}{p}] + [\frac{n}{p^2}] + \dots$. Якщо $n = p^t$, то $e(n) = p^{t-1} + p^{t-2} + \dots + p + 1$.

При конструюванні силовських p-підгруп симетричної групи S_{p^t} використовується наступний алгоритм.

Нехай в S_{p^m} вже знайдена силовська p-підгрупа, тобто підгрупа H_m порядку $p^{1+\ldots+p^{m-1}}$, побудуємо по ній в $S_{p^{m+1}}$ підгрупу H_{m+1} порядку $p^{1+\ldots+p^m}$. Для цього розіб'ємо символи, що переставляються $1, 2, ..., p^{m+1}$ на послідовні відрізки довжини p^m. Якщо

$$c = \prod_{j=1}^{p^m}(j, p^m + j, 2p^m + j, ..., (p-1)p^m + j)$$

і x – підстановка на символах i-го відрізка, то $c^{-1}xc$-підстановка на символах $(i+1)$-го відрізка (додавання по модулю p). Звідси видно, що підгрупа H_{m+1} породжена підгрупами $c^{-r}H_mc^r, 0 \leq r \leq p$, а саме є їх прямим добутком.

Підгрупа H_{m+1} – шукана, так як $|H_{m+1}| = |H_m|^p|c| = p^{1+\ldots+p^m}$.

Знайдемо підгрупу H_2 в S_4. Максимальний показник $e(4) = |\frac{4}{2}| + |\frac{4}{2_2}| = 2 + 1 = 3$, тому $|H_2| = 2^3 = 8$. Візьмемо підстановки $\alpha = (1234)$ і $\beta = (13)$. Вони будуть твірними елементами для H_2.

$$H_2 = \{\varepsilon, \alpha, \alpha^2, \alpha^3, \beta, \alpha \circ \beta, \alpha^2 \circ \beta, \alpha^3 \circ \beta\}.$$

Знайдемо всі елементи H_2:

$$\alpha = (1234), \quad \alpha^2 = (13)(24), \quad \alpha^3 = (14)(32), \quad \beta = (13),$$

$$\alpha \circ \beta = (14)(23), \quad \alpha^2 \circ \beta = (24), \quad \alpha^3 \circ \beta = (12)(34), \quad \varepsilon = (1)(2)(3)(4).$$

$$H_2 = \{\varepsilon(1234), (13)(24), (1432), (13), (14)(23), (24), (12)(34)\}$$

За знайденою підгрупою H_2 в S_4 побудуємо підгрупу H_3 в S_8. $|H_3| = 2^{1+2+4} = 2^7 = 128$. Для цього розіб'ємо переставні символи $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$ на послідовні відрізки довжини 4. Тоді $c = (15)(26)(37)(48)$. Очевидно, що $c^{-1} = c$.

Нехай $x = (134)$ – підстановка на елементах першого відрізка $1, 2, 3, 4$, тоді $c^{-1}xc = (15), (26)(37)(48)(134)(15), (26)(37)(48) = (578)$ – підстановка на символах другого відрізка $5, 6, 7, 8$.

Звідси видно, що підгрупа, породжена підгрупами H_2 і cH_2c є їх прямим добутком.

Таким чином підгрупа H_3 ізоморфна вінцевому добутку $H_2\wr(c)$.

Література

[1] *Каргаполов М.И., Мерзляков Ю.И.* Основы теории групп. — 3-е изд; перераб. и доп. — М.: Наука, 1982. — 228 с.

[2] *Сущанський В.І., Сікора В.С.* Операції на групах підстановок. Теорія та застосування. — Чернівці: Рута, 2003. — 256 с.