УДК 519.612

Крохмальова Т.П., Величко В.Є.

[1] *студентка 5 курсу фізико-математичного факультету, СДПУ*

[2] *доцент кафедри алгебри, СДПУ*

e-mail: krohmaleva_tatyana@ukr.net, vladislav.velichko@gmail.com

РОЗВ'ЯЗАННЯ НЕКОРЕКТНО ПОСТАВЛЕНИХ ЗАДАЧ

Серед математичних задач виділяється клас задач, розв'язання яких нестійкі до малих значень початкових даних. Вони характеризуються тим, що скільки завгодно малі значення початкових даних можуть призводити до довільно великих змін в розв'язках. Задачі подібного типу, по суті, є погано поставленими. Вони належать до класу некоректно поставлених задач. Розглядаються шляхи подолання проблеми розв'язання таких задач.

Ключові слова: *наближені розв'язки, метод Тихонова, квазірозв'язки.*

Вступ

Швидко зростаюче використання обчислювальної техніки вимагає розвитку обчислювальних алгоритмів для вирішення широких класів завдань. Але що потрібно розуміти під розв'язанням задачі?

Класичні концепції і постановки задач не відображають багатьох особливостей задач, що зустрічаються на практиці. Ми покажемо це на прикладі.

Розглянемо систему лінійних рівнянь алгебри

$$Az = u, \tag{1}$$

де z – шуканий вектор, u – відомий вектор, $A = \{a_{ij}\}$ – квадратна матриця з елементами a_{ij}.

Якщо система не вироджена, тобто $\det A = 0$, то вона має єдиний розв'язок, який можна знайти за відомими формулами Крамера або іншими способами. Якщо система вироджена, то вона має розв'язок (притому не єдиний) лише при виконанні певної умови, якщо рівні нулю відповідні визначники.

Таким чином, перш ніж розв'язувати систему, потрібно перевірити, вироджена вона або ні. Для цього вимагається обчислити визначник системи $\det A$.

Якщо n – розмірність системи, то для обчислення $\det A$ необхідно виконати близько n^2 операцій. З якою б точністю ми не виконували обчислення, при достатньо великому значенні n, внаслідок накопичення помилок обчислення, ми можемо отримати значення $\det A$, яке як завгодно відрізняється від істинного. Тому бажано мати (побудувати) такі алгоритми знаходження розв'язку системи, які не вимагають попереднього з'ясування виродження або не виродження системи.

Крім того, у практичних задачах часто права частина системи u і елементи матриці A, тобто коефіцієнти системи рівнянь, відомі нам наближено. У цих випадках замість системи, ми маємо справу з деякою іншою системою $A'z = u'$ такою, що

$$||A' - A|| \le h,\ ||u' - u|| \le \delta,$$

де норма зазвичай визначається характером задачі. Маючи замість матриці A матрицю A', ми тим більше не можемо висловити певного судження про виродження або не виродження системи.

У цих випадках про точну систему $Az = u$ нам відомо лише те, що для матриці A і правої частини виконуються нерівності $||A' - A|| \le h$, $||u' - u|| \le \delta$. Але систем з такими вхідними даними (A, u) нескінченно багато, і в рамках відомого нам рівня похибки вони не чіткі. Серед таких «можливих точних систем» можуть бути і вироджені.

Оскільки замість точної системи ми маємо наближену систему $A'z = u'$, то мова може йти лише про знаходження наближеного розв'язку. Але наближена система може бути і нерозв'язною. Виникає питання: що треба розуміти під наближеним розв'язком системи? Воно повинно бути також стійким до малих змін вхідних даних (A, u).

1. Наближені методи

Широко розповсюдженим в обчислювальній практиці способом наближеного розв'язання рівняння (1) є метод підбору. Він полягає в тому, що для елементів z деякого заздалегідь заданого підкласу можливих рішень M деякого лінійного простору F обчислюється оператор Az, тобто виконується пряма задача. В якості наближеного розв'язку береться такий елемент z_0 з множини M, на якому нев'язка $\rho_U(Az, u)$ досягає мінімуму, тобто $\rho_U(Az_0, u) = \inf \rho_U(Az, u)$, $z \in M$.

Нехай права частина рівняння (1) задана точно, тобто $u = u_t$ і потрібно знайти його розв'язок z_t. Зрозуміло, що в M знаходиться безліч елементів z, які залежать від скінченої кількості параметрів, що змінюються в певних межах так, щоб M було замкнутим в скінченовимірному просторі. Якщо шукають точний розв'язок z_t рівняння (1) який належить множині M, $\inf z_t \in M$, $\rho_{tU}(Az, u) = 0$ то цим досягається нижня межа на точному розв'язку z_t. Якщо рівняння (1) має єдиний розв'язок, то елемент z_0, здатний мінімізувати, визначений однозначно.

Обґрунтування успішності методу підбору призвело до знаходження загально функціональних вимог, що обмежують клас можливих розв'язків M, при яких метод підбору є стійким і $z_n \to z_t$. Ці вимоги полягають в компактності множини M і ґрунтуються на наведеній нижче топологічній лемі.

Лема 1. *Нехай метричний простір F відображається на метричний простір U і U_0 – образ множини F_0, $F_0 \subset F$, при цьому відображенні. Якщо відображення $F \to U$ неперервне, взаємно однозначне і множина F_0 компактна на F, то зворотне відображення $U_0 \to F_0$ множини U_0 на множину F_0 також неперервне за метрикою простору F.*

На основі викладених міркувань М. М. Лаврентьєв сформулював поняття коректності за *Тихоновим.* У застосуванні до рівняння (1) задача є *коректною за Тихоновим*, якщо відомо, що для точного значення $u = u_t$ існує єдиний розв'язок z_t рівняння (1), $Az_t = u_t$, що належить заданій компактній множині M. В цьому випадку оператор A^{-1} неперервний на множині $N = AM$ і, якщо замість елемента u_t нам відомий елемент u_δ такий, що $\rho_U(u_t, u_\delta) \le \delta$ і $u_\delta \in N$, то в якості наближеного розв'язку рівняння (1) з правою частиною $u = u_\delta$ можна взяти елемент $z_\delta = A^{-1}u_\delta$. При $\delta \to 0$ ($u_\delta \in N$) z_δ буде прагнути до z_t. Множина F_1 ($F_1 \subset F$), на якій задача знаходження розв'язку рівняння (1) є коректно поставленою, називають класом коректності. Так, якщо оператор A неперервний і здійснює взаємно однозначне відображення, то компактна множина M, до якої належить z_t, є класом коректності для рівняння (1). Таким чином, якщо задача (1) коректна за Тихоновим і права частина рівняння $u \in AM$, то метод підбору з успіхом може бути застосований до вирішення такої задачі.

Прагнення усунути труднощі, пов'язані з відсутністю розв'язку рівняння (1) при неточній правій частині, привело В. К. Іванова до поняття квазірозв'язання рівняння (1).

Елемент $\tilde{z} \in M$, який здатний мінімізувати при цьому і функціонал $\rho_U(A\tilde{z}, u)$ на множині M, називається квазірозв'язком рівняння (1) на M,

$$\rho_U(A\tilde{z}, u) = \inf_{z \in M} \rho_U(Az, u).$$

Якщо M – компакт, то квазірозв'язок, очевидно, існує для будь-якого $u \in U$ і якщо, крім того, $u \in AM$, то квазірозв'язок $\tilde{z}$ збігається зі звичайним (точним) розв'язком рівняння (1). Квазірозв'язок може бути і не один. У цьому випадку під квазірозв'язком будемо розуміти будь-який елемент з множини квазірозв'язків D.

Нехай F і U – Гілбертові простори, $M \in S_R$ – куля ($||z|| \le R$) в просторі F і A – цілком неперервний лінійний оператор.

У цьому випадку квазірозв'язок рівняння (1) можна представити у вигляді ряду за власними елементами (функціям, векторах) φ_n оператора A^*A, де A^* – оператор, спряжений оператору A.

Відомо, що A^*A – самоспряжений цілком неперервний оператор з F в F. Нехай $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \ldots \geq \lambda_n \geq \ldots$ – повна система його власних значень, а $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n, \ldots$ – відповідна повна ортонормована система його власних елементів (функцій, векторів). Елемент A^*u можна представити у вигляді ряду

$$A^*u = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \varphi_n \tag{2}$$

В цих умовах справедлива

Теорема 1. *Квазірозв'язок рівняння (1) на множині S_R виражається формулами:*

$$\tilde{z} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{\lambda_n} \varphi_n \text{ якщо } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n^2}{\lambda_n^2} < R^2 \tag{3}$$

і

$$\tilde{z} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{\beta + \lambda_n} \varphi_n \text{ якщо } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n^2}{\lambda_n^2} \geq R^2. \tag{4}$$

Тут β – корінь рівняння

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n^2}{(\lambda_n + \beta)^2} = R^2 \tag{5}$$

2. Обчислювальний експеримент

Для реалізації чисельного прикладу було вибрано метод Тихонова розв'язання некоректних систем лінійних алгебраїчних рівнянь.

Для цього взята система у якоъ визначник бильзкий до нуля

$$\begin{pmatrix} \frac{-10}{30} & \frac{2}{5} & \frac{4}{5} \\ -2 & \frac{1}{7} & 1 \\ \frac{-1}{100} & 0 & \frac{1}{300} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_q \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad det\, A = \frac{-11}{31500}.$$

Розв'яжемо систему за допомогою оберненої матриці. Для цього знайдемо будь-яким чином обернену матрицю

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -1.364 & 3.818 & -818.182 \\ 9.545 & -19.727 & 3.627 \cdot 10^3 \\ -4.091 & 11.455 & -2.155 \cdot 10^3 \end{pmatrix} \quad A^{-1}z = \begin{pmatrix} -815.727 \\ 3.617 \cdot 10^3 \\ -2.147 \cdot 10^3 \end{pmatrix}.$$

На другому етапі знайдемо розв'язок запропонованої системи методом Тихонова з точністю 0.001. В якості мови програмування використали Pascal. Отримаємо наступний результат:

Наближення до нормального розв'язку

```
Z(1)=-8.97244015079166E+0002
Z(2)= 3.97848179152378E+0003
Z(3)=-2.36184256982254E+0003
```

Значення правої частини при підстановці наближеного розв'язку наступні

```
U1(1)= 9.99999111205201E-0001
U1(2)= 1.00000198204875E+0000
U1(3)= 1.09963158471653E+0000
```

Збільшимо точність до 0.00001 і отримуємо розв'язок, який відрізняється від точного на досить незначну величину, а отже є дуже корисним для початкового знаходження точного значення.

Наближення до нормального розв'язку

```
Z(1)=-8.97540036267863E+0002
Z(2)= 3.97979416063186E+0003
Z(3)=-2.36262209544751E+0003
```

Значення правої частини при підстановці наближеного розв'язку

```
U1(1)= 9.99999984023968E-0001
U1(2)= 1.00000003562712E+0000
U1(3)= 1.09999337785361E+0000
```

Висновки

Отриманий результат обчислювального експерименту доводить життєздатність наведеного методу для пошуку наближеного розв'язку некоректно поставлених задач, а отже, є коректним для цього класу задач.

Література

[1] *А.Н.Тихонов, В.Я.Арсенин* Методы решения некорректных задач. — М.: Наука, 1979.

[2] *Г.И.Марчук* Методы вычислительной математики. — М.: Наука, 1977.

[3] *Л.И.Головина* Линейная алгебра и некоторые ее приложения. — М.: Наука, 1975.

[4] *В.И.Ракитин, В.Е.Первушин* Практическое руководство по методам вычислений. — М.: Высшая школа, 1998.