УДК 517.5

Бодрая В.И., Гладкоскок А.Г., Савченко Ю.Л.

[1] *ассистент кафедры математического анализа, СГПУ*

[2] *студентка 5 курса физико-матемтического факультета, СГПУ*

[3] *студентка 5 курса физико-матемтического факультета, СГПУ*

e-mail: sgpi@slav.dn.ua

ПРИБЛИЖЕНИЕ КЛАССОВ ФУНКЦИЙ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ ОБОБЩЕННЫМИ ОПЕРАТОРАМИ ЗИГМУНДА

Отримані асмптотичні формули для верхніх граней відхилень прямокутних операторів Зигмунда на класах (ψ, β)–диференційовних функцій багатьох змінних.

Keywords: *Fourier series, asymptotic equalities.*

Введение

Классы (ψ, β)-диффенцируемых периодических функций одной переменной были введены в 1983 году А.И. Степанцом (см. [1]) следующим образом.

Пусть L – пространство суммируемых 2π-периодических функций, $f \in L$ и

$$S[f] = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos kx + b_k \sin kx) \equiv \sum_{k=0}^{\infty} A_k(f; x)$$

– ряд Фурье функции f. Пусть далее $\psi(k), k \in N$ – произвольная функция натурального аргумента и $\beta \in R$. Если ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\psi(k)} \left(a_k \cos(kx + \beta\pi/2) + b_k \sin(kx + \beta\pi/2)\right)$$

является рядом Фурье некоторой суммируемой функции, то эту функцию обозначают f_β^ψ и называют (ψ, β)-производной функции f.

Если функция f непрерывна и выполнено условие $\operatorname{esssup}|f_\beta^\psi(x)| \leq 1$, то полагают $f \in C_{\beta,\infty}^\psi$.

Исследованию аппроксимативных свойств классов функций одной переменной, имеющих (ψ, β)-производную, посвящен обширный круг работ (см., например, [1 – 11]), в частности, в работах [7, 8, 10, 11] изучены вопросы приближения классов функций с малой гладкостью. В работах [2, 5] можно найти библиографию по вопросам, примыкающим к этой тематике.

Классы (ψ, β)-дифференцируемых функций многих переменных были введены в работе [12] (см. также [13, 14]). В этих работах изучаются вопросы приближения классов (ψ, β)-дифференцируемых периодических функций многих переменных прямоугольными линейными методами. В данной статье получены асимптотические формулы для верхних граней уклонений различных прямоугольных линейных средних рядов Фурье, взятых по классам функций многих переменных малой гладкости. В частности, найдены асимптотические равенства, которые обеспечивают решение задачи Колмогорова–Никольского (см. [2, С. 8]) на этих классах для прямоугольных обобщенных операторов Зигмунда.

Для дальнейшего изложения введем ряд обозначений и определений.

Пусть R^m – пространство m-мерных векторов $\vec{x} = (x_1, x_2, ..., x_m)$, $T^m = \prod\limits_{i=1}^{m}[-\pi; \pi]$ – m-мерный куб с ребром 2π,

$$N^m = \left\{\vec{x} \in R^m | x_i \in N,\ i = 1, 2, ..., m\right\},$$

$$N_*^m = \left\{\vec{x} \in R^m | x_i \in N_* = N \cup \{0\},\ i = 1, 2, ..., m\right\},$$

$$N_i^m = \left\{\vec{x} \in R^m | x_i \in N,\ x_j \in N_*,\ i \neq j\right\}.$$

Через E^m обозначим множество точек из R^m, координаты которых принимают одно из двух значений: 0 или 1.

Через $L(T^m)$ обозначим множество 2π-периодических по каждой переменной, суммируемых на кубе периодов T^m, функций $f(\vec{x}) = f(x_1, x_2, ..., x_m)$.

Пусть $f \in L(T^m)$. Следуя [12, С. 546], каждой паре точек $\vec{s} \in E^m$, $\vec{k} \in N_*^m$, поставим в соответствие коэффициент Фурье функции f

$$a_{\vec{k}}^{\vec{s}}(f) = \frac{1}{\pi^m} \int_{T^m} f(\vec{x}) \prod_{i=1}^{m} \cos\left(k_i x_i - \frac{s_i \pi}{2}\right) dx_i.$$

Каждому вектору $\vec{k} \in N_*^m$ поставим в соответствие гармонику функции $f(\vec{x})$

$$A_{\vec{k}}(f; \vec{x}) = \sum_{\vec{s} \in E^m} a_{\vec{k}}^{\vec{s}}(f) \prod_{i=1}^{m} \cos\left(k_i x_i - \frac{s_i \pi}{2}\right).$$

Следуя [12, С. 545], ряд Фурье функции $f(\vec{x})$ определим следующим соотношением

$$S[f] = \sum_{\vec{k} \in N_*^m} \frac{1}{2^{q(\vec{k})}} A_{\vec{k}}(f; \vec{x}), \tag{1}$$

где $q(\vec{k})$ – количество нулевых координат вектора $\vec{k}$.

Пусть $\overline{m}=\{1,2,...,m\}$ и μ – какое-либо подмножество из $\overline{m}$, обозначим через $|\mu|$ количество элементов множества μ и через $\mu(r)$ – всякое r-элементное подмножество из $\overline{m}$ ($|\mu(r)|=r$).

По аналогии с одномерным случаем, гармоникой, сопряженной с $A_{\vec{k}}(f;\vec{x})$ по переменной x_r, будем называть величину

$$A_{\vec{k}}^{\vec{e}_r}(f;\vec{x})=\sum_{\vec{s}\in E^m}a_{\vec{k}}^{\vec{s}}(f)\prod_{i\in\overline{m}\setminus\{r\}}\cos\Big(k_ix_i-\frac{s_i\pi}{2}\Big)\cos\bigg(k_rx_r-\frac{(s_r+1)\pi}{2}\bigg).$$

Будем вводить понятие (ψ,β)-производных функций многих переменных, используя схемы введения (ψ,β)-производных функций одной переменной (см. [1]) и обыкновенных частных производных функций многих переменных.

Пусть $\overline{\psi}_i=(\psi_{i1}(k),\psi_{i2}(k))$, $\overline{\Psi}_i=(\Psi_{i1}(k),\Psi_{i2}(k))$, $i\in\overline{m}$, $k=0,1,2,...$, – наборы систем чисел таких, что для всех $i\in\overline{m}$, $k\in N$, выполняются условия: $\psi_{i1}(0)=1$, $\Psi_{i1}(0)=1$, $\psi_{i2}(0)=0$, $\Psi_{i2}(0)=0$,

$$\overline{\psi}_i^2(k)=\psi_{i1}^2(k)+\psi_{i2}^2(k)\neq0,\ \overline{\Psi}_i^2(k)=\Psi_{i1}^2(k)+\Psi_{i2}^2(k)\neq0.$$

Если для фиксированного $r\in\overline{m}$ существует функция $f^{\overline{\psi}_r}(\vec{x})\in L(T^m)$ такая, что

$$S[f^{\overline{\psi}_r}]=\sum_{\vec{k}\in N_r^m}\frac{1}{2^{q(\vec{k})}\overline{\psi}_r^2(k_r)}\Big(\psi_{r1}(k_r)A_{\vec{k}}(f;\vec{x})-\psi_{r2}(k_r)A_{\vec{k}}^{\vec{e}_r}(f;\vec{x})\Big),$$

где $N_{\underline{r}}^m$ – множество точек $\vec{k}\in N_*^m$, у которых $k_r\neq0$, то будем говорить, что $f^{\overline{\psi}_r}(\vec{x})$ является частной $\overline{\psi}_r$-производной функции $f(\vec{x})$ по переменной x_r. Для функции $f^{\overline{\psi}_r}(\vec{x})$ будем также использовать естественное для частных производных обозначение $\frac{\partial^{\overline{\psi}_r}f(\vec{x})}{\partial x_r}$.

Для фиксированного набора $\mu\subset\overline{m}$, $\mu=\{r_1,r_2,...,r_{|\mu|}\}$, смешанной $\overline{\Psi}_\mu$-производной по переменным x_i, $i\in\mu$, по аналогии с определением обыкновенной смешанной частной производной, будем называть функцию $f^{\overline{\Psi}_\mu}$, которая задается соотношением

$$f^{\overline{\Psi}_\mu}(\vec{x})=\frac{\partial^{\overline{\Psi}_{r_{|\mu|}}}\partial^{\overline{\Psi}_{r_{|\mu|-1}}}...\partial^{\overline{\Psi}_{r_1}}f(\vec{x})}{\partial x_{r_{|\mu|}}\partial x_{r_{|\mu|-1}}...\partial x_{r_1}}.$$

Множество функций $f\in L(T^m)$ таких, что для любых $i\in\overline{m}$ существуют $\overline{\psi}_i$-производные $f^{\overline{\psi}_i}$ и для всех $\mu\subset\overline{m}$ существуют смешанные $\overline{\Psi}_\mu$-производные $f^{\overline{\Psi}_\mu}$, будем обозначать $L^{m\overline{\psi}}$, а подмножество непрерывных функций из $L^{m\overline{\psi}}$ будем обозначать $C^{m\overline{\psi}}$. Множество функций из $C^{m\overline{\psi}}$, удовлетворяющих условиям

$$\mathrm{esssup}|f^{\overline{\psi}_i}(\vec{x})| \leq 1, \ \mathrm{esssup}|f^{\overline{\Psi}_\mu}(\vec{x})| \leq 1, \ i \in \overline{m}, \ \mu \subset \overline{m},$$

будем обозначать $C^{m\overline{\psi}}_\infty$. В случае, когда существуют функции $\psi_i(x)$, $\Psi_i(x)$ и числа $\beta_i, \beta_i^* \in R$ такие, что $\psi_{i1}(x) = \psi_i(x)\cos\beta_i\pi/2$, $\psi_{i2}(x) = \psi_i(x)\sin\beta_i\pi/2$, такие классы будем обозначать $C^{m\psi}_{\beta,\infty}$.

Следуя [1], введем множества $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{M}'_0$, $\mathfrak{M}_C$. Будем полагать, что функции $\psi_i(v), \ \Psi_i(v)$, $i = 1, 2, ..., m; \ j = 1, 2,$ являются функциями непрерывного аргумента $v \geq 0$, совпадающими при $v \in N$ с элементами одноименных систем чисел $\psi_i(k), \ \Psi_i(k)$, которые использовались выше для определения (ψ_i, β_i)- и (Ψ_μ, β^*)-производных.

Через $\mathfrak{M}$ обозначим множество функций $\psi(x)$, непрерывных при $x \geq 0$, монотонно убывающих, выпуклых вниз при $x \geq 1$ и удовлетворяющих условию $\lim\limits_{x\to\infty} \psi(x) = 0.$

Через $\mathfrak{M}'$ обозначим подмножество функций $\psi \in \mathfrak{M}$, для которых

$$\int\limits_1^\infty \frac{\psi(x)}{x} dx < \infty.$$

Функции $\psi(x)$ поставим в соответствие функцию $\eta(x) = \eta(\psi, x)$, связанную при $x \geq 1$ с $\psi(x)$ соотношением $\psi(\eta(x)) = \frac{1}{2}\psi(x).$

Положим

$$\mu(t) = \mu(\psi, t) = \frac{t}{\eta(t) - t}.$$

Через $\mathfrak{M}'_0$ обозначим множество функций $\psi \in \mathfrak{M}'$, для которых величина $\mu(\psi, t)$ ограничена сверху. Через $\mathfrak{M}_C$ обозначим множество функций $\psi \in \mathfrak{M}$, для которых найдутся константы K_1, K_2 такие, что при всех $x \geq 1$

$$0 < K_1 \leq \mu(\psi, t) \leq K_2 < +\infty.$$

Если для $i = 1, 2, ..., m; \ j = 1, 2,$ выполнено $\psi_{ij} \in \mathfrak{M}'_0 \setminus \mathfrak{M}_C,$ $\Psi_{ij} \in \mathfrak{M}'_0 \setminus \mathfrak{M}_C$, то функции $f \in C^{m\overline{\psi}}_\infty$ по аналогии с одномерным случаем естественно называть функциями с малой гладкостью.

Следуя [3] (см. также [2], [14]), прямоугольные линейные средние рядов Фурье определим следующим образом.

Пусть $\Lambda = \{\Lambda_1, \Lambda_2, ..., \Lambda_m\}$ – фиксированный набор бесконечных треугольных числовых матриц, $\Lambda_i = \{\lambda^{(n_i)}_{k_i}\}, \ i = 1, 2, ..., m, \ \vec{n} \in N^m, \ \vec{k} \in N^m_*,$

$\lambda_0^{(n_i)} = 1$ и $\lambda_{k_i}^{(n_i)} = 0$ для $k_i \geq n_i$. Пусть далее $\lambda_{\vec{k}}^{(\vec{n})} = \prod\limits_{i=1}^{m} \lambda_{k_i}^{(n_i)}$ и $G_{\vec{n}} = \prod\limits_{i=1}^{m} [0; n_i - 1]$ – прямоугольный параллелепипед, соответствующий вектору $\vec{n} \in N^m$. Понятно, что $\lambda_{\vec{k}}^{(\vec{n})} = 0$ для любых $\vec{k} \notin G_{\vec{n}}$.

Функции $f \in L(T^m)$, имеющей ряд Фурье (1), поставим в соответствие семейство тригонометрических полиномов

$$U_{\vec{n}}(f; \vec{x}; \Lambda) = \sum_{\vec{k} \in G_{\vec{n}}} 2^{-q(\vec{k})} \lambda_{\vec{k}}^{(\vec{n})} A_{\vec{k}}(f; \vec{x}). \tag{2}$$

При $\lambda_{\vec{k}}^{(\vec{n})} \equiv 1$, $\vec{k} \in G_{\vec{n}}$, многочлены $U_{\vec{n}}(f; \vec{x}; \Lambda) = S_{\vec{n}}(f; \vec{x})$ являются прямоугольными частичными суммами ряда Фурье.

Пусть $\varphi_i(x), i = 1, 2, ..., m$ – непрерывные, монотонно возрастающие при $x \geq 0$ такие, что $\varphi_i(0) = 0$. Если величины $\lambda_{\vec{k}}^{(\vec{n})}$, $\vec{k} \in G_{\vec{n}}$, $\vec{n} \in N^m$, задаются соотношениями

$$\lambda_{k_i}^{(n_i)} = 1 - \frac{\varphi_i(k_i)}{\varphi_i(n_i)},$$

то многочлены $U_{\vec{n}}(f; \vec{x}; \Lambda) = Z_{\vec{n}}^{\varphi}(f; \vec{x})$ будем называть обобщенными прямоугольными суммами Зигмунда.

Величины $\delta_{\vec{n}}^{\varphi}(f; \vec{x}) = f(\vec{x}) - Z_{\vec{n}}^{\varphi}(f; \vec{x})$ являются уклонениями многочленов $Z_{\vec{n}}^{\varphi}(f; \vec{x})$, $\vec{n} \in N^m$, от функции $f(\vec{x})$.

Целью данной работы является получение асимптотических равенств для величин

$$\mathcal{E}(C_{\beta,\infty}^{m\psi}; Z_{\vec{n}}^{\varphi}) = \sup_{f \in C_{\beta,\infty}^{m\psi}} ||\delta_{\vec{n}}^{\varphi}(f; \vec{x})||_C$$

при $n_i \to \infty$, $i = 1, 2, ..., m$, и в случаях, когда классы $C_{\beta,\infty}^{m\psi}$ являются классами функций с малой гладкостью.

В одномерном случае на классах функций с малой гладкостью были получены асимптотические равенства, которые имеют главный член в виде суммы двух слагаемых. В частности, для верхних граней уклонений по таким классам сумм Фурье, сумм Валле Пуссена и обобщенных сумм Зигмунда получены асимптотические формулы: в работе [7]

$$\mathcal{E}\left(C_{\beta,\infty}^{\psi}; S_n\right) = \frac{4}{\pi^2}\psi(n)\ln n + \frac{2\sin\frac{\beta\pi}{2}}{\pi}\int\limits_n^{\infty}\frac{\psi(x)}{x}dx + O(1)\psi(n),\ \ n \to \infty,$$

в роботе [10],

$$\mathcal{E}\left(C^{\psi}_{\beta,\infty}; V_{n,p}\right) = \frac{4}{\pi^2}\psi(n)\ln\frac{n}{p} + \frac{2\sin\frac{\beta\pi}{2}}{\pi}\int\limits_{n}^{\infty}\frac{\psi(x)}{x}dx + O(1)\psi(n),$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{p}{n} = 0,\ n\to\infty,$$

в работе [11]

$$\mathcal{E}\left(C^{\psi}_{\beta,\infty}; Z^{\varphi}_{n}\right) = \frac{2}{\pi\varphi(n)}\int\limits_{1}^{n}\frac{\varphi(x)\psi_2(x)}{x}dx + \frac{2\sin\frac{\beta\pi}{2}}{\pi}\int\limits_{n}^{\infty}\frac{\psi(x)}{x}dx + O(1)\psi(n),\ n\to\infty.$$

Вопросы приближения классов $C^{m\psi}_{\beta,\infty}$ различными прямоугольными методами приближения изучались в работах [15-18]. В частности, на классах функций $C^{m\psi}_{\beta,\infty}$ с малой гладкостью для прямоугольных сумм Валле Пуссена в работе [18] получена асимптотическая формула

$$\mathcal{E}\left(C^{m\psi}_{\beta,\infty}; V_{\vec{n},\vec{p}}\right) =$$

$$= \frac{4}{\pi^2}\sum_{i=1}^{m}\psi_i(n_i)\ln\frac{n_i}{p_i} + \frac{2}{\pi}\sum_{i=1}^{m}\sin\frac{\beta\pi}{2}\int\limits_{n_i}^{\infty}\frac{\psi_i(x)}{x}dx + O(1)\left(\sum_{i=1}^{m}\overline{\psi}_i(n_i) + \right.$$

$$\left. + \sum_{r=2}^{m}\sum_{\mu(r)\subset\overline{m}}\prod_{j\in\mu(r)}\left[\Psi_j(n_j)\ln\frac{n_j}{p_j} + \sin\frac{\beta_i^*\pi}{2}\int\limits_{n_j}^{\infty}\frac{\Psi_j(x)}{x}dx\right]\right).$$

Основная часть

В данной работе получены аналогичные асимптотические формулы для классов функций многих переменных с малой гладкостью $C^{m\psi}_{\infty,\beta}$ и прямоугольных обобщенных сумм Зигмунда.

Теорема 1. *Пусть* $\Psi_i \in \mathfrak{M}'_0$, $\psi_i \in \mathfrak{M}'_0$, $\beta_i, \beta_i^* \in R$ *функции* $\psi_i(x)\varphi_i(x)$, $\Psi_i(x)\varphi_i(x)$, $i = 1, 2, ..., m$; *монотонно возрастают и сохраняют характер выпуклости при* $x \geq 1$.

Тогда при $n_i \to \infty$, $i = 1, 2, ..., m$, *справедлива асимптотическая формула*

$$\mathcal{E}\left(C^{m\psi}_{\beta,\infty}; Z^{\varphi}_{\vec{n}}\right) =$$

$$= \frac{2}{\pi}\sum_{i=1}^{m}\frac{\sin\frac{\beta_i\pi}{2}}{\varphi_i(n_i)}\int\limits_{1}^{n_i}\frac{\psi_i(x)\varphi_i(x)}{x}dx + \frac{2}{\pi}\sum_{i=1}^{m}\sin\frac{\beta_i\pi}{2}\int\limits_{n_i}^{\infty}\frac{\psi_i(x)}{x}dx + O(1)\left(\sum_{i=1}^{m}\psi_i(n_i) + \right.$$

$$+\sum_{r=2}^{m}\sum_{\mu(r)\subset\overline{m}}\prod_{j\in\mu(r)}\sin\frac{\beta_j^*\pi}{2}\left[\frac{1}{\varphi_j(n_j)}\int\limits_1^{n_j}\frac{\Psi_j(x)\varphi_j(x)}{x}dx+\int\limits_{n_j}^{\infty}\frac{\Psi_j(x)}{x}dx+\overline{\Psi}_j(n_j)\right]\Bigg). \qquad (3)$$

Доказательство. Через $\{\lambda_{n_i}(v)\}$, $\vec{n}=(n_1,n_2,...,n_m)\in N^m$, обозначим семейство заданных и непрерывных на [0;1] функций таких, что $\lambda_{k_i}^{(n_i)}=\lambda_{n_i}(\frac{k_i}{n_i})$, $\vec{k}\in G_{\vec{n}}$.

Введем функции

$$\tau_i(v)=\begin{cases}(1-\lambda_{n_i}(v))\psi_i(n_iv), & \frac{1}{n_i}\le v\le 1;\\ \psi_i(n_iv), & 1\le v, i=1,2,...,m;\end{cases} \qquad (4)$$

$$T_i(v)=\begin{cases}(1-\lambda_{n_i}(v))\Psi_i(n_iv), & \frac{1}{n_i}\le v\le 1;\\ \Psi_i(n_iv), & 1\le v, i=1,2,...,m;\end{cases} \qquad (5)$$

которые на $[0;\frac{1}{n_i}]$ заданы так, что $\tau_i(v)$, $T_i(v)$ непрерывны на положительной полуоси и выполнено условие $\tau_i(0)=0$, $T_i(0)=0$, $i=1,2,...,m$.

В работе [12] показано, что для функций τ_i, T_i, $i=1,2,...,m$, заданных соотношениями (4), (5), и имещих суммируемые на R преобразования Фурье:

$$A(\tau_i)=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left|\int\limits_0^{\infty}\tau_i(x)\cos(xt+\frac{\beta\pi}{2})dx\right|dt<\infty,$$

$$A(T_i)=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left|\int\limits_0^{\infty}T_i(x)\cos(xt+\frac{\beta\pi}{2})dx\right|dt<\infty,$$

при $n_i\to\infty$, $i=1,2,...,m$, справедливо равенство:

$$\mathcal{E}\Big(C_{\beta,\infty}^{m\psi};U_{\vec{n}}\Big)=\sum_{i=1}^{m}\frac{\sin\frac{\beta_i\pi}{2}}{\pi}\int\limits_{|t|\le 1}\left|\int\limits_1^{\infty}\psi_i(n_ix)\sin xtdx\right|dt+$$

$$+\sum_{i=1}^{m}\frac{1}{\pi}\int\limits_{|t|\ge 1}\left|\int\limits_0^{\infty}\tau_i(x)\cos(xt+\frac{\beta\pi}{2})dx\right|dt+$$

$$+O(1)\Big(\sum_{i=1}^{m}\int\limits_{|t|\le 1}\left|\int\limits_0^{\infty}\tau_i(x)\cos xtdx\right|dt+$$

$$+\sum_{i=1}^{m}\sin\frac{\beta_i\pi}{2}\int\limits_{|t|\leq 1}\left|\int\limits_{0}^{1}\tau_i(x)\sin xtdx\right|dt+\sum_{i=1}^{m}a(\tau_i)+\sum_{r=2}^{m}\sum_{\mu(r)\subset\overline{m}}\prod_{j\in\mu(r)}A(T_j)\Big),\quad (6)$$

где

$$a(\tau_i)=\frac{1}{\pi}\int\limits_{|t|\geq\frac{\pi n_i}{2}}^{\infty}\left|\int\limits_{0}^{\infty}\tau_i(x)\cos(xt+\frac{\beta_i\pi}{2})dx\right|dt.$$

Таким образом, изучение величин $\mathcal{E}\left(C^{m\psi}_{\beta,\infty};Z^{\varphi}_{\vec{n}}\right)$ сводится к вычислению соответствующих одномерных несобственных интегралов.

Для изучения величин $\mathcal{E}\left(C^{m\psi}_{\beta,\infty};Z^{(\varphi)}_{\vec{n}}\right)$ при помощи соотношения (6) функции $\tau_i(x)$, $T_i(x)$, $i=1,2,...,m$, $j=1,2$, которые определены соотношениями (4) и (5), представим в следующем виде

$$\tau_i(x)\begin{cases}\psi_i(1)\varphi_i(1)nx, & 0\leq x\leq\frac{1}{n_i},\\ \psi_i(n_ix)\varphi(n_ix), & \frac{1}{n_i}\leq x\leq 1,\\ \psi_i(n_ix), & 1\leq x,\ i=1,2,...,m,\end{cases}$$

$$T_i(x)=\begin{cases}\Psi_{ij}(1)\varphi_i(1)nx, & 0\leq x\leq\frac{1}{n_i},\\ \Psi_{ij}(n_ix)\varphi(n_ix), & \frac{1}{n_i}\leq x\leq 1,\\ \Psi_{ij}(n_ix), & 1\leq x,\ i=1,2,...,m.\end{cases}$$

Применяя рассуждения работы [11], получаем асимптотические формулы

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{|t|\leq 1}\left|\int\limits_{1}^{\infty}\psi_i(n_ix)\sin xtdx\right|dt=\frac{2}{\pi}\int\limits_{n_i}^{\infty}\frac{\psi_i(x)}{x}dx+O(1)\psi_i(n_i),$$

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{|t|\geq 1}\left|\int\limits_{0}^{\infty}\tau_i(x)\cos(xt+\frac{\beta_i\pi}{2})dx\right|dt=$$

$$=\frac{\sin\frac{\beta_i\pi}{2}}{\varphi_i(n_i)}\int\limits_{1}^{n_i}\frac{\psi_i(x)\varphi_i(x)}{x}dx+O(1)\psi_i(n_i),$$

$$a(\tau_i)=O(1)\psi_i(n_i),$$

$$A(T_i)=O(1)\left(\sin\frac{\beta_i^*\pi}{2}\int\limits_{n_i}^{\infty}\frac{\Psi_i(x)}{x}dx+\frac{\sin\frac{\beta_i^*\pi}{2}}{\varphi_i(n_i)}\int\limits_{1}^{n_i}\frac{\Psi_{i2}(x)\varphi_i(x)}{x}dx+\overline{\Psi}_i(n_i)\right),$$

$$\int\limits_{|t|<1} \left| \int\limits_0^\infty \tau_i(v) \cos vtdv \right| dt = O(1)\psi_i(n_i),$$

$$\int\limits_{|t|<1} \left| \int\limits_0^1 \tau_i(v) \sin vtdv \right| dt = O(1)\overline{\psi}_i(n_i).$$

Подставляя эти соотношения в формулу (6), получаем асимптотическую формулу (3).

Теорема доказана.

Литература

[1] *Степанец А.И.* Классы периодических функций и приближение их элементов суммами Фурье. — Киев, 1983. — 57 с. — (Препринт / АН УССР Ин-т математики; 83.10).

[2] *Степанец А.И.* Классификация и приближение периодических функций. – К.: Наук. думка, 1987. – 268 с.

[3] *Степанец А.И.* Равномерные приближения тригонометрическими полиномами. – К.: Наук. думка, 1981. – 340 с.

[4] *Степанец А.И.* Классификация периодических функций и скорость сходимости их рядов Фурье // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1986. – 50, № 1. – С. 101 – 136.

[5] *Степанец А.И.* Методы теории приближений.: В 2 ч. – К.: Институт математики НАН Украины, 2002.

[6] *Рукасов В.И., Новиков О.А., Чайченко С.О.* Приближение классов $C_\infty^{\overline{\psi}}$ суммами Валле–Пуссена // Теорія наближення функцій та її застосування: Зб. наук. пр. – К.: Ін-т математики НАН України, 2000. – С. 396 – 406.

[7] *Степанец А.И.* Приближение $\overline{\psi}$-интегралов периодических функций суммами Фурье (небольшая гладкость) I // Укр. мат. журн. – 1998. – 50, № 2. – С. 274 – 291.

[8] *Степанец А.И.* Приближение $\overline{\psi}$-интегралов периодических функций суммами Фурье (небольшая гладкость) II // Укр. мат. журн. — 1998. — 50, № 3. — С. 388 – 400.

[9] *Степанец А.И.*Скорость сходимости группы отклонений на множествах $\overline{\psi}$-интегралов // Укр. мат. журн. — 1999. — 51, № 12. — С. 1673 – 1693.

[10] *Рукасов В.И., Новиков О.А., Чайченко С.О.* Приближение классов периодических функций с малой гладкостью суммами Валле–Пуссена. — В кн.: Теорія наближення функцій та суміжні питання. — Київ: Праці

Ін-та математики НАН України. Математика та її застосування. — 2002. — С. 119 – 133.

[11] *Рукасов В.И., Новиков О.А.* Приближение функций с небольшой гладкостью из классов $C_{\infty}^{\overline{\psi}}$ линейными методами // Теорія наближень та гармонічний аналіз: Праці Українського математичного конгресу — 2001. — Київ: Ін-т математики НАН України, 2002. — С. 184 – 193.

[12] *Степанец А.И., Пачулиа Н.Л.* Кратные суммы Фурье на множествах (ψ, β)-дифференцируемых функций // Укр. мат. журн. – 1991. – **43**, № 4. – С. 545 – 555.

[13] *Ласурия Р.А.* Кратные суммы Фурье на множествах $\overline{\psi}$-дифференцируемых функций // Укр. мат. журн. – 2003. – 55, № 7. – С. 911 – 918.

[14] *Задерей П.В.* Интегральные представления уклонений линейных средних рядов Фурье на классах дифференцируемых периодических функций двух переменных // Некоторые вопросы теории аппроксимации функций: Сб. научн. тр. / Отв. ред. В.К. Дзядык. – К.: Ин-т математики АН УССР, 1985. – С. 16 – 28.

[15] *Степанец А.И.* Приближение некоторых классов дифференцируемых периодических функций двух переменных суммами Фурье // Укр. мат. журн. – 1973. – 25, № 5. – С. 599 – 609.

[16] *Рукасов В.И., Новиков О.А., Бодрая В.И.* Приближение классов $\overline{\psi}$-интегралов периодических функций многих переменных прямоугольными линейными средними их рядов Фурье // Укр. мат. журн. — 2005. — 57, № 4. — С. 564 – 570.

[17] *Рукасов В.И., Новиков О.А., Бодрая В.И.* Приближение классов $\overline{\psi}$-интегралов периодических функций двух переменных линейными методами // Проблеми теорії наближення функцій та суміжні питання. / Відп. ред. О.І. Степанець // Зб. праць Ін-ту математики НАН України. — Т. 1, № 1. — Київ: Ін-т математики НАН України, 2004. — С. 250 – 269.

[18] *Бодрая В.И.* Приближение классов периодических функций многих переменных с малой гладкостью прямоугольными линейными средними их рядов Фурье // Проблеми теорії наближення функцій та суміжні питання. / Відп. ред. О.І. Степанець // Зб. праць Ін-ту математики НАН України. — Т. 2, № 2. — Київ: Ін-т математики НАН України, 2005. — С. 7 – 26.