УДК 517.5

Чайченко С.О., Юрченко Є.В.

[1] *проректор з науково-педагогічної роботи СДПУ, завідувач кафедри математичного аналізу*

[2] *студент 5 курсу фізико-математичного факультету, СДПУ*

e-mail: stolch@mail.ru, cw_orange@mail.ru

НАБЛИЖЕННЯ СУМАМИ ВАЛЛЕ ПУССЕНА НА КЛАСАХ ЗГОРТОК З ПОЛІГАРМОНІЧНИМИ ЯДРАМИ ПУАССОНА ТА ЯДРАМИ НЕЙМАНА

Знайдено асимптотичні рівності для точних верхніх меж відхилень сум Валле Пуссена на класах аналітичних періодичних функцій, що породжуються полігармонічними ядрами Пуассона та ядрами Неймана.

Ключові слова: $(\psi;\beta)$ *-похідна, класи згорток, суми Валле Пуссена, полігармонічні ядра Пуассона, ядра Неймана.*

1. Основні означення і постановка задачі

Нехай L — простір 2π-періодичних сумовних на періоді функцій f з нормою

$$\|f\|_L = \|f\|_1 = \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)| \, dt,$$

L_∞ — простір 2π-періодичних вимірних і суттєво обмежених функцій f, у якому норма задана рівністю

$$\|f\|_\infty = \operatorname*{ess\,sup}_t |f(t)|,$$

і C — простір неперервних 2π-періодичних функцій f із нормою

$$\|f\|_C = \max_t |f(t)|.$$

Через $C^\psi_\beta \mathfrak{N}$ (див. [1, с. 131]) позначають класи неперервних функцій $f \in C$, які можна подати у вигляді згортки

$$f(x) = A_0 + \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(x+t) \Psi_\beta(t) \, dt, \tag{1}$$

функцій $\varphi \in \mathfrak{N} \subset L$ з ядрами

$$\Psi_\beta(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \psi(k) \cos\left(kt - \frac{\beta\pi}{2}\right),$$

де $\psi(k)$ — деяка послідовність дійсних чисел, $\beta \in \mathbb{R}$. При цьому функцію $\varphi(\cdot)$, наслідуючи О.І. Степанця [1], називають $(\psi;\beta)$-похідною функції $f(\cdot)$ і використовують позначення $f_\beta^\psi(\cdot)$.

Якщо

$$S_\infty = \{\varphi \in L_\infty : \quad \|\varphi\|_\infty \le 1\},$$

$$H_\omega = \{\varphi \in C : \quad \omega(\varphi;t) \le \omega(t)\},$$

де $\omega(\varphi;t)$ — модуль неперервності функції $\varphi \in C$, $\omega(t)$ — довільний фіксований модуль неперервності, то розглядають класи $C_\beta^\psi S_\infty = C_{\beta,\infty}^\psi$ і $C_\beta^\psi H_\omega$.

Множину послідовностей $\psi(k)$, $k \in \mathbb{N}$, які задовольняють умову

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\psi(k+1)}{\psi(k)} = q, \qquad q \in [0;1], \tag{2}$$

позначають через D_q [2]. Прикладами ядер, послідовності коефіцієнтів яких належать множині D_q, є відомі ядра Пуассона

$$P_\beta^q(t) = \sum_{k=1}^{\infty} q^k \cos\left(kt - \frac{\beta\pi}{2}\right), \qquad q \in (0;1),\ \beta \in \mathbb{R}. \tag{3}$$

У цьому разі для класів $C_{\beta,\infty}^\psi$ і $C_\beta^\psi H_\omega$ використовують позначення $C_{\beta,\infty}^q$ і $C_\beta^q H_\omega$ відповідно.

Нехай

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial q^2} + \frac{1}{q}\frac{\partial}{\partial q} + \frac{1}{q^2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}$$

— оператор Лапласа в полярних координатах і $\Delta^l := \Delta(\Delta^{l-1})$. Як зазначено в монографії [3, с. 256 – 257], розв'язок диференціального рівняння

$$\Delta^l U(q;x) = 0,$$

із заданими граничними умовами

$$U(q;x)\bigg|_{q=1} = f(x), \quad \frac{\partial^k}{\partial q^k} U(q;x)\bigg|_{q=1} = 0,\ k = 1, 2, \ldots, l-1,$$

де $f(x)$ — сумовна 2π-періодична функція, для довільного натурального числа l може бути поданий у вигляді

$$U(q;x) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x+t)P_l^q(t)\,dt.$$

Тут

$$P_l^q(t) = \sum_{k=0}^{\infty}\psi_{q,l}(k)\cos kt, \quad \psi_{q,l}(k) = q^k\sum_{i=0}^{l-1}(1-q^2)^i Q(i;k),$$
$$Q(i;k) = \frac{k(k+2)(k+4)\dots(k+2i-2)}{i!2^i},$$
$$k = 0,1,2,\dots,\ Q(0;k) = 1.$$

Зважаючи на це, величини

$$P_{l,\beta}^q(t) = \sum_{k=0}^{\infty}\psi_{q,l}(k)\cos\left(kt - \frac{\beta\pi}{2}\right), \quad \beta\in\mathbb{R}, \tag{4}$$

називають полігармонічними ядрами Пуассона порядку l. Як нескладно переконатися, послідовність коефіцієнтів ядер $P_{l,\beta}^q(t)$

$$\psi_{q,l}(k) = q^k\sum_{i=0}^{l-1}\frac{(1-q^2)^i}{i!2^i}\prod_{j=0}^{i-1}(k+2j), \quad q\in(0;1), \tag{5}$$

також належить до множини D_q. При $l=1$ полігармонічні ядра Пуассона $P_{l,\beta}^q(t)$ співпадають з ядрами Пуассона $P_\beta^q(t)$.

Ще одним прикладом ядер, коефіцієнтів яких задовольняють умову (2), є ядра Неймана

$$N_{q,\beta}(t) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{q^k}{k}\cos(kt - \frac{\beta\pi}{2}), \quad q\in(0;1),\ \beta\in\mathbb{R}. \tag{6}$$

Нехай тепер $f\in L$,

$$S_n(f;x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n-1}(a_k\cos kx + b_k\sin kx)$$

— частинна сума ряду Фур'є функції f порядка n,

$$V_{n,p}(f;x) = \frac{1}{p}\sum_{k=n-p}^{n-1}S_k(f;x) \tag{7}$$

— суми Валле Пуссена функції f і, як звичайно,

$$\rho_{n,p}(f;x) = f(x) - V_{n,p}(f;x).$$

Метою цього повідомлення є отримання асимптотичних при $n \to \infty$ рівностей для величини

$$\mathcal{E}(C^{\psi}_{\beta}\mathfrak{N}; V_{n,p}) = \sup_{f \in C^{\psi}_{\beta}\mathfrak{N}} \|f(\cdot) - V_{n,p}(f;\cdot)\|_C \tag{8}$$

за умови, що класи $C^{\psi}\mathfrak{N}$ визначаються згортками з ядрами вигляду (4) і (6), а у якості $\mathfrak{N}$ виступає одна з множин S_∞ або H_ω.

2. Історична довідка і допоміжні твердження

У 1946 році С.М. Нікольський [4] розглянув величину

$$\mathcal{E}_n(C^q_{\beta,\infty}; S_n) = \sup_{f \in C^q_{\beta,\infty}} \|f(\cdot) - S_n(f;\cdot)\|_C,$$

і показав, що при $n \to \infty$ виконується рівність

$$\mathcal{E}_n(C^q_{\beta,\infty}; S_n) = \frac{8q^n}{\pi^2} K(q) + O(1) q^n n^{-1}, \tag{9}$$

у якій

$$K(q) = \int\limits_0^{\pi/2} \frac{dt}{\sqrt{1 - q^2 \sin^2 t}}, \quad q \in [0;1),$$

— повний еліптичний інтеграл першого роду. У 1980 році С.Б. Стєчкіним [5] цей результат було передоведено іншим методом, який дозволив уточнити залишковий член рівності (9).

Аналогічна задача для класів $C^q_{\beta}H_\omega$ була розв'язана лише в 2000 році О.І. Степанцем у роботі [6]. Ним було показано, що величина

$$\mathcal{E}_n(C^q_{\beta}H_\omega; S_n) = \sup_{f \in C^q_{\beta}H_\omega} |f(x) - S_n(f;x)|$$

не залежить від точки x і при $n \to \infty$ виконується рівність

$$\mathcal{E}_n(C^q_{\beta}H_\omega; S_n) = \frac{8q^n}{\pi^2} K(q) \theta_\omega \int\limits_0^{\pi/2} \omega\left(\frac{2t}{n}\right) \sin t \, dt +$$

$$+ \frac{O(1) q^n}{(1-q)^2 n} \omega(1/n), \tag{10}$$

де $\theta_\omega \in [1/2; 1]$, причому $\theta_\omega = 1$, якщо $\omega(t)$ — опуклий модуль неперервності, а $O(1)$ — величина, рівномірно обмежена щодо n, q і β.

З рівностей (9) і (10) випливає, що суми Фур'є на класах $C^q_{\beta,\infty}$ і $C^q_\beta H_\omega$ дають наближення, яке співпадає за порядком з величиною найкращого наближення тригонометричними поліномами степеня не вищого за n. Зазначимо також, що рівності (9) і (10) є асимптотично точними при будь-яких значеннях параметрів, які в них входять. Незважаючи на це, природнім був інтерес до того, як поводять себе інші наближуючі агрегати, зокрема суми Валле Пуссена, на згаданих класах. Дослідженню цього питання, зокрема, присвячено роботи [7, 8, 9].

В подальшому О.І. Степанцем було висунуто ідею про те, що залишки

$$\sum_{k=n}^{\infty} \psi(k) \cos\left(kt - \frac{\beta\pi}{2}\right)$$

ядер $\Psi_\beta(t)$, які породжують класи C^ψ_β при $\psi \in D_q$, $0 < q < 1$, за умови $n \to \infty$ поводять себе приблизно так само, як і відповідні залишки ядер $P^q_\beta(t)$. І використовуючи відомі результати для точних верхніх меж $\mathcal{E}(C^q_\beta \mathfrak{N}; S_n)$ відхилень сум Фур'є $S_n(f; x)$ на класах інтегралів Пуассона $C^q_\beta \mathfrak{N}$, були знайдені асимптотичні рівності для величин (8) за умови $p = 1$ (наближення сумами Фур'є) [2]. У роботі [10], використовуючи відповідні рівності з робіт [7] і [8], ці результати було розповсюджено на випадок наближення сумами Валле Пуссена за умови, що одночасно $p \to \infty$ і $n - p \to \infty$. А саме, було показано справедливість наступного твердження.

Теорема 1. *Нехай класи $C^\psi_{\beta,\infty}$ і $C^\psi_\beta H_\omega$ породжені ядром*

$$\Psi_\beta(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \psi(k) \cos(kt - \frac{\beta\pi}{2}), \quad \psi > 0,\ \psi \in D_q,\ 0 < q < 1.$$

Тоді, якщо n і p — довільні натуральні числа, $p < n$, то при $n \to \infty$ виконуються рівності

$$\mathcal{E}(C^\psi_{\beta,\infty}; V_{n,p}) = \psi(n-p+1) \left[\frac{4}{\pi} \frac{1}{(1-q^2)p} + \right.$$

$$\left. +O(1) \left(\frac{q^{p-1}}{(1-q^2)p} + \frac{1}{(1-q)^3 p(n-p)} + \frac{\varepsilon_{n-p}}{(1-q)^4} \right) \right], \tag{11}$$

$$\mathcal{E}(C^\psi_\beta H_\omega; V_{n,p}) = \psi(n-p+1) \left[\frac{2\theta_\omega}{\pi} \frac{1}{(1-q^2)p} \int_0^{\pi/2} \omega(\frac{2t}{n-p}) \sin t \; dt + \right.$$

$$+O(1)\omega(\frac{1}{n-p})\left(\frac{q^{p-1}}{(1-q^2)p}+\frac{1}{(1-q)^3p(n-p)}+\frac{\varepsilon_{n-p}}{(1-q)^4}\right)\Bigg], \qquad (12)$$

де

$$\varepsilon_{n-p}=\sup_{k\geq n-p}\left|\frac{\psi(k+1)}{\psi(k)}-q\right|,$$

а $O(1)$ *— величина, рівномірно обмежена щодо* n, p, q, $\psi(k)$ *і* β.

3. Наближення на класах згорток з полігармонічними ядрами Пуассона і ядрами Неймана

Як нескладно переконатися, коефіцієнти ядер $P^q_{l,\beta}(t)$

$$\psi(k)=\psi_{q,l}(k)=q^k\sum_{i=0}^{l-1}\frac{(1-q^2)^i}{i!2^i}\prod_{j=0}^{i-1}(k+2j),$$

задовольняють умови теореми 1. Дійсно, виконуючи перетворення, при $l=2,3,\ldots,$ знаходимо

$$\varepsilon_n=\sup_{k\geq n}\left|\frac{\psi(k+1)}{\psi(k)}-q\right|=\sup_{k\geq n}\left|\frac{\psi_{q,l}(k+1)}{\psi_{q,l}(k)}-q\right|=$$

$$=q\sup_{k\geq n}\left|\frac{\sum\limits_{i=0}^{l-1}\frac{(1-q^2)^i}{i!2^i}(k+1)(k+3)(k+5)\ldots(k+2i-1)}{\sum\limits_{i=0}^{l-1}\frac{(1-q^2)^i}{i!2^i}k(k+2)(k+4)\ldots(k+2i-2)}-1\right|=$$

$$=q\frac{\sum\limits_{i=0}^{l-1}\frac{(1-q^2)^i}{i!2^i}\left(\prod\limits_{j=0}^{i-1}(k+1+2j)-\prod\limits_{j=0}^{i-1}(k+2j)\right)}{\sum\limits_{i=0}^{l-1}\frac{(1-q^2)^i}{i!2^i}\prod\limits_{j=0}^{i-1}(k+2j)}<$$

$$<q\sup_{k\geq n}\left(\prod_{j=0}^{l-2}\frac{k+1+2j}{k+2j}-1\right)\leq\frac{(2l-3)q}{n},\quad n\in\mathbb{N}. \qquad (13)$$

При $l=1$ маємо

$$\varepsilon_k\equiv 0. \qquad (14)$$

Отже, із теореми 1 та співвідношення (14) одержуємо таке твердження.

Теорема 2. *Нехай класи* $C^{\psi}_{\beta,\infty}$ *і* $C^{\psi}_{\beta}H_{\omega}$ *породжуються послідовностями* $\psi(k)=\psi_{q,l}(k)$ *вигляду (6).*

Тоді, якщо n і p — довільні натуральні числа, $p < n$, то при $n \to \infty$ виконуються рівності

$$\mathcal{E}(C^{\psi}_{\beta,\infty}; V_{n,p}) = q^{n-p+1} \sum_{i=0}^{l-1} \frac{(1-q^2)^i}{i!2^i} \prod_{j=0}^{i-1}(n-p+1+2j) \left[\frac{4}{\pi}\frac{1}{(1-q^2)p}+\right.$$

$$\left.+O(1)\left(\frac{q^{p-1}}{(1-q)p} + \frac{1}{(1-q)^3 p(n-p)} + \frac{lq}{(n-p)(1-q)^4}\right)\right],$$

$$\mathcal{E}(C^{\psi}_{\beta} H_\omega; V_{n,p}) = q^{n-p+1} \sum_{i=0}^{l-1} \frac{(1-q^2)^i}{i!2^i} \prod_{j=0}^{i-1}(n-p+1+2j) \times$$

$$\times \left[\frac{2\theta_\omega}{\pi}\frac{1}{(1-q^2)p} \int\limits_0^{\pi/2} \omega(\frac{2t}{n-p}) \sin t\ dt + \right.$$

$$\left.+O(1)\omega(\frac{1}{n-p})\left(\frac{q^{p-1}}{(1-q)p} + \frac{1}{(1-q)^3 p(n-p)} + \frac{lq}{(n-p)(1-q)^4}\right)\right],$$

де $O(1)$ — величина, рівномірно обмежена щодо n, p, q, l і β.

Умови теореми 1 задовольняють, також, послідовності коефіцієнтів ядер Неймана (6). Дійсно, як нескладно переконатися

$$\varepsilon_n = \sup_{k\ge n}\left|\frac{\psi(k+1)}{\psi(k)} - q\right| = \sup_{k\ge n}\left|\frac{kq}{k+1} - q\right| = q\sup_{k\ge n}\left|\frac{1}{k+1}\right| = \frac{q}{n+1}. \qquad (15)$$

Отже, із теореми 1 та співвідношення (15) одержуємо таке твердження.

Теорема 3. *Нехай класи $C^{\psi}_{\beta,\infty}$ і $C^{\psi}_{\beta} H_\omega$ породжуються ядрами $N_{q,\beta}(t)$ вигляду (6).*

Тоді, якщо n і p — довільні натуральні числа, $p < n$, то при $n \to \infty$ виконуються рівності

$$\mathcal{E}(C^{\psi}_{\beta,\infty}; V_{n,p}) = \frac{q^{n-p+1}}{n-p+1}\left[\frac{4}{\pi}\frac{1}{(1-q^2)p}+\right.$$

$$\left.+O(1)\left(\frac{q^{p-1}}{(1-q^2)p} + \frac{1}{(1-q)^3 p(n-p)} + \frac{q}{(n-p)(1-q)^4}\right)\right],$$

$$\mathcal{E}(C^{\psi}_{\beta} H_\omega; V_{n,p}) = \frac{q^{n-p+1}}{n-p+1}\left[\frac{2\theta_\omega}{\pi}\frac{1}{(1-q^2)p} \int\limits_0^{\pi/2} \omega(\frac{2t}{n-p}) \sin t\ dt + \right.$$

$$+O(1)\omega(\frac{1}{n-p})\left(\frac{q^{p-1}}{(1-q^2)p}+\frac{1}{(1-q)^3p(n-p)}+\frac{q}{(n-p)(1-q)^4}\right)\Bigg],$$

де $O(1)$ *— величина, рівномірно обмежена щодо* n, p, q, $\psi(k)$ *і* β.

Зазначимо, що у випадку, коли одночасно

$$\lim_{n\to\infty} p(n)=\infty \ \text{ і } \ \lim_{n\to\infty}[n-p(n)]=\infty, \quad \text{при чому } \lim_{n\to\infty}\frac{p(n)}{n-p(n)}=0,$$

рівності з теорем 2 і 3 дають розв'язок задачі Колмогорова-Нікольського для сум Валле Пуссена на класах аналітичних функцій, що породжуються полігармонічними ядрами Пуассон та ядрами Неймана, відповідно.

Література

[1] *Степанец А.И.* Методы теории приближений. — Киев: Ин-т математики НАН Украины, 2002. – Т.I. — 427 с.

[2] *Степанец А.И., Сердюк А.С.* Приближения суммами Фурье и наилучшие приближения на классах аналитических функций // Укр. мат. журн. — 2000. — 52, № 3. — С. 375 – 395.

[3] *Тиман М.Ф.* Аппроксимация и свойства периодических функций. — Киев: Наукова думка, 2009. — 376 с.

[4] *Никольский С.М.* Приближение функций тригонометрическими полиномами в среднем// Изв. АН СССР, сер. матем. – 1946. – 10. – С. 207–256.

[5] *Стечкин С.Б.* Оценка остатка ряда Фурье для дифференцируемых функций // Тр. Мат. ин-та им. В.А. Стеклова АН СССР. — 1980. — 145. — С. 126 – 151.

[6] *Степанец А.И.* Приближение аналитических непрерывных функций // Мат. сборник. — 2001. — 192, № 1. — С. 113 – 138.

[7] *Рукасов В.И., Новиков О.А.* Приближение аналитических функций суммами Валле-Пуссена // Ряди Фур'є: теорія і застосування. — Київ, 1998. — С. 228 – 241. (Праці Ін-ту математики НАН України; Т. 20).

[8] *Рукасов В.І., Чайченко С.О.* Наближення аналітичних періодичних функцій сумами Валле-Пуссена // Укр. мат. журн. — 2002. — 54, № 12. — С. 1653 – 1668.

[9] *Сердюк А.С.* Наближення інтегралів Пуассона сумами Валле Пуссена // Укр. мат. журн. — 2004. — 56, № 1. — С. 97 – 107.

[10] *Рукасов В.И.* Приближение суммами Валле-Пуссена классов аналитических функций // Укр. мат. журн. — 2003. — 55, № 6. — С. 806 – 816.